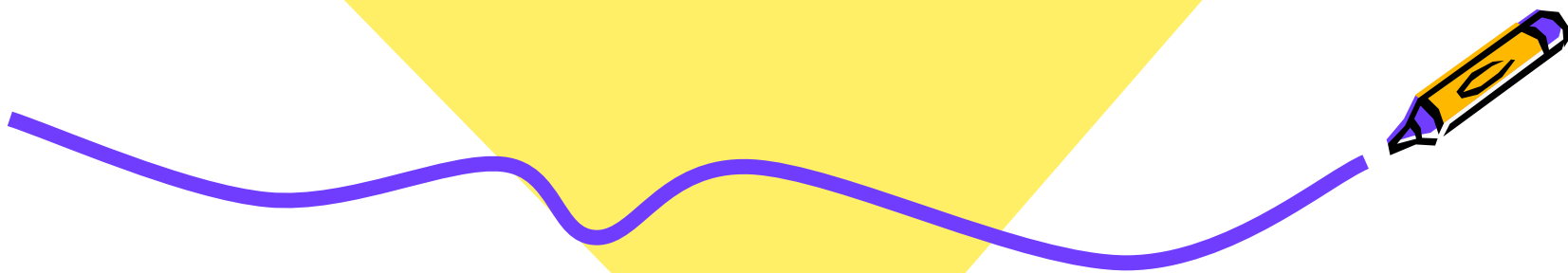




# Элементы комбинаторики



# Комбинаторика

- раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, как правило, конечного множества в соответствии с заданными правилами.



# Множество

- Всякая совокупность элементов произвольного рода, обладающая некоторым общим свойством, образует **множество** (соединение).



# Примеры множеств:

- множество всех действительных чисел,
- множество натуральных чисел,
- множество всех студентов данного университета,
- множество парт в данном классе.

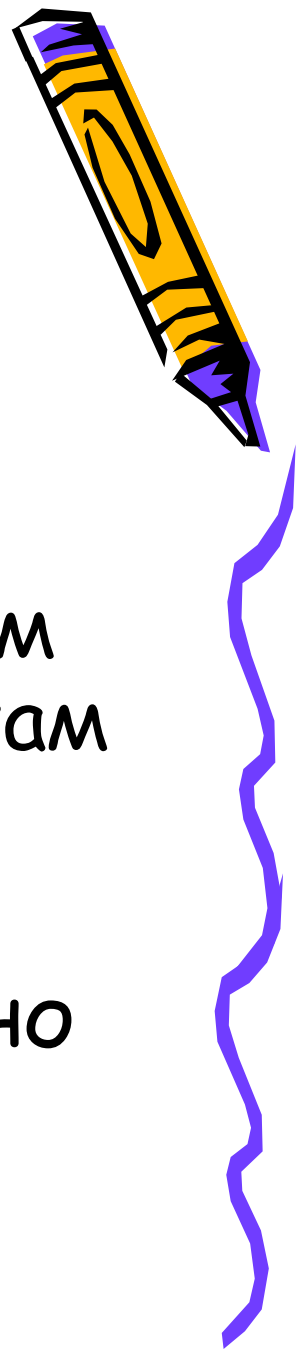




- Множество считается определенным, если указаны все его элементы или указано их общее свойство.
- Множества, содержащие конечное число элементов, называются **конечными**. Характеристикой конечного множества является число его элементов.

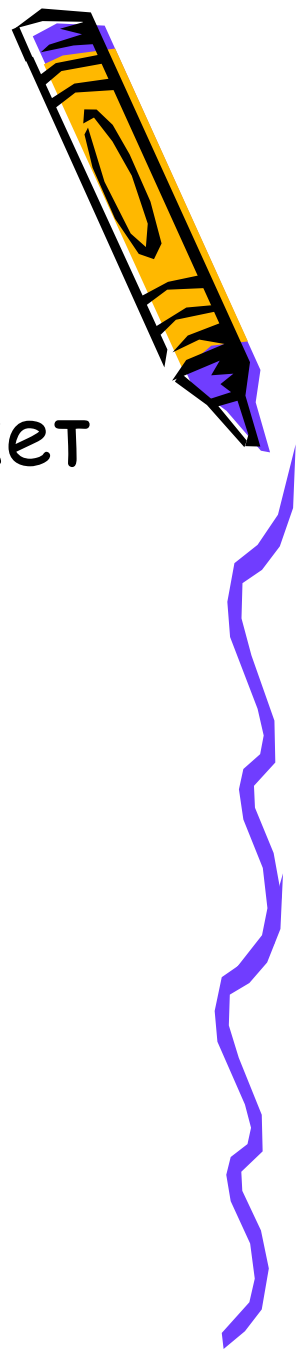


- Множество, состоящее из  $n$  элементов, называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие натуральное число от  $1$  до  $n$  таким образом, что различным элементам соответствуют различные натуральные числа.
- Всякое конечное множество можно упорядочить.

