Mavzu: Vektor tushunchasi. Vektorlar ustida chiziqli amalllar

Reja:

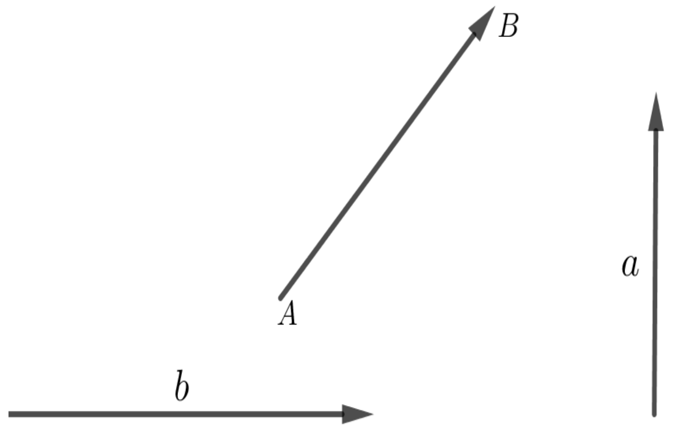
1. Vektor tushunchasi. Vektorlarning tengligi
2. Vektorlar proyektsiyalari va koordinatalari
3. Vektorlar ustida chiziqli amallar
4. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi

Fizik, kimyoviy va boshqa hodisalarni o’rganishda uchraydigan kattaliklarni ikki sinfga bo’lish mumkin. *Skalalyar* kattaliklar deb ataladigan kattaliklar sinfi mavjud bo’lib, ularni xarakterlash uchun bu kattaliklarni son qiymatlarini ko’rsatish yetarlidir. Bular, masalan, hajm, massa, zichlik, harorat va boshqalardir. Lekin shunday kattaliklar mavjudki, ular faqat son qiymatlari bilangina emas, balki yo’nalishi bilan ham xarakrerlanadi.

Ular yo’nalgan kattaliklar yoki vektor kattaliklar deb ataladi. Harakat tezligi, magnit yoki elektr maydonning kuchlanganligi va boshqa kattaliklar shunga misol bo’ladi.

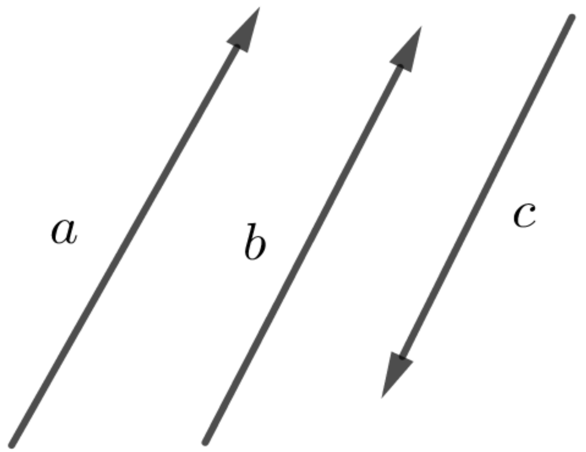
1-Ta'rif. Yo'naltirilgan kesma vektor deyiladi va $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}, \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Yo'naltirilgan $\overrightarrow{AB}$ kesmaning A nuqtasi uning *boshi*, B esa oxiri deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ kesmaning uzunligi *vektorning uzunligi* deyilib $|\overrightarrow{AB}|$ kabi belgilanadi. Boshi va oxiri ustma ust tushgan vektor *nol* vektor deyiladi va $\vec{0}$ kabi belgilanadi.



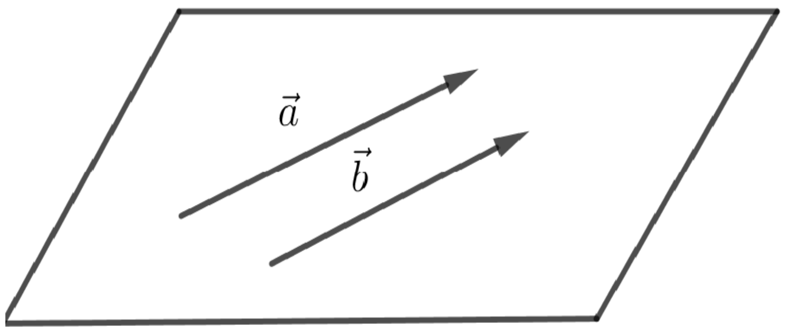
2-Ta’rif. Bitta to’g’ri chiziqda yoki parallel to’g’ri chiziqlarda yotuvchi $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ vektorlar *kollinear vektorlar* deyiladi.

