

ДВУГРАННЫЙ УГОЛ

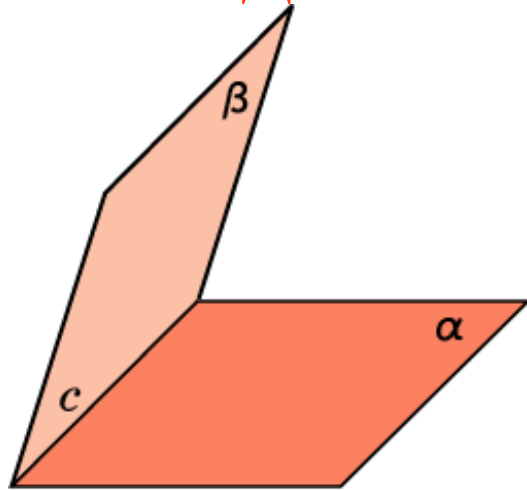


Рис. 1

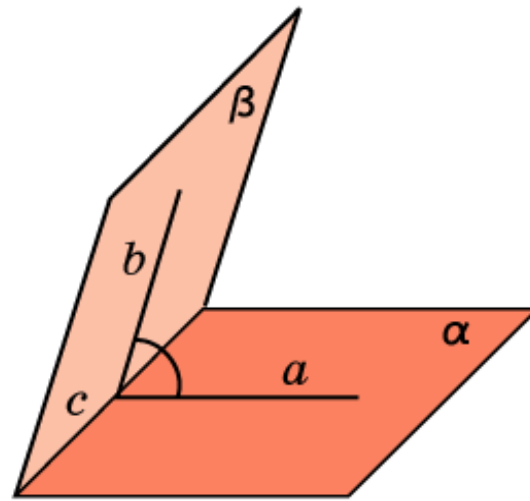


Рис. 2

Двугранным углом называется фигура (рис. 1), образованная двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

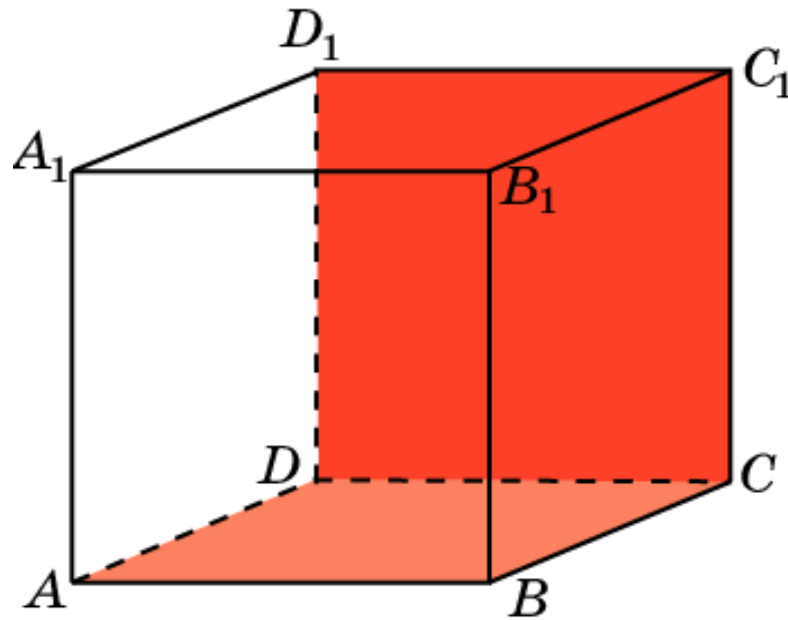
Линейным углом двугранного угла называется угол, полученный в результате пересечения данного двугранного угла и какой-нибудь плоскости, перпендикулярной его ребру (рис. 2).

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Куб 1

В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями

ABC и CDD_1 .

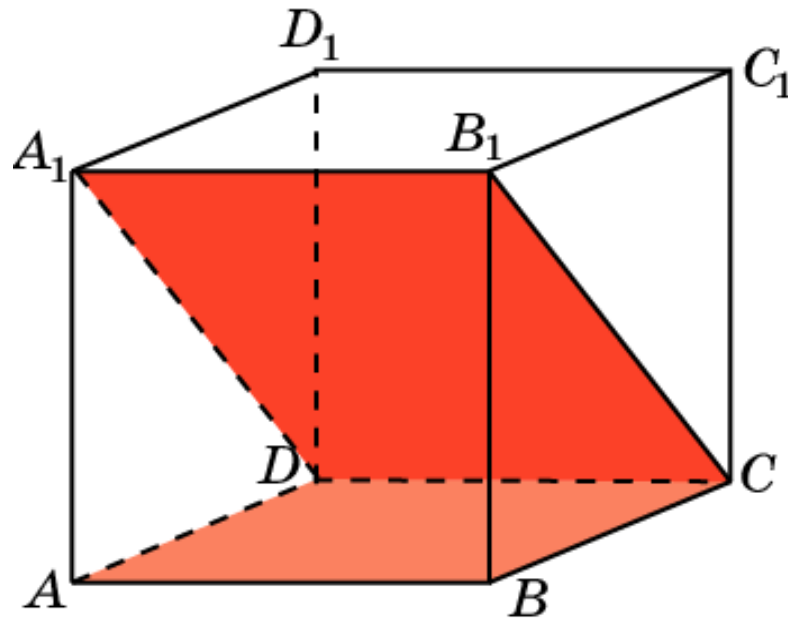


Ответ: 90° .

Куб 2

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между плоскостями

ABC и CDA_1 .

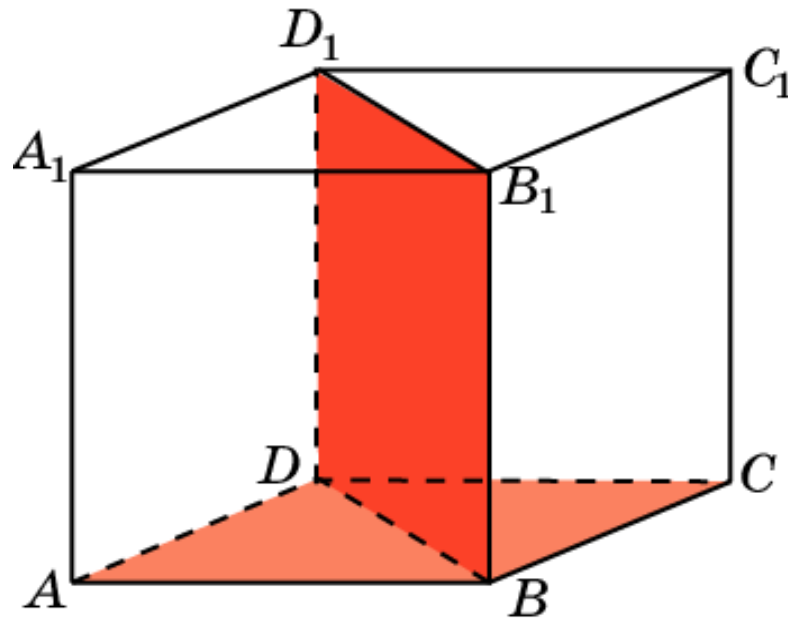


Ответ: 45° .

Куб 3

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между плоскостями

ABC и BDD_1 .

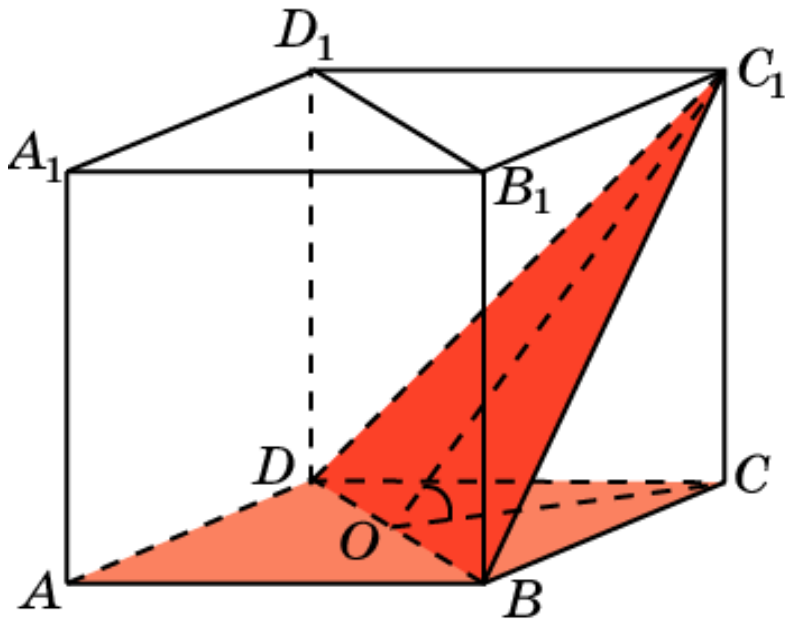


Ответ: 90° .

Куб 4

В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями

ABC и BC_1D .



Решение: Обозначим O середину BD . Искомым линейным углом будет угол COC_1 . В

прямоугольном треугольнике COC_1 имеем

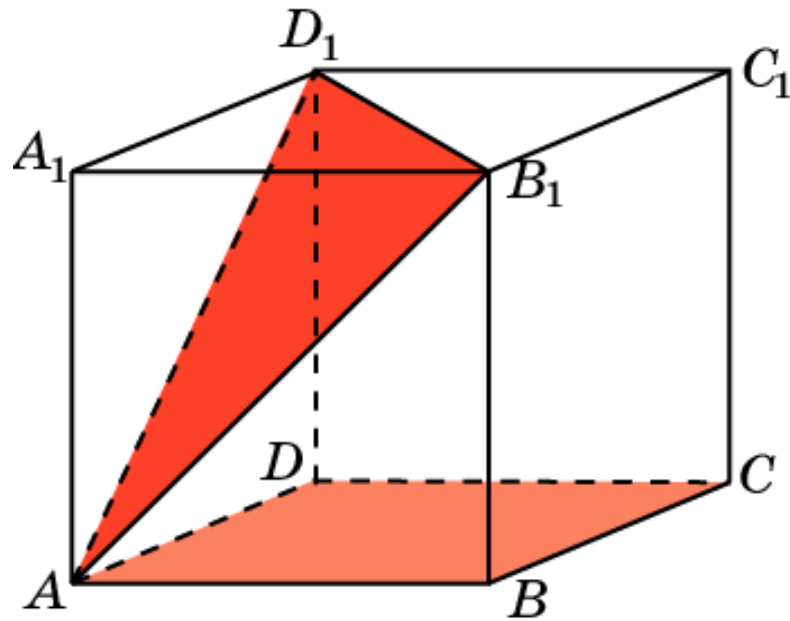
$$CC_1 = 1; CO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $tg \varphi = \sqrt{2}$.