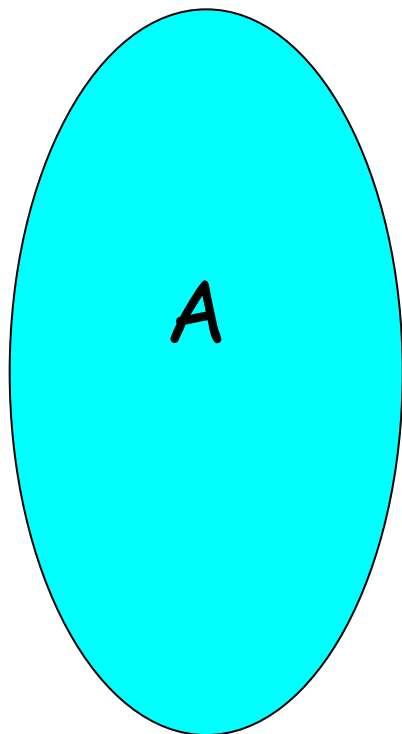


# Правило суммы

- Пусть некоторый предмет  $A$  может быть выбран  $m$  способами, а другой предмет  $B$  может быть выбран  $n$  способами. Тогда имеется  $m + n$  возможностей выбрать либо предмет  $A$ , либо предмет  $B$ .



# Правило суммы

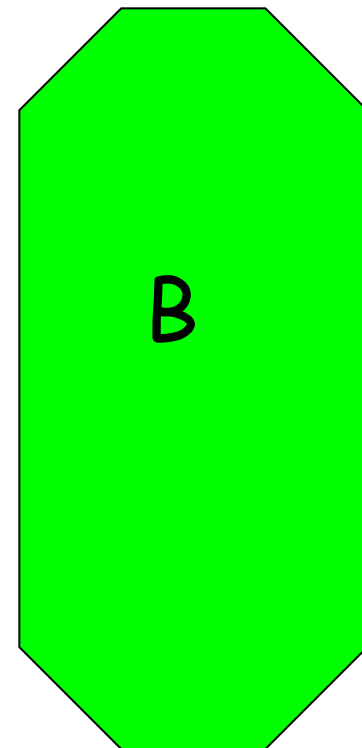


$A$  или  $B$

$A \vee B$

$A \cup B$

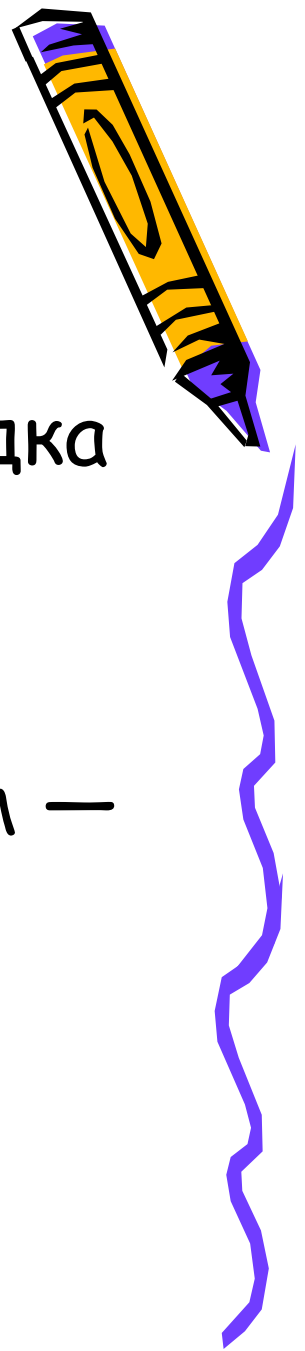
$A + B$





# Задача 1

- От сквера Кирова до академгородка можно проехать через Ангарский мост, плотину и новый мост. В первом случае количество дорог равно 2, во втором — 2, в третьем — 3. Сколькими способами можно добраться от сквера Кирова до академгородка ?



