TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

FAN: OLIY MATEMATIKA

Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola, parabola.

Reja:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq tushunchasi
2. Aylana
3. Ellips
4. Giperbola
5. Parabola

Ikkinchi tartibli egri chiziq

Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq x va y ga nisbatan birinchi darajali Ax+By+C=0 tenglama bilan analitik ifodalanadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

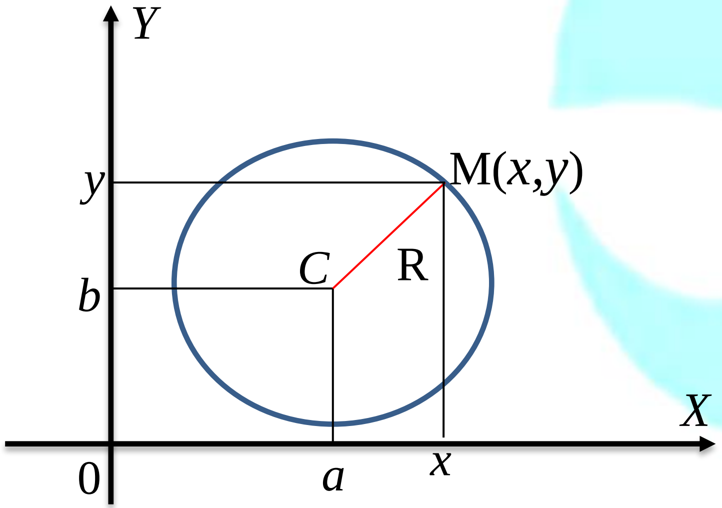
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Odatda bu tenglama ***ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy tenglamasi*** deb yuritiladi. Ushbu sodda ko'rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola va parabola to'g'risida gaplashamiz.

Aylana

Ta‘rif: Berilgan markaz deb ataluvchi nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o‘rni ***aylana*** deb ataladi.

Markazi $C(a, b)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:



$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (1)$$

Agar (1) tenglamadagi qavslarni ochsak

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$$

ni hosil qilamiz. Bundan esa $-2a = m, -2b = n, a^2 + b^2 - R^2 = p$ almashtirish bajarsak

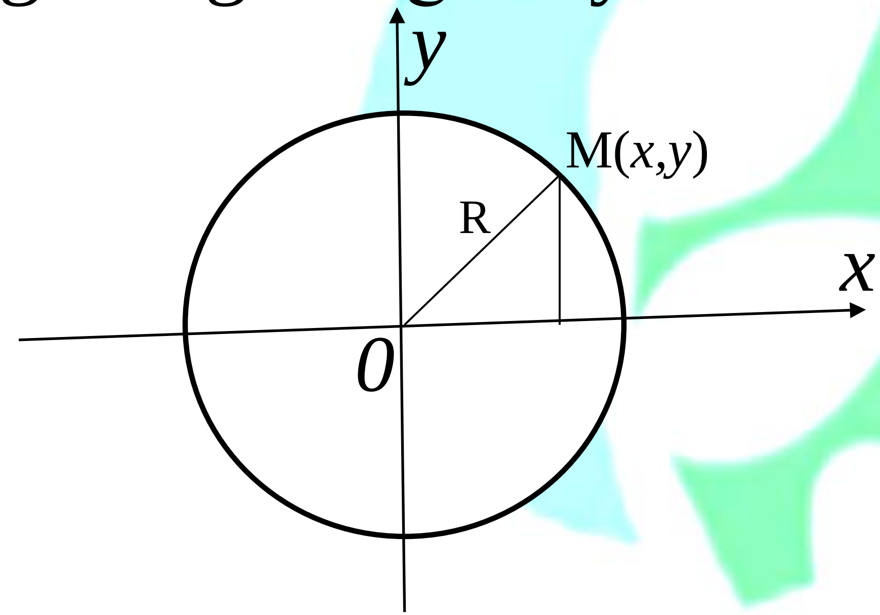
$$\boxed{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0} \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama ***aylananing umumiy tenglamasi*** deyiladi.

