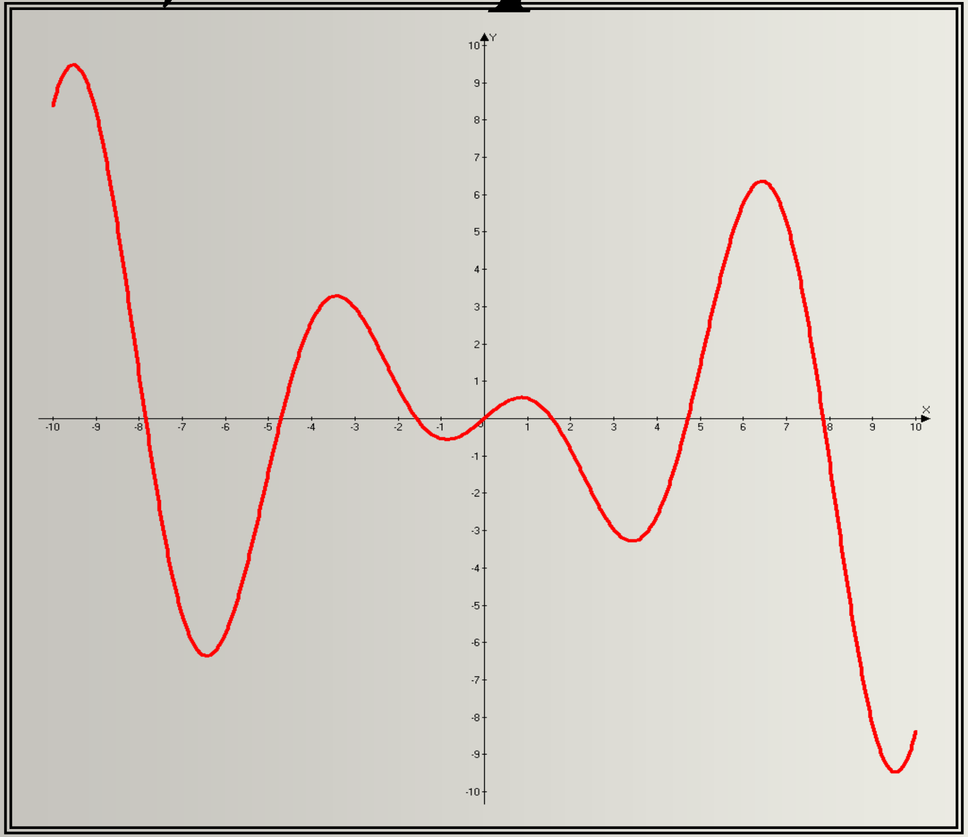
Разработка урока на тему :

«Исследование функции с помощью производной».

Исследование функций и построение графиков с помощью производной



«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Н.И. Лобачевский

Скажи мне, и я забуду.

Покажи мне, и я запомню.

Дай мне действовать самому,

И я научусь.

Конфуций

Цели урока:

- ***Образовательные.***

Формировать:

– - навыки прикладного использования аппарата производной;

– - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

- ***Развивающие.***

Развивать:

– - способности к самостоятельному планированию и организации работы

– - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;

– - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

- ***Воспитательные.***

Воспитывать:

– - познавательный интерес к математике;

– - информационную культуру и культуру общения;

– - самостоятельность, способность к коллективной работе.

I этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний

- Необходимое условие возрастания и убывания функции
- Достаточное условие возрастания и убывания функции
- Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)
- Признак максимума функции.
- Признак минимума функции.
- Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, возрастает (убывает) на $(a;b)$, то $f\,`(x) \geq 0$ $(f\,`(x) \leq 0)$ для любого x из интервала $(a;b)$.

Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция *f(x)*, *x*∈*[a;b]*, непрерывна на отрезке *[a;b]* и дифференцируема на интервале *(a;b)*, то найдётся точка *c*∈*(a;b)* такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f`(c)(b - a)$$

Достаточное условие возрастания функции

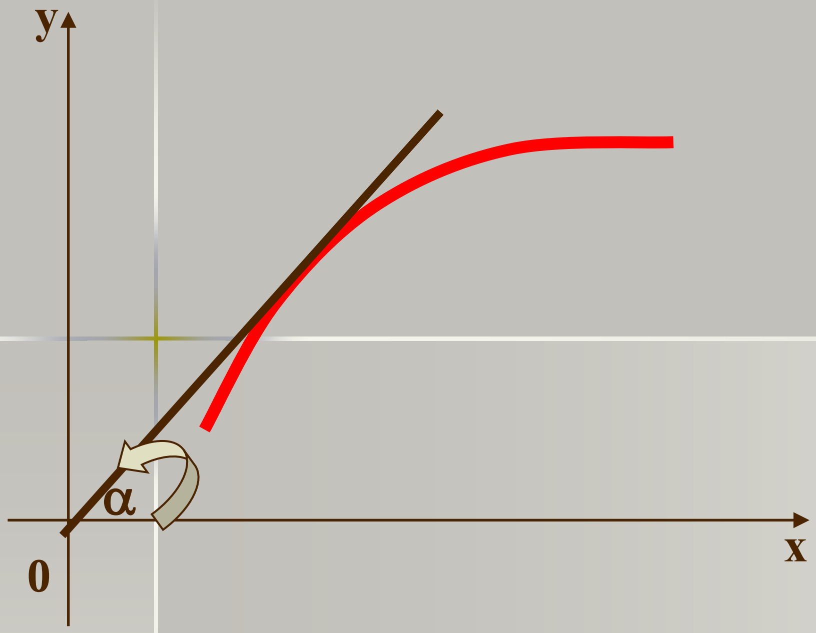
Теорема.