Куб 5

В кубе $A\dots D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями

ABC и AB_1D_1 .



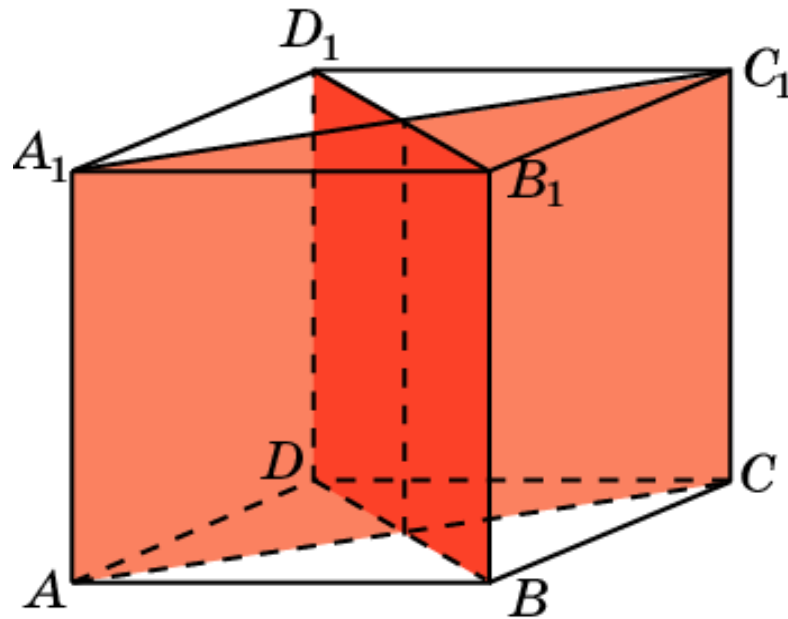
Решение: Плоскость AB_1D_1 параллельна плоскости BC_1D . Из предыдущей задачи следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}.$$

Куб 6

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между плоскостями

ACC_1 и BDD_1 .

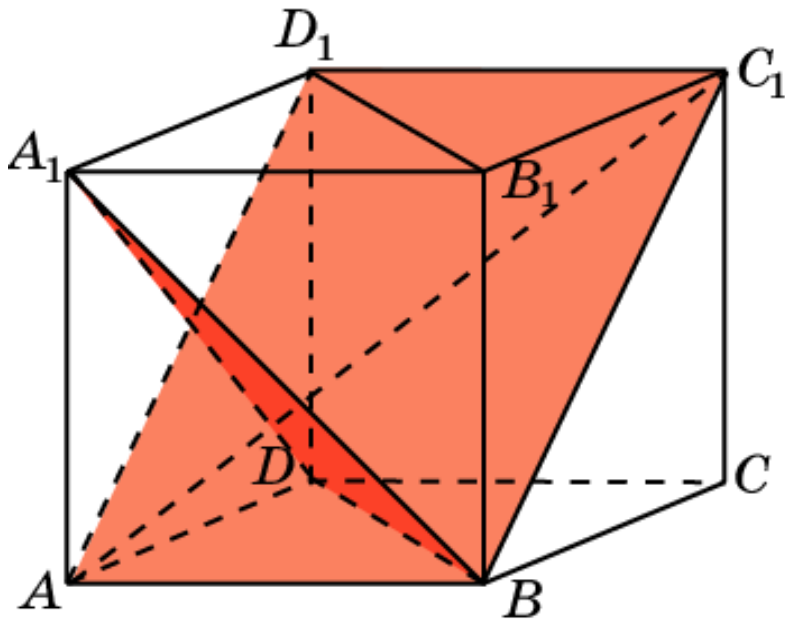


Ответ: 90° .

Куб 7

В кубе $A\dots D_1$ найдите угол между плоскостями

BC_1D_1 и BA_1D .



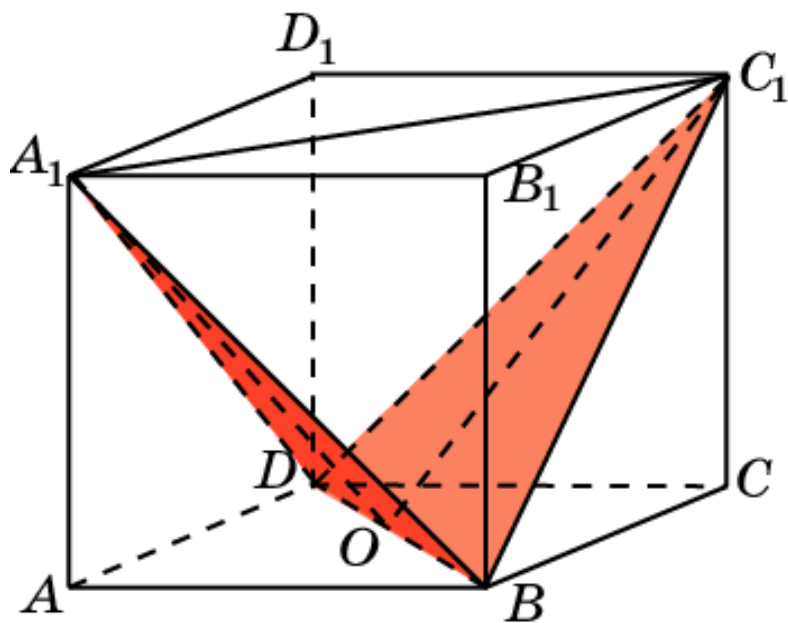
Решение: Заметим, что плоскость равностороннего треугольника BDA_1 перпендикулярна диагонали AC_1 , которая проходит через центр этого треугольника.

Следовательно, данные плоскости перпендикулярны. Искомый угол равен 90° .

Ответ: 90° .

Куб 8

В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BC_1D и BA_1D .



Решение: Пусть O – середина BD .
Искомый угол равен углу A_1OC_1 .
Имеем

$$A_1C_1 = \sqrt{2}; A_1O = C_1O = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

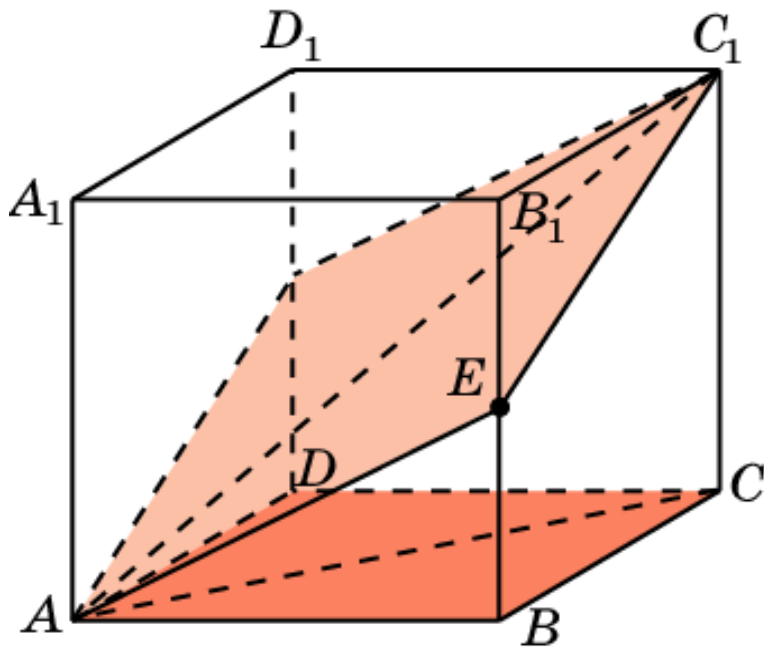
Используя теорему косинусов,
получим

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

Куб 9

В кубе $A\dots D_1$ точка E – середина ребра BB_1 . Найдите тангенс угла между плоскостями AEC_1 и ABC .



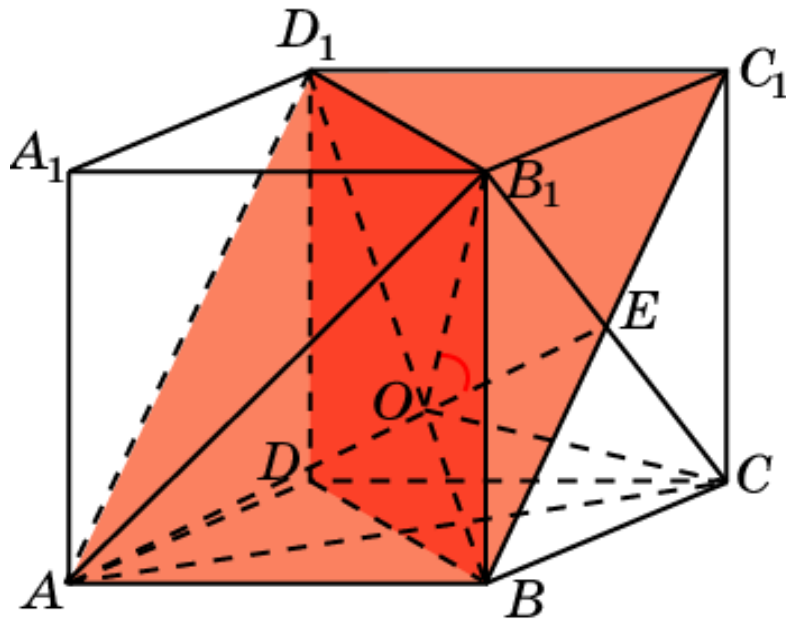
Решение: Искомый угол равен углу SAC_1 . Его тангенс равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Куб 10*

В кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями

ABC_1 и BB_1D_1 .

