Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Почему именно системы уравнений?

Математика – наука молодых. Иначе и не может быть. Занятия математикой – это такая гимнастика ума, для которой нужны вся гибкость и вся выносливость молодости.

Н. Винер

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные практические задачи (по некоторым оценкам более 75% всех задач). Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики. Конечно, существует много методов и современных пакетов прикладных программ для решения СЛАУ, но для того, чтобы их успешно использовать, необходимо разбираться в основах построения методов и алгоритмов, иметь представления о недостатках и преимуществах используемых методов.

Сопоставьте строки таблицы

Прямоугольная таблица чисел называется		**образуют элементы с равными индексами**
Матрица называется квадратной, если		матрица
Единичной называется		число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы
В квадратной матрице главную диагональ		матрица, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка.
Суммой двух матриц		нужно умножить на это число все элементы матрицы.
Вектор-столбец, это		если у них одинаковое число строк и столбцов и все соответствующие элементы совпадают
Две матрицы можно перемножить, если		число строк в ней равно числу столбцов
Транспонированная матрица		матрица, состоящая из одного столбца
Матрицы называются равными		квадратная матрица, элементы главной диагонали которой единицы, а остальные нули
Чтобы умножить матрицу на число		называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

Определение СЛАУ

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} и b_i (i=1,…,m; b=1,…,n) – некоторые известные числа, а $x_1,\ldots,x_n$ – неизвестные.

Немного теории

1. Что является решением системы?
2. В каком случае СЛАУ имеет одно единственное решение?
3. Что такое главный определитель системы?
4. Каким образом находят определители второго и третьего порядков?

Методы решения СЛАУ

Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть - и далее подтвердить то, - что, следуя этому методу, мы достигнем цели.

Г. Лейбниц

Прямые методы:

- метод Крамера;
- метод обратной матрицы;
- метод Гаусса.

Итерационные методы:

- метод простой итерации (метод Якоби);
- метод Гаусса-Зейделя;
- метод релаксации.

Метод Крамера

При решении систем линейных уравнений по методу Крамера выполняется следующий алгоритм:

- систему записывают в матричном виде;
- вычисляют главный определитель системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

- вычисляют дополнительные определители системы:

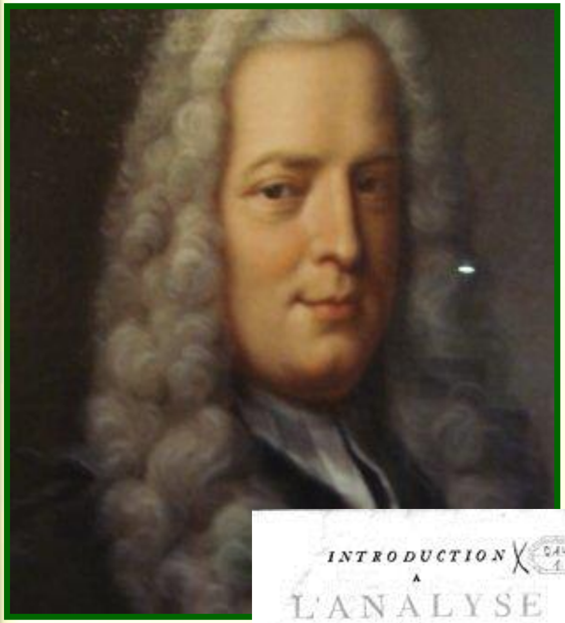
$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_{xn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

- если главный определитель системы не равен нулю, то находят значения всех неизвестных по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}; \ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_{xn}}{\Delta}.$$

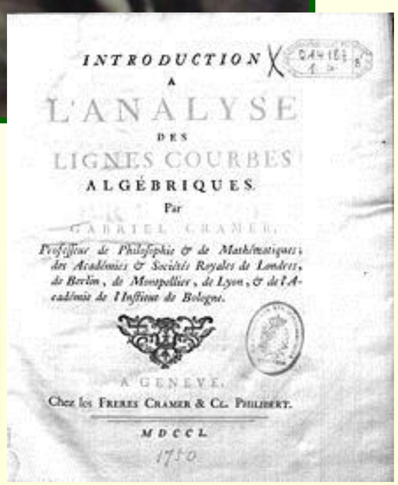
Габриэль Крамер

швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры



Габриэль Крамер родился 31 июля 1704 года в Женеве (Швейцария), в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики. В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Через 2 года Крамер выставил свою кандидатуру на должность преподавателя в Женевском университете. Юноша так понравился магистрату, что специально для него и ещё одного кандидата на место преподавателя была учреждена отдельная кафедра математики, где Крамер и работал в последующие годы.

Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. В 1730 году он опубликовал труд по небесной механике.



INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Professeur de Philosophie & de Mathématiques, des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A GENEVE,
Chez les Freres Cramer & Cl. Philibert.
MDCCL.
1750

Недостатки метода Крамера

Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Д. Пойа

Из-за высокой вычислительной сложности метода (требуется вычисление n + 1 определителя размерности n x n), он не применяется для машинного решения больших СЛАУ. Время, необходимое на вычисление одного определителя примерно такое же, как и время на решение одной системы уравнений при использовании метода Гаусса. Однако он иногда используется при ручном счёте и в теоретических выкладках.

Метод Гаусса

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Алгоритм состоит из двух этапов.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме.

На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений.