Agar (1) tenglamadagi a=0, b=0 bo‘lsa

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \qquad (3)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglama markazi koordinatalar boshida va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasidir.



Misol: $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ aylananing radiusi va markazi topilsin.

Yechish: $x^2+y^2-6x+4y-23=0$ tenglamaning chap tomonini to‘la kvadratdan iborat ifodalarga ajratamiz:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)-13-23=0$$

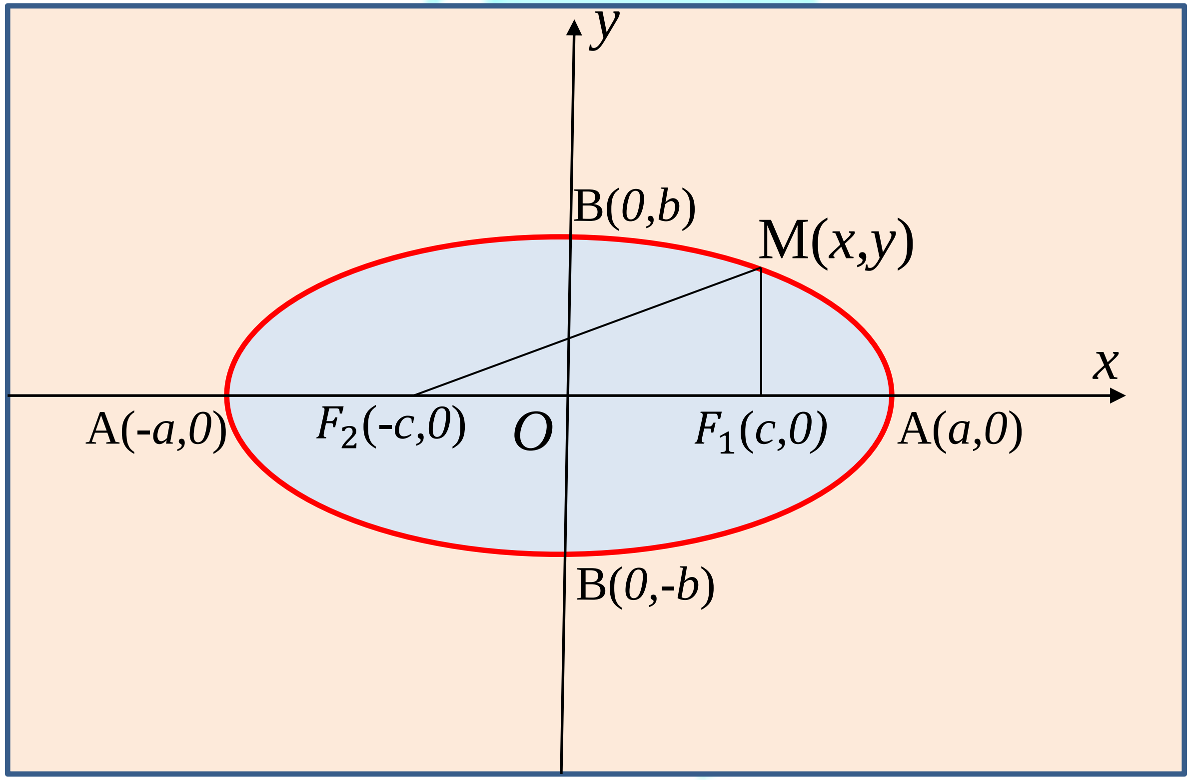
$$(x-3)^2+(y+2)^2-36=0$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=36$$

Bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirsak, *a*=3, *b*=-2, *R*=6 ekanligi kelib chiqadi.

Ellips

Ta‘rif: ***Ellips*** deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha (fokuslargacha) masofalar yig‘indisi F_1F_2 dan katta o‘zgarmas $2a$ miqdorga teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.



Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

bo‘lib, ellips koordinata o‘qlariga nisbattan simmetrikdir. *a* va *b* parametrlar mos ravishda ellipsning *katta va kichik yarim o‘qlari* deb ataladi.

a>*b* bo‘lsin, u holda F_1 va F_2 fokuslar *Ox* o‘qida joylashgan bo‘lib koordinata boshidan $c^2=a^2-b^2, c=\sqrt{a^2-b^2}$ masofada bo‘ladi. $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ nisbat ellipsning *ekssentrisiteti* deb ataladi. Ellipsning M(*x*,*y*) nuqtasidan fokuslargacha bo‘lgan masofalar (fokal radius vektorlar)

$r_1=a-\varepsilon x, r_2=a+\varepsilon x$ (2) formulalar orqali aniqlanadi.

Agar *a*=*b* bo‘lsa (1) tenglama $x^2+y^2=a^2$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu markazi koordinatalar boshida va radiusi a ga teng bo‘lgan aylananing tenglamasidir.

Agar *a*<*b* bo‘lsa ellipsning fokuslari *Oy* o‘qida joylashgan bo‘ladi.

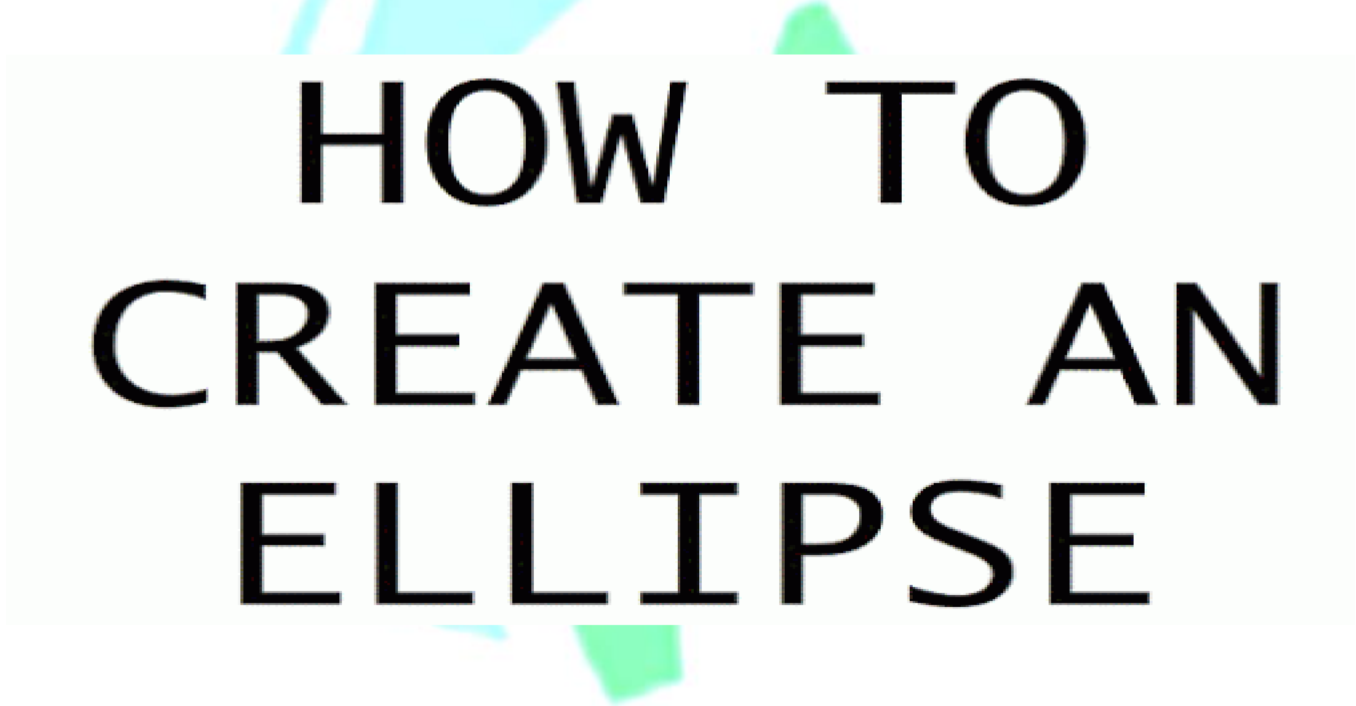
Fokuslari koordinata boshidan $c^2=b^2-a^2, c=\sqrt{b^2-a^2}$ masofada bo‘ladi. Ekssentrisiteti $\frac{c}{b}=\varepsilon<1$ va fokal radiusi

$r_1=b-\varepsilon y, r_2=b+\varepsilon y$ (3) ko‘rinishda bo‘ladi.