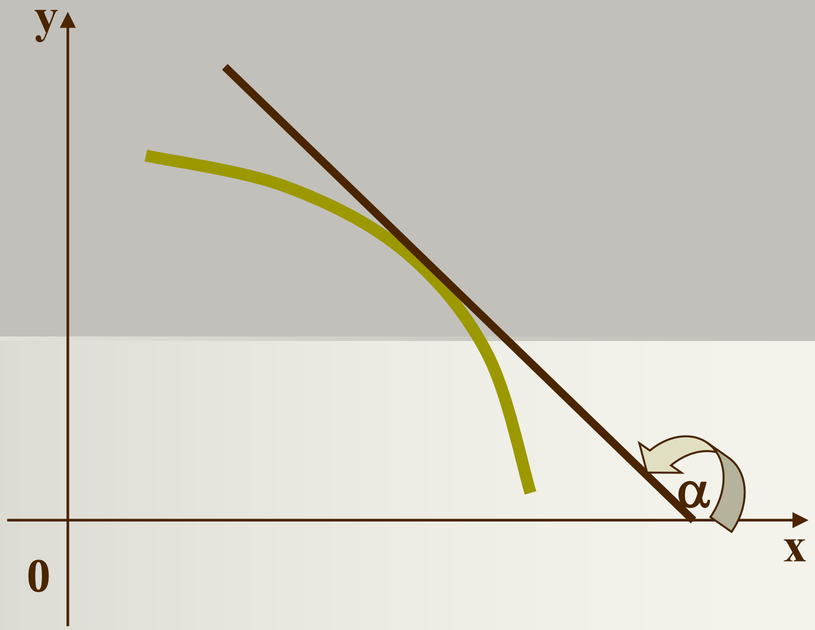
Если функция *f* имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала *(a;b)*, то функция *f* возрастает на интервале *(a;b)*.

Достаточное условие убывания функции

Теорема.

Если функция имеет неположительную производную в каждой точке интервала *(a;b)*, то функция *f* убывает на интервале *(a;b)*.





Функция возрастает

$\alpha < 90^0$

$tg\ \alpha > 0$

$f\,`(x) > 0$

Функция убывает

$\alpha > 90^0$

$tg\ \alpha < 0$

$f\,`(x) < 0$

Правило нахождения интервалов монотонности

1) **Вычисляем производную** $f\,`(x)$ **данной функции** $f(x)$**, а затем находим точки, в которых** $f\,`(x)$ **равна нулю или не существует. Эти точки называются** ***критическими*** **для функции** $f(x)$

Правило нахождения интервалов монотонности

2) **Критическими точками область определения функции *f(x)* разбивается на интервалы, на каждом из которых производная *f `(x)* сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.**

Правило нахождения интервалов монотонности

3) Определим знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) \geq 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает, если же $f'(x) \leq 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Исследование экстремумов функции

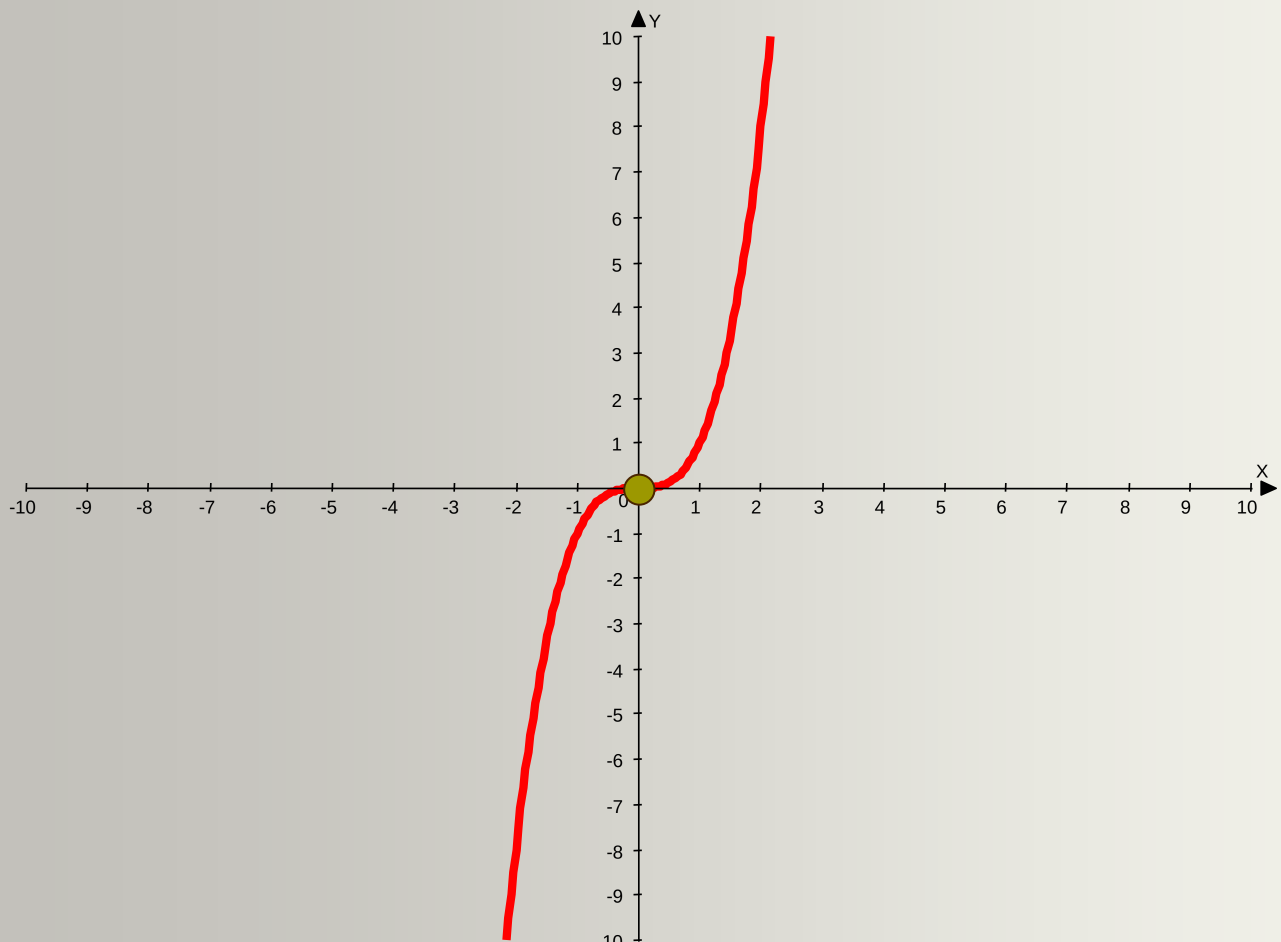
Необходимое условие экстремума.

