Элементы векторной алгебры

План:

1. Действия над векторами.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Векторное произведение векторов.
4. Смешанное произведение векторов.

Действия над векторами

Величины, как температура, время, масса, плотность, длина отрезка, площадь, объем и т.д. характеризуются одним числовым значением, которые называются ***скалярами***. С другой стороны, такие величины, как сила, скорость, ускорение и т.д. становятся определенными только тогда, когда известно их числовое значение и направление в пространстве, они называются ***векторами***.

Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление в пространстве, называется ***вектором***. Два вектора называются равными, если:

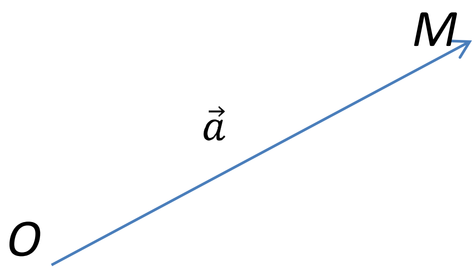
а) длины векторов равны;

б) векторы параллельны;

в) векторы направлены в одну сторону.

Пример: $\overrightarrow{OM} \neq \overrightarrow{MO}$ (направлен противоположно)

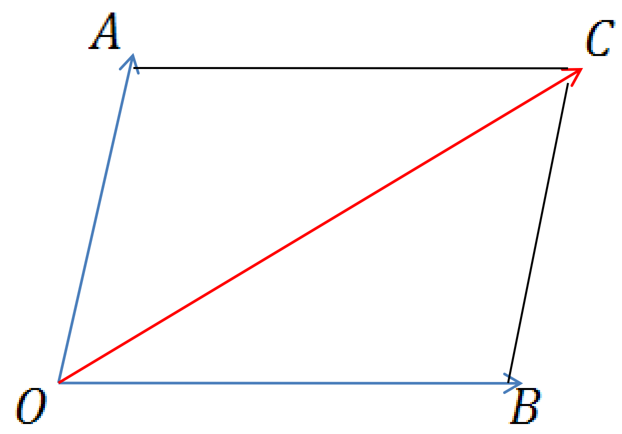
$$\overrightarrow{OM} = \vec{a}$$



$\left|\overrightarrow{OM}\right|$ - длина вектора.

Сложение векторов.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$



Закон перемещения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

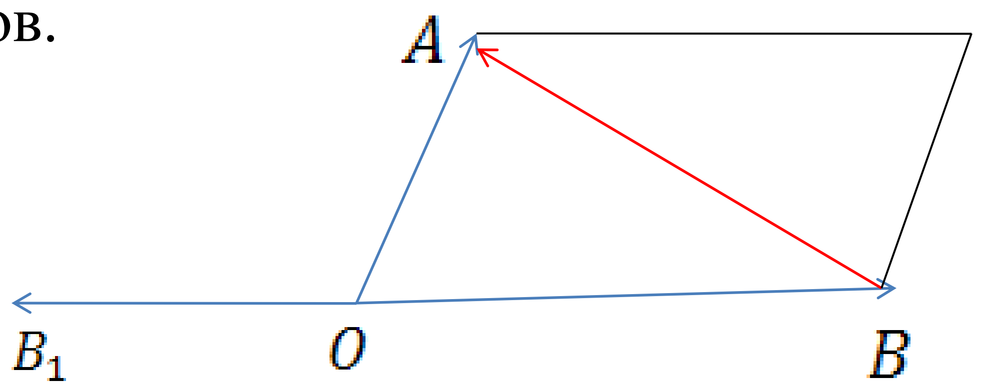
Закон сочетания: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Правило сложения векторов: Чтобы построить сумму любого числа векторов, нужно в конце первого слагаемого вектора построить второй, в конце второго – третий и т.д. Вектор, замыкающий полученную ломанную линию, представляет искомую сумму. Начало его совпадает с началом первого слагаемого, а конец – с концом последнего.

Вычитание векторов.

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{BA}$$



Умножение вектора на число.

$$\vec{A}n = \underbrace{\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \vec{A} + \vec{A}}_{n}$$

$$\frac{\vec{A}}{n} = \vec{A} * \frac{1}{n} = \vec{B}$$

Произведением вектора a на число n называется новый вектор, имеющий длину $\vec{a}|n|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$ (при n>0) или противоположно с $\vec{a}$ (при n<0).

Проекция вектора на ось. Пусть вектор $\vec{a}$ составляет угол φ с осью Ox. Тогда проекция вектора на эту ось определяется формулой:

$$\text{Пр}_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\hat{}ox)$$

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

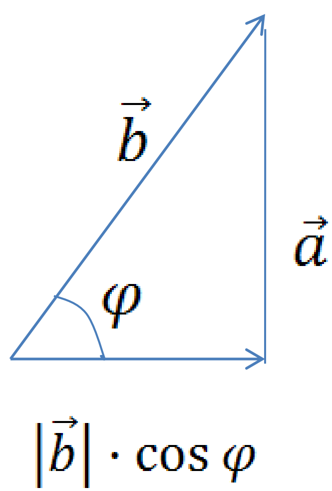
$$\text{Пр}_x\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{Пр}_x\vec{a} + \text{Пр}_x\vec{b}$$

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается: $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Из рисунка видно, что $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$

поэтому



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$$

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} \qquad \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Свойства скалярного произведения.