Ushbu tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

elipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.



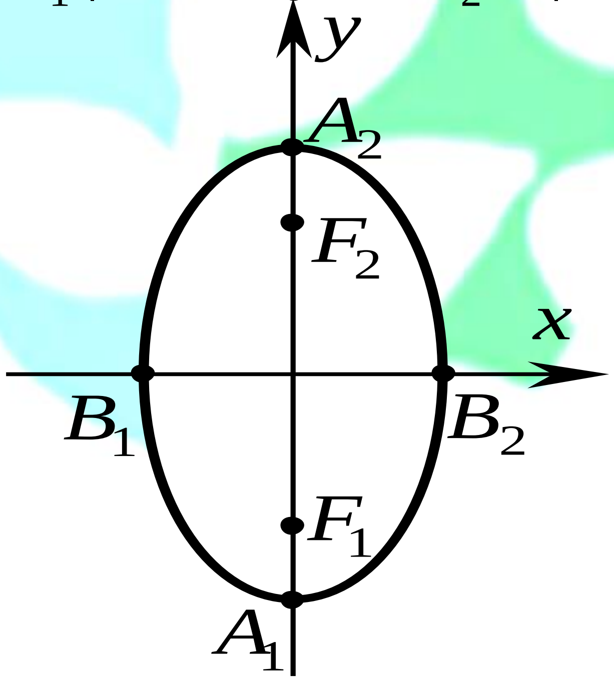
2) Agar koordinata tekisligini shunday tanlasakki, unda F_1 va F_2 fokuslar Oy o‘qida koordinata boshidan bir hil masofada yotsa, u holda ellips tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Bu ellipsning katta yarim o‘qi ***Oy o‘qida***, kichik yarim o‘qi ***Ox o‘ida*** yotadi, fokuslarining koordinatalari esa $F_1(0;-c)$ va $F_2(0;c)$ bo‘lib, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

$M(x;y)$ nuqta uchun fokal tadius vektorlari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$r_1=|MF_1|=a+\varepsilon y\,,\qquad r_2=|MF_2|=a-\varepsilon y\,.$$



Misol: Katta yarim o‘qi 5 ga va $\varepsilon = 0.6$ bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish: Shartga ko‘ra $\frac{c}{a} = 0.6,\ c = 5 \cdot 0.6 = 3$ hosil bo‘ladi.

Ellips kichik yarim o‘qining kvadrati $b^2 = a^2 - c^2$ ga teng. Bundan $b^2 = 25 - 9 = 16,\ b = 4.$

