Элементы комбинаторики.

Комбинаторика

<u>Комбинаторика</u> *– это раздел математики, в котором изучаются вопросы выбора или расположения элементов множества в соответствии с заданными правилами.*

«Комбинаторика» происходит от латинского слова **«combina»,** что в переводе на русский означает – **«сочетать», «соединять».**

ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Г.В.Лейбниц

Термин **"комбинаторика"** был введён в математический обиход всемирно известным немецким учёным **Г.В.Лейбницем,** который в 1666 году опубликовал **"Рассуждения о комбинаторном искусстве"**.

В XVIII веке к решению комбинаторных задач обращались и другие выдающиеся математики. Так, **Леонард Эйлер** рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, о циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов.

Комбинаторика занимается различного рода соединениями (**перестановки, размещения, сочетания**), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества.

Комбинаторные соединения

- **Перестановки**

1. Перестановки без повторений
2. Перестановки с повторениями

- **Размещения**

1. Размещения без повторений
2. Размещения с повторениями

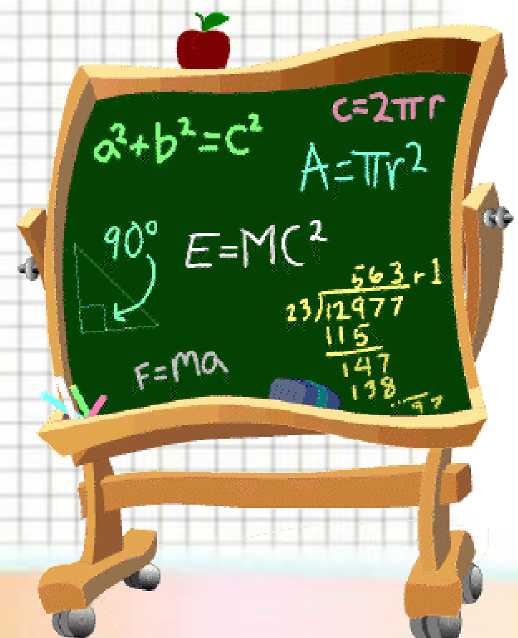
- **Сочетания**

1. Сочетания без повторений
2. Сочетания с повторениями

Перестановки – соединения, которые можно составить из **n** элементов, меняя всеми возможными способами их порядок.

Формула:

$$P_n = n!$$



Историческая справка

В **1713** году было опубликовано сочинение **Я. Бернулли** **"Искусство предположений",** в котором с достаточной полнотой были изложены известные к тому времени комбинаторные факты.

"Искусство предположений" не было завершено автором и появилось после его смерти.

Сочинение состояло из **4** частей, комбинаторике была посвящена вторая часть, в которой содержится формула для числа перестановок из ***n*** элементов.

Пример

Сколькими способами могут 8 человек встать в очередь к театральной кассе?

Решение задачи:

Существует **8** мест, которые должны занять **8** человек.

На первое место может встать любой из **8** человек, т.е. способов занять первое место – **8**.

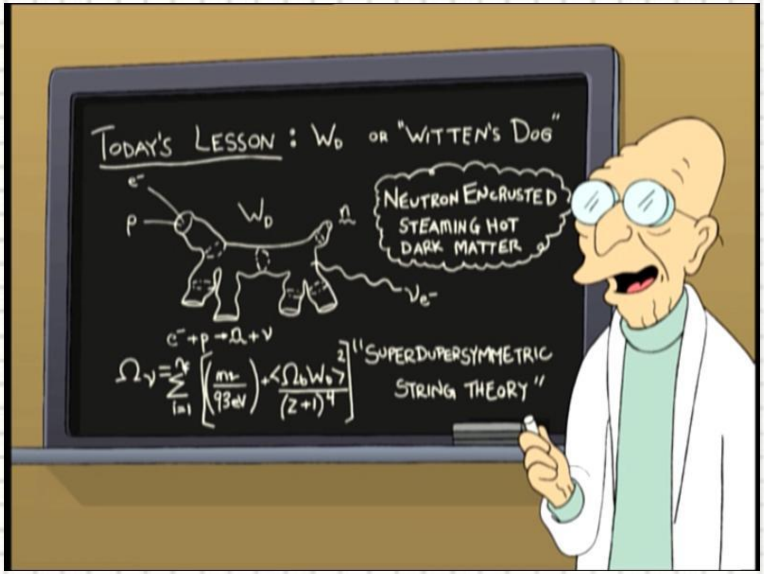
После того, как один человек встал на первое место, осталось **7** мест и **7** человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – **7**. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места.