Переменный закон $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

Распределительный закон $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

Если $\vec{a}||\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\vec{a}^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^0$ отсюда $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0=0$

Скалярное произведение ортов.

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0, \vec{i}\cdot\vec{k}=0, \vec{j}\cdot\vec{i}=0,$ $\vec{j}\cdot\vec{j}=1, \vec{k}\cdot\vec{k}=1, \vec{i}\cdot\vec{i}=1$

Если векторы заданы координатами:

$\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}\{b_x;b_y;b_z\}$ то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Косинус угла между векторами равен их скалярному произведению, деленному на произведение длин.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Если $\vec{b} = \vec{\imath}$, $|\vec{b}| = 1, b_x =, b_y = 0, b_z = 0$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$ где α – есть угол оси Ox с вектором $\vec{a}$

Аналогично взяв $\vec{b} = \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{\jmath}$ получим:

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Пример. 1. Найти угол между биссектрисами углов *xOy* и *yOz*.

Решение. Биссектриса угла *xOy* направляется по вектору $\vec{a}\{1; 1; 0\}$, а биссектриса угла yOz направляется по вектору $\vec{b}\{0; 1; 1\}$, находим угла между ними:

$$cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2},$$

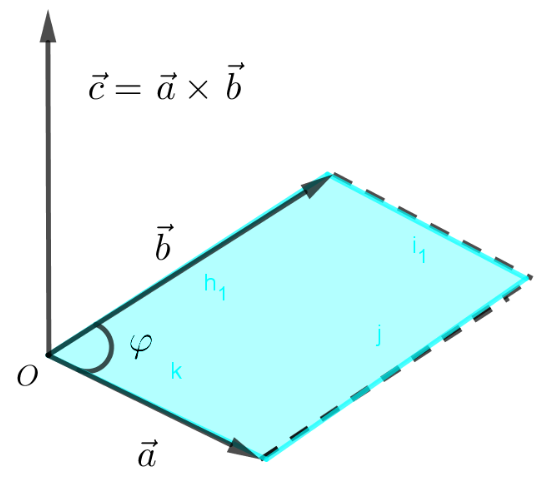
отсюда $\varphi = 60^{\circ}$.

Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определямый следующим образом:

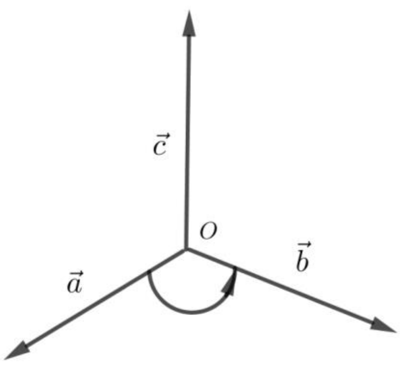
1) Модуль вектора $\vec{c}$ равень площади параллелограма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\varphi$$



2) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ образуют так называемую правую тройку векторов.



Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ и вычесляется по формулу:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения.

$1^\circ.\ \vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$

$2^\circ.\ \vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}=0$, либо $\vec{b}=0$, или $\vec{a}\parallel\vec{b}$

$3^\circ.\ (m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(m\vec{b}\right) = m(\vec{a}\times\vec{b})$

$4^\circ.\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

$5^\circ.\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

$6^\circ.\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\,,\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{i}=-\vec{j}$

Пример 1. Построить треугольник с вершинами $A(1;-2;8)$, $B(0;0;4)$ и $C(6;2;0)$.

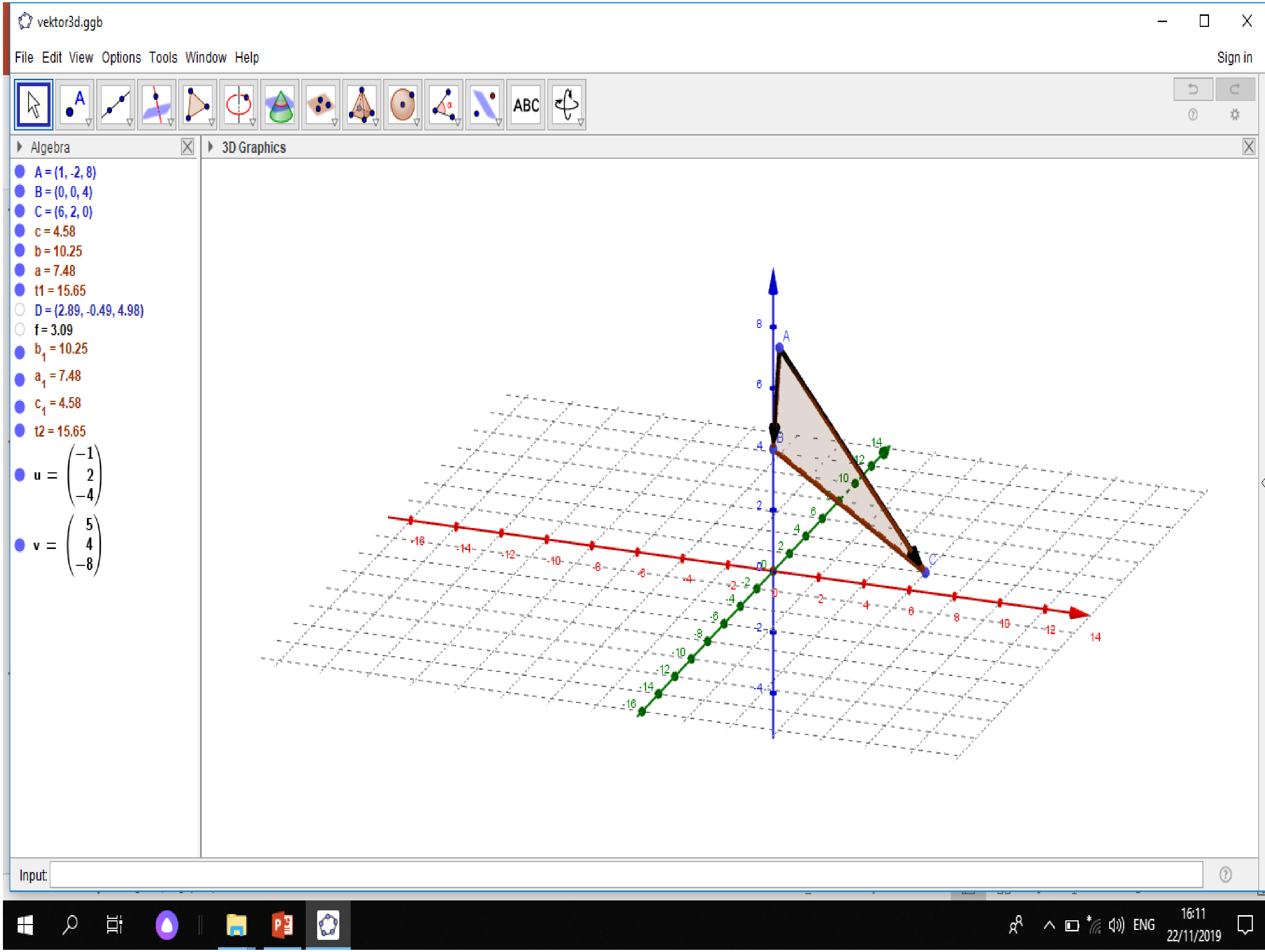
Вычислить его площадь.