Izlanayotgan ellipsning kanonik tenglamasi

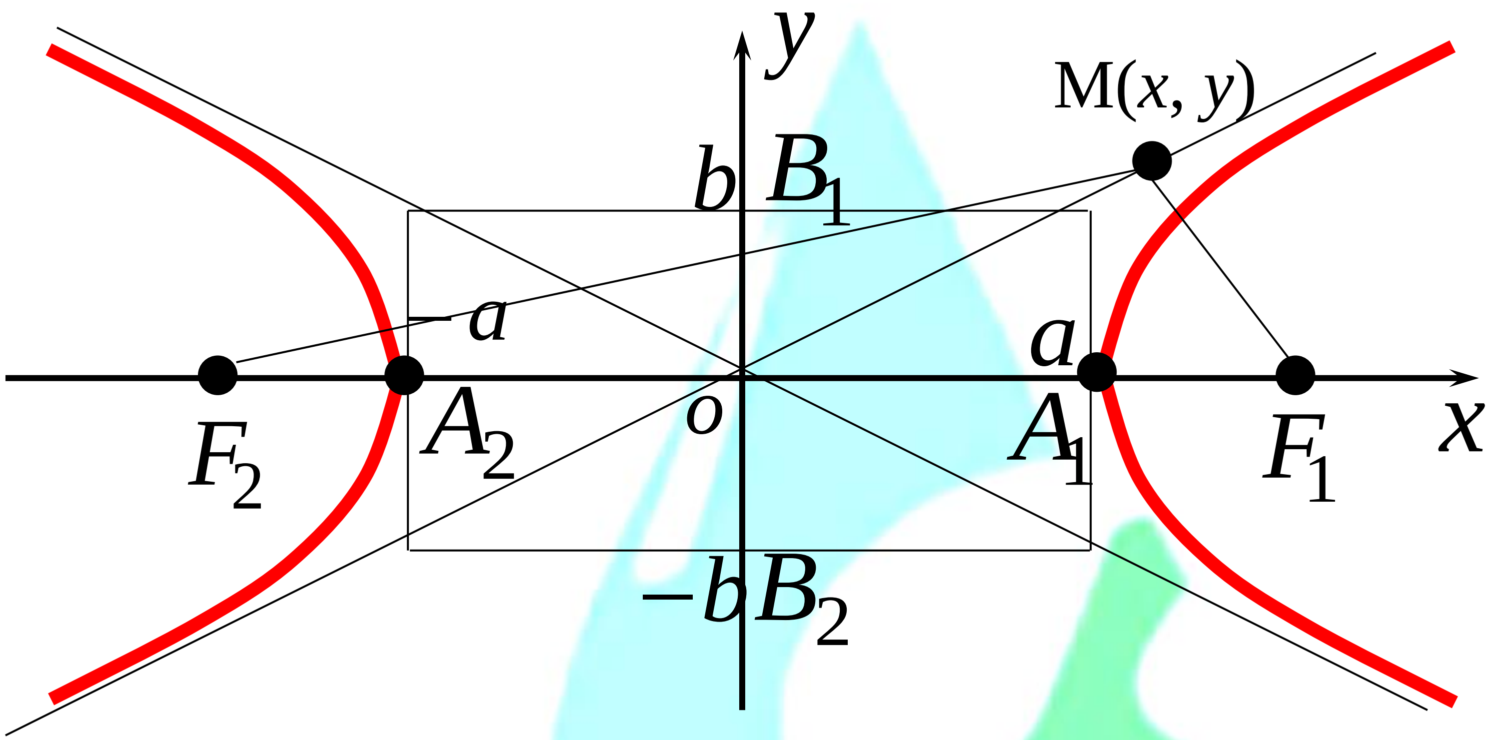
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Giperbola

Ta'rif: ***Giperbola*** deb, shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, har bir nuqtasidan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha (fokusgacha) masofalar ayirmasining absalyut qiymati o'zgarmas $2a$ $(0 < 2a < F_1F_2)$ miqdordan iboratdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)

bo'lib, koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir. *a* giperbolaning *haqiqiy yarim o'qi*, *b* esa *mavhum yarim o'qi* deb ataladi. Giperbola *Ox* o'qni uchlar deb ataluvchi $A_1(a, 0), A_2(-a, 0)$ nuqtalarda kesadi. Oy o'qini kesib o'tmaydi.



Bu yerda

$$|A_1A_2| = 2a, |B_1B_2| = 2b, |F_1F_2| = 2c, |F_1M| = r_1, |F_2M| = r_2$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ parametr koordinata boshidan fokusgacha masofani bildiradi. $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ giperbolaning *ekssentrisiteti* deyiladi.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar ***giperbolaning assimptotalari*** deyiladi. Fokal radiuslari $r_1 = |\varepsilon x - a|, r_2 = |\varepsilon x + a|$ formulalar orqali topiladi. Agar a=b bo‘lsa $x^2 - y^2 = a^2$ giperbola teng tomonli giperbola deb atalib, assimtotalar tenglamasi $y = \pm x$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ va $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ giperbolalar qo‘shma giperbolalar deyiladi.