Используя принцип умножения, получаем произведение . Такое произведение обозначается как **8!** (читается **8** факториал) и называется перестановкой **Р8**.

Ответ: **Р8 = 8!**

Проверь себя

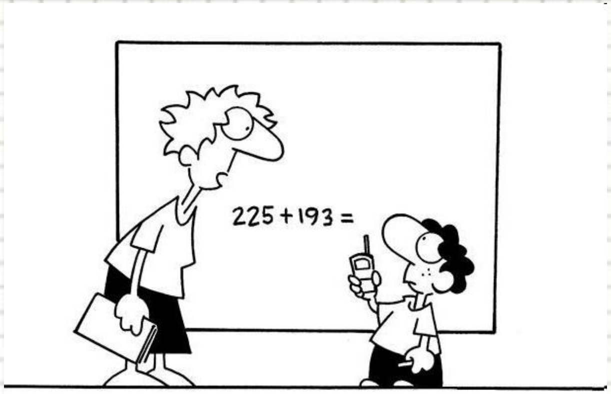
1) Сколькими способами можно поставить рядом на полке **четыре** различные книги**?**



РЕШЕНИЕ

Проверь себя

2) Сколькими способами можно положить **10** различных открыток в **10** имеющихся конвертов **(**по одной открытке в конверт**)?**

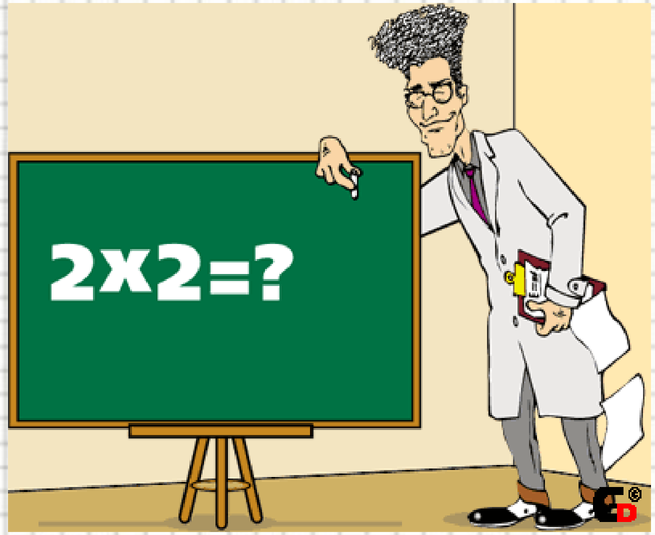


"You have to solve this problem by yourself. You can't call tech support."

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

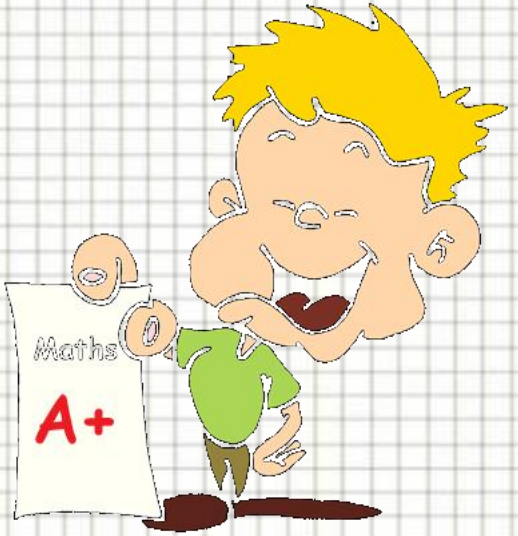
3) Сколькими способами можно рассадить **восьмерых** детей **на восьми** стульях в столовой детского сада**?**



РЕШЕНИЕ

Проверь себя

4) Сколько различных слов можно составить, переставляя местами буквы в слове **«треугольник»** (считая и само это слово)?



