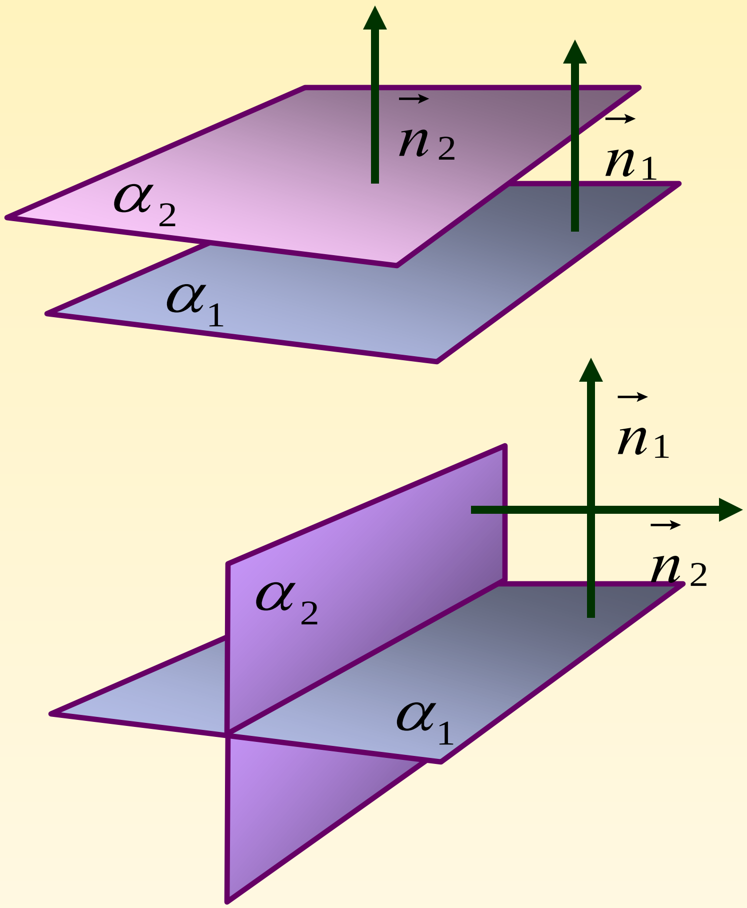
Плоскость в пространстве



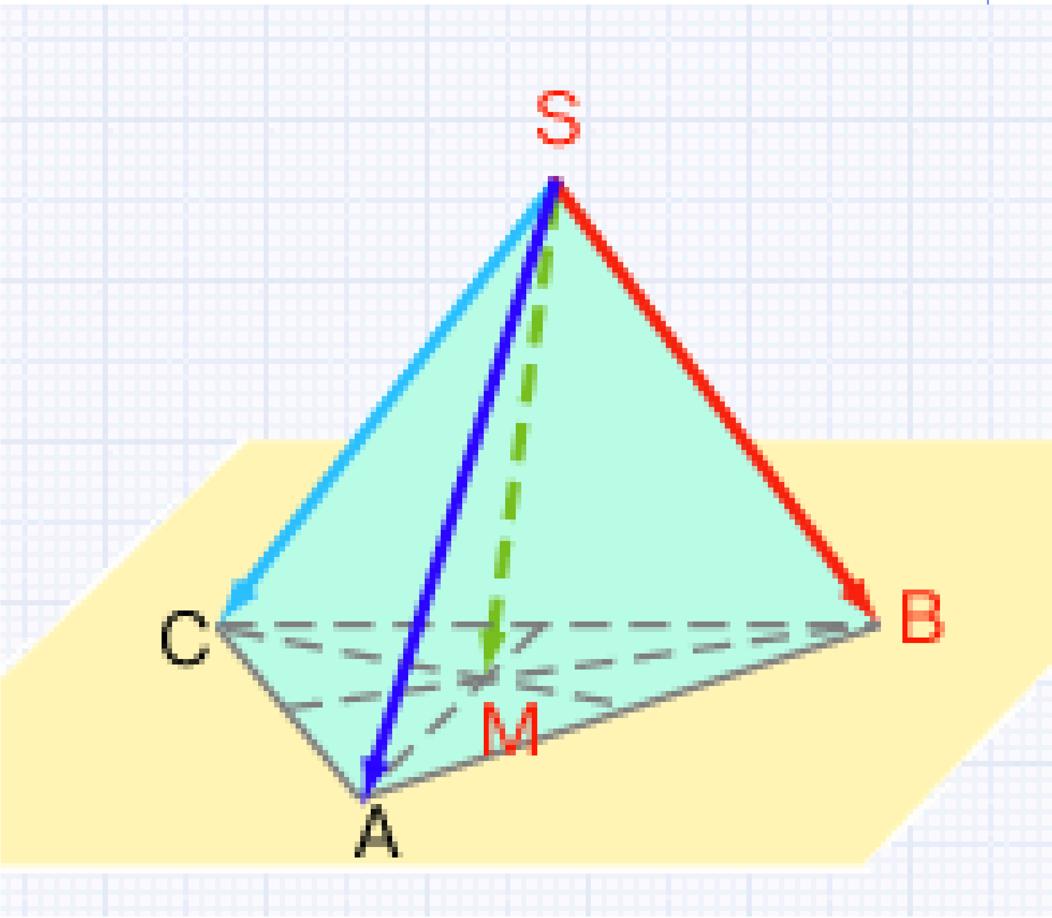
Плоскость в пространстве

- Общее уравнение плоскости
- Уравнение плоскости в отрезках
- Угол между двумя плоскостями
- Угол между прямой и плоскостью
- Расстояние от точки до плоскости
- Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Задача.

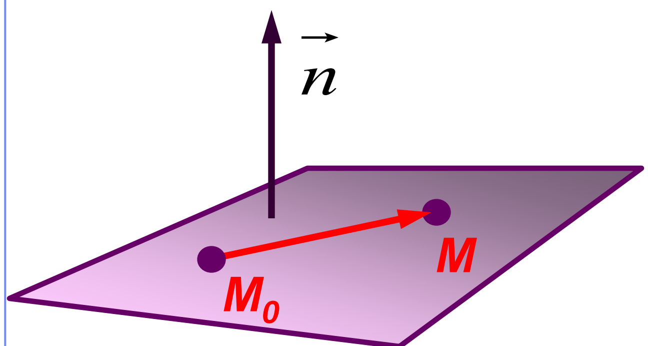
В тетраэдре SABC точка M – пересечение медиан треугольника ABC. Разложите вектор SB по векторам SA, SC и SM.

$$\overrightarrow{SB} = 3\overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SC}$$



Общее уравнение плоскости

Выведем уравнение плоскости, проходящей через точки $M(x; y; z)$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$



$$\overrightarrow{M_0M}\ \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$$

$$\boxed{\vec{n}\ \{a; в; c\}}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$