Misol: Fokuslar orasidagi masofa 26 ga, ekssentrisiteti $\frac{13}{12}$ teng bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish: shartga ko‘ra 2c=26, c=13, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$ bundan, $\frac{13}{a} = \frac{13}{12}, a = 12$ ekanligi kelib chiqadi. $c^2 = a^2 + b^2$ formuladan $b^2 = c^2 - a^2$ bundan esa $b = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ ekanligi kelib chiqadi. Geperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1,\ \ \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

Parabola

Ta‘rif: Berilgan nuqtadan(fokusdan) va berilgan to‘g‘ri chiziqdan (direktrisadan) bir xil uzoqlikda bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni ***parabola*** deb ataladi.

Pararabolaning kanonik tenglamasi quyidagi ikki ko‘rinishga ega:

1) $y^2 = 2px$ Ox o‘qiga nisbatan simmetrik;

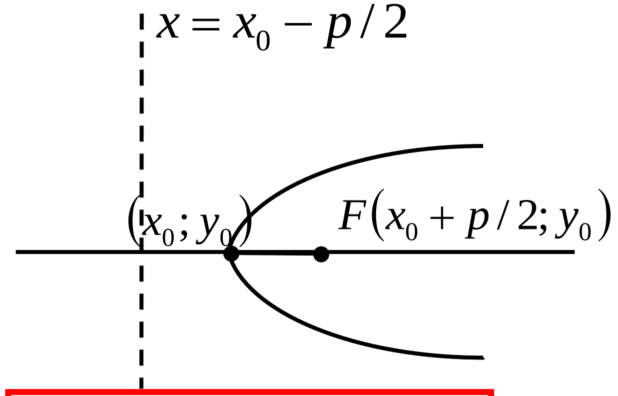
2) $x^2 = 2py$ Oy o‘qiga nisbatan simmetrik.

Har ikki holda ham parabolaning uchi, yani simmetriya o‘qida yotuvchi nuqtasi, koordinata boshida bo‘ladi. $y^2 = 2px$ parabola $F(\frac{p}{2}, 0)$ fokusga va $x = -\frac{p}{2}$ direktrisaga ega. M(x, y) nuqtasining fokal radius vektori $r = x + \frac{p}{2}$ ga teng.

$x^2 = 2py$ parabola $F(0, \frac{p}{2})$ fokusga va $y = -\frac{p}{2}$ direktrisaga ega. M(x, y) nuqtasining fokal radius vektori $r = y + \frac{p}{2}$ ga teng.

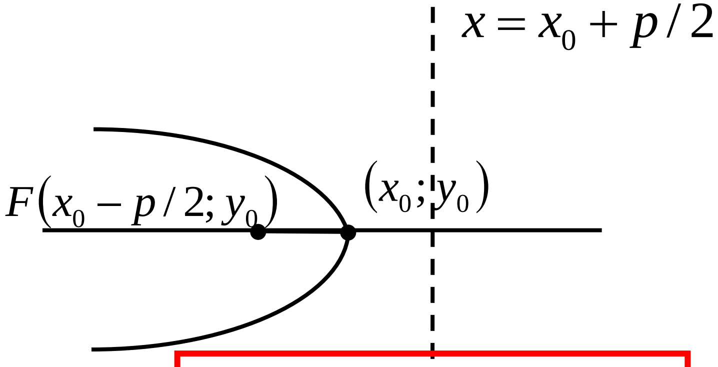
$O(x_0, y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi parabolaning kanonik tenglamalari quyidagicha

a)



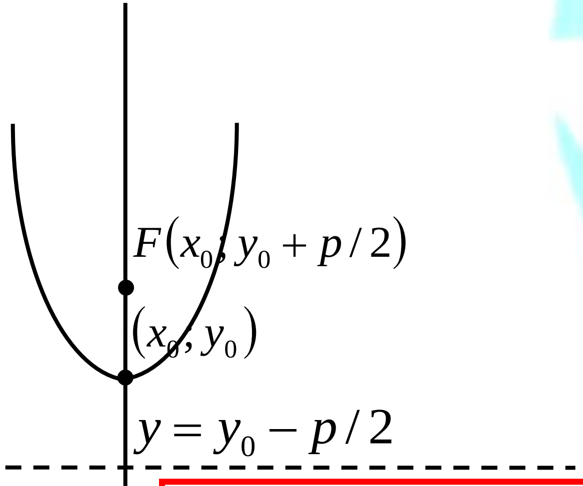
$$\boxed{(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

b)