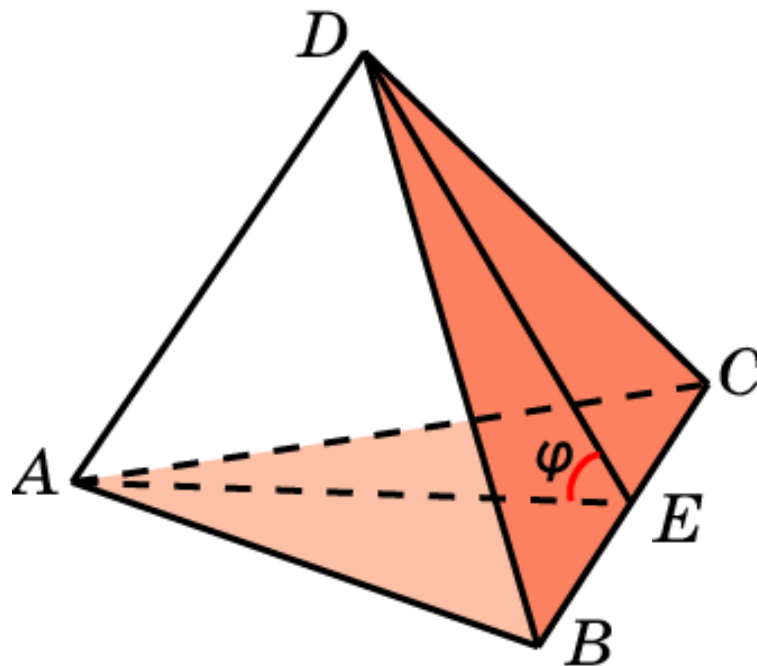


Решение: Заметим, что плоскость равностороннего треугольника ACB_1 перпендикулярна диагонали BD_1 , которая проходит через центр O этого треугольника. Искомым линейным углом будет угол B_1OE , который равен 60° .

Ответ: 60° .

Пирамида 1

В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите косинус угла между плоскостями ABC и BCD .



Решение: Пусть E – середина BC . Искомым линейным углом φ является угол AED . В треугольнике AED имеем:

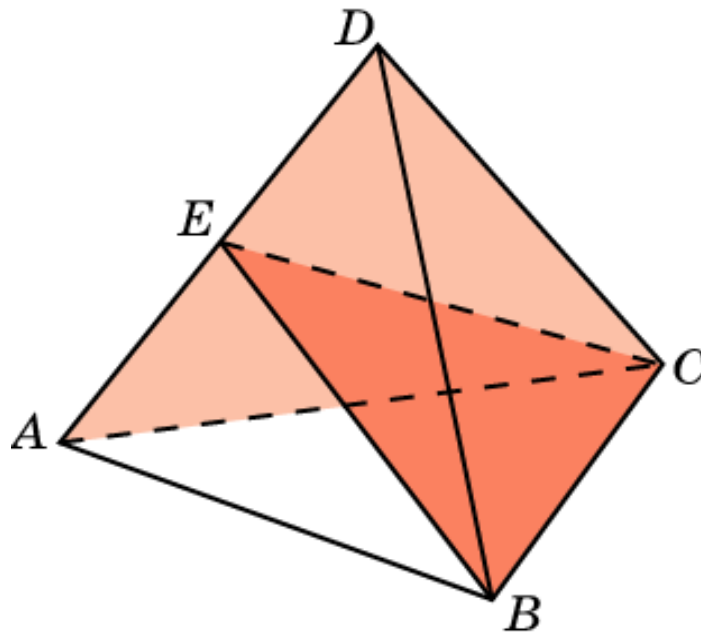
$AD = 1, AE = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов находим $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

Пирамида 2

В правильном тетраэдре $ABCD$ точка E – середина ребра AD .

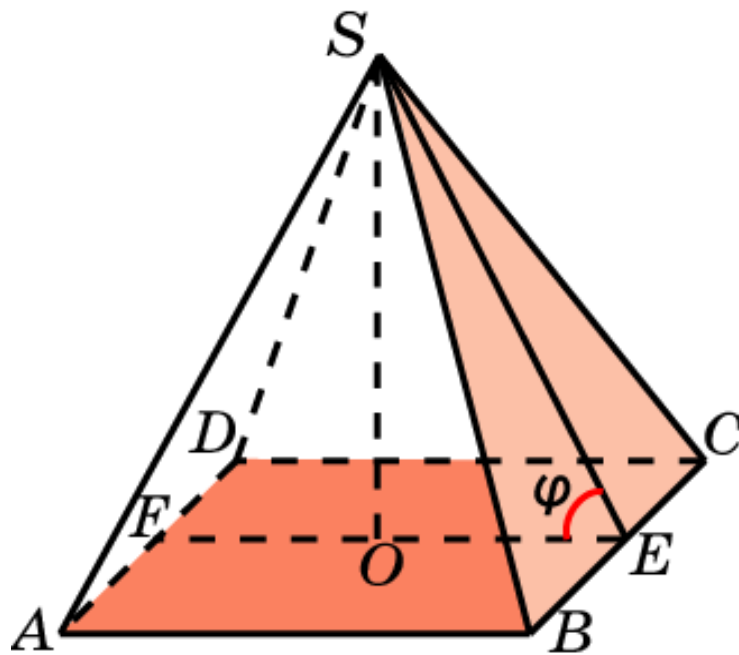
Найдите угол между плоскостями ACD и BCE .



Ответ: 90° .

Пирамида 3

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SBC и ABC .



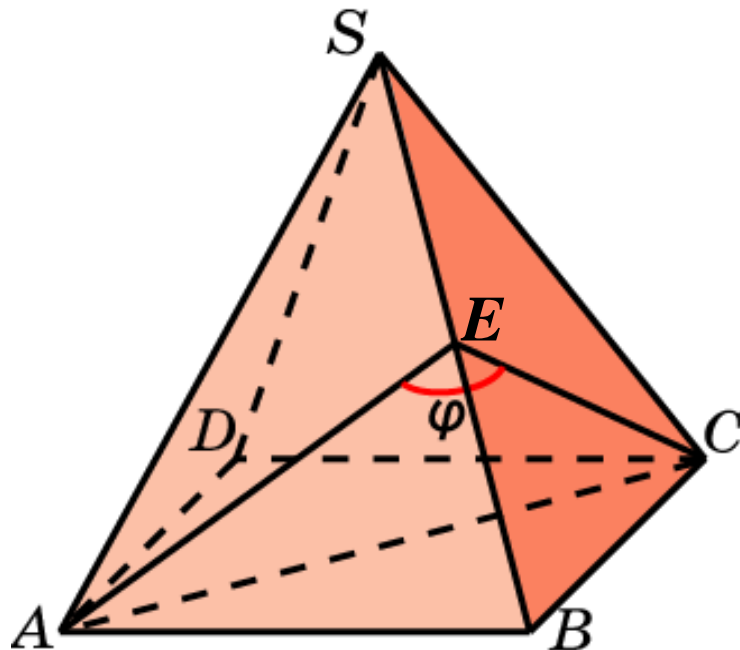
Решение: Пусть E, F – середины ребер BC и AD , O – центр основания. Искомым линейным углом φ является угол SEF .

В прямоугольном треугольнике SEO имеем $EO = \frac{1}{2}$, $SE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Ответ:** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пирамида 4

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAB и SBC .



Решение: Пусть E – середина ребра SB . Искомым линейным углом φ является угол AEC . В треугольнике AEC имеем:

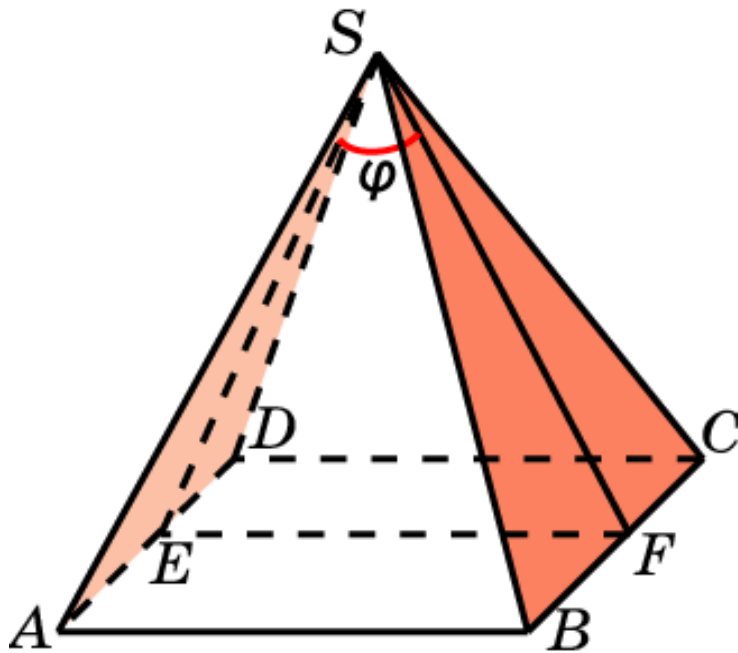
$AC = \sqrt{2}$, $AE = CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов находим

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$.

Пирамида 5

В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями SAD и SBC .



Решение: Пусть E, F – середины ребер AD, BC . Искомым линейным углом φ является угол ESF . В треугольнике ESF

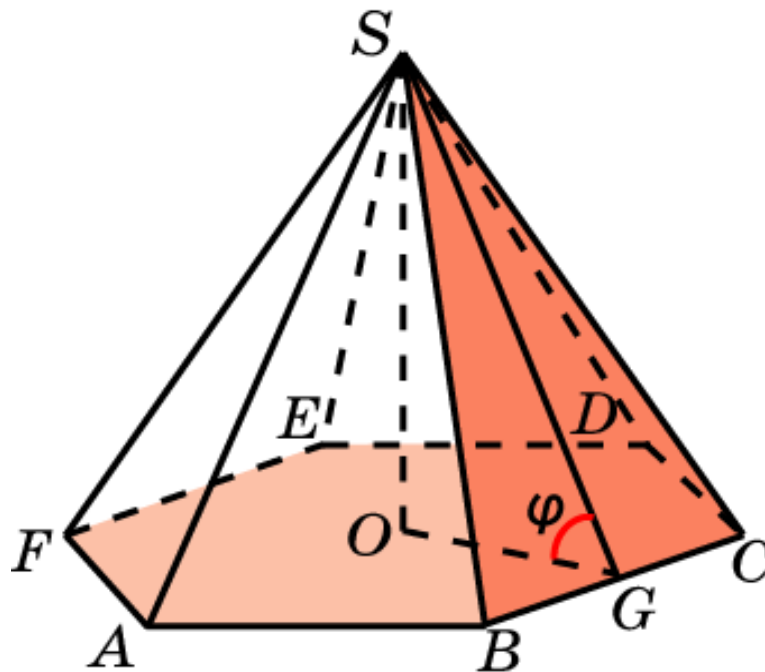
имеем: $EF = 1, SE = SF = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По теореме косинусов находим

$$\cos \varphi = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.