(теорема Ферма)

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f\,`(x)$, то она равна нулю:

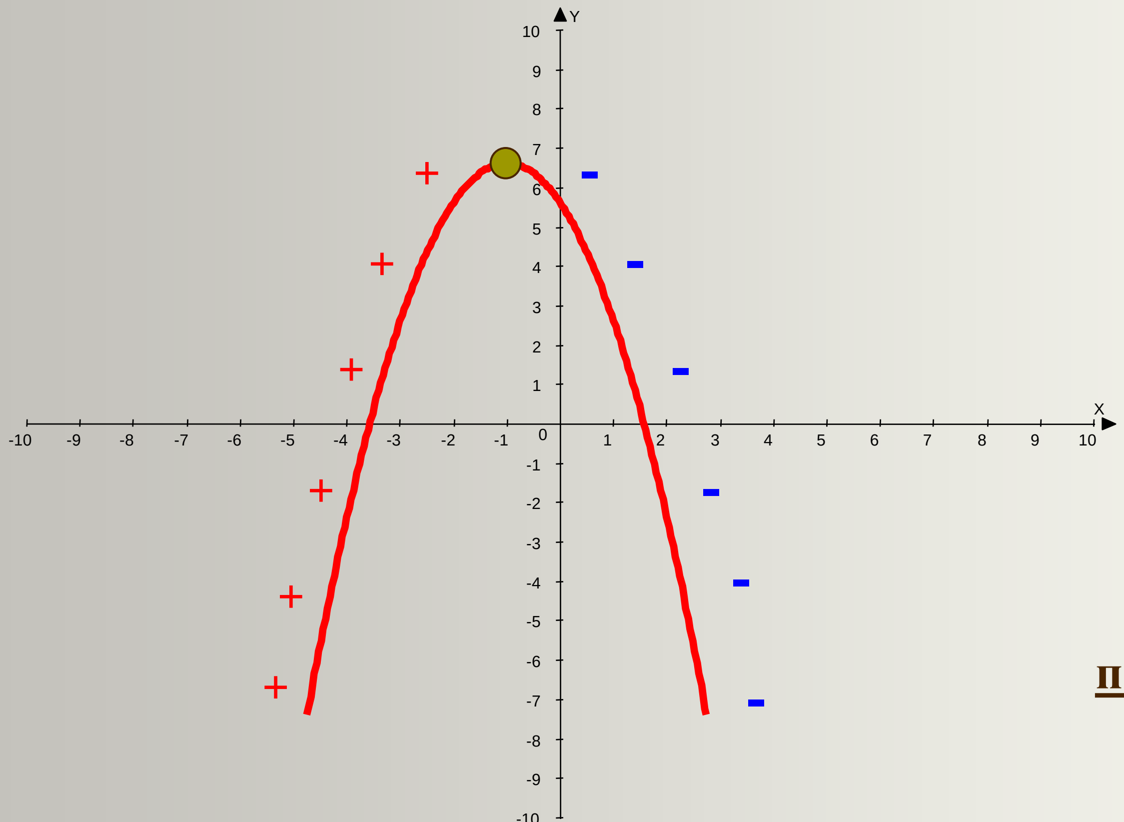
$$f\,`(x) = 0.$$

Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции *$f(x) = x^3$* обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



Достаточные условия существования экстремума в точке

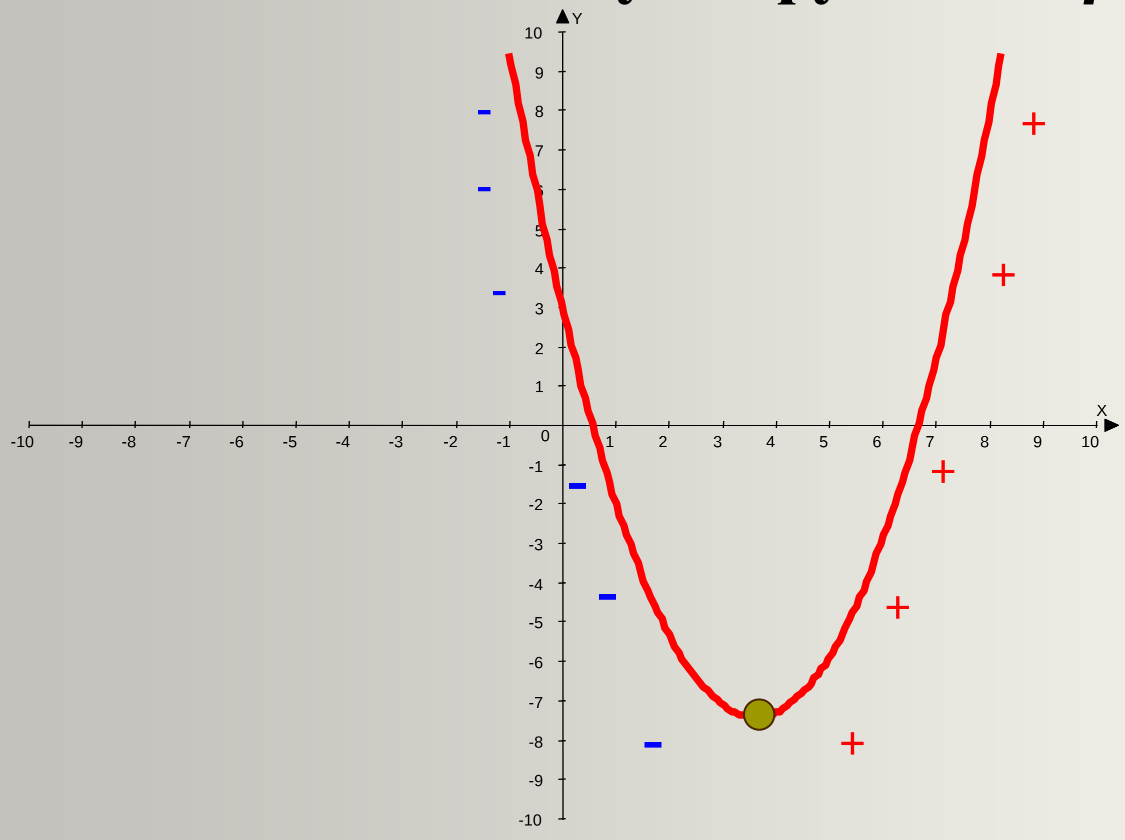
- Признак максимума функции. **Если функция *f* непрерывна в точке x_0, а $f`(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f`(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции *f*.**