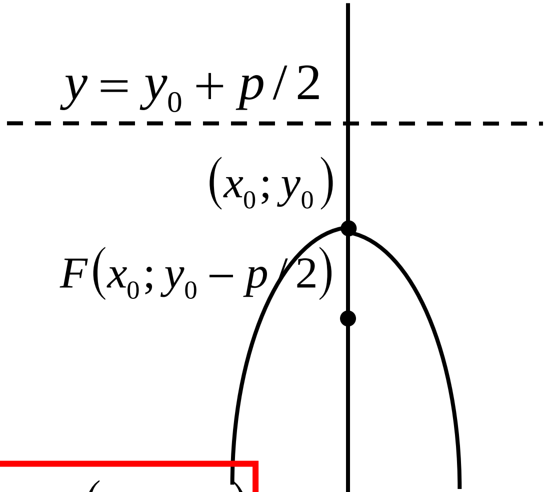
$$\boxed{(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)}$$

c)



$$\boxed{(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}$$

d)

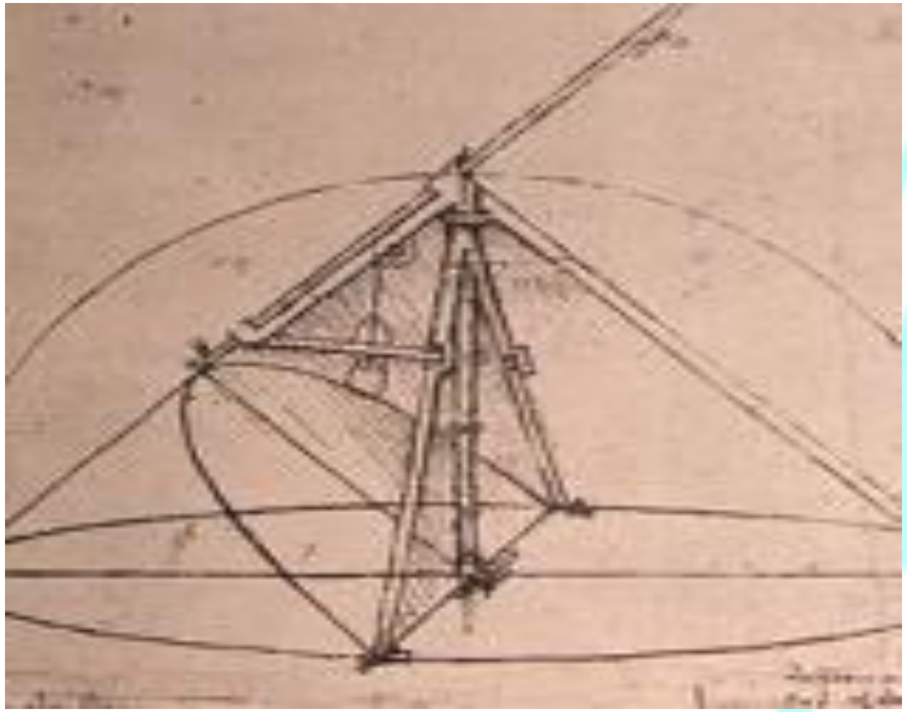


$$\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)}$$

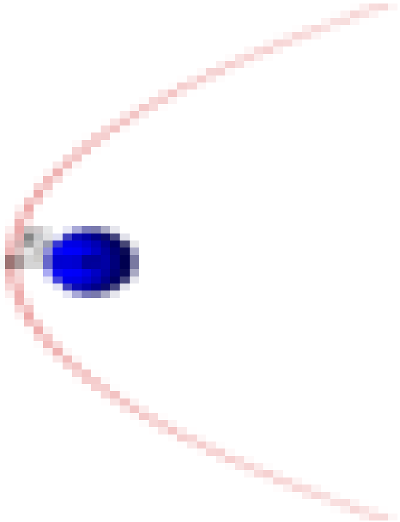
Misol: $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisa tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish: Berilgan tenglamani $y^2 = 2px$ kanonik tenglama bilan taqqoslaymiz. $2px = 6x$ bundan *p*=3. Parabola direltrisasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ ligidan $x = -\frac{3}{2}$ ekanligi kelib chiqadi. Ko‘rilayotgan hol uchun direktrisa tenglamasi $x = -\frac{3}{2}$, fokusi esa $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ bo‘ladi.

Fizika olamida parabola



Leonardo da Vinchining parabolik kompasi.

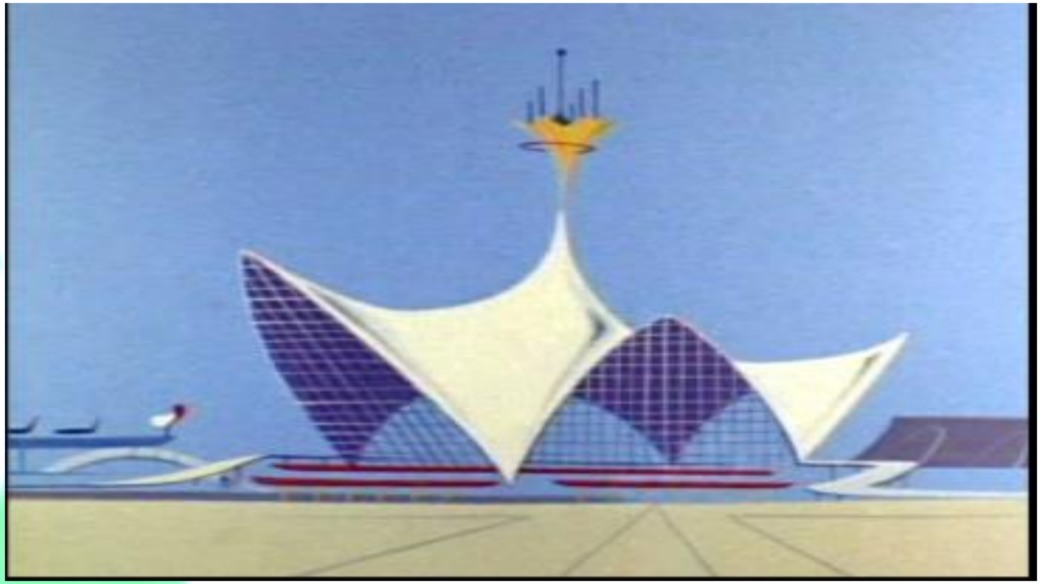


Orbitada sputnikning parabolik harakati.

Fizika olamida parabola

Suv harakatining trayektoriyasi

Arxitekturada parabola



Адабиётлар:

1.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 1 т: 1994 й.
2.Азларов Т., Мансуров Х. ,Математик анализ,Т.: «Ўқитувчи». 2 т: 1995 й.
3.Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А.,Функциялар назарияси ,Т.: “ЎАЖБНТ” маркази, 2004 й.
4.Turgunbayev R.,Matematik analiz. 2-qism,T.TDPU, 2008 y.
5.Jo‘raev T. va boshqalar,Oliy matematika asoslari. 2-q.,T.: «O‘zbekiston». 1999
6.Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, III қисм. Т.: «Ўзбекистон», 2000 й.,
7.Соатов Ё., Олий математика. Т., “Ўзбекистон”. 1996 й, 3 жилд
8.www.ziyonet.uz/
9.www.pedagog.uz/

TOSHKENT IRRIGATSIYA VA QISHLOQ XO'JALIGINI MEXANIZATSIYALASH MUHANDISLARI INSTITUTI

E‘TIBORLARINGIZ UCHUN RAXMAT

☎ + 998 71 237 0986