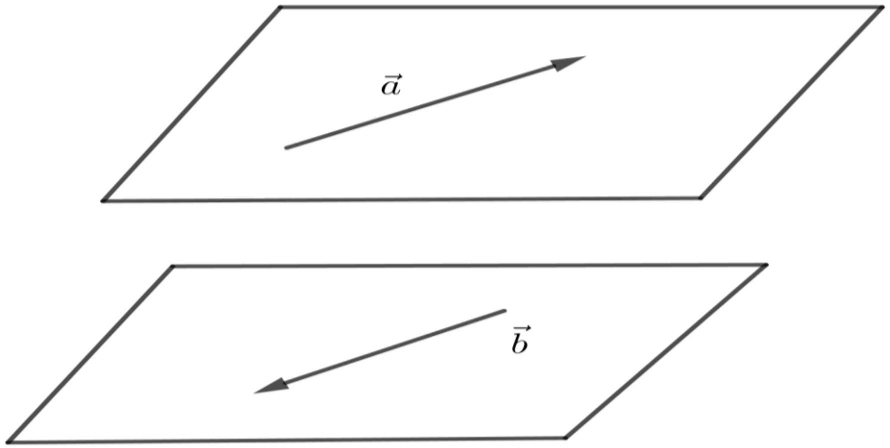
Shuni ta’kidlash lozimki kollinear vektorlar bir xil yo’nalishga ega bo’lishi shart emas.



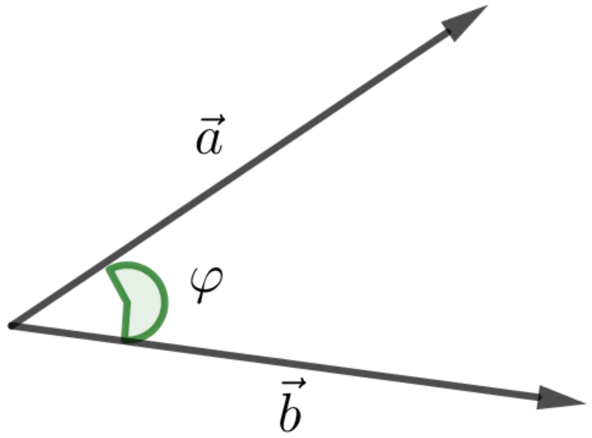
3-Ta'rif. Bir xil yo'nalishga ega bo'lib, uzunliklari teng bo'lgan ikkita kollinear $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi belgilanadi.

4-Ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deyiladi.