построение

Достаточные условия существования экстремума в точке

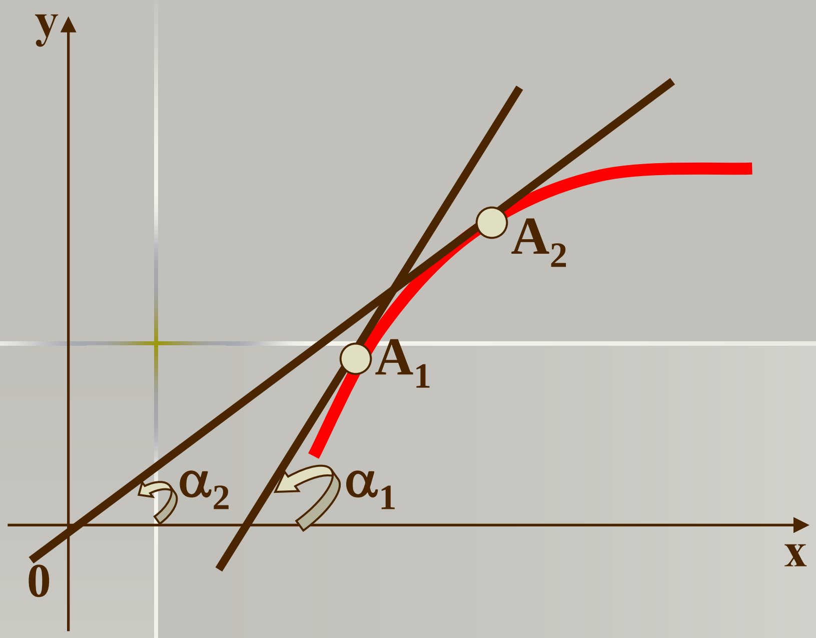
- Признак минимума функции. **Если функция *f* непрерывна в точке x_0, $f`(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f`(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции *f***



построение

Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Т е о р е м а. **Пусть функция *f(x)*, *x*$\in$*(a;b)*, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f``(x) < 0$ для всех *x*$\in$*(a;b)*, то на интервале *(a;b)* график функции *f(x)* *выпуклый вверх*, если же $f``(x) > 0$ для всех *x*$\in$*(a;b)*, то график функции *f(x)* *выпуклый вниз* на *(a;b)*.**



