

# Тема. Неопределенный интеграл

# Элементы интегрального исчисления

- 1. Первообразная и неопределенный интеграл**
- 2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов**
- 3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен**
- 4. Интегрирование дробно-рациональных функций**
- 5. Интегрирование тригонометрических функций**
- 6. Интегрирование некоторых иррациональностей**

# Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

# Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется первообразной функции  $f(x)$ , определенной на некотором промежутке, если  $F'(x) = f(x)$  для каждого  $x$  из этого промежутка.

Например, функция  $\cos x$  является первообразной функции  $-\sin x$ , так как  $(\cos x)' = -\sin x$ .

# Первообразная и неопределенный интеграл

Очевидно, если  $F(x)$ - первообразная функции  $f(x)$ , то  $F(x)+C$ , где  $C$  - некоторая постоянная, также является первообразной функции  $f(x)$ .

Если  $F(x)$  есть какая-либо первообразная функции  $f(x)$ , то всякая функция вида  $\Phi(x) = F(x)+C$  также является первообразной функции  $f(x)$  и всякая первообразная представима в таком виде.

# Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение.** Совокупность всех первообразных функции  $f(x)$ , определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  на этом промежутке и обозначается  $\int f(x)dx$ .

# Первообразная и неопределенный интеграл

Если  $F(x)$ - некоторая первообразная функции  $f(x)$ , то пишут  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , хотя правильнее бы писать  $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$ .

Мы по устоявшейся традиции будем писать  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

Тем самым один и тот же символ  $\int f(x)dx$  будет обозначать как всю совокупность первообразных функции  $f(x)$ , так и любой элемент этого множества.

# Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал-подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$

# Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

$$3. \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

так как  $\varphi(x)$  является первообразной для  $\varphi'(x)$ .

# Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют первообразные, то функция  $f_1(x) + f_2(x)$

также имеет первообразную, причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx ;$$

5.  $\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx ;$

6.  $\int f'(x) dx = f(x) + C ;$

7.  $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C .$

# Таблица неопределенных интегралов

1.  $\int dx = x + C .$

2.  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5.  $\int e^x dx = e^x + C .$

6.  $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7.  $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

# Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

# Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1. dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2. dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3. xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4. x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

# Примеры

**Пример .** Вычислить  $\int \cos 5x dx$  .

**Решение.** В таблице интегралов найдем  
 $\int \cos x dx = \sin x + C$  .

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что  $d(ax) = a dx$  .

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$

# Примеры

**Пример.** Вычислить  $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$ .

**Решение.** Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

# Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$$

Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

# Пример

Вычислим

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6} (2 + 3x)^6 + C.$$

# *Методы интегрирования*

# Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле  $\int u dv = uv - \int v du$ .

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а)  $\int x^n \sin x dx$ , где  $n = 1, 2, \dots, k$ ;

б)  $\int x^n e^x dx$ , где  $n = 1, 2, \dots, k$ ;

в)  $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ ;

г)  $\int x^n \ln x dx$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ .

При вычислении интегралов а) и б) вводят

обозначения:  $x^n = u$ , тогда  $du = nx^{n-1} dx$ , а, например

$\sin x dx = dv$ , тогда  $v = -\cos x$ .

При вычислении интегралов в), г) обозначают за  $u$  функцию

$\operatorname{arctg} x$ ,  $\ln x$ , а за  $dv$  берут  $x^n dx$ .

# Примеры

**Пример.** Вычислить  $\int x \cos x dx$  .

**Решение.**

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

# Примеры

**Пример.** Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$

# Метод замены переменной

Пусть требуется найти  $\int f(x)dx$ , причем непосредственно подобрать первообразную для  $f(x)$  мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'_t dt$ , где  $x = \varphi(t)$ , а  $t$  - новая переменная

# Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл  $\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$ ,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

## Пример

Вычислить  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ .

**Решение.** Преобразуем  $x^2 + 4x + 5$ ,

выделяя полный квадрат по формуле  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ .

Тогда получаем :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + 5 = \\ &= \left( x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 \right) + 1 = (x + 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left. \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$

# Пример

Найти

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2} 2tdt = \\ &= 2 \int \frac{tdt}{1+t^2} + 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2 \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2} dt = \\ &= \ln(t^2+1) + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \ln(t^2+1) + 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$