# Решение

академгородок

сквер

$$2+2+3=7$$



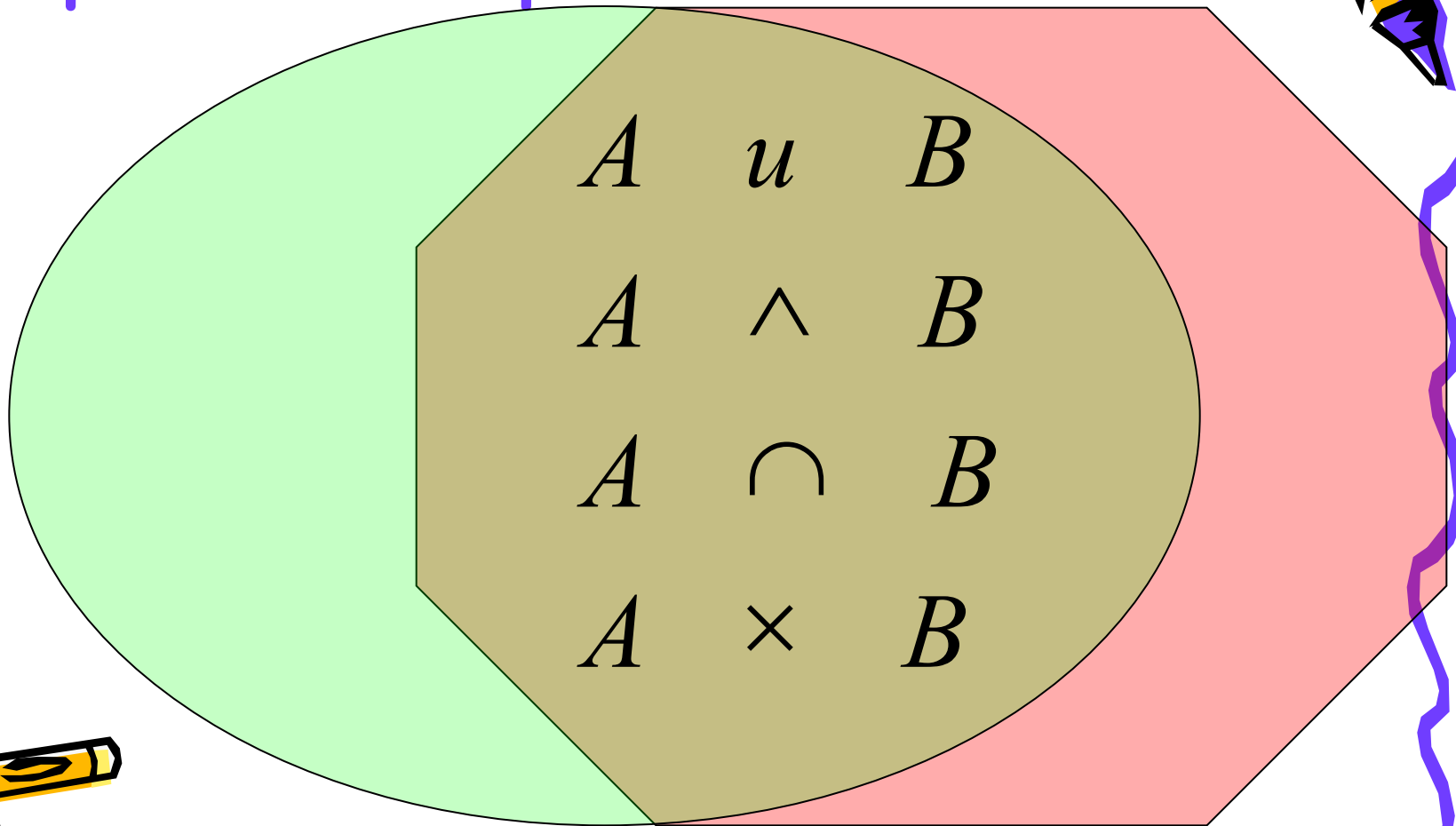
# Правило произведения



Пусть некоторый предмет  $A$  может быть выбран  $m$  способами, а другой предмет  $B$  может быть выбран  $n$  способами. Тогда имеется  $mn$  возможностей выбрать предмет  $A$  и предмет  $B$ .

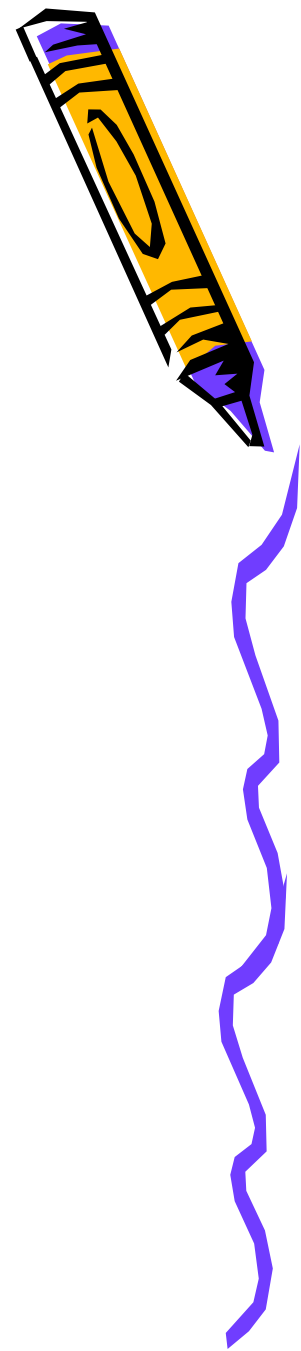


# Правило произведения



## Задача 2

- В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида открыток. Сколькими способами можно купить конверт и открытку?



# Решение

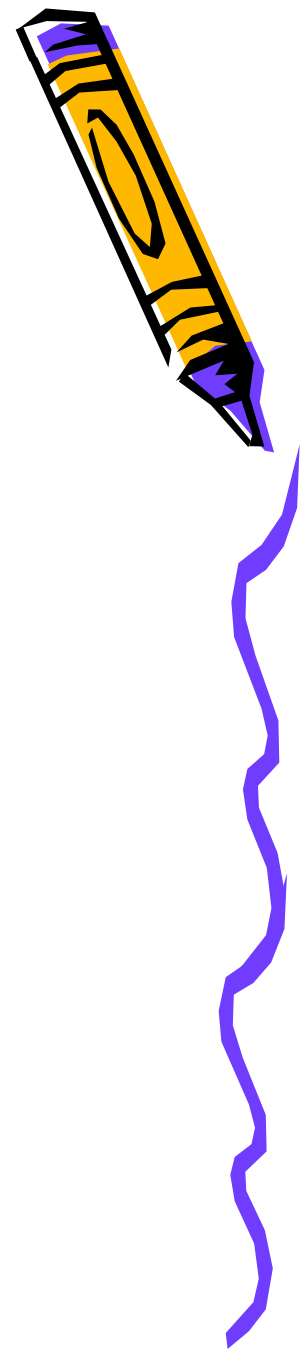


$$5 \cdot 4 = 20$$



## Задача 3

- Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова КОНВЕРТ?