Пирамида 6

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и SBC .



Решение: Пусть O – центр основания, G – середина ребра BC .

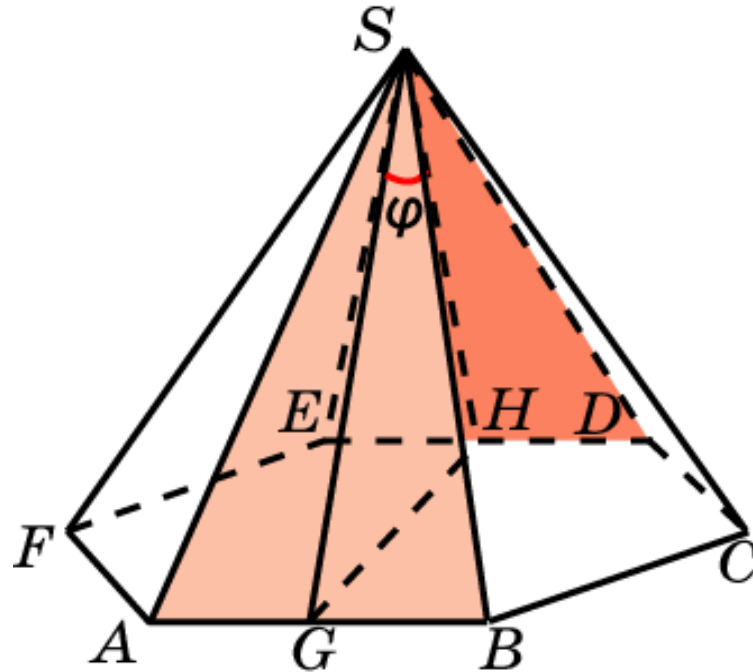
Искомый линейным углом φ является угол SGO .

В прямоугольном треугольнике SGO имеем: $OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $SG = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Следовательно, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **Ответ:** $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Пирамида 7

В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAB и SDE .



Решение: Пусть G, H – середины ребер AB, DE . Искомым линейным углом φ является угол GSH . В треугольнике GSH

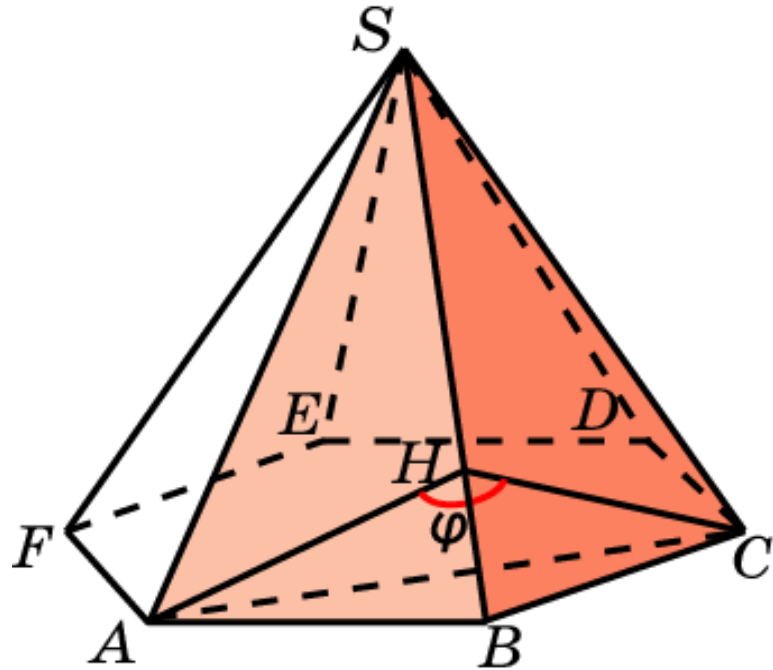
имеем: $GH = \sqrt{3}, SG = SH = \frac{\sqrt{15}}{2}$. По теореме косинусов находим

$$\cos \varphi = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{3}{5}$.

Пирамида 8

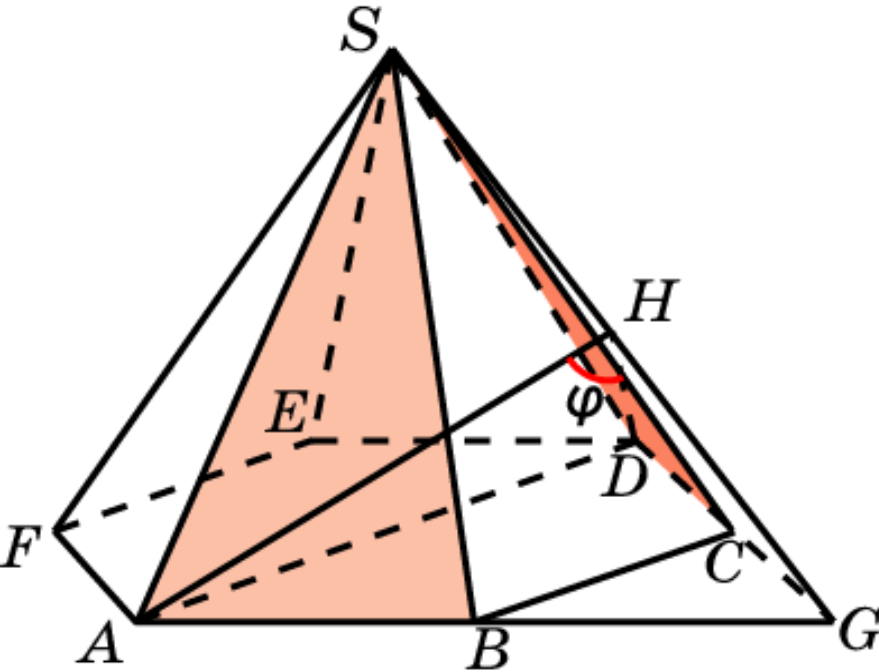
В правильной 6-ой пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAB и SBC .



Решение: В треугольниках SAB и SBC опустим высоты AH и CH на сторону SB . Искомым линейным углом φ является угол AHC . В прямоугольном треугольнике AHC имеем: $AC = \sqrt{3}$, $AH = CH = \frac{\sqrt{15}}{4}$. По теореме косинусов находим $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$. **Ответ: $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$.**

Пирамида 9*

В правильной 6-ой пирамиде $SAB CDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус двугранного угла, образованного гранями SAB и SBC .



Решение: Продолжим ребра AB и DC до пересечения в точке G . В треугольниках SAG и SDG опустим высоты AH и DH на сторону SG . Искомым линейным углом φ является угол AHD . В треугольнике AHD имеем:

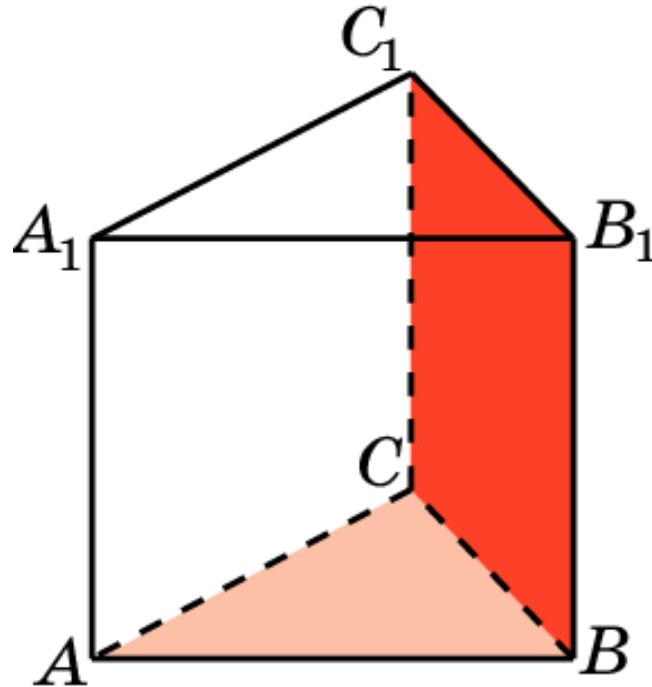
$$AD = 2, AH = DH = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

По теореме косинусов находим $\cos \varphi = \frac{1}{5}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{5}$.

Призма 1

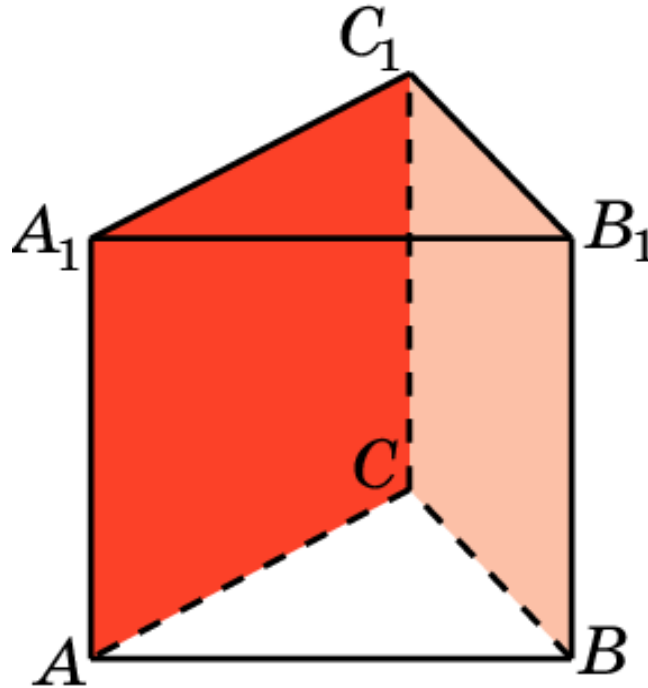
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BB_1C_1 .



Ответ: 90° .