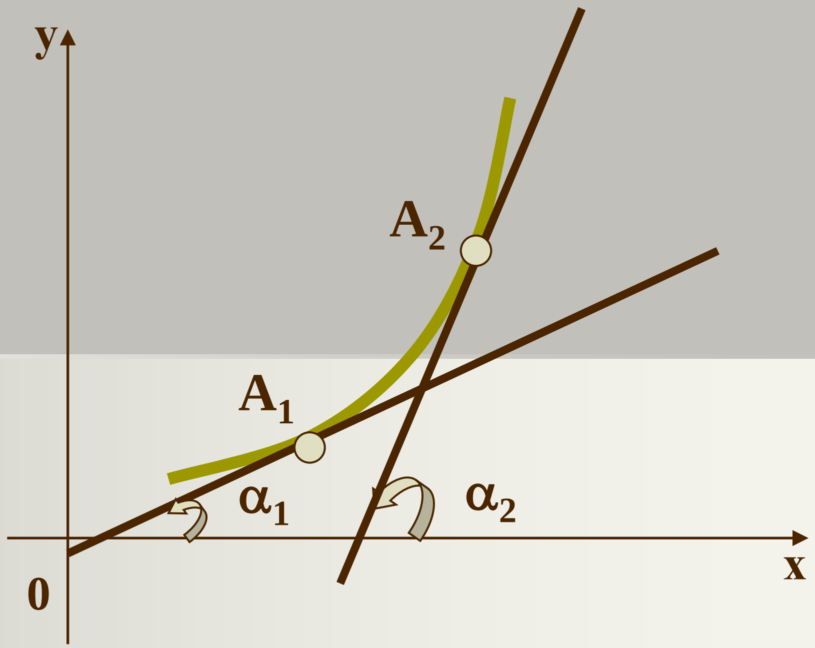


График выпуклый

α - убывает

$tg\ \alpha$ - убывает

$f\,`(x)$ – убывает

$f\,``(x) < 0$

График вогнутый

α - возрастает

$tg\ \alpha$ - возрастает

$f\,`(x)$ – возрастает

$f\,``(x) > 0$

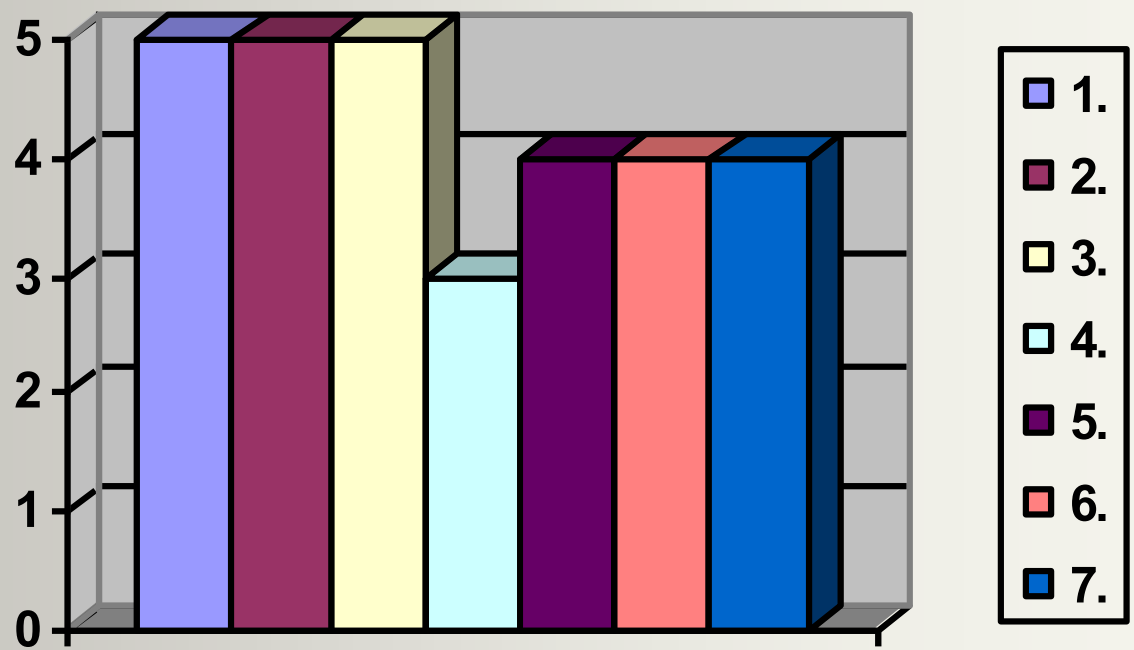
Точки перегиба

1) Найти критические точки функции по второй производной.
2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критический точки.

Если $f``(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0, то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика данной функции

Анализ компетентности учащихся в теоретических вопросах темы (например)

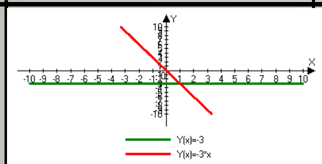
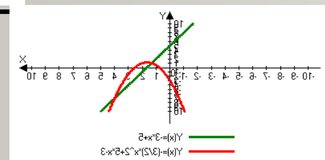
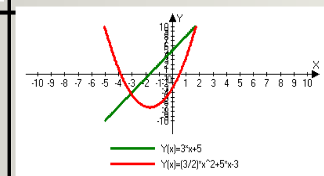
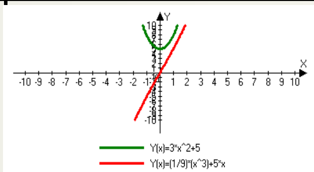
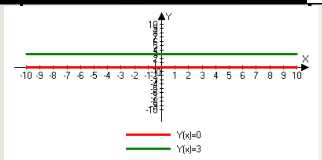
1.	5
2.	5
3.	5
4.	3
5.	4
6.	4
7.	4



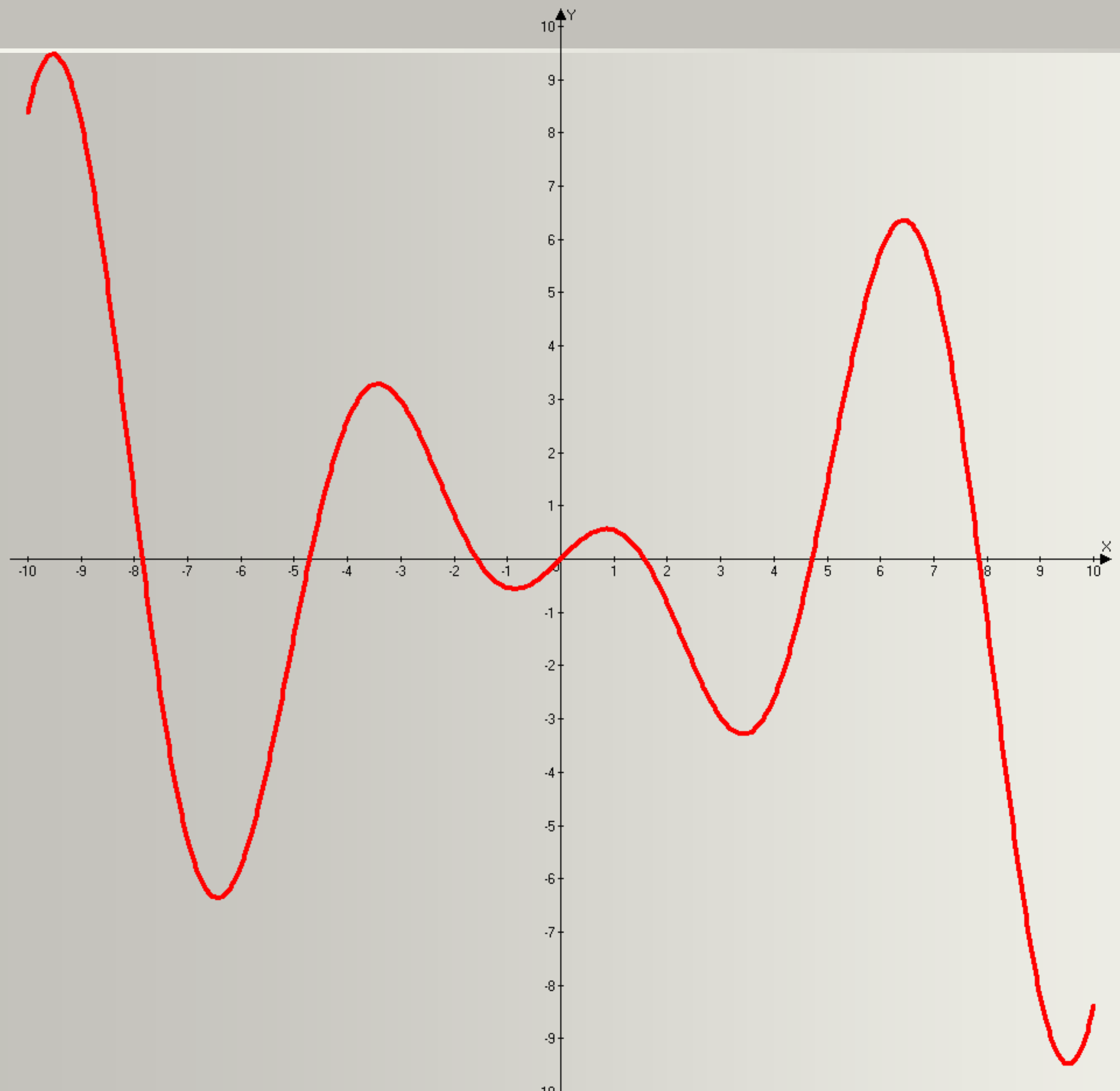
II этап. Обобщение и систематизация знаний и способов деятельности

Задание для всех учащихся.