Алгебраические дополнения

$A_{11=}$ 3	$A_{21=}$ 5	$A_{31=}$ 1
$A_{12=}$ -11	$A_{22=}$ 3	$A_{32=}$ 7
$A_{13=}$ -7	$A_{23=}$ -1	$A_{33=}$ 19

$$X = \frac{1}{\Delta} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Карл Фридрих Гаусс

немецкий математик, астроном и физик

Карл Фридрих Гаусс

Дата рождения: *30 апреля 1777 года*
Место рождения: *Брауншвейг*
Дата смерти: *23 февраля 1855 года*
Место смерти: *Гёттинген*
Страна: *Брауншвейг-Люнебург*
Научная сфера: *математика, физика, астрономия*
Альма-матер: *Гёттингенский университет*

Достоинства метода Гаусса

- менее трудоёмкий по сравнению с другими методами;
- применим к любой системе линейных уравнений;
- в силу простоты и однотипности выполняемых операций пригоден для счета на электронно-вычислительных машинах.

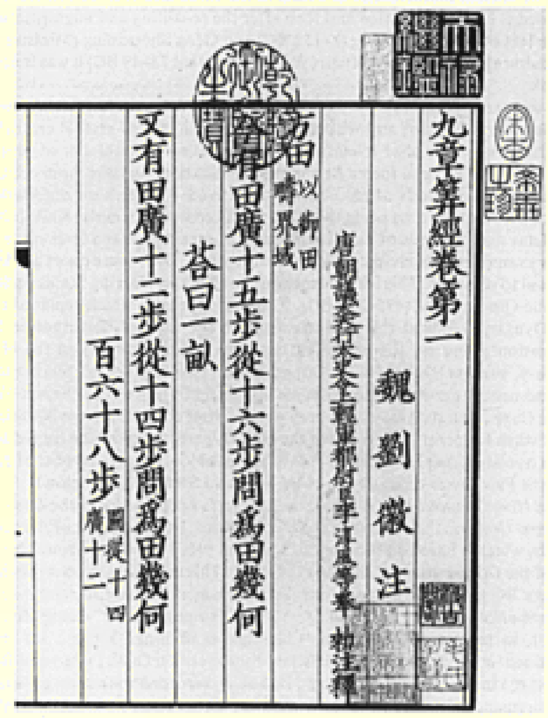
Применение:

- нахождение матрицы, обратной к данной;
- численное решение СЛАУ в вычислительной технике

"Математика в девяти томах"

Хотя описанный выше метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до него. Первое известное описание данного метода - в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

В ней собраны 246 задач, изложенных в традиционном восточном духе: формулируется задача, сообщается готовый ответ и указывается способ решения.


九章算經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

方田 以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰百六十八步

Решение СЛАУ средствами языка программирования Pascal ABC

Паскаль - высокоуровневый язык программирования, один из наиболее известных. Широко применяется в обучении программированию учащихся и студентов.

Система Pascal ABC основана на языке Delphi Pascal и призвана осуществить постепенный переход от простейших программ к модульному, объектно-ориентированному, событийному и компонентному программированию.

Текст программы. Метод Гаусса

Pascal ABC

Файл Правка Вид Программа Сервис Помощь

*gaus.pas

```
uses crt;
type
matrica=array[1..10,1..10] of real;
vector=array[1..10] of real;
var
a:matrica;
b,x:vector;
i,j,k,n:byte;
H:real;
Begin
Write('ввести количество уравнений');
Readln(n);
Write('коэффициенты уравнений');
For i:=1 to n do
  For j:=1 to n do
  Read(a[i,j]);
Write('ввести вектор-столбец правых частей уравнений');
For i:=1 to n do
Read(b[i]);
For i:=1 to n do begin
  For j:=1 to n do
  Write(a[i,j]:7:3);
  Write(b[i]:7:3);
Writeln;
End;
```

```
For i:=1 to n-1 do
  For j:=i+1 to n do begin
  a[j,i]:=-a[j,i]/a[i,i];
    For k:=i+1 to n do
    a[j,k]:=a[j,k]+a[j,i]*a[i,k];
  b[j]:=b[j]+a[j,i]*b[i];
  end;
x[n]:=b[n]/a[n,n];
For i:=n-1 downto 1 do begin
H:=b[i];
  For j:=i+1 to n do
  h:=h-x[j]*a[I,j];
x[i]:=h/a[i,i];
end;
for i:=1 to n do
writeln('Корень x(',I,')=',x[i]:7:3);
End.
```

Результат работы программы

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, - это быть точным, второе - быть ясным и, насколько можно, простым.

Л. Карно

CRT - программа завершена

```
ввести количество уравнений
4
ввести коэффициенты уравнений
2 1 -4 3
1 -4 3 -2
3 2 -2 1
2 4 -2 -3
ввести вектор правых частей
-4 -1 3 6
  2.000  1.000 -4.000  3.000 -4.000
  1.000 -4.000  3.000 -2.000 -1.000
  3.000  2.000 -2.000  1.000  3.000
  2.000  4.000 -2.000 -3.000  6.000
Корень x(1)=  1.000
Корень x(2)=  2.000
Корень x(3)=  2.000
Корень x(4)=  0.000
```

Примеры использования систем линейных уравнений

Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах.

Г. Цейтен

Пример №1

Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
заготовки	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Примеры использования систем линейных уравнений

Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

М. Башмаков

<u>Пример №2</u>

Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Разгрузку можно производить как непосредственно в железнодорожные вагоны для последующей доставки потребителям, так и на портовые склады. В вагоны можно разгрузить 8000 т, а остаток груза придется направить на склады. Необходимо учесть, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30, 5,25 и 2,20 денежных единиц.

Записать в математической форме условия полной разгрузки судов, если затраты на нее должны составить 58850 ден. ед.