Призма 2

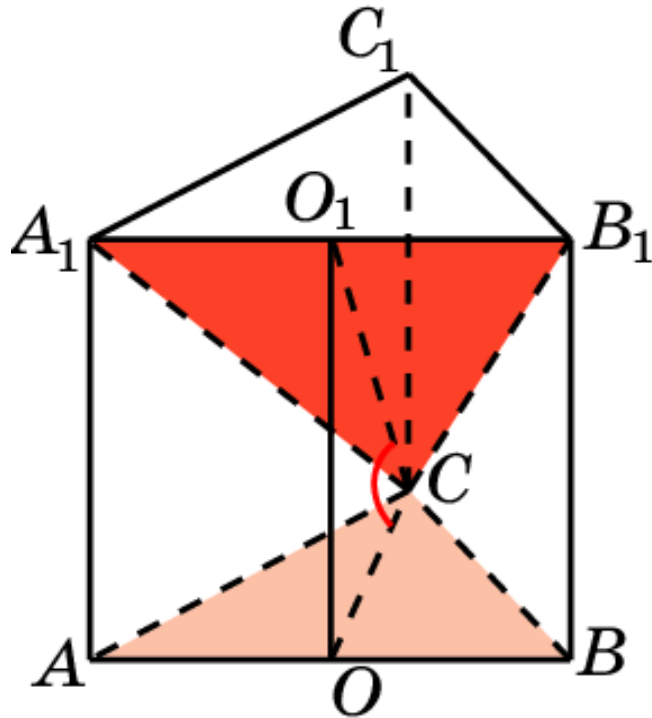
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1 .



Ответ: 60° .

Призма 3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и A_1B_1C .



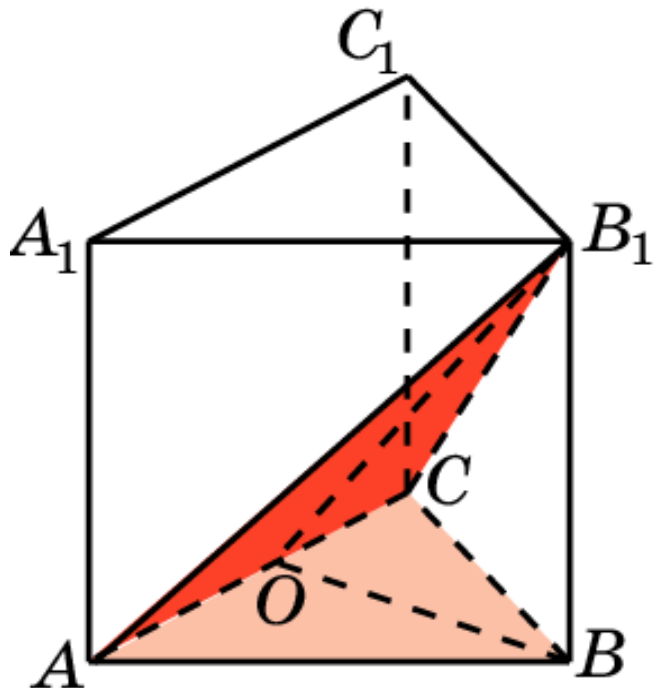
Решение: Обозначим O, O_1 - середины ребер AB и A_1B_1 . Искомым линейным углом будет угол OCO_1 . В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем

$$OO_1 = 1; OC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $tg \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Призма 4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACB_1 .



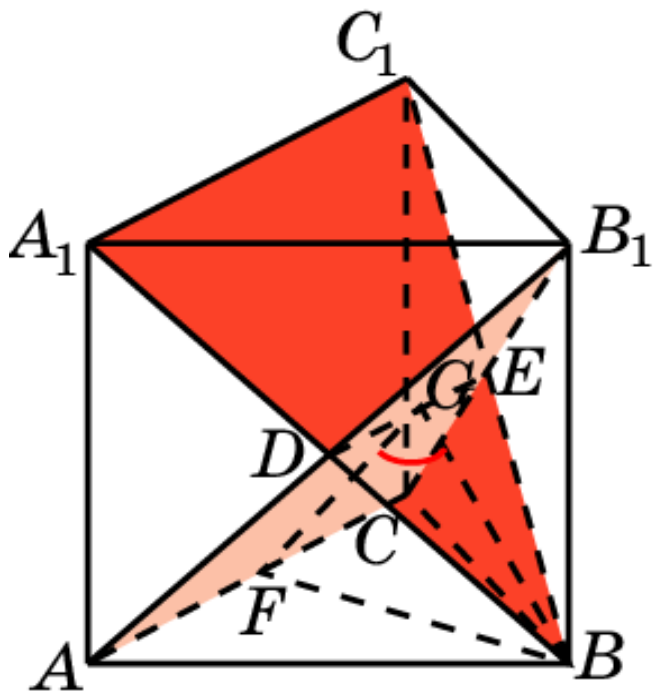
Решение: Обозначим O - середину ребра AC . Искомым линейным углом будет угол BOB_1 . В прямоугольном треугольнике BOB_1 имеем

$$BB_1 = 1; BO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $tg \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Призма 5

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B .



Решение: Данные плоскости пересекаются по прямой DE . Обозначим G середину DE и F середину AC . Угол BGF будет искомым. В треугольнике BGF имеем

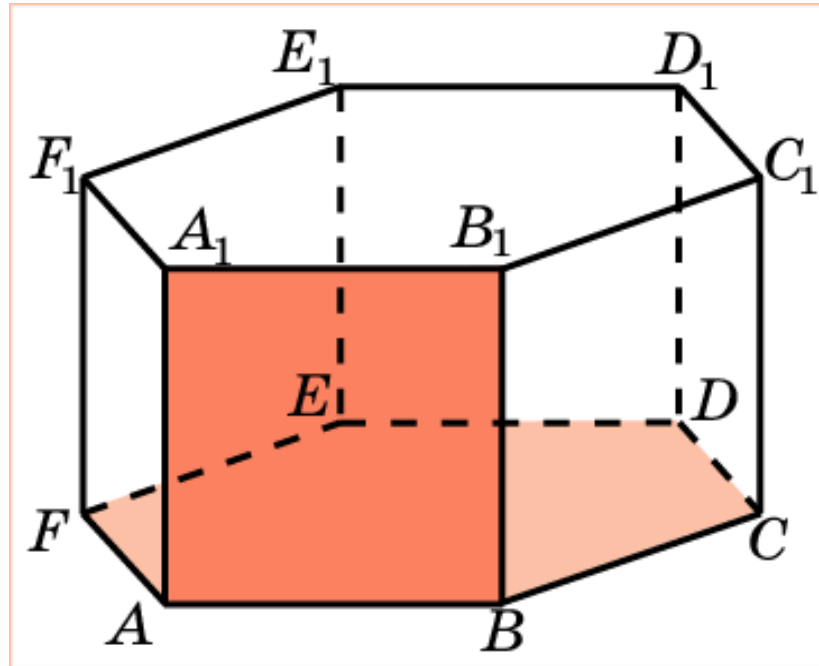
$$BF = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad BG = FG = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

По теореме косинусов, имеем

$$\cos \varphi = \frac{1}{7}.$$

Призма 6

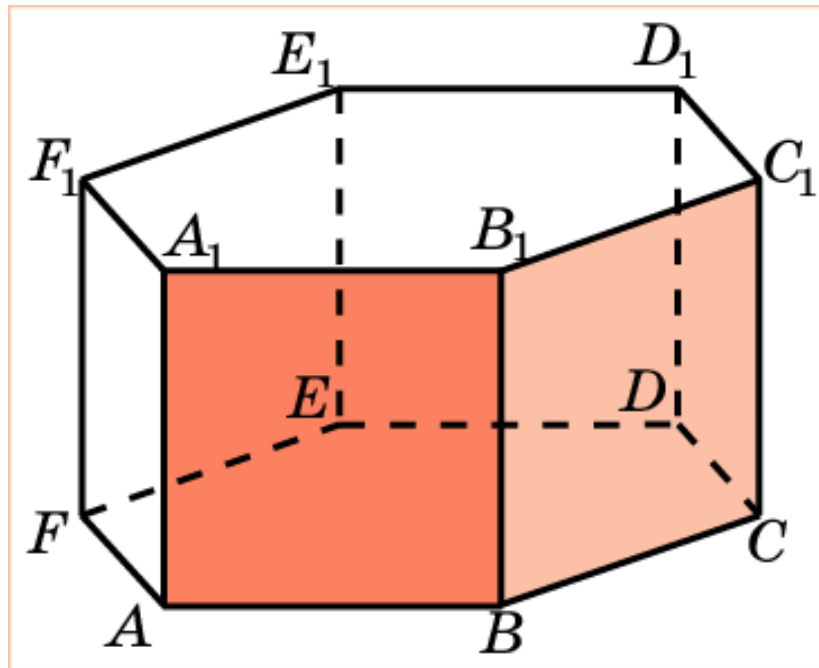
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями ABC и ABB_1 .



Ответ: 90° .

Призма 7

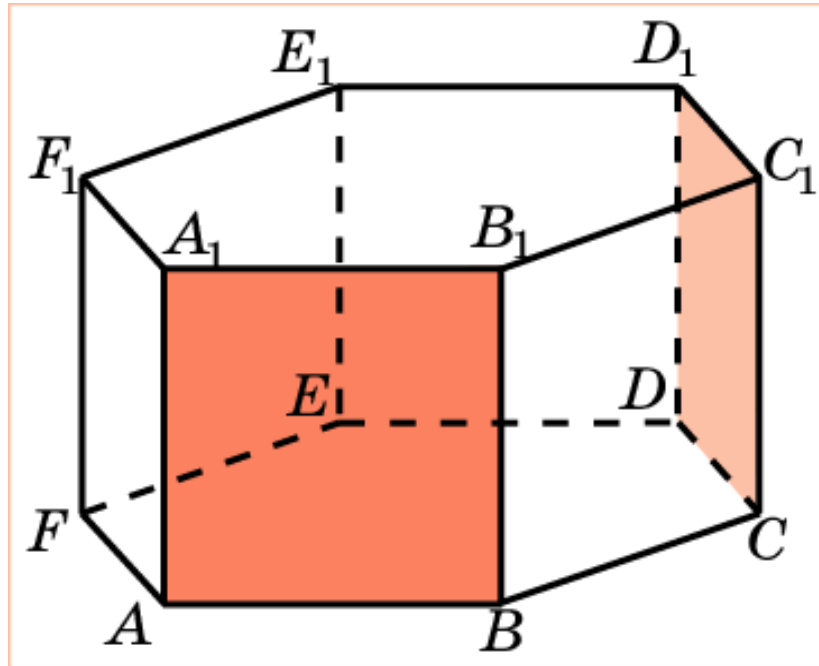
Найдите двугранный угол, образованный соседними боковыми гранями правильной 6-й призмы $A...F_1$.