РЕШЕНИЕ

Проверь себя

5) Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди **семи** учащихся группы в течение **7** дней (каждый должен отдежурить один раз)?

РЕШЕНИЕ

Перестановки с повторениями

Всякое размещение с повторениями, в котором элемент a_1 повторяется k_1 раз, элемент a_2 повторяется k_2 раз и т.д. элемент a_n повторяется k_n раз, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — данные числа, называется перестановкой с повторениями порядка

$m = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, в которой данные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ повторяются соответственно $k_1, k_2, .., k_n$ раз.

Перестановки с повторениями

Теорема. Число различных перестановок с повторениями из элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$, в которых элементы $a_1, \ldots, a_n$ повторяются соответственно $k_1, \ldots, k_n$ раз, равно

$$\bar{P} = \frac{(k1+k2+\ldots+kn)!}{k1!\ k2!\ \ldots\ kn!} = \frac{m!}{k1!\ k2!\ \ldots\ kn!}$$

Пример

Слова и фразы с переставленными буквами называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

Решение.

Всего в слове «МАКАКА» 6 букв ($m=6$).

Определим сколько раз в слове используется каждая буква:

«М» - 1 раз ($k_1=1$)

«А» - 3 раза ($k_2=3$)

«К» - 2 раза ($k_3=2$)

$$P = \frac{m!}{k_1!\ k_2!\ \ldots k_n!} \Rightarrow P_{1,3,2} = \frac{6!}{1!\ 3!\ 2!} = \frac{4*5*6}{2} = 60.$$

Проверь себя

1) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова "математика" ?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

2) Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня)?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

3) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

РЕШЕНИЕ

Историческая справка

Комбинаторные мотивы можно заметить еще в символике китайской «Книги перемен» (V век до н. э.).

*В XII в. индийский математик **Бхаскара** в своём основном труде «Лилавати» подробно исследовал задачи с перестановками и сочетаниями, включая перестановки с повторениями.*

Размещения

Размещением из n элементов по k $(k \le n)$ называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов.

Два размещения из n элементов считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$$

Пример

Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, физорг и редактор стенгазеты?

Решение:

Требуется выделить упорядоченные трехэлементные подмножества множества, содержащего 40 элементов, т.е. найти число размещений без повторений из 40 элементов по 3.

$$A_{40}^{3}=\frac{40!}{37!}=38*39*40=59280$$

Проверь себя

1. Из **семи** различных книг выбирают **четыре**. Сколькими способами это можно сделать?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

2. В чемпионате по футболу участвуют **десять** команд. Сколько существует различных возможностей занять командам **первые три** места?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

3. В классе изучаются **7 предметов**. В среду **4 урока**, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду?

РЕШЕНИЕ

Размещения с повторениями

- **Размещения с повторениями** – соединения, содержащие **n** элементов, выбираемых из элементов **m** различных видов ($n \le m$) и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком элементов.
- **Их количество** в предположении неограниченности количества элементов каждого вида равно $\bar{A}_m^n = m^n$

Пример использования

В библиотеку, в которой есть много одинаковых учебников **по десяти предметам**, пришло **5 школьников**, каждый из которых хочет взять учебник. Библиотекарь записывает в журнал по порядку названия (без номера) взятых учебников без имен учеников, которые их взяли. Сколько разных списков в журнале могло появиться?

Решение задачи

Так как учебники по каждому предмету одинаковые, и библиотекарь записывает лишь название (без номера),то <u>список – размещение с повторением</u>, число элементов исходного множества равно 10, а количество позиций – 5.

Тогда количество разных списков равно

$$\bar{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000.$$

<u>Ответ</u>: 100000

Проверь себя!

1. Телефонный номер состоит из 7 цифр. Какое наибольшее число звонков неудачник-Петя может совершить прежде, чем угадает правильный номер.

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

2. Сколькими способами можно написать слово, составленное из четырех букв английского алфавита?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

3. В магазине, где есть 4 вида мячей, решили поставить в ряд 8 мячей. Сколькими способами можно это сделать, если их расположение имеет значение?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

4. Сколькими способами можно пришить на костюм клоуна в линию <u>шесть пуговиц одного из четырех цветов</u>, чтобы получить узор?