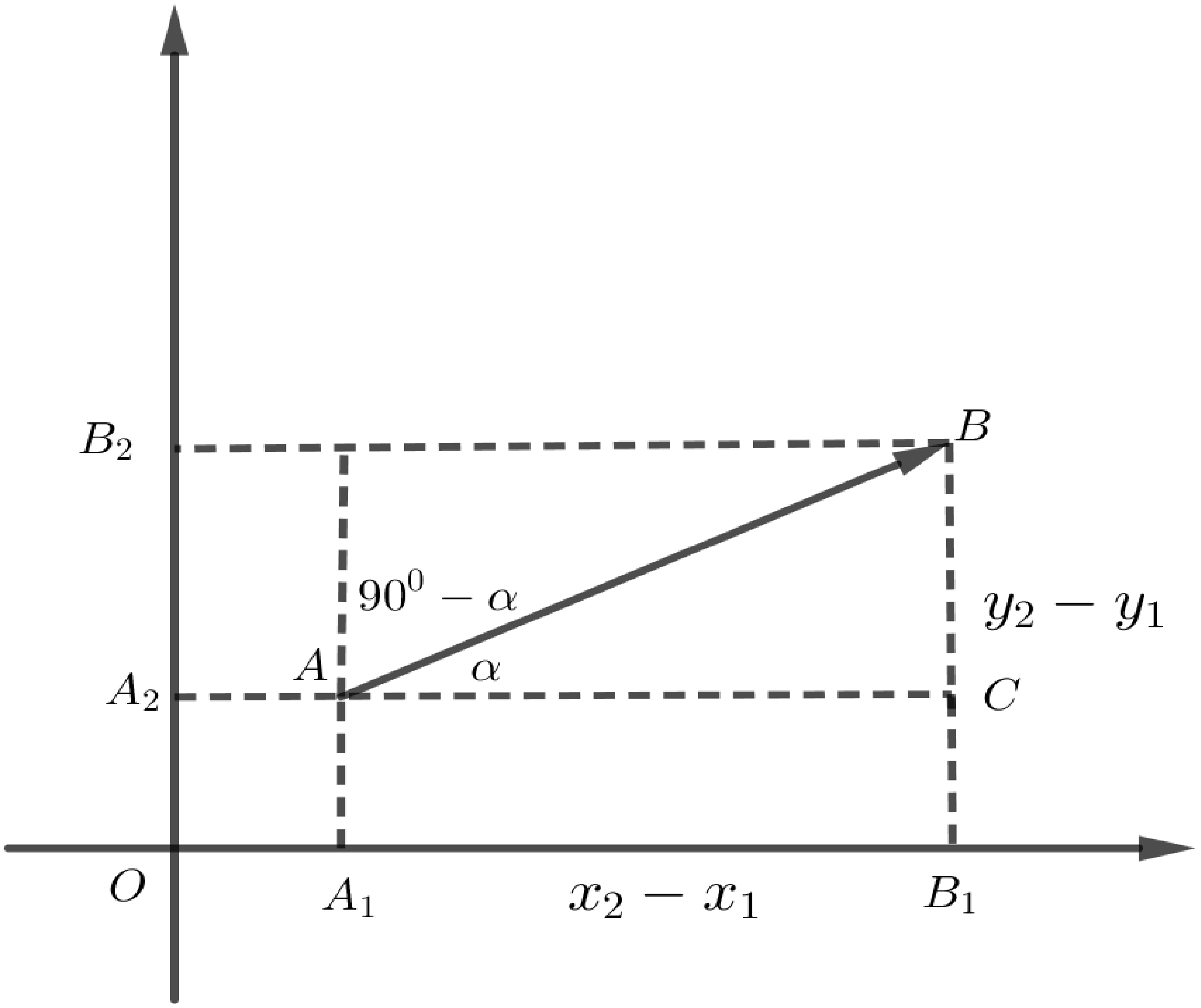


5-Ta'rif. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yo'nalishlari orasidagi burchakka $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi.



Vektorlarning proektsiyalari va koordinatalari.

Aytaylik OXY koordinatalar tekisligida boshi $A(x_1, y_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsin.



B_2
B
$90^0 - \alpha$
$y_2 - y_1$
A
α
A_2
C
O
A_1
$x_2 - x_1$
B_1

Chizmadagi A_1B_1 kesmaga $\overrightarrow{AB}$ vektorning Ox o'qdagi proyektsiyasi deyiladi. Xuddi shuningdek A_2B_2 kesmaga $\overrightarrow{AB}$ ni Oy o'qdagi proyektsiyasi deyiladi.

ΔABC dan

$A_1B_1 = AC = Pr_{OX}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|cos\alpha=a_x$,

$A_2B_2 = BC = Pr_{OY}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|sin\alpha=a_y$,

Bu yerda $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1$

Bir juft (a_x, a_y) songa $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari deyiladi.

Demak, Oxy tekislikda berilgan har qanday nolmas vector o’zining a_x va a_y koordinatalari orqali to’la aniqlanadi va uni $\overrightarrow{AB}(a_x, a_y)$ yoki $\vec{a}(a_x, a_y)$ ko’rinishda yoziladi.

$\overrightarrow{AB}(a_x, a_y)$ koordinatalari bilan berilgan vektor uzunligi ushbu

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

formuladan aniqlanadi.

$cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{x_2 - x_1}{d}$ va $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a_y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{y_2 - y_1}{d}$ lar $\overrightarrow{AB}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Bu yerda $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ ga teng.

1-misol. A$(1;3)$ va B$(4;7)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorni koordinatalari, moduli(uzunligi) va uning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. $x_1 = 1\ y_1 = 3;\ \ x_2 = 4\ y_2 = 7,$

1) $a_x = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3, a_y = y_2 - y_1 = 7 - 3 = 4$
$\overrightarrow{AB}(3;4);$

2) $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5;$

3) $cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{5}\quad cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{5}$

Ox va Oy koordinata o'qlariga qo'yilgan i va j birlik vektorlarga ortlar deyiladi. $\overrightarrow{AB}(a_x, a_y)$ yoki $\vec{a}(a_x, a_y)$ vektor ortlar yordamida ushbu $a = a_x i + a_y j$ ko'rinishda yoziladi va uni $\vec{a}(a_x, a_y)$ vektorni ortlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

Agar $\overrightarrow{AB}$ vektor boshi $A(x_1, y_1, z_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda bo'lgan fazoda berilgan bo'lsa, u holda bu vektorni koordinata o'qlaridagi proyektsiyalari mos ravishda $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$ bo'ladi. Bu holda $\overrightarrow{AB}$ vektor $\overrightarrow{AB}(a_x, a_y, a_z)$ yoki $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ ko'rinishda yoziladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektor uzunligi

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2)$$

formuladan aniqlanadi.

Fazoda berilgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α, β va γ lar orqali belgilanadi. $\overrightarrow{AB}$ vektorni yo'naltiruvchi kosinuslari mos ravishda ushbu formulalardan topiladi:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$cos\beta = \frac{a_y}{\vec{d}} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$cos\gamma = \frac{a_z}{\vec{d}} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Bu yerda $cos^2\alpha + sin^2\alpha + sin^2\gamma = 1$ ga teng

Vektorlar ustida chiziqli amallar

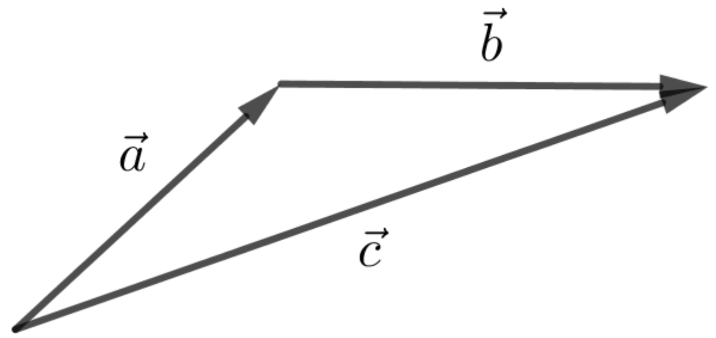
Aytaylik $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ va $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ vektorlar va $m \neq 0$ son berilgan bo'lsin.

1. Qo'shish va ayirish.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

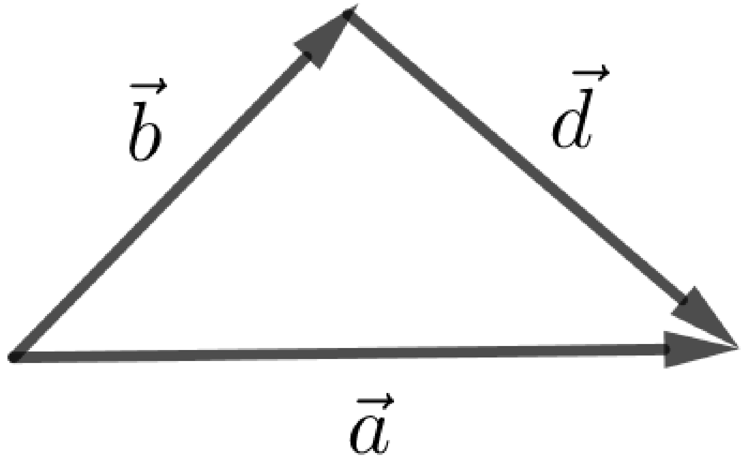
2. Vektorni songa ko'paytirish.

$$m\vec{a} = (ma_x, ma_y, ma_z)$$



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$



Ikki vektorning skalyar ko’paytmasi va uning xossalari.

6-Ta’rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunligini bu vektorlar orasidagi burchakning kosinusiga ko’paytmasini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko’paytmasi deyiladi. Ya’ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

Xossalari:

1. $\vec{a} \cdot \vec{a}$=$|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot cos0^{\circ} = |\vec{a}|^2$ yoki $\vec{a}^2$=$|\vec{a}|^2$;

2. Agar $\vec{a} = 0$, yoki $\vec{b} = 0$, yoki $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'ladi.

3. $\vec{a} \cdot \vec{b}$=$\vec{b} \cdot \vec{a}$

4. $\vec{a}(\vec{b}$+$\vec{c})$=$\vec{a} \cdot \vec{b}$+$\vec{a} \cdot \vec{c}$

5. m o'zgarmas bo'lsa, $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$=m$\overrightarrow{(a \cdot b)}$

6. Ortlarning skalyar ko'paytmasi

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, \quad i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$$

7. Agar $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ yoki $\vec{a}$=$x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $\vec{b}$=$x_2 i + y_2 j + z_2 k$ bo’lsa, u holda

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (5)$$

6. Ikki vektor orasidagi burchak

Skalyar ko’paytmaning ta’rifidan ya’ni

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \Longrightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (6)$$

kelib chiqadi. (6) formulani $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor orasidagi burchakni topish formulasi deyiladi. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo’lsa, ya’ni $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ u holda bu vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formuladan aniqlanadi.

7. Ikki vektorning parallellik va perpendikulayarlik sharti

1. Parallellik sharti. Agar $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo’lsa, u holda $\vec{a}$=m$\vec{b}$ yoki

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = m$$

formula o'rinli bo'ladi.

2. Perpendikulyarlik sharti.

Agar $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, u holda $\varphi = 90^\circ$ va $\cos\varphi = 0$ ga teng bo'ladi. Demak (6) va (7) formulalardan