Ответ: 120° .

Призма 8

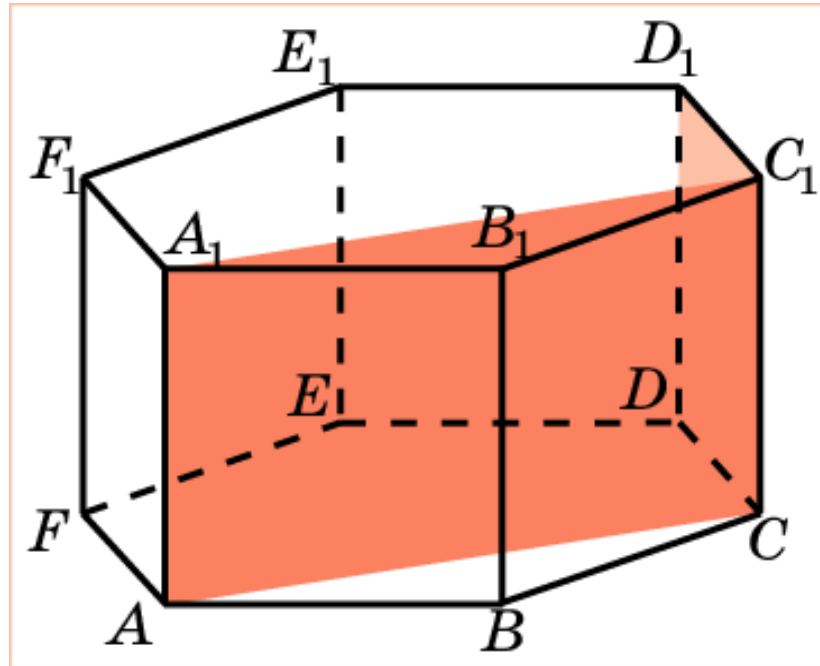
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями ABB_1 и CDD_1 .



Ответ: 60° .

Призма 9

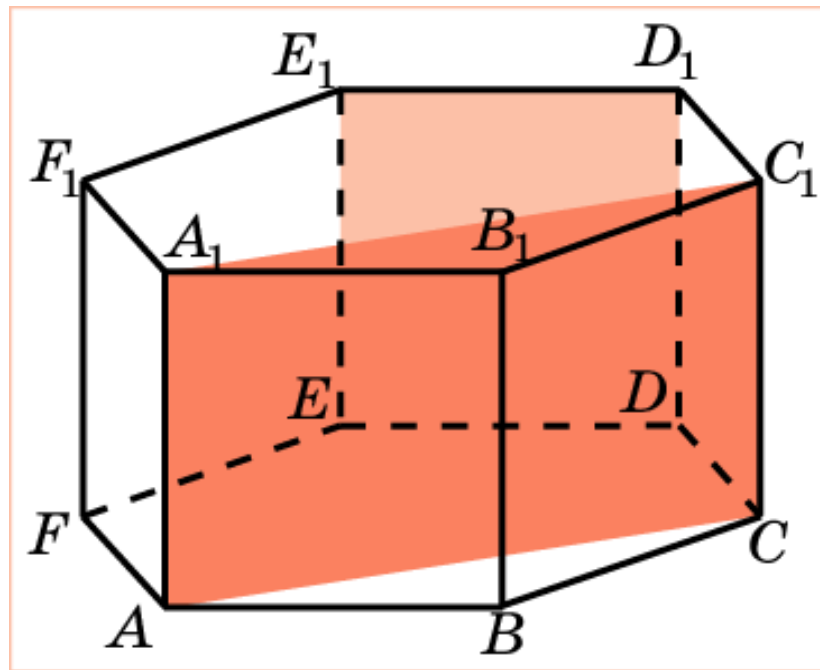
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и CDD_1 .



Ответ: 90° .

Призма 10

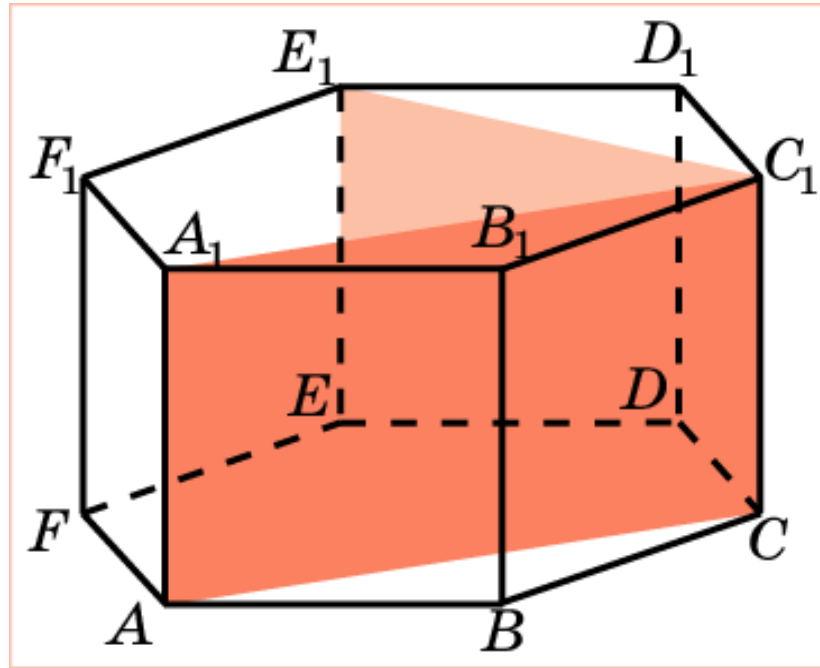
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и DEE_1 .



Ответ: 30° .

Призма 11

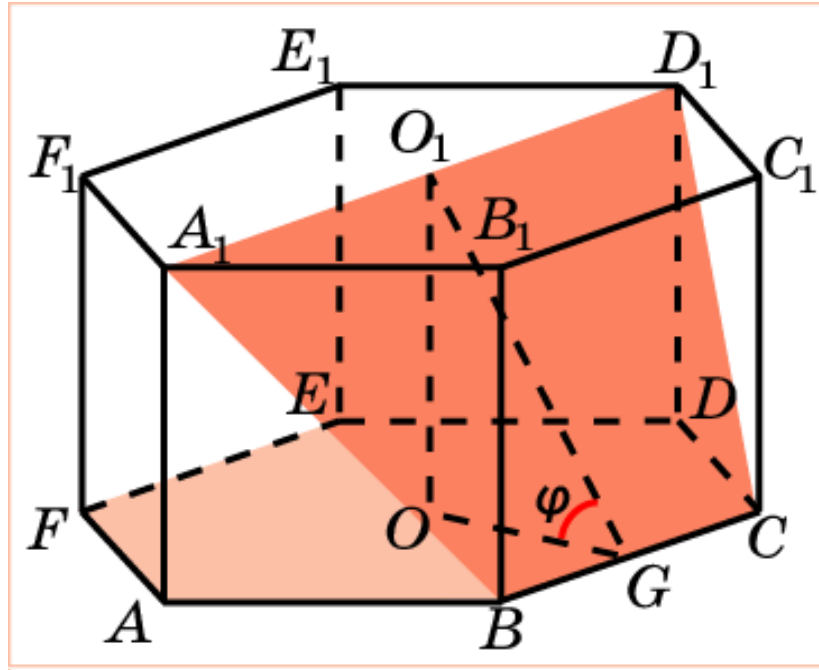
В правильной 6-й призме $A\dots F_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и $C EE_1$.



Ответ: 60° .

Призма 12

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и $B_1C_1D_1$.



Решение: Искомый угол φ равен углу O_1GO , где O, O_1 – центры оснований призмы, G – середина BC .

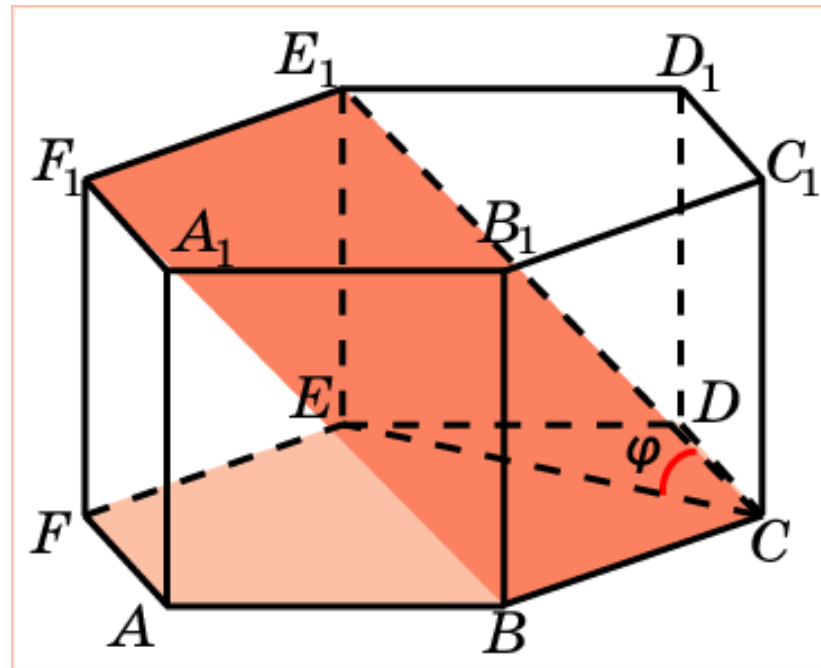
В прямоугольном треугольнике O_1GO имеем: $OO_1 = 1, OG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Призма 13

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и $BC E_1$.



