Ikkinchi tartibli egri chiziqlar: Aylana va Ellips

R e j a :

1.Aylana tushunchasi va aylana tenglamasi

2.Ellips, ellipsning kanonik tenglamasi

3. Ellipsning xossalari

Bizga ma’lumki , tekislikda to’g’ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasida har qanday birinchi tartibli ikki o’zgaruvchili tenglamalar ya’ni AX+BY+C=0 ko’rinishdagi tenglama (A va B koefifitsientlar bir vaqtda nolga teng emas)to’g’ri chiziq tenglamasi. Endi ikkinchi tartibli o’zgaruvchili tenglamani qaraymiz. Bunday tenglama bilan ifodalovchi chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning turlari bilan tanishamiz.

Ma’lumki, berilgan M(a, b) nuqtadan bir xil r masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o’rni **aylana** deyiladi.

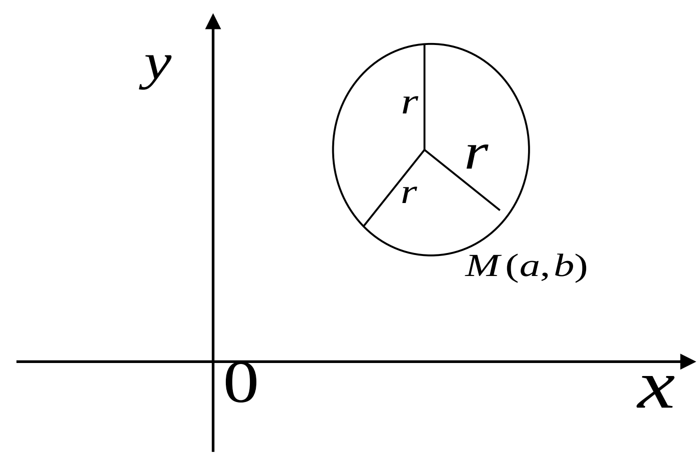
Bunda M nuqta aylana markazi, r esa aylana radiusidir.

Demak,aylanadagi ixtiyoriy P(x,y) nuqtadan uning markazi M(a,b)

gacha bo’lgan masofa har doim r ga teng. Bu markazi (a,b) nuqtada, radiusi r ga teng bo’lgan **aylana tenglamasidir.**

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Xususan markazi **koordinata boshida** bo’lgan **aylana tenglamasi** $x^2+y^2=r^2$



Egri chiziq parametrik ko'rinishdagi tenglamaga ham ega. Aytaylik, M nuqta egri chiziq bo'ylab harakatlansin va biron t vaqtda $x=\boldsymbol{\varphi}(t)$, $y=\boldsymbol{\psi}(t0$ koordinatalar ega bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} x=\boldsymbol{\varphi}(t) \\ y=\boldsymbol{\psi}(t) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasida egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi, bunda t parametr hisoblanadi.

$\{ x=R\cos(t)$

$\{ y=R\sin(t)$ tenglamalar aylananing parametrik tenglamalaridir.

Agra egri chiziqning parametrik tenglamalari ma’lum bo’lsa, undan foydalanib, egri chiziqning oshkormas ko’rinishdagi keltirib chiqarish mumkin. Oshkormas tenglama ba’zi holarda chiziq tenglamasini ifodalamasligi ham mumkin. Boshqacha aytganda, chiziqqa tegishli bo’lmagan nuqtaning koordintalari oshkormas tenglamani qanoatlarishi mumkin. Agar parametrik tenglamdan t parametrni chiqarsak

$x^2+y^2=R^2$ tenglamaga ega bo’lamiz

Namunaviy misollar yechish

To'g'ri chiziq va ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamalari berilgan quyidagilar topilsin: 1) Ikkinchi tartibli egri chiziqning barcha elementlari; 2) ikkinchi tartibli egri chiziq bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalari. Chizmasini chizing.

$$(x+4)^2+(y-5)^2=16, \ x-y+5=0$$

Yechish. a) Markazi $M(a;b)$nuqtala va radiusi R bo'lgan aylana kanonik tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, $(x+4)^2+(y-5)^2=16$ tenglama bilan berilganikkinchi tartibli egri chiziq aylana bo'lib, uning markazi $M(-4;5)$ nuqtada,radiusi R esa 4 ga teng.

