Кривые второго порядка

Урок по высшей математике
для студентов 1 курса
Разработал: Лакаев Ш.С

- Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

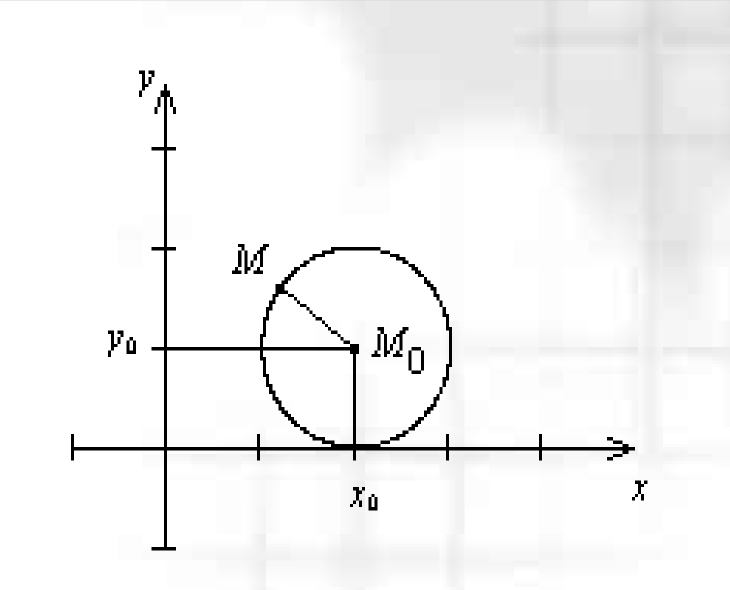
где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю.

Виды кривых второго порядка

1. **Окружность.**

Определение:

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от одной точки, называемой центром.



M_0 – центр окружности, M_0M - радиус

Уравнение окружности

- Уравнение окружности с центром в точке Mo (x_0, y_0) и радиуса R имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Если центр окружности в начале системы координат, то уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Пример 1: Написать уравнение окружности с центром в точке C(3;5) и радиусом R=3.

$$Решение: (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Вывод уравнения окружности

$$M(x;y), M_0(x_0;y_0) \Rightarrow$$

$$|M_0M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$|M_0M| = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Окружность

- Пример 2: Найти центр и радиус окружности и построить ее

$$(x+3)^2+(y-2)^2=100$$

- Решение:

R=10, $M_0(-3;2)$

Окружность

- Пример 3: Доказать, что уравнение задает окружность, найти координаты центра и радиус, построить окружность

$$x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$$

- Решение:

R=5, $M_0(1;-2)$

Окружность

- Пример 4.

Дана окружность $x^2+y^2-4x+2y-15=0$ и хорда $x+y-7=0$. Найти длину этой хорды.

Решение:

1. Найти уравнение окружности.
2. Построить чертеж
3. Решить систему, найти точки пересечения линий
4. Найти расстояние между двумя точками

Окружность

- Пример 5.

Дана окружность $(x+2)^2+(y+3)^2=13$ и точка на ней с ординатой, равной нулю. Найти ее абсциссу.

- Пример 6.

Написать уравнение окружности, проходящей через три точки A(0;2), B(1;1), C(2,-2).

Окружность

- Пример 7.

Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку А(2;9). Написать уравнение этой окружности.

- Пример 8.

Окружность касается оси Oy в точке А(0;-3) и имеет радиус r=2. Написать уравнение этой окружности.

Домашнее задание

- Построить окружности:

$(x+3)^2+(y-2)^2=16$ и $x^2+(y-4)^2=25$

- Найти координаты центра и длину радиуса окружности $x^2+y^2-6x-8y=0$.
- Составить уравнение окружности, касающейся оси OX в начале координат и проходящей через точку A(0;-8).