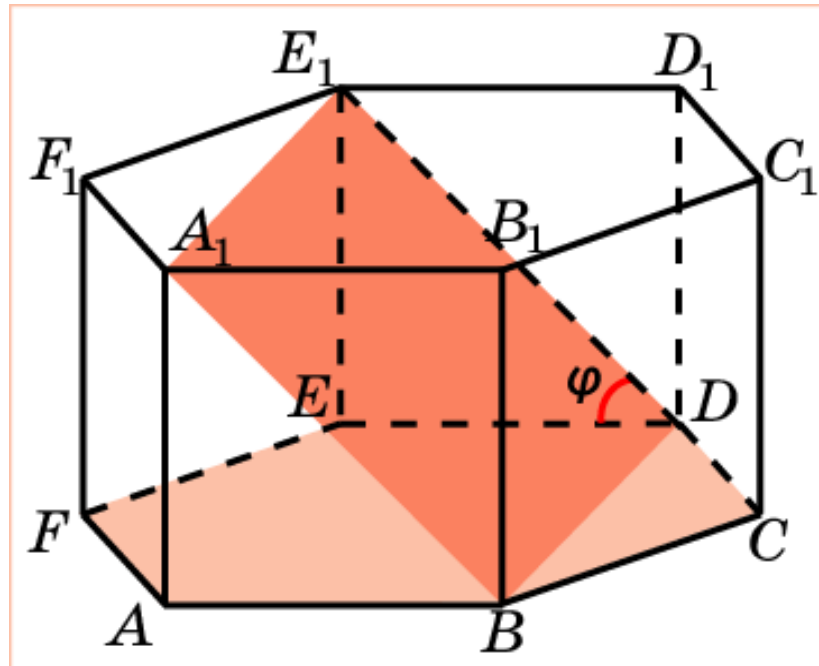
Решение: Искомый угол φ равен углу E_1CE .

В прямоугольном треугольнике E_1CE имеем: $EE_1 = 1$, $CE = \sqrt{3}$, $CE_1 = 2$. Следовательно, $\varphi = 30^\circ$

Ответ: $\varphi = 30^\circ$.

Призма 14

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BDE_1 .

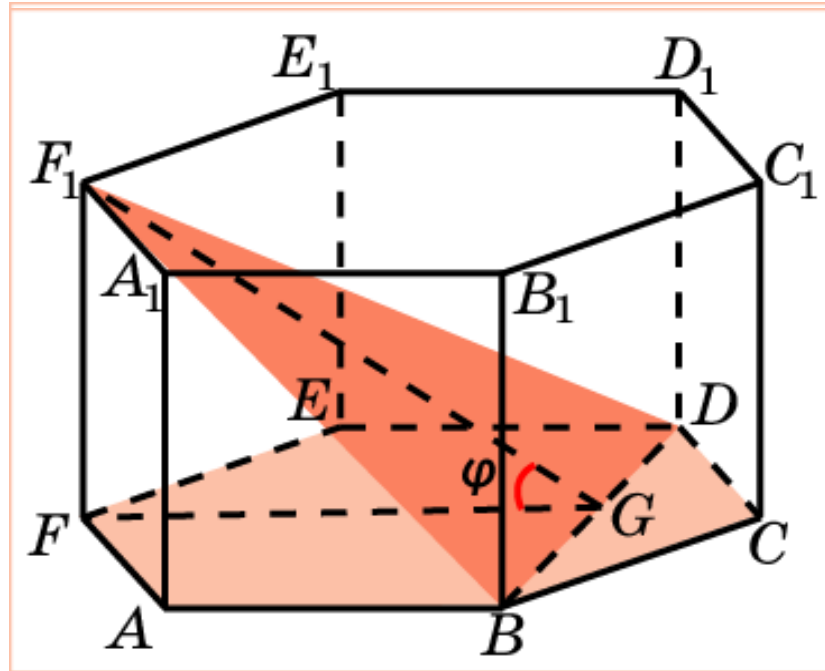


Решение: Искомый угол φ равен углу E_1DE . Он равен 45° .

Ответ: $\varphi = 45^\circ$.

Призма 15

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и BDF_1 .



Решение: Искомый угол φ равен углу F_1GF , где G – середина BD .

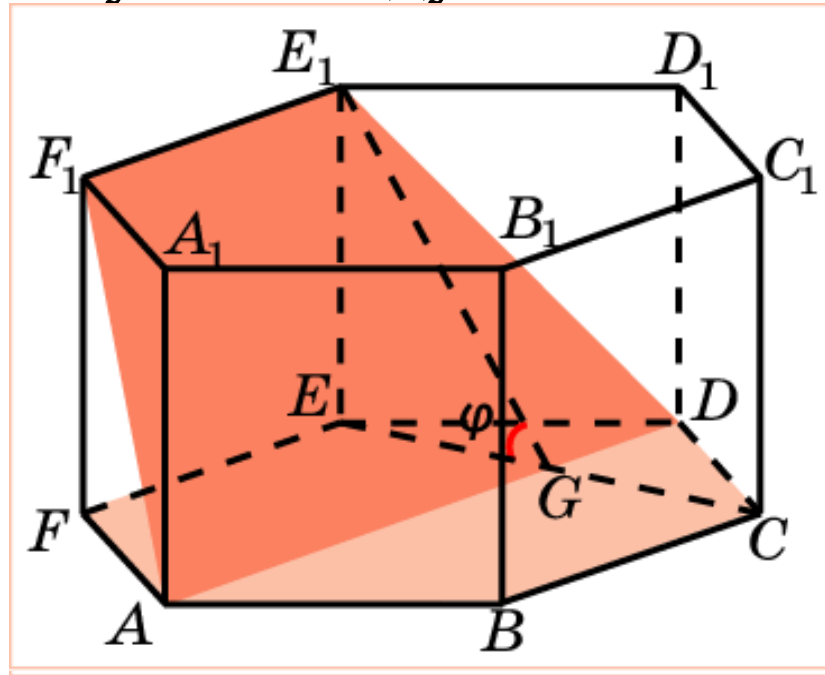
В прямоугольном треугольнике F_1GF имеем: $FF_1 = 1$, $FG = \frac{3}{2}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$.

Призма 16

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ADE_1 .



Решение: Искомый угол φ равен углу E_1GE , где G – середина CE .

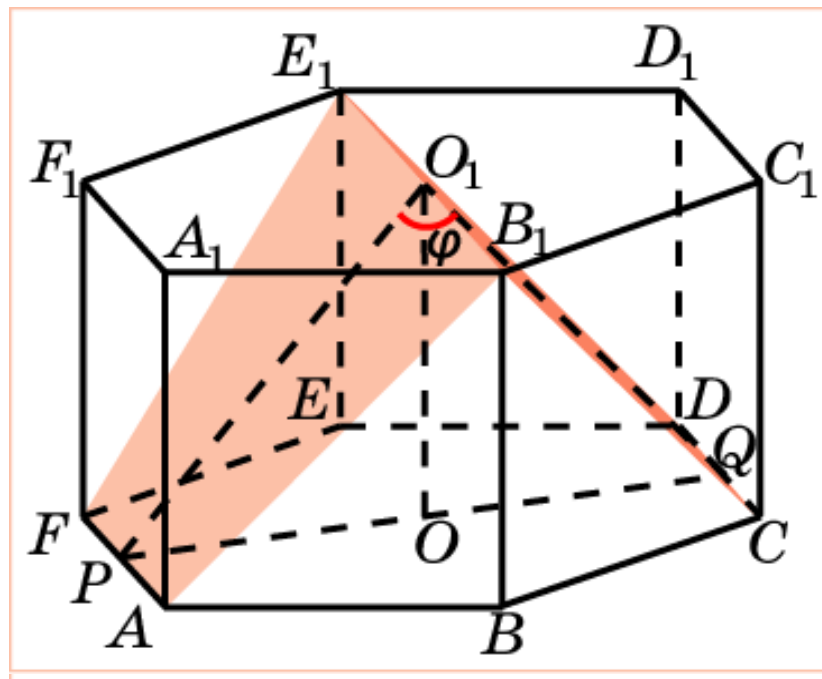
В прямоугольном треугольнике E_1GG имеем: $EE_1 = 1$, $EG = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, $tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $tg\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Призма 17

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями CDE_1 и AFE_1 .



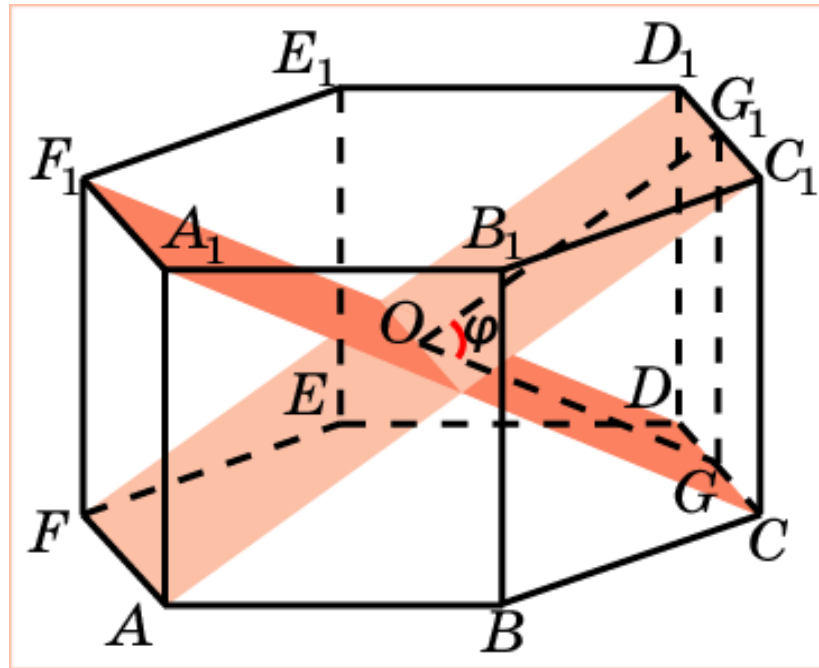
Решение: Пусть O, O_1 – центры оснований призмы, P, Q – середины ребер AF и CD . Искомый угол φ равен углу PO_1Q . В треугольнике PO_1Q имеем: $PO_1 = QO_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}, PQ = \sqrt{3}$.

Из теоремы косинусов получаем $\cos \varphi = \frac{1}{7}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{7}$.

Призма 18

В правильной 6-й призме $A\dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями CDF_1 и AFD_1 .