РЕШЕНИЕ

Сочетания

Сочетания – *соединения, содержащие по m предметов из n, различающихся друг от друга по крайней мере одним предметом.*

Сочетания *– конечные множества, в которых порядок не имеет значения.*

Сочетания

Формула нахождения количества сочетаний без повторений:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Историческая справка

В 1666 году Лейбниц опубликовал "Рассуждения о комбинаторном искусстве". В своём сочинении Лейбниц, вводя специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними, находит все **k** - сочетания из **n** элементов, выводит свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Пример использования:

Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из класса, в котором 25 учеников?

Решение:

m = 2 (необходимое количество дежурных)

n = 25 (всего учеников в классе)

$$C_{25}^{2} = \frac{25!}{2!\,(25-2)!} = \frac{24*25}{2} = 300$$

Проверь себя!

1) Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

2) Десять участников конференции обменялись рукопожатиями, пожав руку каждому. Сколько всего рукопожатий было сделано?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

3) В школьном хоре 6 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно выбрать из состава школьного хора 2 девочек и 1 мальчика для участия в выступлении окружного хора?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

4) Сколькими способами можно выбрать 3 спортсменов из группы в 20 человек для участия в соревнованиях?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя!

5) В классе 10 учебных предметов и 5 разных уроков в день. Сколькими способами могут быть распределены уроки в один день?

РЕШЕНИЕ

Сочетания с повторениями

Определение

- **Сочетаниями с повторениями** из m по n называют соединения, состоящие из n элементов, выбранных из элементов m разных видов, и отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из m по n обозначают

$$\overline{C}_m^n$$

Сочетания с повторениями

Если из множества, содержащего *n* элементов, выбирается поочередно *m* элементов, причём выбранный элемент каждый раз возвращается обратно, то количество способов произвести неупорядоченную выборку – число ***сочетаний с повторениями*** – составляет

$$C_m^n = P_{m-1,\, n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

Историческая справка

Крупнейший индийский математик Бхаскара Акария (1114–1185) также изучал различные виды комбинаторных соединений. Ему принадлежит трактат "Сидханта–Широмани" ("Венец учения"), переписанный в XIII в. на полосках пальмовых листьев. В нём автор дал словесные правила для нахождения $\tilde{A}_n^m$, A_n^m, P_n и C_n^m ,указав их применения и поместив многочисленные примеры

Пример использования

Задача №1

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в распоряжении имеются 4 сорта пирожных?

Решение:

$$C_4^7=\frac{(4+7-1)!}{(4-1)!4!}=120$$

Пример использования

Задача №2

Сколько костей находится в обычной игре "домино"?

***Решение*: Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по две из семи цифр множества (0,1,2,3,4,5,6). Число всех таких сочетаний равно**

$$\bar{C}_7^2 = \frac{(7+2-1)!}{(7-1)!2!} = 28$$

Проверь себя

Задача 1.

В буфете Гимназии продаются **5 сортов пирожков**: с яблоками, с капустой, картошкой, мясом и грибами. Скольким числом способов можно сделать покупку **из 10 пирожков?**

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

Задача 2.

В коробке лежат шары **трех** цветов— красного, синего и зеленого. Сколькими способами можно составить набор **из двух** шаров?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

Задача 3.

Сколькими способами можно выбрать 4 монеты из четырех пятикопеечных монет и из четырех двухкопеечных монет?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

Задача 4.

Сколько будет костей домино, если в их образовании использовать все цифры?

РЕШЕНИЕ

Проверь себя

Задача 5.

Палитра юного импрессиониста состоит **из 8** различных красок. Художник берет кистью наугад любую из красок и ставит цветное пятно на ватмане. Затем берет следующую кисть, окунает её в любую из красок и делает второе пятно по соседству. Сколько различных комбинаций существует **для шести** пятен?

РЕШЕНИЕ

Используемая литература

- Алгебра и начала математического анализа.11 класс/ Ю.М.Колягин, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова, М.И.Шабунин. – М.:Просвещение, 2011.
- Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М., 1969
- Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – МЦМНО, 2010
- ru.wikipedia.org›wiki/История комбинаторики