Значит $\vec{n}$ перпендикулярен плоскости и, следовательно, любому вектору, лежащему в плоскости .

Условие перпендикулярности двух векторов:

$$a(x-x_0)+в(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

Нормальный вектор плоскости

Уравнение (1) можно записать в виде:

$$\boxed{ax+вy+cz+d=0 \qquad (2)}$$

Общее уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости называется *полным*, если все коэффициенты ***a; в; c; d*** отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется *неполным*.

Общее уравнение плоскости

Виды неполных уравнений:

1) $D=0; \quad Ax+By+Cz=0$ Плоскость проходит через точку *O*.

2) $A=0; \quad By+Cz+D=0 \quad // \,(OX)$

3) $B=0; \quad Ax+Cz+D=0 \quad // \,(OY)$

4) $C=0; \quad Ax+By+D=0 \quad // \,(OZ)$

5) $A=0; B=0 \quad Cz+D=0 \quad // \,(XOY)$

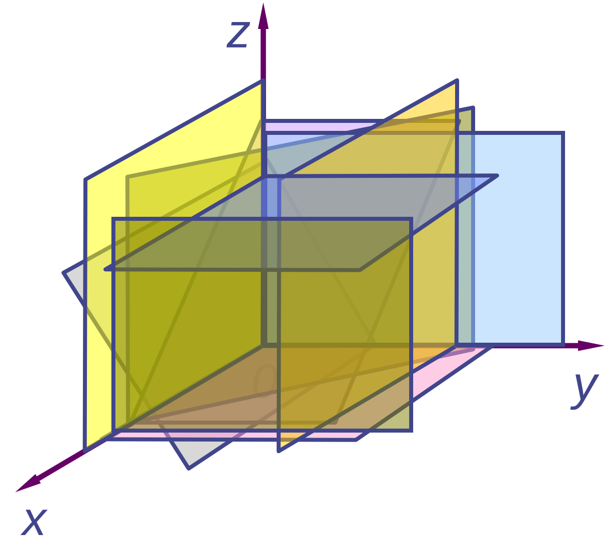
6) $B=0; C=0 \quad Ax+D=0 \quad // \,(YOZ)$