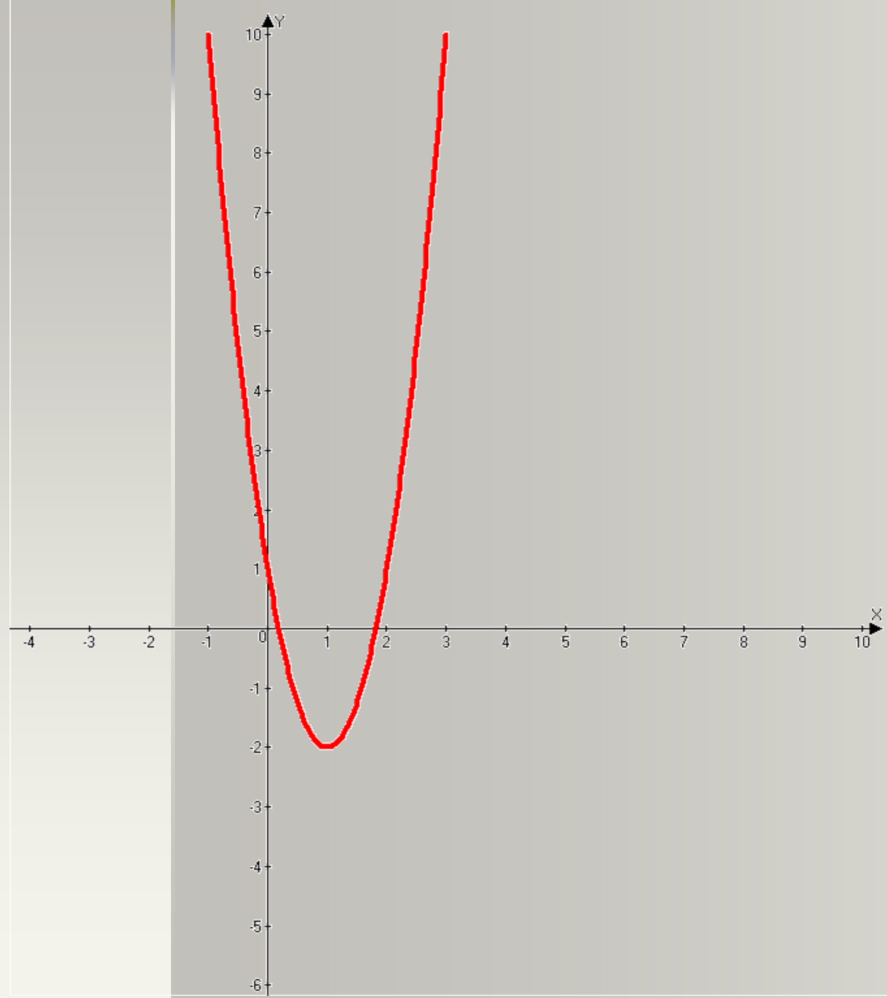
Заполните таблицу

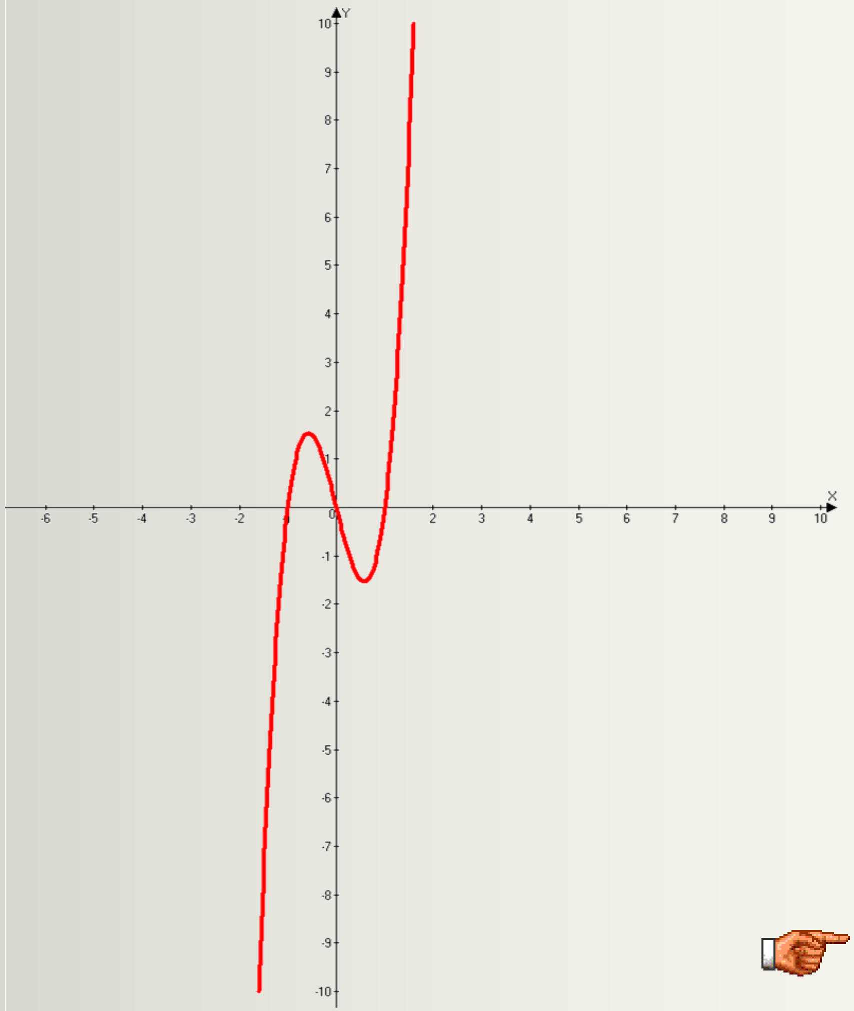
то y / если	Монотонно убывает	Имеет максимум во внутренней точке	Имеет минимум во внутренней точке	Постоянна	Монотонно возрастает
$y' = -3$					
$y' = -3x+5$					
$y' = 3x+5$					
$y' = 3x^2+5$					
$y' = 0$					