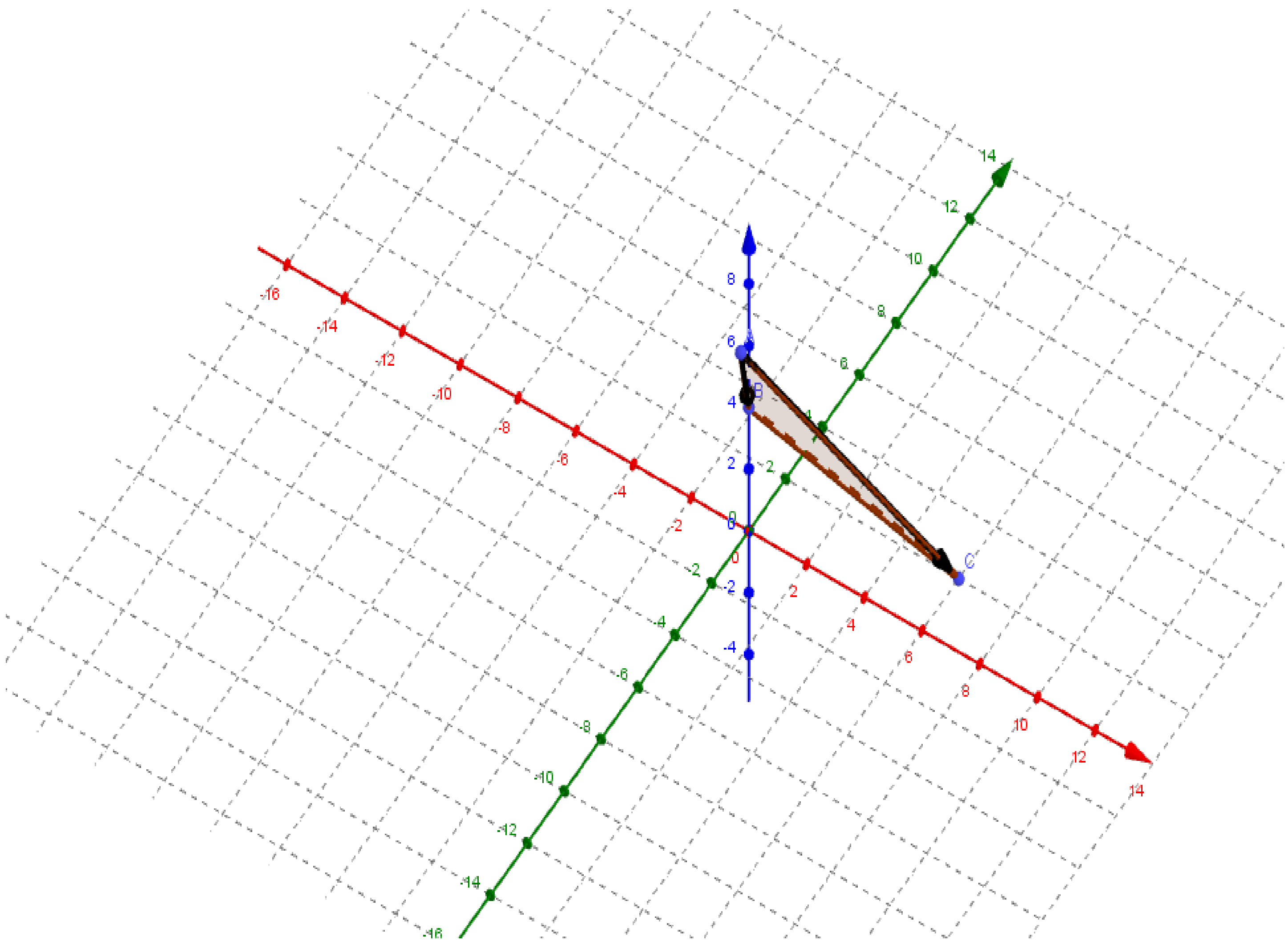
Решение. Составим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}\{1;2;-4\}$, $\overrightarrow{AC}\{5;4;-8\}$.