7) $A=0; C=0 \quad By+D=0 \quad // \,(XOZ)$

8) $B=0; C=0; D=0 \quad Ax=0 \Rightarrow x=0 \quad (YOZ)$

9) $A=0; C=0; D=0 \quad By=0 \Rightarrow y=0 \quad (XOZ)$

10) $A=0; B=0; D=0 \quad Cz=0 \Rightarrow z=0 \quad (XOY)$



Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим полное уравнение плоскости:

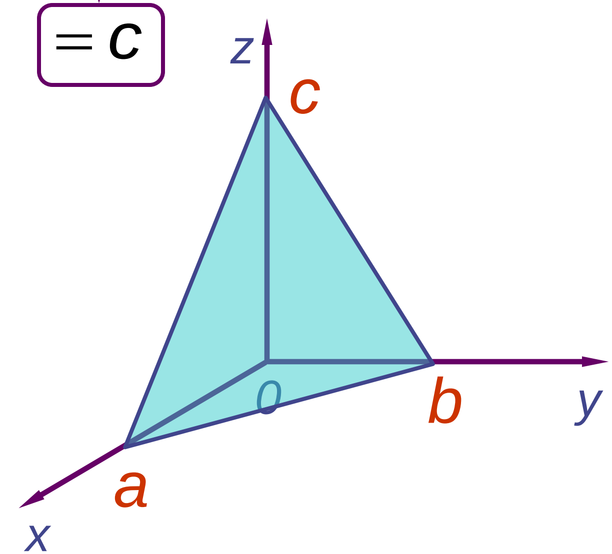
$$Ax+By+Cz+D=0 \;\Rightarrow\; Ax+By+Cz=-D \;\Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

$$\boxed{=a} \quad \boxed{=b} \quad \boxed{=c}$$

Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение в отрезках используется для построения плоскости, при этом a, b и c – отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат.



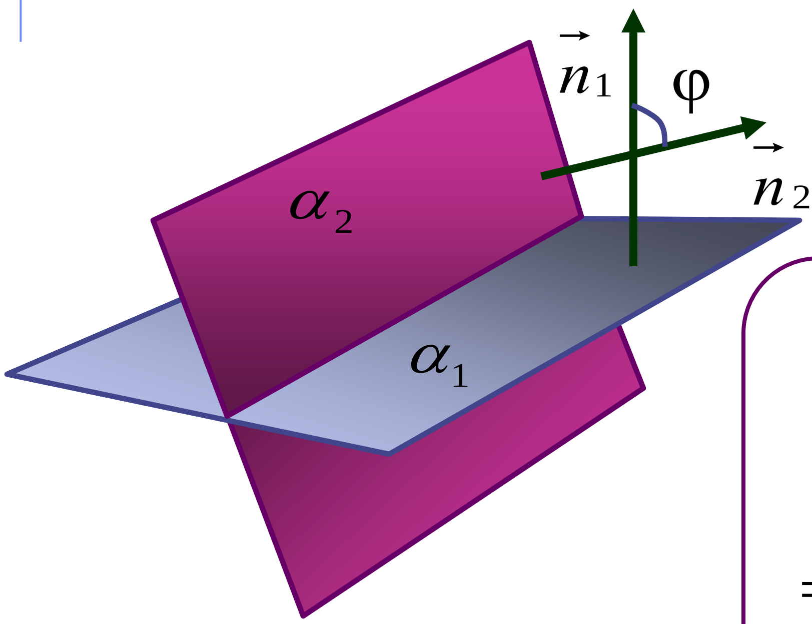
Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1: \quad a_1x + в_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\alpha_2: \quad a_2x + в_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Углом между этими плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям.



$$\vec{n}_1 = \{a_1; в_1; c_1\}$$

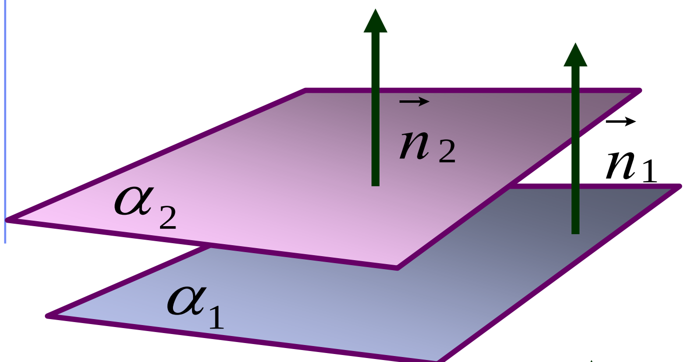
$$\vec{n}_2 = \{a_2; в_2; c_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} =$$

