Funksiya uzluksizligi.

I va II tur uzilish nuqtalari. Fuksiya limitini topishda uning uzluksizligidan foydalanish

Reja:

1.Funksiyaning uziliksizligi.

2. Funksiya limitini topishda uning uzluksizligidan foydalanish.

3. Funksiyaning uzilishi va uning turlari.

Funksiyaning uzliksizligi

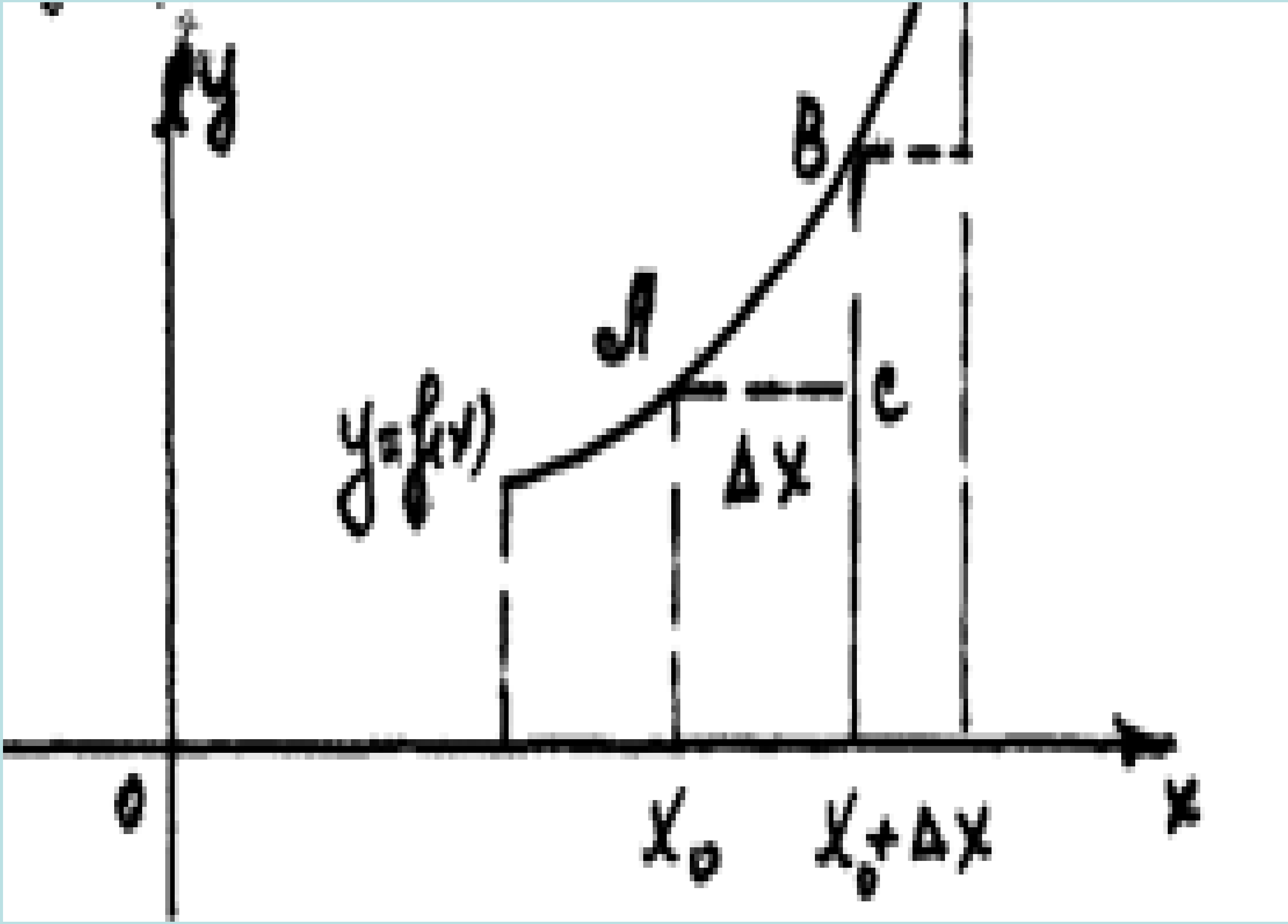
- Ta'rif-1. Y=f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtaning qandaydir atrofida aniklansa.
- Agarda $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa u holda f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Ixtiyoriy ε uchun*shunday* $\delta(\varepsilon, \mathrm{x}_0) > 0 \; \exists \; |\mathrm{x} - \mathrm{x}_0| < \delta$uchun
- $|f(x) - f\,(x_0)| < \varepsilon$ o'rinli.