## Решение

КОНВЕРТ

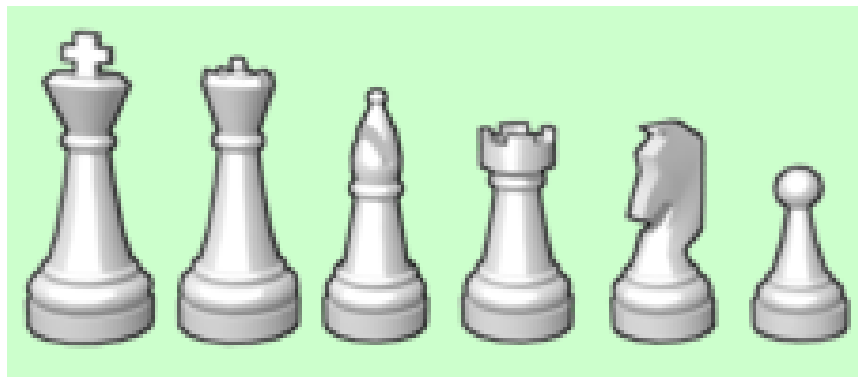
- Гласную можно выбрать двумя способами.
- Согласную — пятью способами.
- Ответ.  $2 \cdot 5 = 10$ .



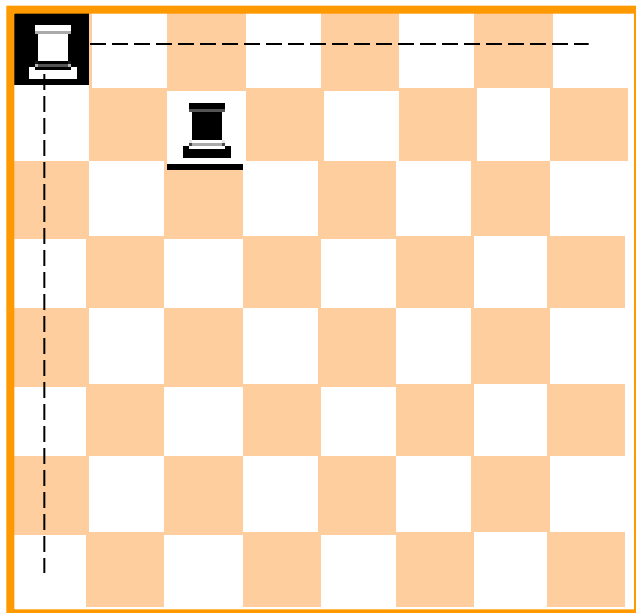


# Задача 4

- Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?