To'g'ri chiziq tenglamasidan $y — x + 5$ ekanini ko'ramiz. Buni aylana

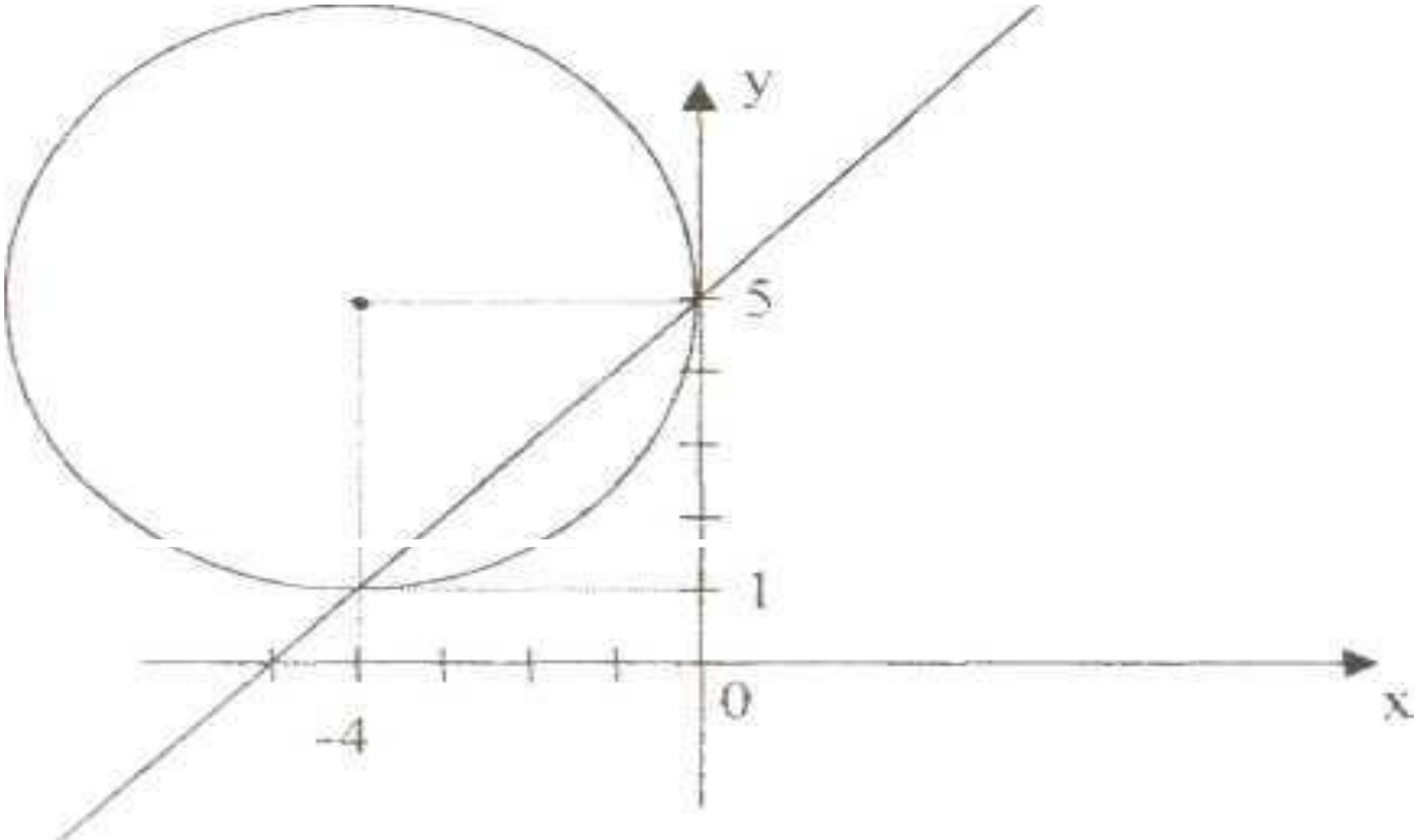
tenglamasiga qo'yib ularning kesishish nuqtasini topamiz:

$(x+4)^2+(y-5)^2=16; \ (x+4)^2+(x+5-5)^2=16$

$x^2+8x+16+x^2=16; \ 2x^2+8x=0; \ x^2+4x=0; \ x_1=0, \ x_2=-4$

$y_1=x_1+5=0+5=5; \ y_2=x_2+5=-4+5=1$

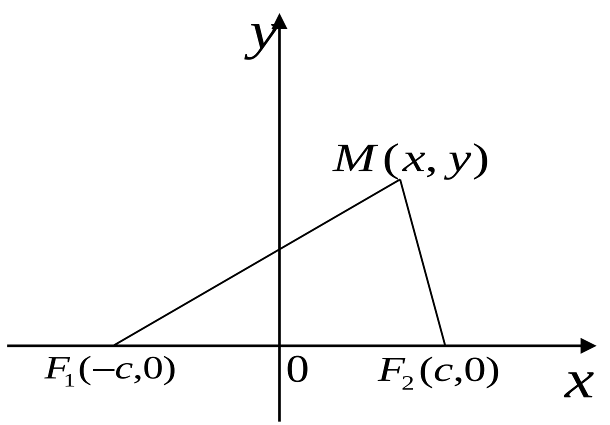
Demak, kesishish nuqtalari: *(0;5)* va *(-4:1).*