Вычислим их векторное произведение

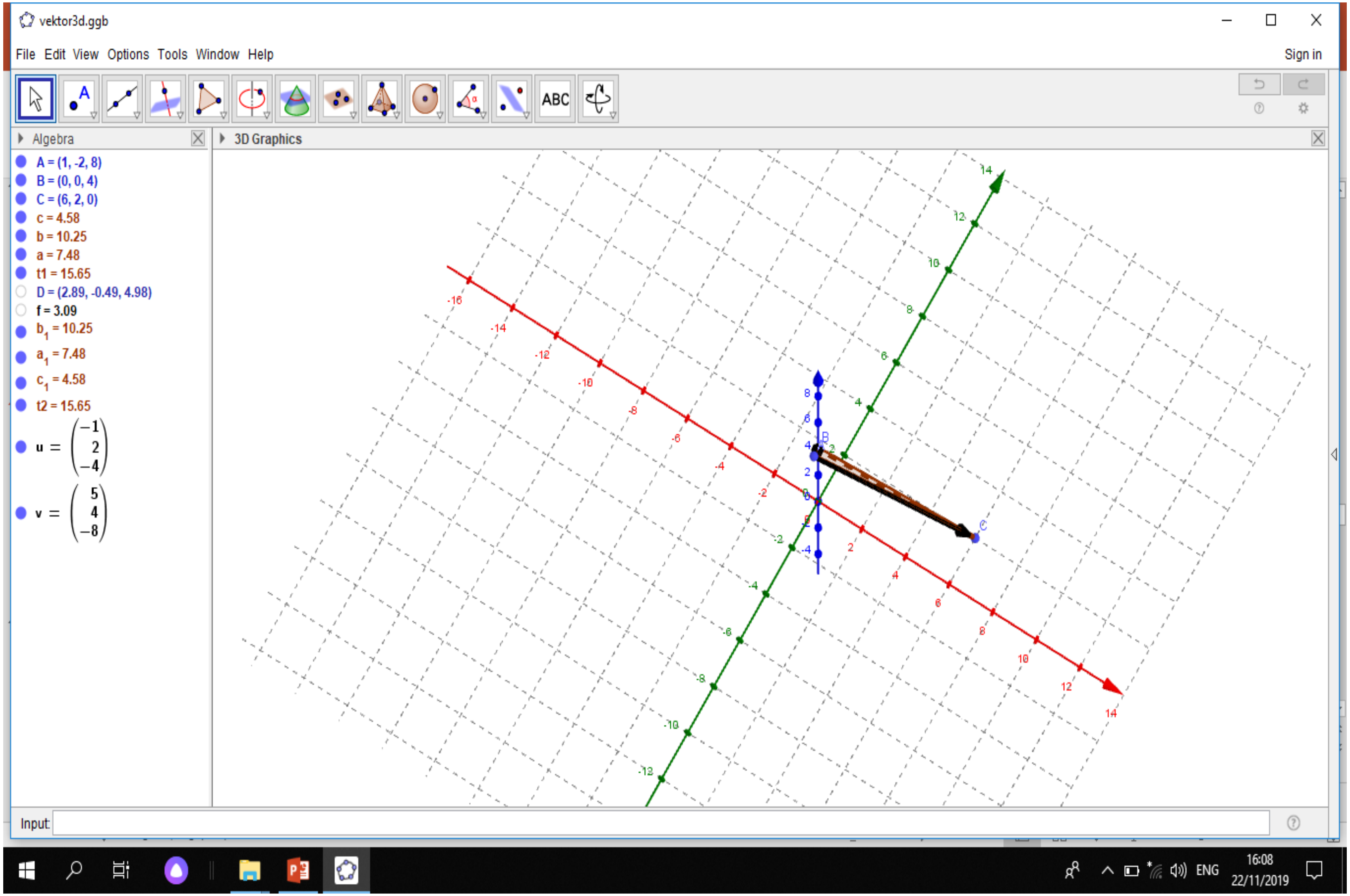
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -4\\ 5 & 4 & -8\end{vmatrix}=-12\vec{j}-6\vec{k}$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{144+36}=3\sqrt{5}.$$