# Решение



$$64 \cdot 49 = 3136$$



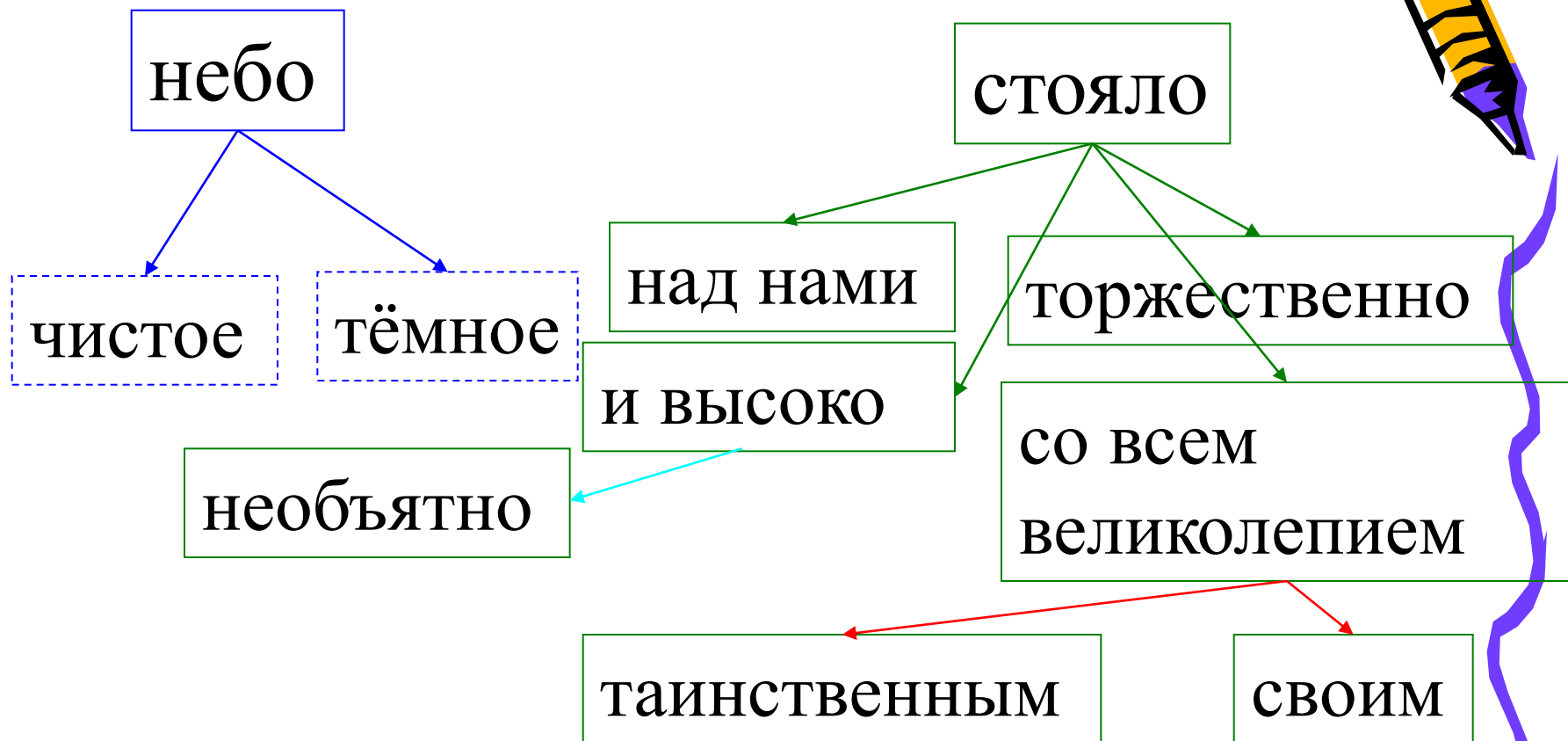
## Задача 5

«Тёмное , чистое небо торжественно и необъятно высоко стояло над нами со всем своим таинственным великолепием».

Сколько осмысленных предложений можно составить, вычёркивая некоторые слова этого предложения? (Во все предложения обязательно должны входить подлежащее небо и сказуемое стояло.)



# Решение

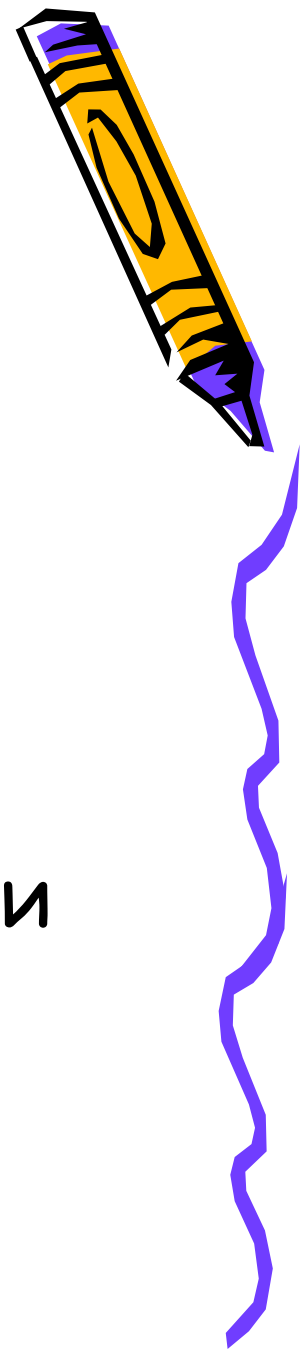


$$2^9 = 512$$

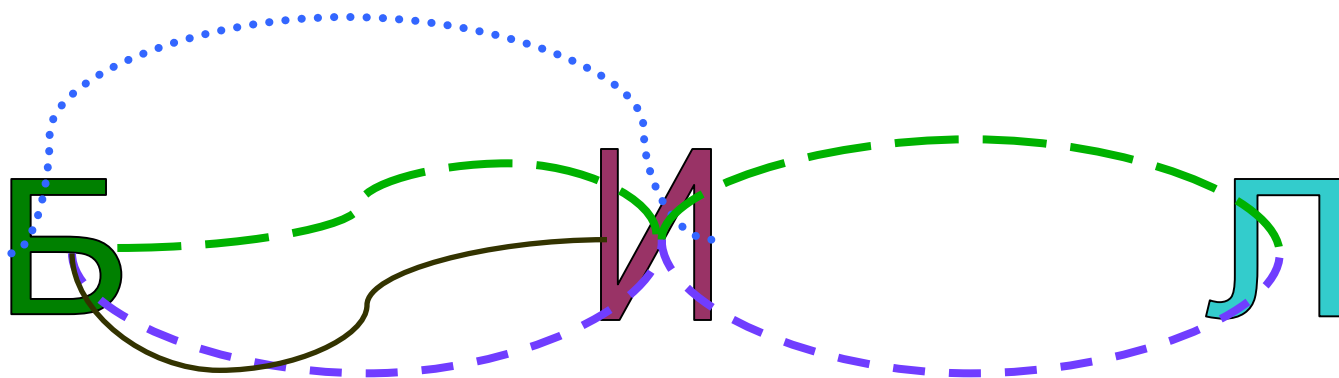


## Задача 6

От Братска до Иркутска можно добраться поездом, самолётом, автобусом, теплоходом. Из Иркутска до Листвянки можно доехать на автобусе, либо на теплоходе. Сколькими способами можно проехать от Братска до Листвянки?



Решение



$$4 \cdot 2 = 8$$



# Задача 7

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков.  
Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок.  
Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?



# Решение



$$20 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 500$$



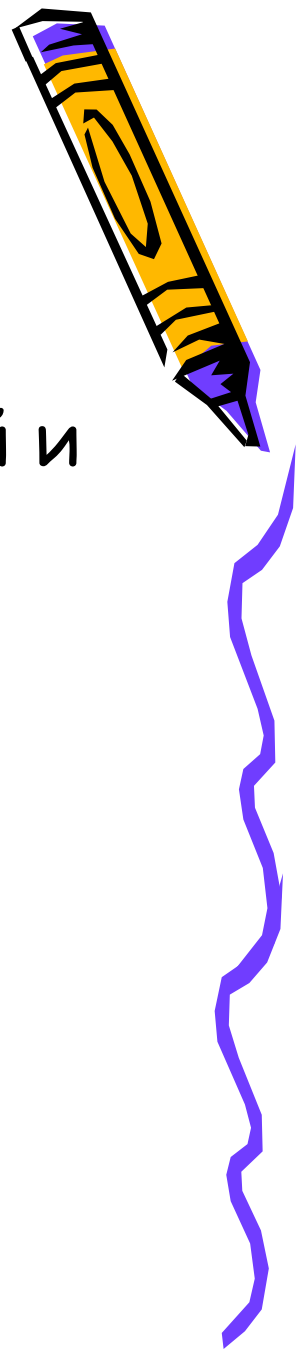


# Задача 8

- На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса?

Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным.

Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).



# Решение

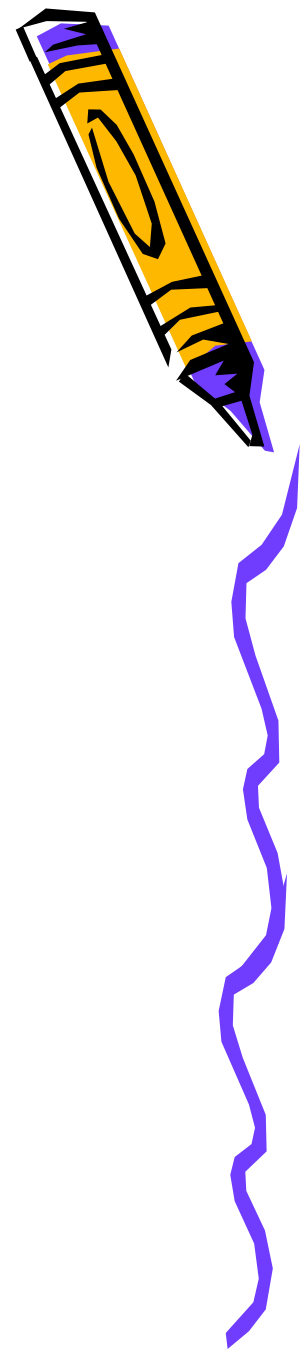
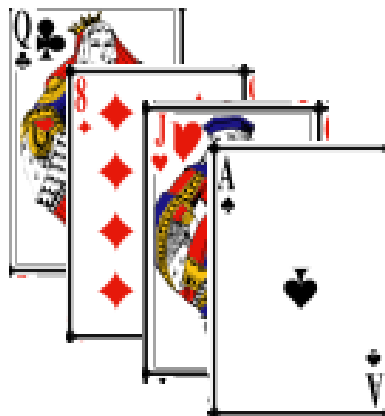
Меридианы делят  
глобус на 24  
части, а  
параллели делят  
каждую часть ещё  
на  $17 + 1 = 18$   
частей.

$$18 \times 24 = 432$$

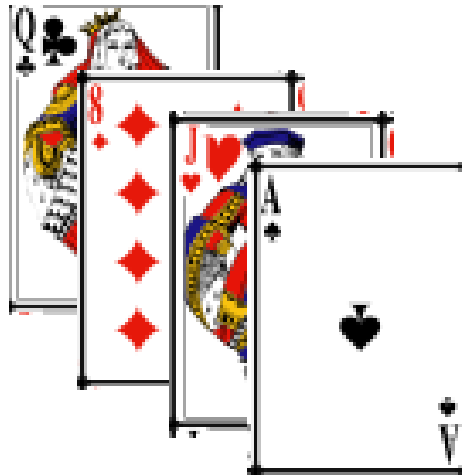


# Задача 9

Сколькими способами из колоды (36 карт) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

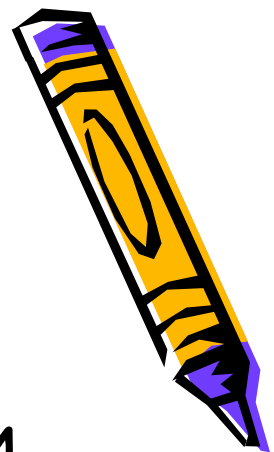


# Решение



$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

- В каждой масти по 9 карт.
- Из каждой масти выбираем по 1 карте, учитывая достоинство уже выбранной ранее карты.



# Факториал

$n!$

- произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно (читается  $n$ -факториал).

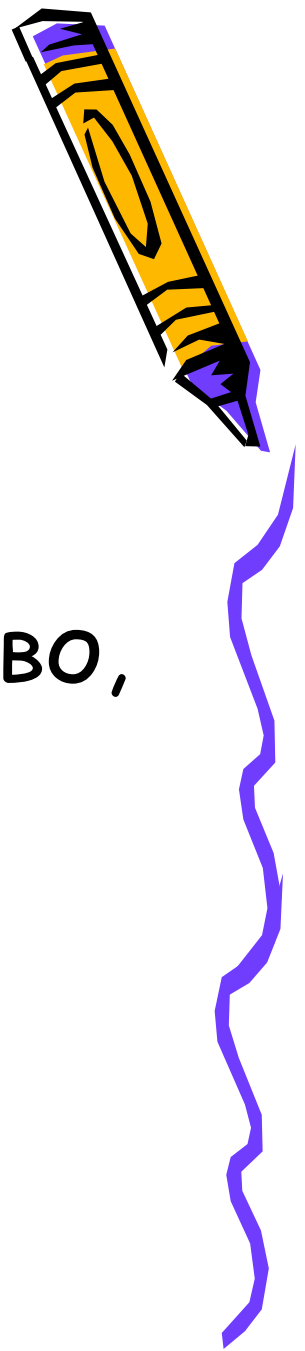
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

- Замечание:  $0! = 1! = 1$ .