Ta'rif-2.

- Ixtiyoriy $x_n \to x_0$ ketma ketlik uchun
- $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ bo’lsa,
- u holda f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada
- uzluksiz deyiladi.

Ta'rif-3.

- $\mathrm{x} - \mathrm{x}_0 = \Delta \mathrm{x}$ -argument ortirmasi. $f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \Delta y$ funksiya ortirmasi deb yuritamiz. Agarda $\lim\limits_{\Delta \mathrm{x}} \Delta \mathrm{y} = 0$ bo'lsa f(x) funksiya $x=x_0$ nuqtada uzliksiz deyiladi.
- Yuqorida keltirilgan ta'riflar bir biriga ekvivalant.



y
y=f(x)
A
B
C
ΔX
0
X₀
X₀+ΔX
x

misol

- $y = \sin x$ ihtiyoriy $x_0 \in]-\infty; +\infty[$
- $|\sin x - \sin x_0|$=$\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| =$
  =2 $\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq$ =2 $\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq$
  =2 $\frac{|x-x_0|}{2} = |x - x_0| < \varepsilon\,, \varepsilon > 0$ bu yerdan
  $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ kelib chiqadi

Yuqoridagi ta’riflarga asoslanib uzliksizlikga umumiy ta’rif keltiramiz

- Agar f(x) funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlagan va $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo’lsa, u holda funkiya $x=x_0$ nuqtada uzliksiz deyiladi. Bu ta'rif quyidagi to’rta shartni o’z ichiga oladi:
- 1.f(x) funksiya x_0 nuqtaning atrofida aniqlangan bo’lishi kerak;
- 2.chekli $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ va $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ mavjud bo’lishi kerak;
- 3. bu (chap va o’ng) limitlar bir xil bo’lishi kerak;
- 4. bu limitlar $f(x_0)$ ga teng bo’lishi kerak

- **Misol:** $y=2x+1$ funksiyasining $x_0=2$ nuqtadagi uzluksizligi ε va δ tilidagi ta’rifga ko’ra ko’rsatilsin.
- 2-Ta’rifga ko’ra $|x-x_0|<\delta$, $|x-2|<\delta$ bo’lganda $|2x+1-5|<\varepsilon$ yoki $|2x-4|<\varepsilon$ yoki $2|x-2|<\varepsilon$ yoki $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$; $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$;

Funksiyaning uzilishi

Agar $Y=f(x)$ funksiya x_0 dan o'ngda va chapda aniqlangan bo'lsa, ammo x_0 nuqtada uzliksizlikning to'rtta shartlardan aqalli birortasi bajarilmasa, $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi.

Funksiyaning uzilishga ega bo’ladigan hollar

1. Agarda $x=x_0$, $f(x_0)$ aniqlanmagan

2. $f(x)$ funksiya $x=x_0$ aniqlangan, lekin $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ mavjud bo’lmasa

3. $f(x)$ $x=x_0$ aniqlangan, lekin

$$\lim_{x\to x_{0-0}} f(x) \neq \lim_{x\to x_{0+0}} f(x)$$

f(x) функция учун $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ чекли лимитлар мавжуд бўлса, чап ва ўнг лимитлар ўзаро тенг бўлмаса, x_0нуқта ***1-тур узилиш нуқтаси*** дейилади.

1-тур узилиш нуқтаси бўлмаган узилиш нуқталарига ***2-тур узилиш нуқталари*** дейилади. Бундай нуқталарда, ақалли битта томонли лимит қиймати чексиз ёки мавжуд бўлмайди.

misol

$f(x)=\frac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0=2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

yechish. funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta'rifidan $x-2<0$ yoki $x<2$ va $x-2>0$ yoki $x>2$ bњlganda mos ravishda

$$f(x)=\frac{x-2}{-(x-2)}=-1, \quad f(x)=\frac{x-2}{x-2}=1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$.