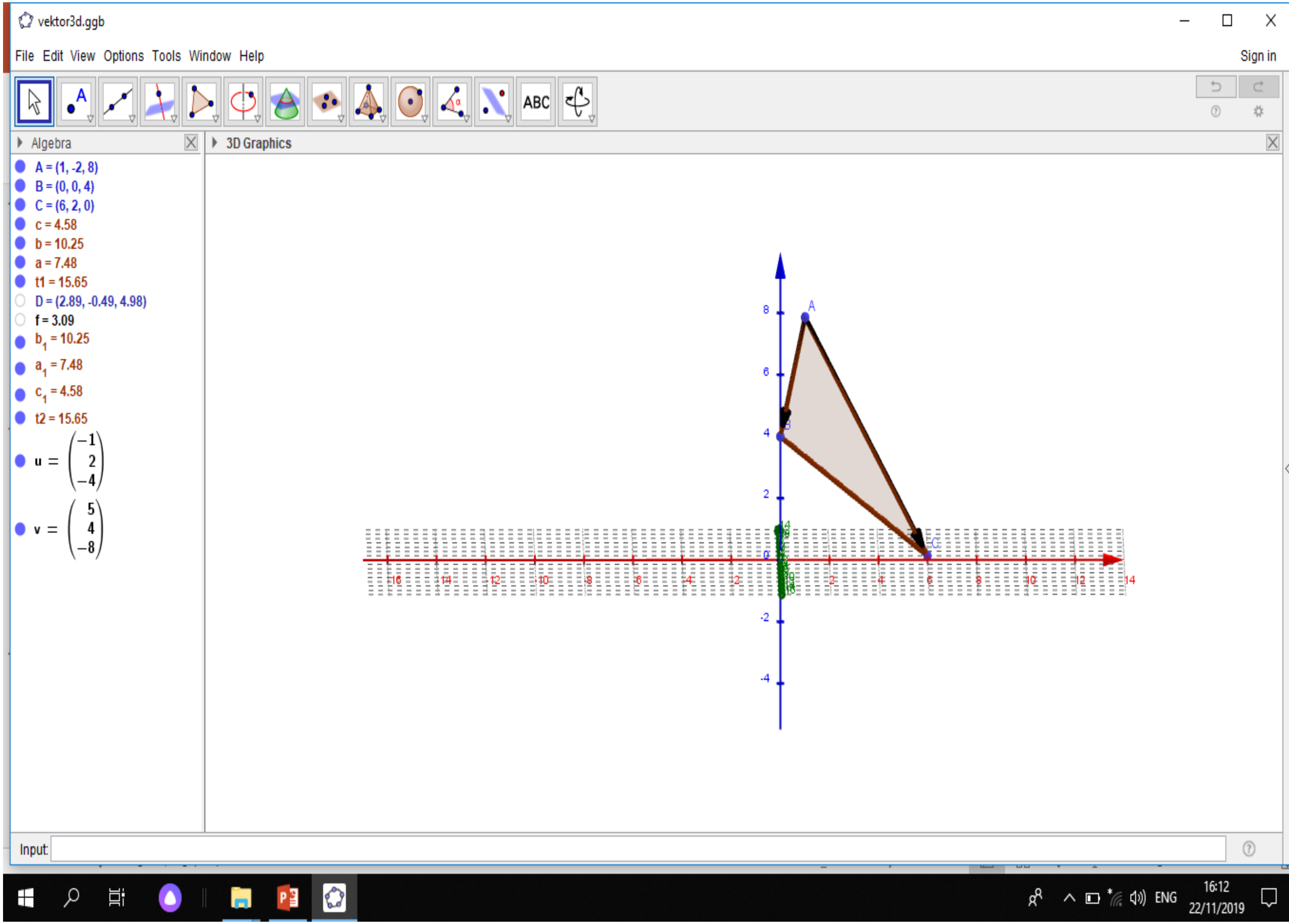

vektor3d.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Sign in
ABC
Algebra
3D Graphics
A = (1, -2, 8)
B = (0, 0, 4)
C = (6, 2, 0)
c = 4.58
b = 10.25
a = 7.48
t1 = 15.65
D = (2.89, -0.49, 4.98)
f = 3.09
b_1 = 10.25
a_1 = 7.48
c_1 = 4.58
t2 = 15.65
u = (−1, 2, −4)
v = (5, 4, −8)
A
B
C
Input:
ENG
16:11
22/11/2019



A
B
C
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14



vektor3d.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Sign in
ABC
Algebra
3D Graphics
A = (1, -2, 8)
B = (0, 0, 4)
C = (6, 2, 0)
c = 4.58
b = 10.25
a = 7.48
t1 = 15.65
D = (2.89, -0.49, 4.98)
f = 3.09
b1 = 10.25
a1 = 7.48
c1 = 4.58
t2 = 15.65
u = (−1, 2, −4)
v = (5, 4, −8)
Input:
ENG
16:08
22/11/2019


vektor3d.ggb
File Edit View Options Tools Window Help
Sign in
ABC
Algebra
3D Graphics
A = (1, -2, 8)
B = (0, 0, 4)
C = (6, 2, 0)
c = 4.58
b = 10.25
a = 7.48
t1 = 15.65
D = (2.89, -0.49, 4.98)
f = 3.09
b1 = 10.25
a1 = 7.48
c1 = 4.58
t2 = 15.65
u = (−1, 2, −4)
v = (5, 4, −8)
Input:
ENG
16:12
22/11/2019

