

# **НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

**1. Определение и свойства  
неопределенного интеграла**

# Определения и теоремы:

**Определение.** Первообразной функцией для данной функции  $f(x)$  на данном промежутке называется, такая функция  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$  или дифференциал которой равен  $f(x)dx$  на рассматриваемом промежутке.

**Теорема.** Две различные первообразные одной и той же функции, определенной в некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на *const*.

**Определение.** Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции  $f(x)$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  или от дифференциального выражения  $f(x)dx$  и обозначается символами  $\int f(x)dx$ .

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

# Свойства неопределенного интеграла

1. Если непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$$

2.  $d\int f(x)dx = f(x)dx$

$$[\int f(x)dx]' = f(x)$$

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций.

## **2. Таблица простейших неопределенных интегралов**

### **Таблица интегралов**

1.

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1$$

2.

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$



3.  $\int e^u du = e^u + C$

4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5.  $\int \cos u du = \sin u + C$

6.  $\int \sin u du = -\cos u + C$

7.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$

8.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C$

**9.**

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C$$

**10.**

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C$$

# Дополнительные формулы:

$$1. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$2. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-u}{a+u} \right| + C$$

$$3. \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C$$

$$4. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$$

$$5. \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

# 3. Основные методы интегрирования :

## 1. Метод разложения.

Пусть  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  , тогда

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

## **2.Метод подстановки (метод введения новой переменной)**

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

### **3.Метод интегрирования по частям.**

$$\int u dv = uv - \int v du$$



# Неберущиеся интегралы

$$\int \sin x \cdot \ln x dx$$

$$\int e^{-x^2} dx$$

$$\int \cos x \cdot \ln x dx$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx$$

# Теорема Коши

- Теорема: Всякая непрерывная функция имеет первообразную (от всякой непрерывной функции существует неопределенный интеграл).