# Перестановки

- Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество, состоящее из  $n$  элементов, называется **числом перестановок** множества и обозначается  $P_n$ .



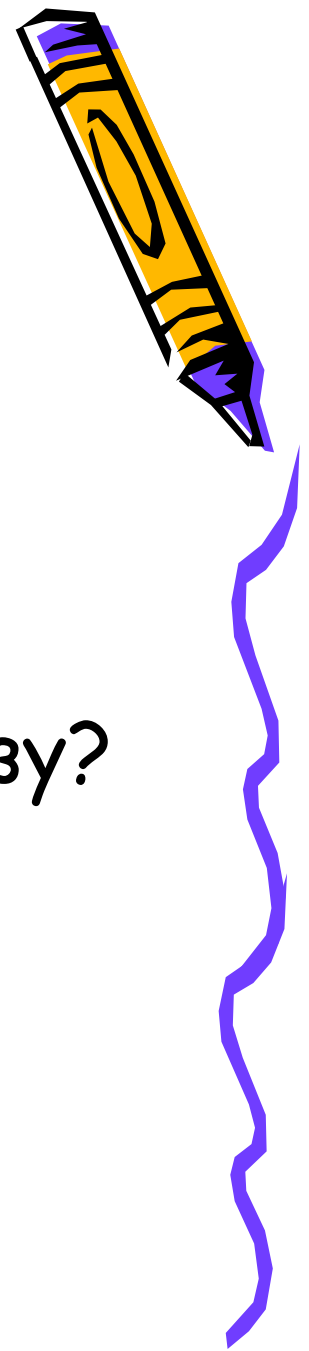
# Перестановки без повторений

$$P_n = n!$$



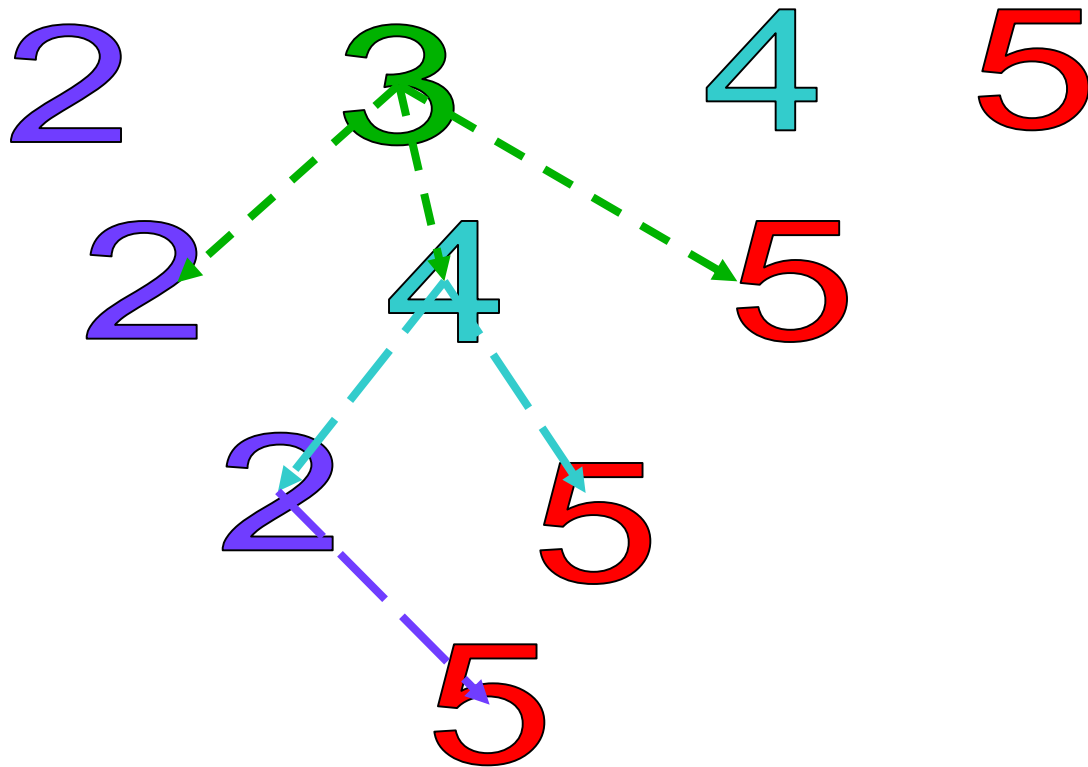
# Задача 10

Сколько существует  
четырехзначных чисел, в записи  
которых цифры 2, 3, 4, 5  
встречаются ровно по одному разу?