Смешанное произведение векторов

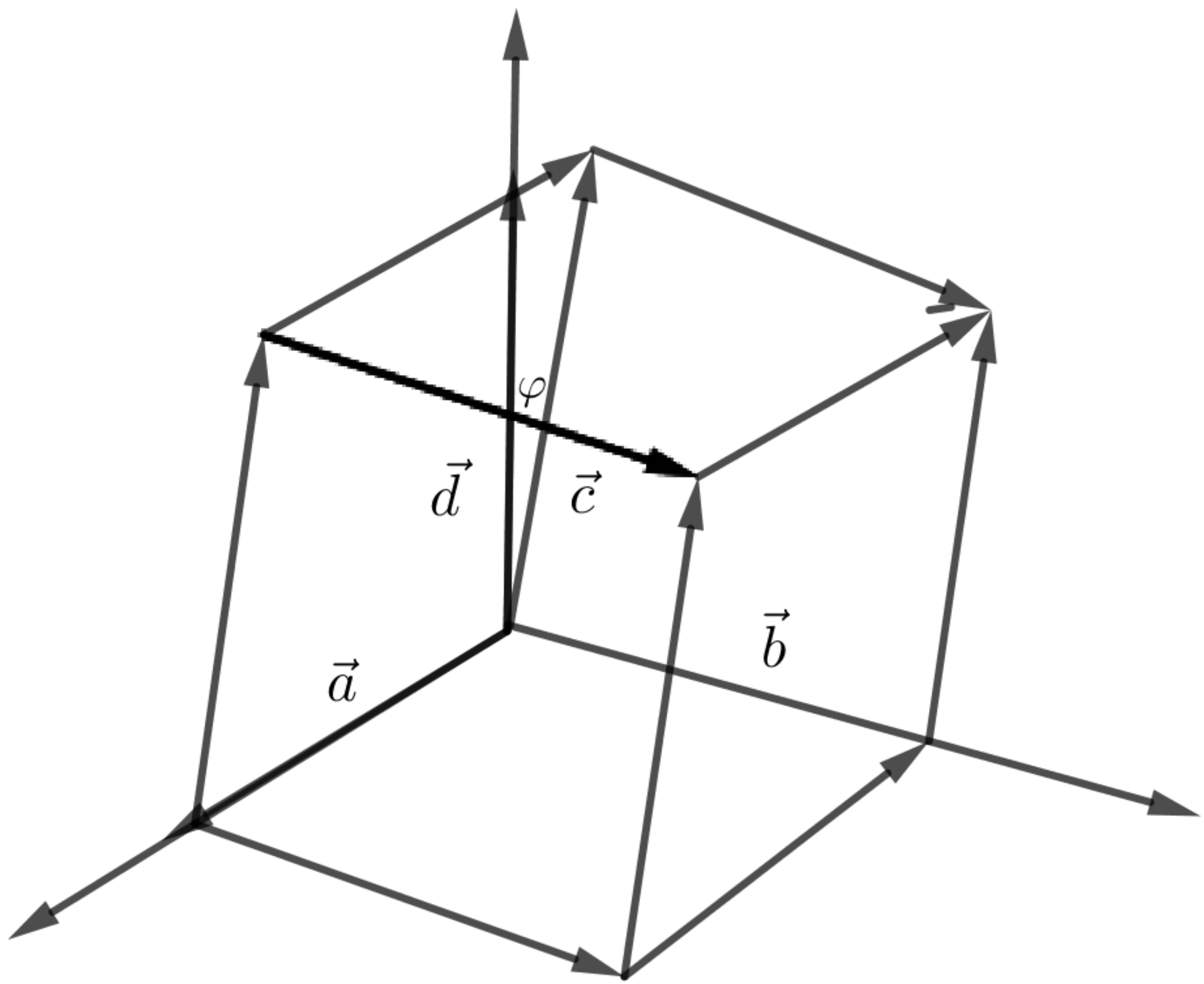
Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi = S_{\text{парал}} \cdot h$$

Здесь $$h = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$$


φ
$\vec{d}$
$\vec{c}$
$\vec{b}$
$\vec{a}$

Если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$,$\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$,
$\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z,\}$,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения.

1. $V = 0$, если, $\vec{a}$=0 или $\vec{b}$=0, либо $\vec{c}$=0 или если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$ или $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}$

4. $\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c},\ \vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c},\ \vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Объем пирамиды, построенного на векторах $\overrightarrow{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V_{\text{пир}}=\left|\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}V_{\text{парал}}$$

Пример. Найти объем пирамида с вершинами $A(2;2;2), B(4;3;3), C(4;5;4), D(5;5;6)$.

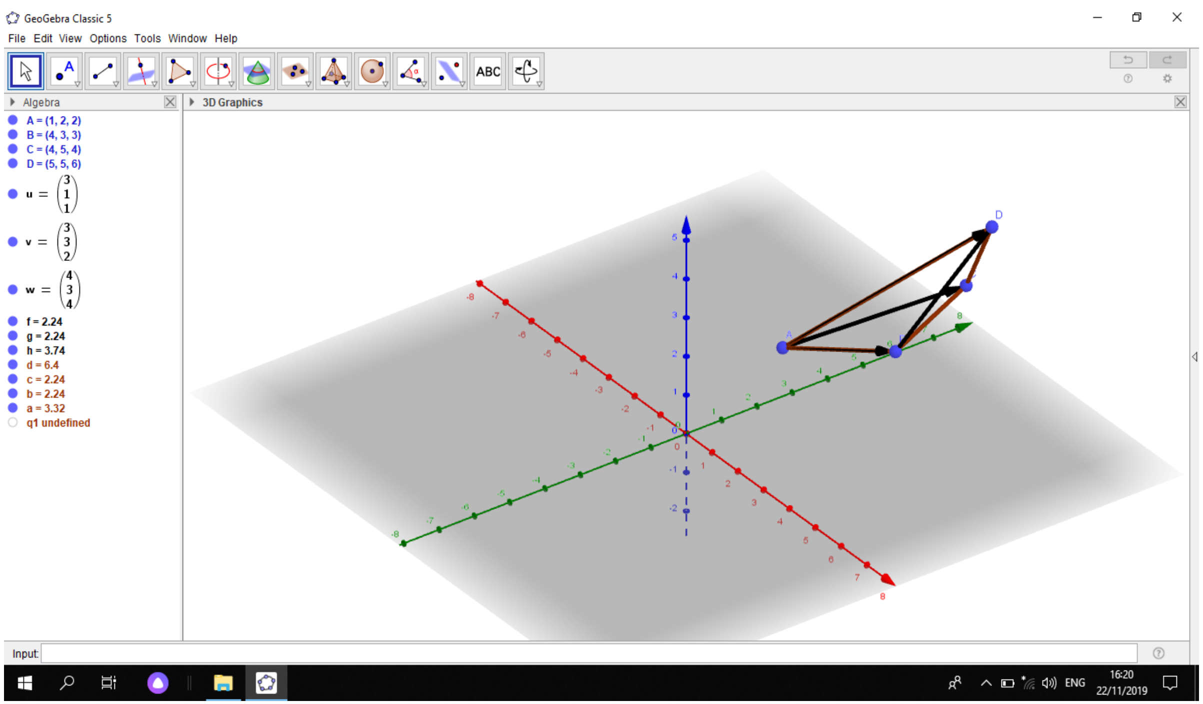
Решение: Найдем векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ образующую ребры пирамиды исходящего из вершин A.