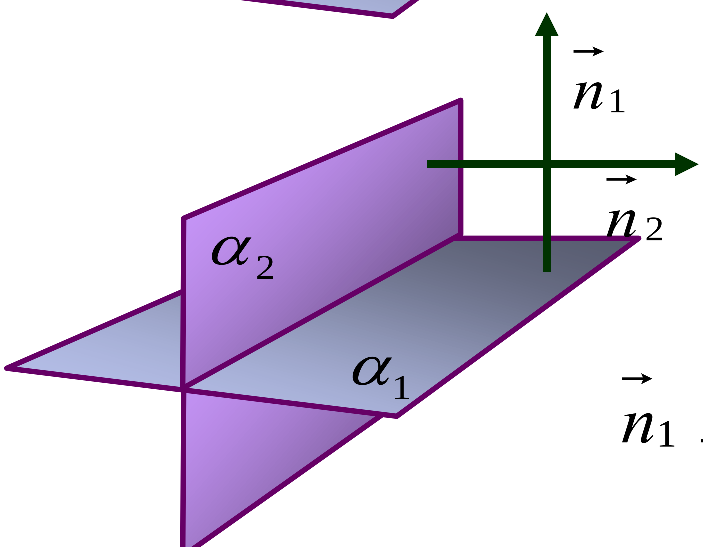
$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + в_1 \cdot в_2 + c_1 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + в_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + в_2^2 + c_2^2}}$$

Угол между двумя плоскостями

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей аналогичны условию параллельности и перпендикулярности нормальных векторов:



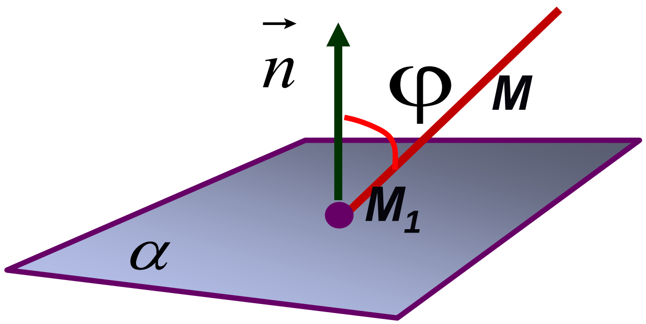
$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$



$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \boxed{a_1 \cdot a_2 + в_1 \cdot в_2 + c_1 \cdot c_2 = 0}$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть точка M_1 – точка пересечения прямой $\boldsymbol{p}$ с плоскостью $\alpha: \ ax + вy + cz + d = 0$



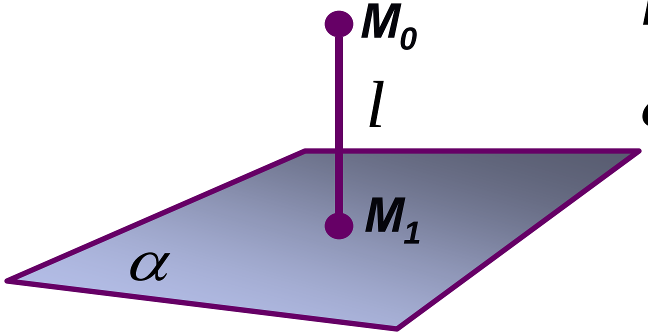
$$\angle\left(M_1M, \alpha\right) = 90^0 - \varphi$$