Shunday qilib, $x_0=2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

misol

. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0=0$ nuqtada aniqlanmagan,

lekin $x\neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o‘zaro teng, ya'ni

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0=0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo‘ladi.

Funksiyaning uzilishi

Agar x=a nuqtada f(x) funksiya birinchi tur uzilishga ega bo’lib, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ munosabat bajarilsa, f(x) funksiya x=a nuqtada “sakrashga” ega deyiladi va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) - \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ ayirma funksiyaning x=a *nuqtadagi sakrashi* deyiladi.

Teorema 1. (Veyyershtrassning birinchi teoremasi). Segmentda uzluksiz funksiya shu segmentda chegaralangandir:

$$\forall f \in C([a,b])\ \exists M>0\ \ \forall x \in [a,b]\ |f(x)| \le M.$$

Teorema 2 (Veyyershtrassning 2-teoremasi)

Segmentda uzluksiz funksiya shu segmentda o`zining max, min lariga erishadi

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \quad \exists \overset{*}{x} \in [a,b] \qquad f(\overset{*}{x}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \quad \exists \underset{*}{x} \in [a,b] \qquad f(\underset{*}{x}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

yoki yana boshqacha qilib aytsak

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \quad \exists \{\underset{*}{x}, \overset{*}{x}\} \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] \quad f(\underset{*}{x}) \le f(x) \le f(\overset{*}{x})$$

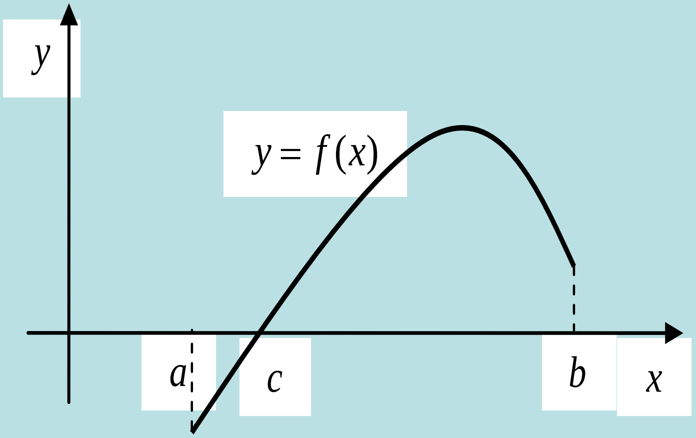
Misol.1. $f(x)=x^2$ funksiya [-1,2] segmentda uzluksizdir. U o`zining shu segmentda max va min larini $x=2$ va $x=0$ nuqtalarda qabul qiladi:

$$\forall x \in [-1,2] \qquad f(0)=0 \le x^2 \le 4 = f(2)$$

Teorema 3 (Koshi). Agar $[a,b]$ segmentda uzluksiz funksiya f shu segmentning chetlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilgan bo`lsa, u (a,b) intervalda kamida bir marta nolga aylanadi.

$$f \in C[a,b] \wedge f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad f(c) = 0$$

Teorema 3 ning geometrik mazmuni quyidagicha: $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalar $y > 0$ va $y < 0$ turli yarim tekisliklarda joylashgan. Uzluksiz funksiyaning grafigi bu nuqtalarni birlashtirish jarayonida albatta OX o`qini kesib o`tadi.



Teorema 4. (Oraliq qiymat haqidagi Koshi teoremasi)

Segmentda uzluksiz funksiya shu segmentda barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $f \in C[a,b]$ bo`lsa, u holda $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar orasidagi har qanday sonni f funksiya shu segmentda qabul qiladi.

Aniqlik uchun, faraz qilaylik, $f(a) < f(b)$ bo`lsin. Biz $(f(a), f(b))$ intervaldagi ixtiyoriy C uchun ushbu $f(x) = C$ tenglama $[a,b]$ segmentdakamida bitta yechimga ega ekanligini isbotlashimiz kerak.

$g(x) = f(x) - C, \qquad x \in [a,b]$, funksiyani qaraylik. Ravshanki, $g \in C(a,b)$ va $g(a) = f(a) - C < 0, \qquad g(b) = f(b) - C > 0$. Teorema 3 ga ko`ra (a,b) intervalda shunday $x = c$ nuqta borki, uning uchun

$$g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) - C = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = C$$