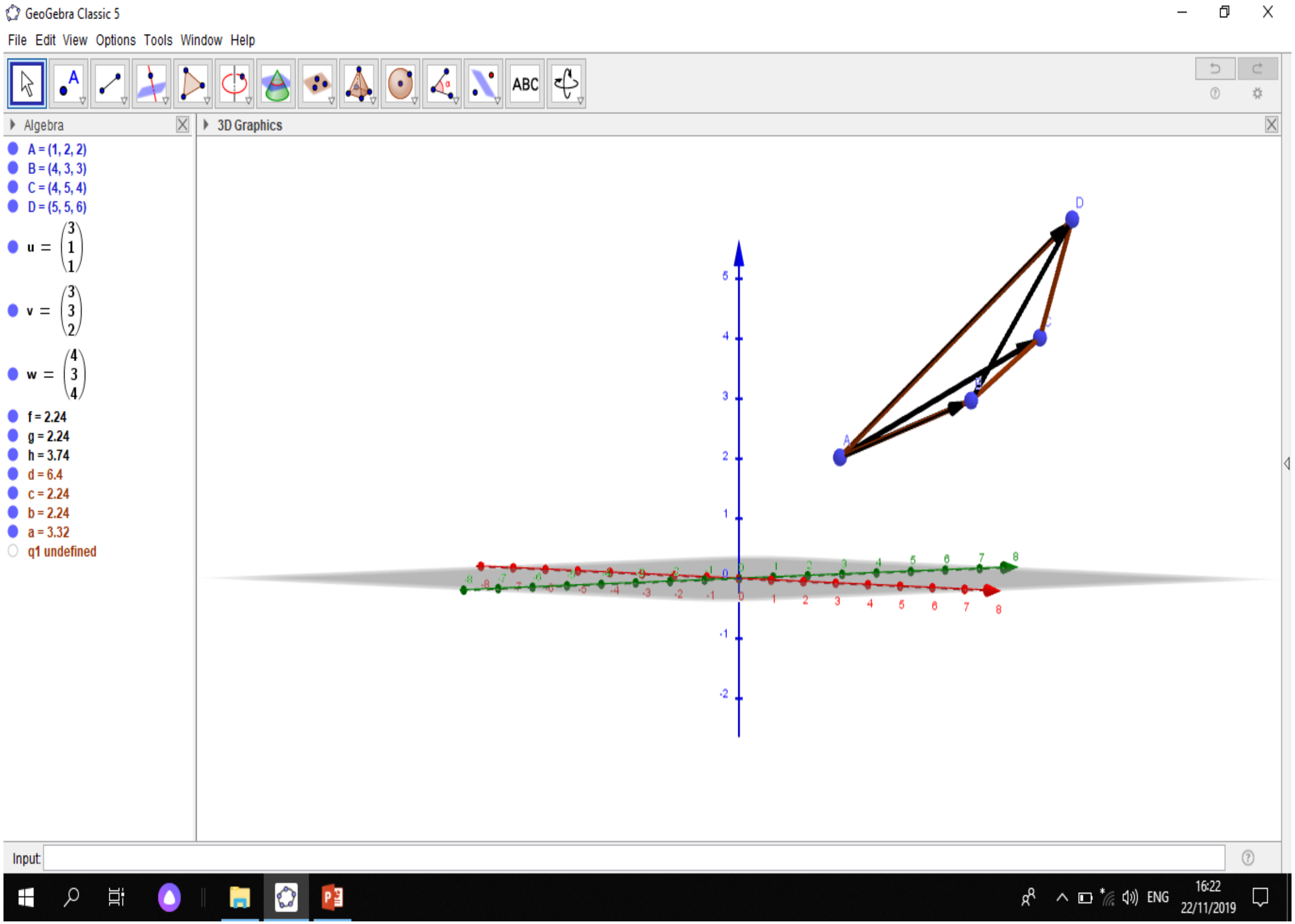
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4-2)\mathrm{i} + (3-2)\mathrm{j} + (3-2)\mathrm{k} =$$
$$= 2\mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k},$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (4-2)\mathrm{i} + (5-2)\mathrm{j} + (4-2)\mathrm{k} =$$
$$= 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 2\mathrm{k},$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (5-2)\mathrm{i} + (5-2)\mathrm{j} + (6-2)\mathrm{k}$$
$$= 3\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k},$$
$$V_{\text{пир}} = \left|\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = \frac{1}{6}V_{\text{парал}}$$

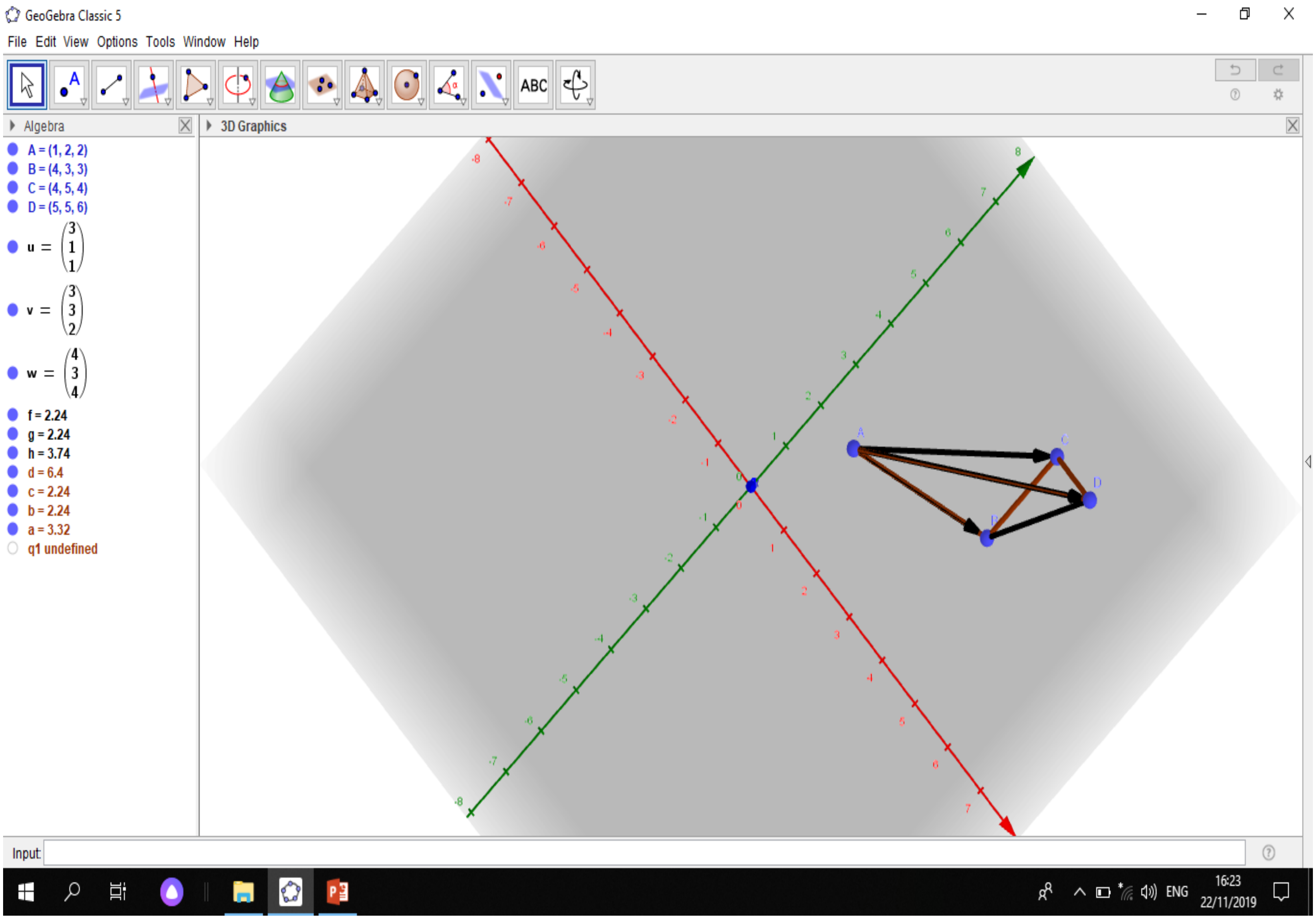
$$V_{\text{парал}} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Итак,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{7}{6}$$




GeoGebra Classic 5
File Edit View Options Tools Window Help
ABC
Algebra
3D Graphics
A = (1, 2, 2)
B = (4, 3, 3)
C = (4, 5, 4)
D = (5, 5, 6)
u = (3, 1, 1)
v = (3, 3, 2)
w = (4, 3, 4)
f = 2.24
g = 2.24
h = 3.74
d = 6.4
c = 2.24
b = 2.24
a = 3.32
q1 undefined
D
A
Input:
ENG
16:22
22/11/2019



GeoGebra Classic 5
File Edit View Options Tools Window Help
ABC
Algebra
3D Graphics
A = (1, 2, 2)
B = (4, 3, 3)
C = (4, 5, 4)
D = (5, 5, 6)
u = (3, 1, 1)
v = (3, 3, 2)
w = (4, 3, 4)
f = 2.24
g = 2.24
h = 3.74
d = 6.4
c = 2.24
b = 2.24
a = 3.32
q1 undefined
A
B
C
D
Input:
ENG
16:23
22/11/2019

Спасибо за внимание