$Если \ \varphi - угол \ между \ прямой \ и \ нормалью,$

$тогда \ угол \ между \ прямой \ и \ плоскостью \ \ равен \ 90^0 - \varphi$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на плоскость $\alpha: \ ax + вy + cz + d = 0$



l – *расстояние от точки* M_0 *до плоскости* α

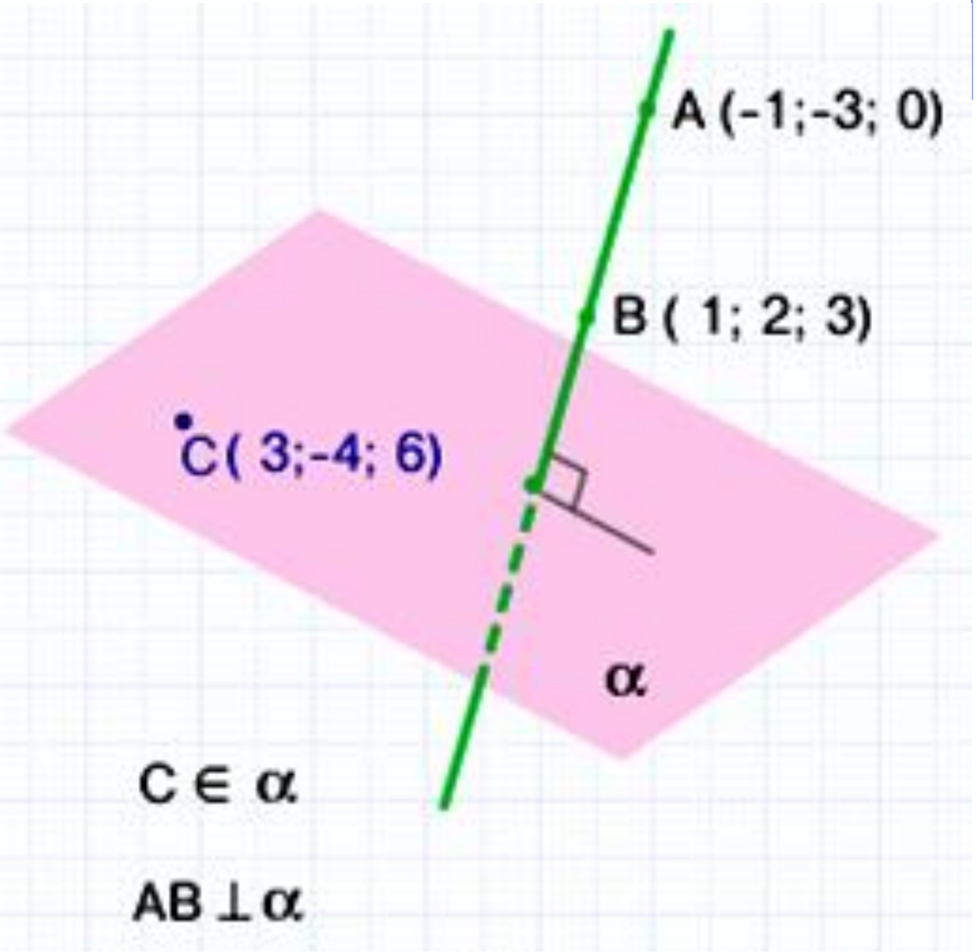
$$l = \left|M_1M_0\right| = \left|k\vec{n}\right|$$

$$\boxed{l = \frac{\left|ax_0 + вy_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + в^2 + c^2}}}$$

Решение задач

Задача. **Известны координаты точек А, В и С. Найдите уравнение плоскости, перпендикулярной прямой АВ и проходящей через точку С.**

$$2x + 5y + 3z - 4 = 0$$

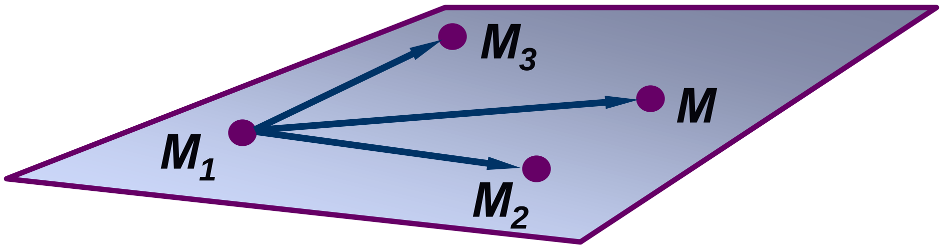


Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки $M_1(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$, $M_2(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ и $M_3(x_3\,;\,y_3\,;\,z_3)$ не лежат на одной прямой.

Тогда векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ не коллинеарны.

Точка $M(x\,;\,y\,;\,z)$ лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2 и M_3 только в том случае, если векторы:



$$\overline{M_1M_2};\ \overline{M_1M_3} \text{ и } \overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$ компланарны.

$$\left(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}\right) \cdot \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки