Chiziqli tenglamalar sistemasi. Gauss usuli

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bo’yicha yechish $n = 4$ dan boshlab katta va mashaqqatli ishga aylanadi, chunki bu ish to’rtinchi tartibli beshta determinantni hisoblash bilan bog’liq. Shu sababli amalda Gauss usuli muvaffaqiyat bilan qo’llaniladi va u sistema birgalikda hamda aniq bo’lsa, uni soddaroq ko’rinishga keltirish va barcha noma’lumlarning qiymatlarini ketma-ket chiqarib tashlash, so’ngi tenglamada faqat bitta noma’lumni qoldiradi.

Quyidagi n ta chiziqli algebraik sistemani qaraylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechish jarayoni ikki bosqichdan iborat.

1-bosqich. (1) sistema uchburchak ko’rinishga keltiriladi.

Bu quyidagicha amalga oshiriladi: $a_{11} \neq 0$ deb quyidagi nisbatlarni tuzamiz.

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}},\ m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ldots, m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}.$$

Sistemaning i –tenglamasiga, 1-tenglamani m_{i1} ga ko'paytirilganini qo'shamiz. Bunda biz sistemaning 2-tenglamasidan boshlab hammasida x_1 noma'lumni yo'qotamiz. O'zgartirilgan sistema quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (2)$$

$a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib quyidagi nisbatlarni tuzamiz:

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ m_{42} = -\frac{a_{42}^{(2)}}{a_{22}^{(1)}}, \dots, m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

(2) sistemaning i –tenglamasiga $(i = 3, 4, \dots, n)$ uning 2-tenglmasini m_{i2} ga ko'paytirib qo'shamiz va natijada quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Yuqoridagidek jarayonni $n-1$ marotaba bajarib quyidagi uchburchak ko’rinishdagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \qquad (3)$$

Shu bilan yechimni birinchi bosqichi yakunlandi. *2-bosqich* uchburchak ko’rinishidagi (3) sistemani yechishdan iborat. Oxirgi tenglamadan x_n topiladi. Undan oldingi tenglamaga x_n ning topilgan qiymati qo’yilib, x_{n-1} topiladi. Shu mulohazani davom ettirib, x_1 topiladi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases} \qquad (4)$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish: Usulning birinchi qadami (4) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan x noma’lum chiqarishdan iborat. Buning uchun bu sistemaning birinchi tenglamasini (-2) ga ko’paytiramiz va olingan tenglamani ikkinchi tenglamaga qo’shamiz, keyin esa birinchi tenglamani (-3) ga ko’paytiramiz va olingan tenglamani uchinchi tenglamaga qo’shamiz. Bu ishlar natijasida berilgan (4) sistemaga teng kuchli ushbu sistemani olamiz:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 7y-10z=8 \\ 4y-14z=-12 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu sistemaning uchinchi tenglamasini 2 ga qisqartirib,

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ \quad 7y-10z=8 \\ \quad 2y-7z=-6 \end{cases} \qquad (6)$$

hosil qilamiz. Ikkinchi qadam y noma’lumni (3) sistemaning uchinchi tenglamasidan chiqarishdan iborat. Buning uchun shu sistemaning ikkinchi tenglamasini $\left(-\frac{2}{7}\right)$ ga ko’paytiramiz va uchinchi tenglamaga qo’shamiz.

Buning natijasida ushbu teng kuchli sistemani olamiz:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 7y-10z=8 \\ -\frac{29}{7}z=-\frac{58}{2} \end{cases} \qquad (7)$$

Bu sistemaning uchinchi tenglamasini $-\frac{29}{7}$ ga bo'lib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 7y-10z=8 \\ z=2 \end{cases} \qquad (8)$$

(4) tenglamalar sistemasi uchburchakli deb ataladigan (8) shaklni oldi. Uchinchi tenglamadan $z=2$ ni olamiz,

bu qiymatni (8) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, $y=4$ ni olamiz. $z=2$ va $y=4$ qiymatlarni (8) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, $x=8$ ni olamiz:

$x=8$, $y=4$, $z=2$ yechim olindi.

Gauss usulining xususiyati shundaki, unda sistemaning birgalikda bo'lishi oldindan talab qilinmaydi.

1. Agar sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul birgina yechimga olib keladi.
2. Agar sistema birgalikda va aniqmas bo'lsa, u holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi.

3. Agar sistema birgalikda bo’lmasa, u holda biror qadamda chiqarilayotgan noma’lum bilan birgalikda qolgan barcha noma’lumlar ham chiqariladi, o’ng tomondan esa noldan farqli ozod had qoladi.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases}$$

Yechish: Birinchi tenglamani (-3) ga ko’paytiramiz va ikkinchi tenglamani qo’shamiz, keyin esa birinchi tenglamani (-5) ga ko’paytiramiz va uchinchi tenglamani qo’shamiz. Shu bilan ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x noma’lumni chiqaramiz:

$$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ -7y+7z=-3 \\ -7y+7z=-7 \end{cases}$$

Endi uchinchi tenglamadan z noma’lumni chiqarayotganimizda biz y noma’lumni ham chiqaramiz, bu esa ziddiyatlikka olib keladi. Chunki $0 \neq 4$.

Shunday qilib Gauss usulini qo’llash berilgan sistemaning birgalikda emasligini ko’rsatadi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 5x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

Yechish: 2-misoldagi ishlarni takrorlab, sistemani

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 7z = -3 \\ -7y + 7z = -3 \end{cases} \qquad (9)$$

ko'rinishga keltiramiz, bu esa berilgan sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 7z = -3 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli ekanligini bildiradi. (9) sistemaning so’ngi ikki tenglamasi bir xil. Bu sistema birgalikda bo’lsada, lekin aniqmas, ya’ni cheksiz ko’p yechimga ega.