№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,



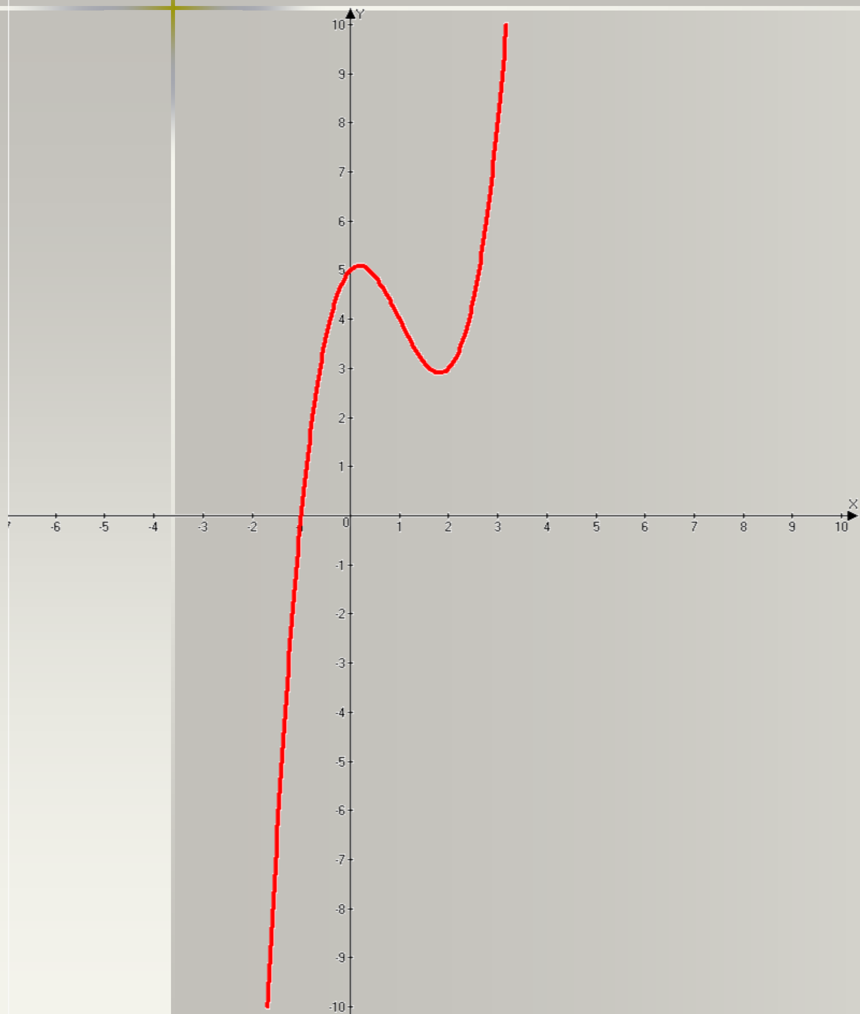
3. На рисунке изображён график производной функции *y = f (x)*. Сколько точек максимума имеет эта функция?