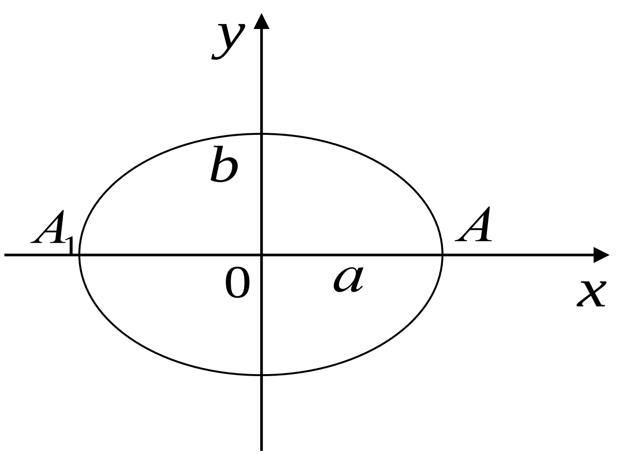


Tekislikda $F_1(a_1, b_1)$, $F_2(a_2, b_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. F_1, F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni **ellips** deyiladi. Bu tenglama **ellipsning kanonik tenglamasi** deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Endi $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ miqdorni qaraylik. Uni ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi. Ellipsning ekstsentrisiteti uning shaklini ifodalovchi miqdordir.





1.Ellips koordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziqdir.

2.Ellips ABA_1B_1 to'g'ri to'rtburchak ichida joylashgan shakldir. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips ABA_1B_1 to'g'ri to'rtburchakda joylashganini bildiradi.

3.Agar ellipsning ekspentrisiteti e=0 bo'lsa, u holda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama Markazi koordinata boshida, radiusi a ga teng bo'lgan aylanani ifodalaydi. e=0 bo'lganidan a=b bo'lib, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama $x^2+y^2=a^2$ bo'ladi.

4.Markazi koordinatalar boshida, radiusi a ga teng aylanani OY o'qi bo'ylab $\frac{a}{b}$ marta qisish natijasida yarim o'qlari a va b ga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$

Ellipsning kanonik tenglamasi bilan aniqlangan ellips koordinata o’qlariga nisbatan simmetrikdir. Haqiqatdan (x; y) shu ellipsning bir nuqtasi bo’lsa, ya’ni x; y sonlar tenglamani qanoatlantirsa, u vaqtda tenglamada o’zgaruvchi x; y ning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, bu tenglamani (-x, y) (x, -y) va (-x,-y) nuqtalarning koordinatalari ham qanoatlaridi. Shuning uchun koordinata o’qlari ellipsning simmetriya o’qlaridir. Simmetriya o’qlarining kesishgan nuqtasi 0(0; 0) ellipsning markazi deyiladi, fokuslar yotgan o’qi uning fokal o’qi deyiladi.

Ellipsning fokuslari orasidagi masofa ning katta o’qining uzunligiga nisbati uning ***ekssentristeti*** deyiladi va *e* harfi bilan belgilanadi.

Ta’rifga ko’ra: $$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

hamda $c<a \Rightarrow 0<e<1$.

Ellipsning ekssentrisiteti uning shaklini aniqlashda muhim ro’l o’ynaydi. Haqiqatdan ham, $c^2=a^2-b^2$ shuning uchun

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right),\ \text{bundan}\quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

Ellipsning koordinatalar o'qlari (simmetriya o'qlari) bilan kesishgan nuqtalrini uning *uchlari* deyiladi. Ellipsning 4 ta uchi bor (chizmada ular A_1, A_2 , B_1, B_2 bilan belgilangan), [A_1 A_2] kesma va uning uzunligi $2a$ ellipsning *katta o'qi,* [OA_1] kesma va uning uzunligini a esa ellipsning *katta yarim o'qi* deyiladi. [B_1 B_2] kesma va uning uzunligi 2b ellipsning *kichik o'qi,* [OB_1] kesma va uzunligini b esa ellipsning *kichik yarim o'qi* deyiladi .

Namunaviy Misollar yechish

ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$x^2+3y^2-12=0$; $x^2+3y^2=12$; $\frac{x^2}{12}+\frac{3y^2}{12}=1; \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1;$

Fokuslari *Ox*o'qda koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik yotuvchi ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1;$$

Bunda a va b lar ellipsning katta va kichik yarim o'qlari. Fokuslari F,(-c;0) va F_2(c;0) nuqtalarda bo'lib, markazdan $c=\sqrt{a^2-b^2}$ masofada yotadi.

Ellipsning ekstsentrisiteti $\xi=c/a$, fokal radius-vektorlari esa $r_1=a+\xi x$. $r_2=a-\xi x$ formulalar bilan aniqlanadi.

Direktrisalari $x=\pm a/\xi$ ikkita to'g''ri chiziqdan iborat.

Demak, (2) tenglama uchun $a=2\sqrt{3}$, b=2

c= $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};$ $\xi=$ $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $r_1=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}x$; $r_2=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Ellipsning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechamiz. To'g'ri chiziq tenglamasidan $x=-3y$ekanini topib, uni eliips tenglamasiga qo'yamiz:

$x^2+3y^2-12=0$; $(-3y^2)+3y^2=12$; $12y^2=12$; $y^2=1$;

$y_1=-1$. $y_2=1$: $x_1=-3y=-3(-1)=3$ $x_2=-3y_2=-3$ Demak. kesishish nuqtalari: (-3;1) va (3;-l).