Виды кривых второго порядка

2. **Эллипс**

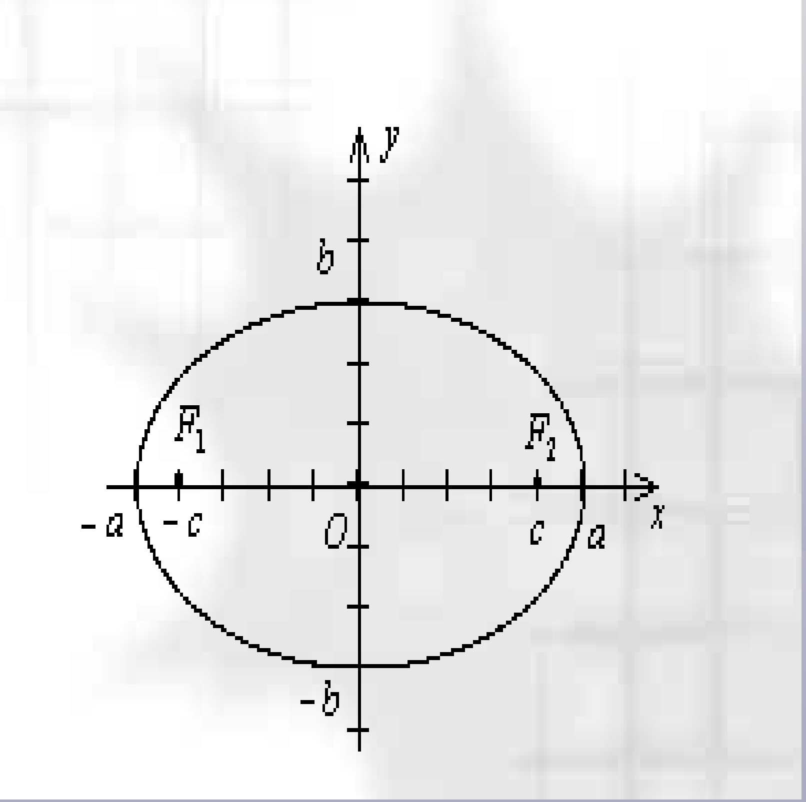
Определение:

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и больше расстояния между фокусами

Эллипс

- F1 и F2 – фокусы,
- F1(-c,0), F2(c,0)
- F1F2 – фокальной расстояние
- |F1F2|=2a

Пусть M(x;y) – точка на эллипсе, то MF1=MF2



Эллипс

- Вывод уравнения эллипса:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Раскроем скобки, упростим выражение :

Эллипс

- Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

Эллипс

- Число a называется большой полуосью, b – малой полуосью.
- Точки A, A1, B, B1 называются вершинами эллипса.
- Точка O – центр эллипса.
- Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между его фокусами к длине большей оси (a>b), т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Эллипс

- Располагается симметрично осей.
- Ограничен прямыми $x=\pm a$, $y=\pm b$, т.е. вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные $2a$ и $2b$, а диагонали пересекаются в начале координат.

Эллипс

- Пример 1.

Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Определить длину его осей, координаты вершин и фокусов, а также величину эксцентриситета.

- Пример 2.

Написать каноническое уравнение эллипса, если фокальное расстояние равно 8, и эллипс проходит через точку $M(0,-3)$

Эллипс

- Пример 3

Определить длину осей и координаты фокусов эллипса $49x^2+24y^2=1176$

- Пример 4

Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках А(8;0) и А1(-8;0), а фокусы имеют координаты (±5;0)

Эллипс

- Пример 5

Написать уравнение эллипса, координаты фокусов которого (±3;0), а длина большей оси равна 12.

- Пример 6

Найти эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=180$

Эллипс

- Если координаты центра эллипса смещены относительно центра, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Эллипс

Пример 7

- Найти координаты центра, длины осей и эксцентриситет эллипса:

$$\frac{(x-5)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

- Построить эллипс

Домашнее задание

- Написать каноническое уравнение эллипса, если даны длины его полуоси a=5 и b=4.
- Дан эллипс, определить его оси и расстояние между фокусами:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

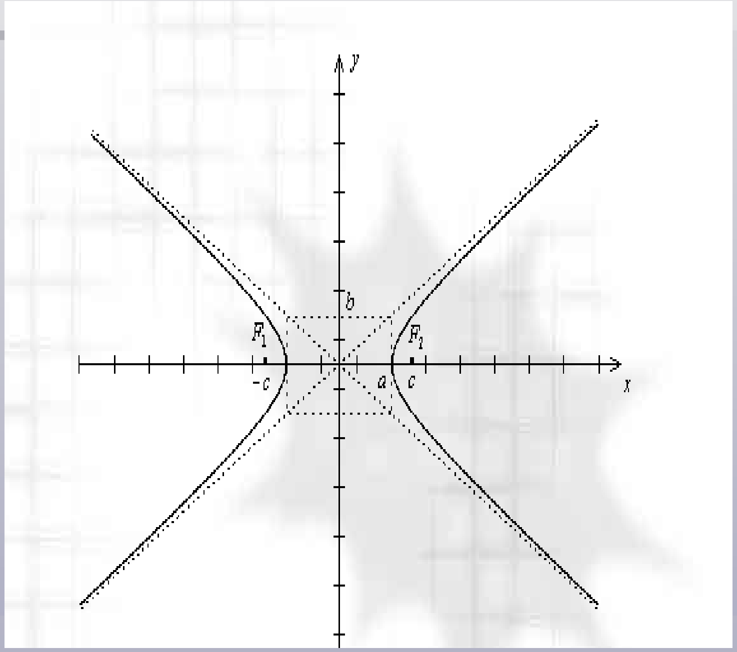
Виды кривых второго порядка

3. **Гипербола.**

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Гипербола

- F1, F2 – фокусы гиперболы
- F1F2 – фокальное расстояние
- F1(-c,0), F2(c,0)