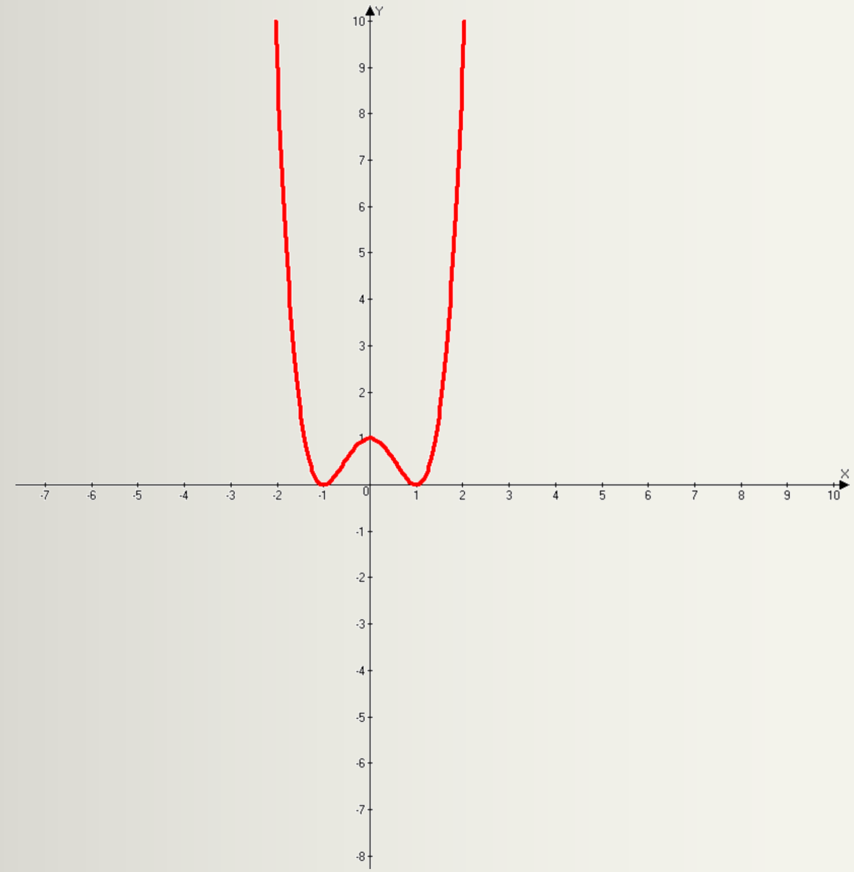


Ответы

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

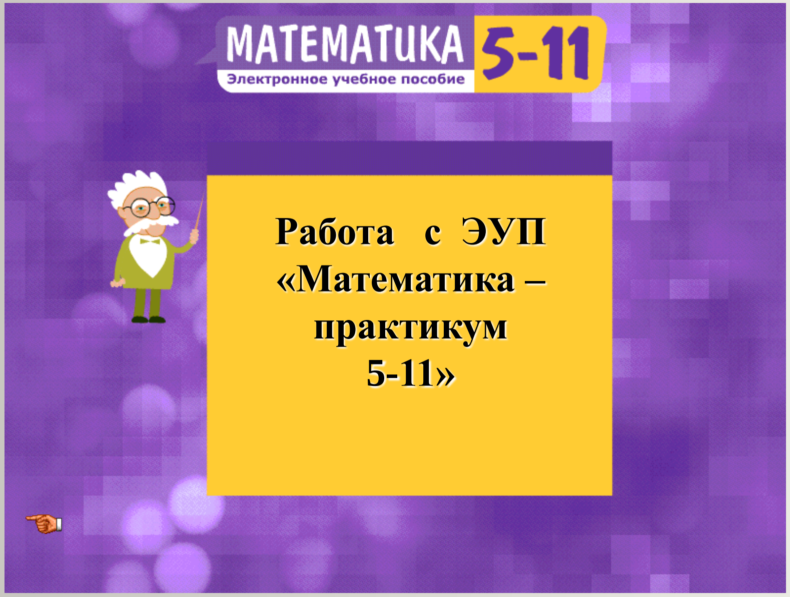


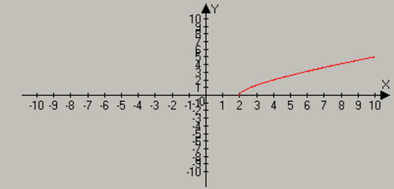
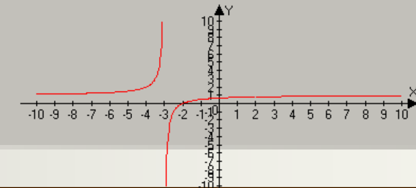
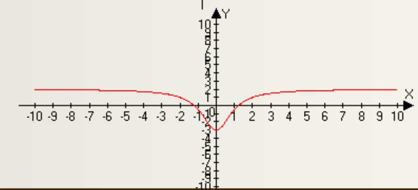
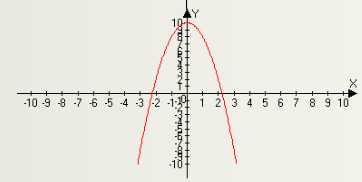
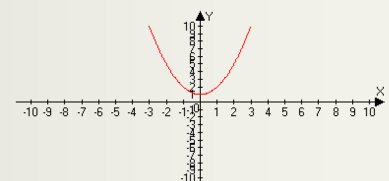
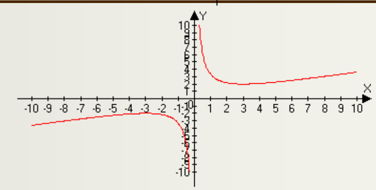
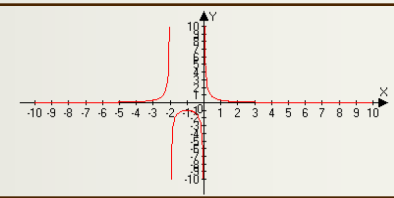
$$y = (x^2 - 1)^2$$



III этап. Усвоение образца комплексного применения ЗУН.

Практическая работа с применением электронного учебного пособия «Математика – практикум 5-11» и по индивидуальным заданиям на местах. За компьютер сначала рассаживаются 7 учащихся, остальные за парты. По мере выполнения заданий ребята меняются местами.



1.	**Какова область определения функции?** $y = \sqrt{(x-2)\sqrt{x}}$	
2.	**Найдите область определения функции.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$	
3.	**Найдите множество значений функции.** $y = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 + 1}$	
4.	**Найдите область значений функции.** $y = 10 - 2x^2$	
5.	**В каких точках график функции $y = x^2 + 1$ пересекает ось абсцисс?**	
6.	**Является ли функция чётной или нечётной?** $y = \dfrac{x^2 + 9}{3x}$	
7.	**Может ли функция обращаться в нуль?** $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$	

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1{,}7x$$

Какая из данных функций убывает на всей оси?

а) $y = -x^3 + x$ в) $y = x^3 + x^2$ д) $y = x^3 - x$

б) $y = -x^3 - x$ г) $y = -x^3 - x^2$ е) $y = x^3 + x$

Мини - исследовательская работа

1. $f(x)=(x+1)^3(x-2)$

2. $f(x)=(x+2)^2(x-2)$

3. $f(x)=\dfrac{x^2+5}{2-x}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$

5. $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$

6. $f(x)=4x^2\sqrt{1-4x}$

Выбери задание

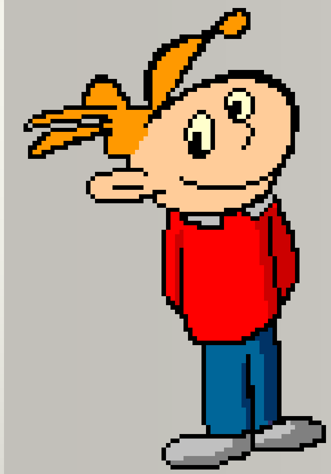
Творческое задание

Ещё расскажу, если вам интересно,
Что точку разрыва и корень имею,
И есть интервал, где расти не посмею.
Во всём остальном положительна, право,
И это, конечно, не ради забавы.
Для чисел больших я стремлюсь к единице.
Найдите меня среди прочих в таблице.

$f(x)=\frac{1}{4}x^4$	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$	$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$
$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2-x}}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+4x^2}}$	$f(x)=\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2$
$f(x)=(x^2-1)^2$	$f(x)=x(1-x)$	$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

Подведение итогов урока.

Д о м а ш н е е   з а д а н и е



1. № 45, 41 (устно), 39 (31)

2. Определите, при каком значении параметра b максимум функции равен 3?

$$y = \frac{2b - 1}{x^4 + 1}$$