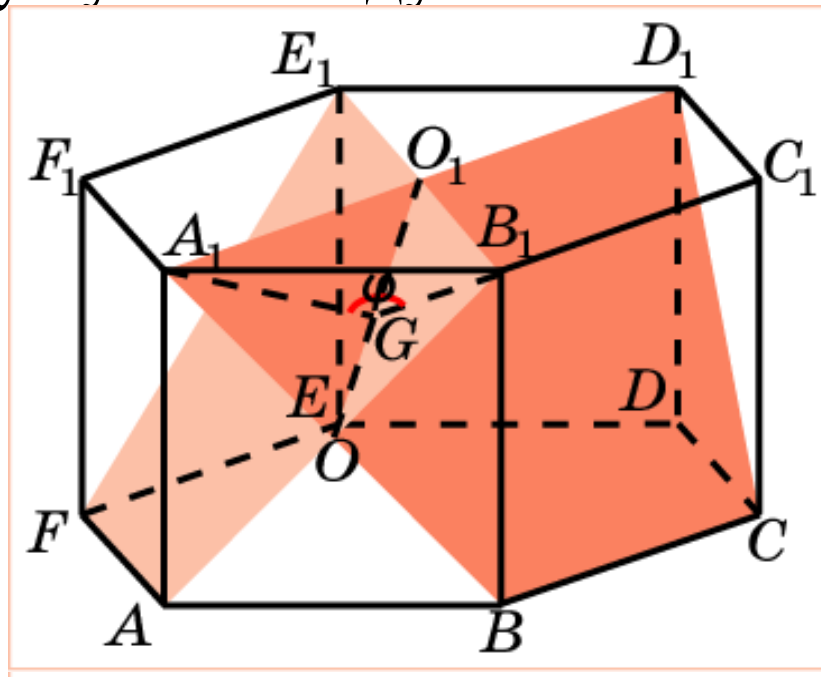


Решение: Пусть O – центр призмы, G, G_1 – середины ребер CD и C_1D_1 . Искомый угол φ равен углу GOG_1 . В треугольнике GOG_1 имеем: $GG_1 = GO = G_1O = 1$. Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: $\varphi = 60^\circ$.

Призма 19*

В правильной 6-й призме $A...F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями $B_1C_1D_1$ и $A_1F_1E_1$.

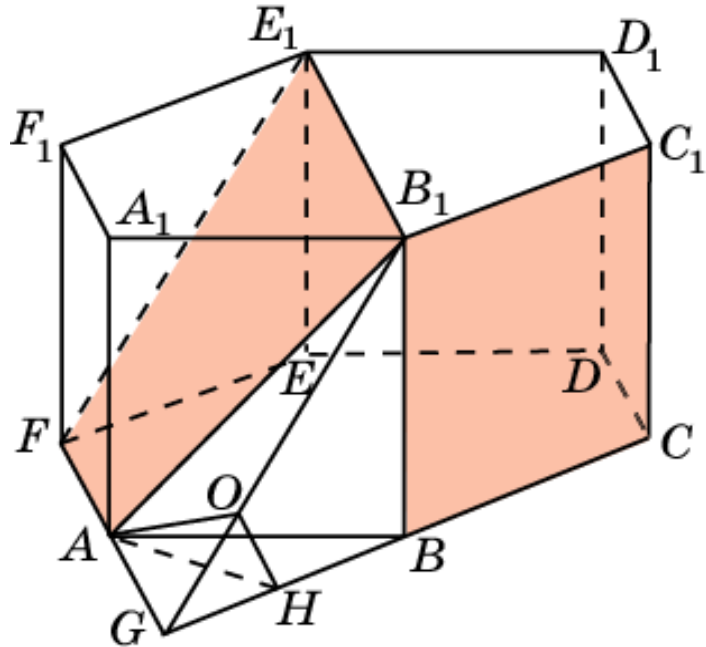


Решение: Пусть O, O_1 – центры боковой грани и верхнего основания призмы. Искомый угол φ равен углу A_1GB_1 , где G – середина OO_1 . В треугольнике A_1GB_1 имеем: $A_1B_1 = 1$, $A_1G = B_1G = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Из теоремы косинусов получаем $\cos \varphi = \frac{1}{7}$.

Ответ: $\cos \varphi = \frac{1}{7}$.

Призма 20*

В правильной 6-й призме $A \dots F_1$, ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями BCC_1 и AFE_1 .



Решение: Продолжим отрезки CB и FA до пересечения в точке G . Прямая B_1G будет линией пересечения данных плоскостей. Из точки A опустим перпендикуляры AO и AH соответственно на прямые B_1G и BG . Угол AOH будет искомым линейным углом.

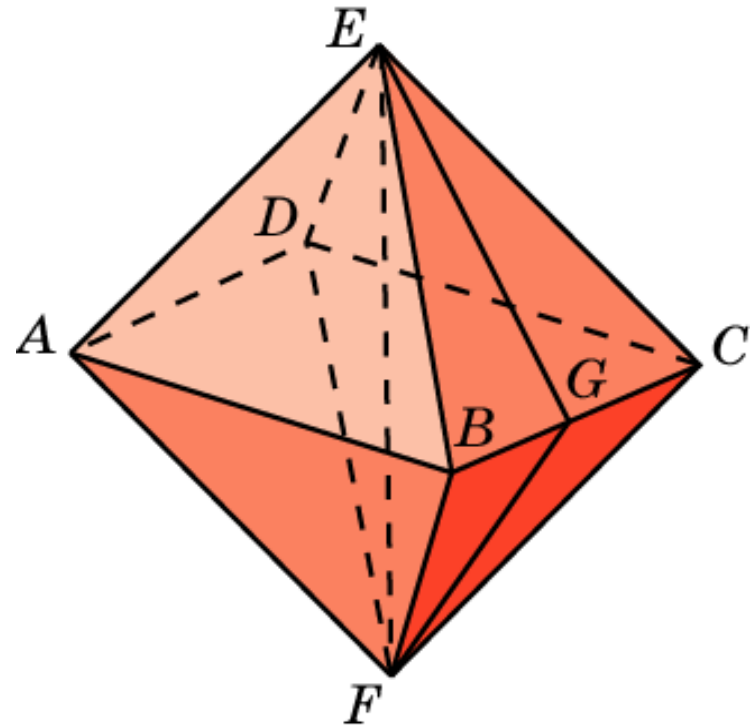
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad OH = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad AO = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

По теореме косинусов находим

$$\cos \angle AOH = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Октаэдр

Найдите двугранные углы октаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный октаэдр с ребром 1. Из вершин E и F опустим перпендикуляры EG и FG на ребро BC . Угол EGF будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике EGF имеем:

$$EF = \sqrt{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

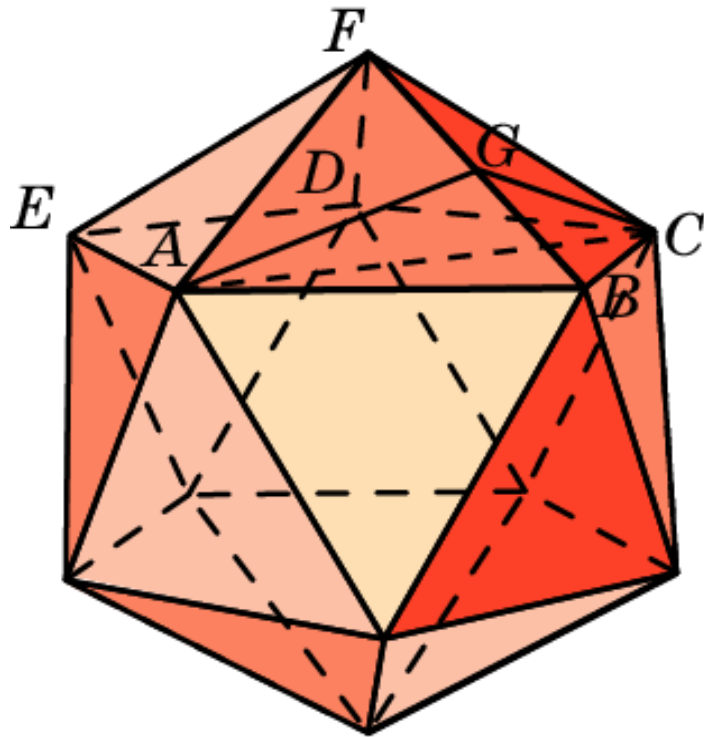
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{1}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 109^\circ 30'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{1}{3}, \quad \varphi \approx 109^\circ 30'.$

Икосаэдр

Найдите двугранные углы икосаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный икосаэдр с ребром 1. Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF . Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике AGC имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

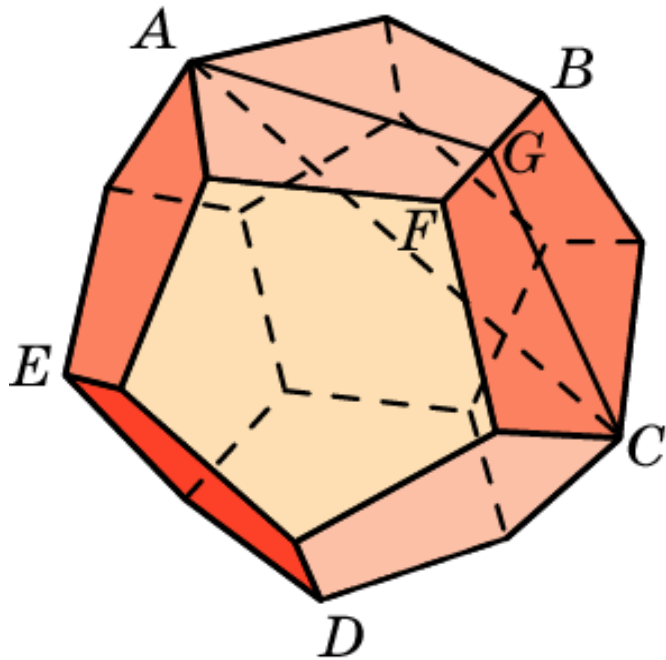
Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 138^\circ 11'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \varphi \approx 138^\circ 11'.$

Додекаэдр

Найдите двугранные углы додекаэдра.



Решение: Рассмотрим правильный додекаэдр с ребром 1. Из вершин A и C опустим перпендикуляры AG и CG на ребро BF . Угол AGC будет линейным углом φ искомого двугранного угла. В треугольнике AGC имеем:

$$AC = \frac{\sqrt{5} + 3}{2}, \quad EG = FG = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 5}}{2}.$$

Используя теорему косинусов, находим

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Откуда } \varphi \approx 116^\circ 34'.$$

Ответ: $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \varphi \approx 116^\circ 34'.$