

Тема. Неопределенный интеграл

Элементы интегрального исчисления

- 1. Первообразная и неопределенный интеграл**
- 2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов**
- 3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен**
- 4. Интегрирование дробно-рациональных функций**
- 5. Интегрирование тригонометрических функций**
- 6. Интегрирование некоторых иррациональностей**

Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Очевидно, если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал-подынтегральному выражению. Действительно:

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2. d \int f(x) dx = (\int f(x) dx)' dx = f(x) dx.$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

$$3. \int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

так как $\varphi(x)$ является первообразной для $\varphi'(x)$.

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$

также имеет первообразную, причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx ;$$

5. $\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx ;$

6. $\int f'(x) dx = f(x) + C ;$

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C .$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1. dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2. dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3. xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4. x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C . \end{aligned}$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

Пример

Вычислим

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6} (2 + 3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1, 2, \dots, k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1, 2, \dots, k$;

в) $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят

обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1} dx$, а, например

$\sin x dx = dv$, тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию

$\operatorname{arctg} x$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Примеры

Пример. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

Примеры

Пример. Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C .$$

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'_t dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом подстановки, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Решение. Преобразуем $x^2 + 4x + 5$,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$\begin{aligned}x^2 + 4x + 5 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + 5 = \\ &= \left(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 \right) + 1 = (x + 2)^2 + 1\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left. \begin{array}{l} x + 2 = t \\ x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x + 2) + C.$$

Пример

Найти $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2, \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1 + t}{1 + t^2} 2t dt =$

$$= 2 \int \frac{t dt}{1 + t^2} + 2 \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int \frac{d(t^2 + 1)}{t^2 + 1} + 2 \int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} dt =$$
$$= \ln(t^2 + 1) + 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} =$$
$$= \ln(t^2 + 1) + 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \ln(x + 1) + 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$