Вывод формулы уравнения гиперболы

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

Раскроем скобки, упростим выражение:

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Гипербола

- Гипербола симметрична относительно оси OX, оси OY
- Пересекает ось OX в точках A1(-a,0),A2(a,0) – вершинах гиперболы.
- O(0,0) – центр гиперболы
- A1A2 – вещественная ось, B1B2 – мнимая ось
- F1M, F2M – фокальные радиусы гиперболы

Гипербола

- Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине вещественной оси, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Гипербола

- Прямые $y=\pm b/a\ x$ называются асимптотами гиперболы.
- Если длины полуосей гиперболы равны, т.е. $a=b$, то гипербола называется равнобочной.
- Асимптоты равнобочной гиперболы имеют вид: $y=\pm x$

Гипербола

- Пример 1.

Дана гипербола. Узнать, лежит ли точка А(2; 1,5) на какой-либо ее асимптоте.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Пример 2.

Определить координаты фокусов, длину осей и эксцентриситет гиперболы:

$$24x^2 - 25y^2 = 600$$

Гипербола

- Гипербола называется сопряженной, если ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

- Гипербола называется равносторонней, если a=b, т.е.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\grave{a}^2}=1,$$

ò .å. $x^2-y^2=1$

Гипербола

- Пример 3

Написать уравнение гиперболы, если b=6, c=13.

- Пример 4.

Написать уравнение гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси ОХ, рано 10.

Гипербола

- Пример 5.

Найти острый угол между асимптотами гиперболы $4x^2-5y^2=100$.

Пример 6.

Написать уравнения асимптот, а также найти величину эксцентриситета гиперболы $x^2-2y^2=6$.

Гипербола

- Уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Домашнее задание

1) Написать каноническое уравнение гиперболы, если a=6, b=2.
2) Определить координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы $16y^2-9x^2=144$.

Виды кривых второго порядка

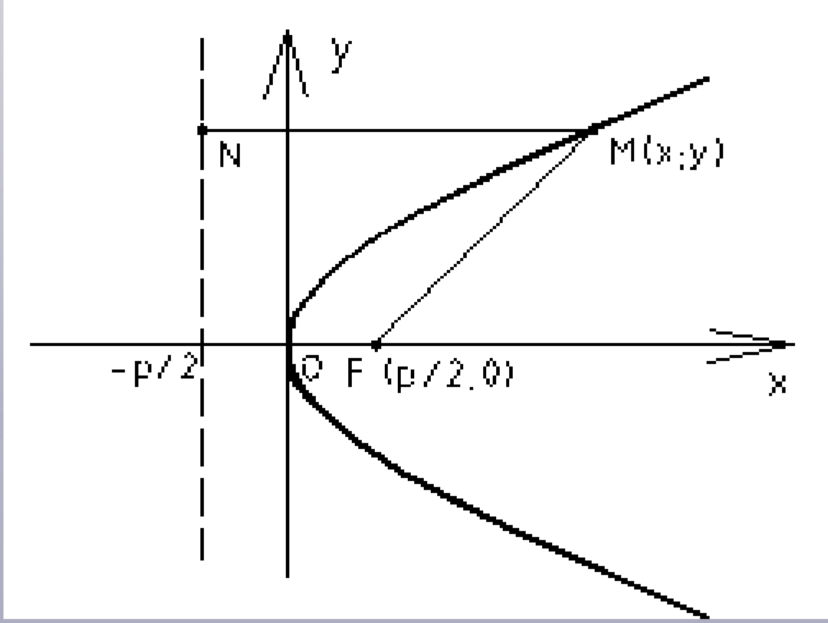
- 4. **Парабола**

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой.

Парабола

- F(p/2,0) – фокус
- X=-p/2 – уравнение директрисы
- O(0,0) - вершина
- Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$



Парабола

- Парабола проходит через начало координат
- Располагается справа от оси OY если p>0
- Парабола симметрична относительно оси OX
- Если уравнение имеет вид $x^2=2py$, то ветви параболы будут направлены вверх.

Парабола

- Пример 1

Построить параболу $y^2=6x$

- Пример 2

Дана парабола $y^2=12x$. Найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

- Пример 3.

Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная, что фокус имеет координаты F(4,0)

Парабола

- Уравнение параболы со смещенным центром задается уравнением:

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

Парабола

- Пример 6.

Написать уравнение параболы с центром в точке А(1;1), зная что она проходит через точку М(2;0), ее ось симметрии параллельна оси OY.

- Пример 7.

Дана парабола $x^2-6x+8y-15=0$. Найти координаты вершин и фокуса, а также уравнения ее оси симметрии и директрисы.

Домашнее задание

- Выучить лекцию.
- Задача 1.

Построить кривые второго порядка и найти их основные элементы:

$$1)(x-2)^2+(y+4)^2=16$$

$$2)\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$$3)\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$$

$$4)y^2=8x$$