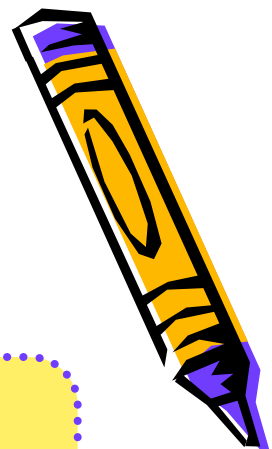


# Решение



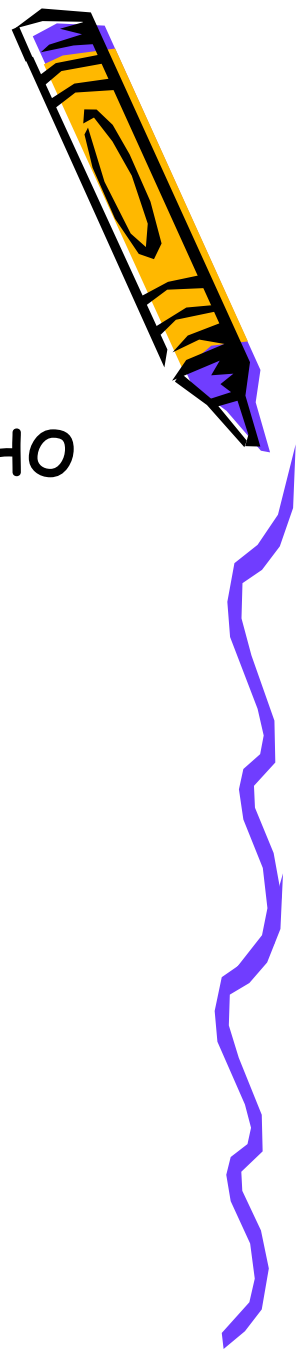
$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

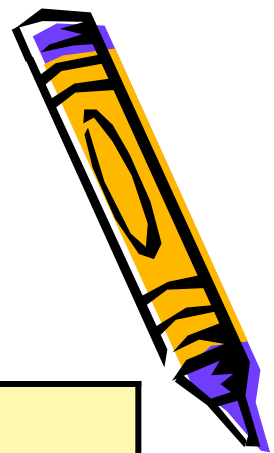


# Задача 11

Сколько трёхзначных чисел можно получить из цифр 1,2,3, если цифры в числе не повторяются?



# Решение



Сотни	1		2		3	
Десятки	2	3	1	3	1	2
Единицы	3	2	3	1	2	1

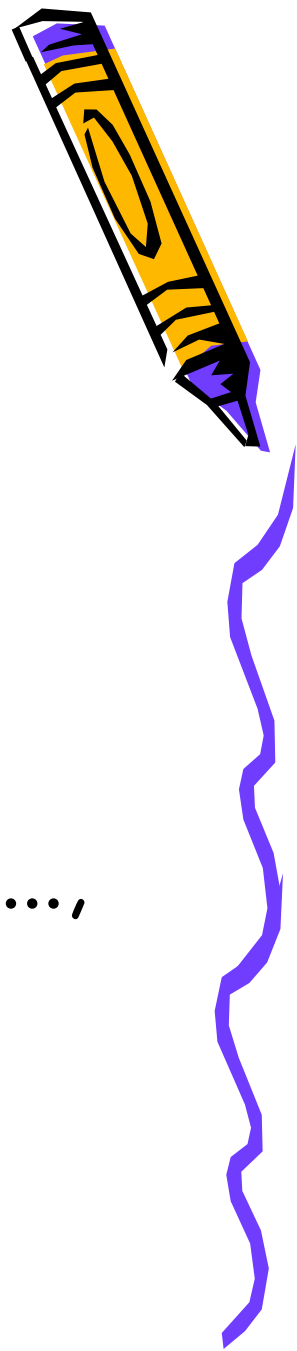
$$P = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$



# Перестановки с повторениями

Пусть имеются предметы  $k$  различных типов.

Сколько перестановок можно сделать из  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа, ...,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа?



# Перестановки с повторениями

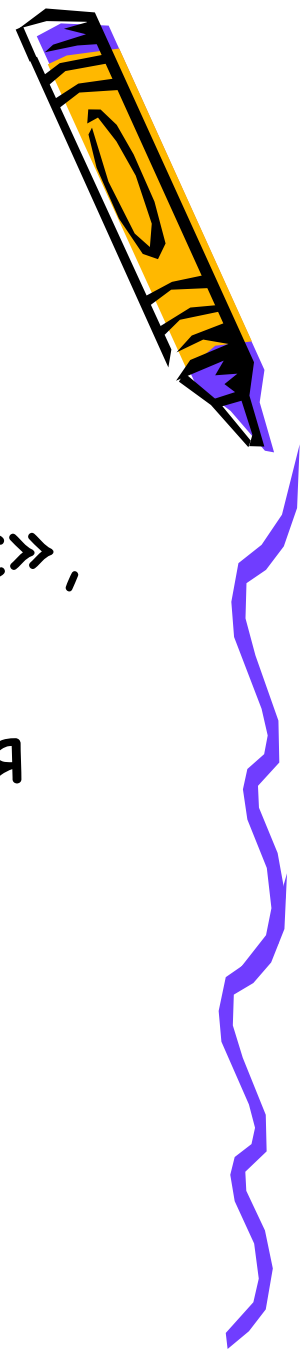
$$P_{n_1; \dots; n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$



## Задача 12

Сколько способами можно переставить буквы слова «ананас», так, чтобы получались разные «слова»? Смысл «слов» значения не имеет.



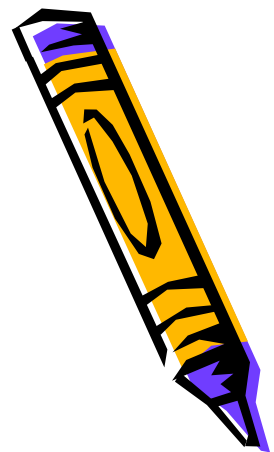
# Решение

«Ананас» - 6:

а - 3; н - 2; с - 1.

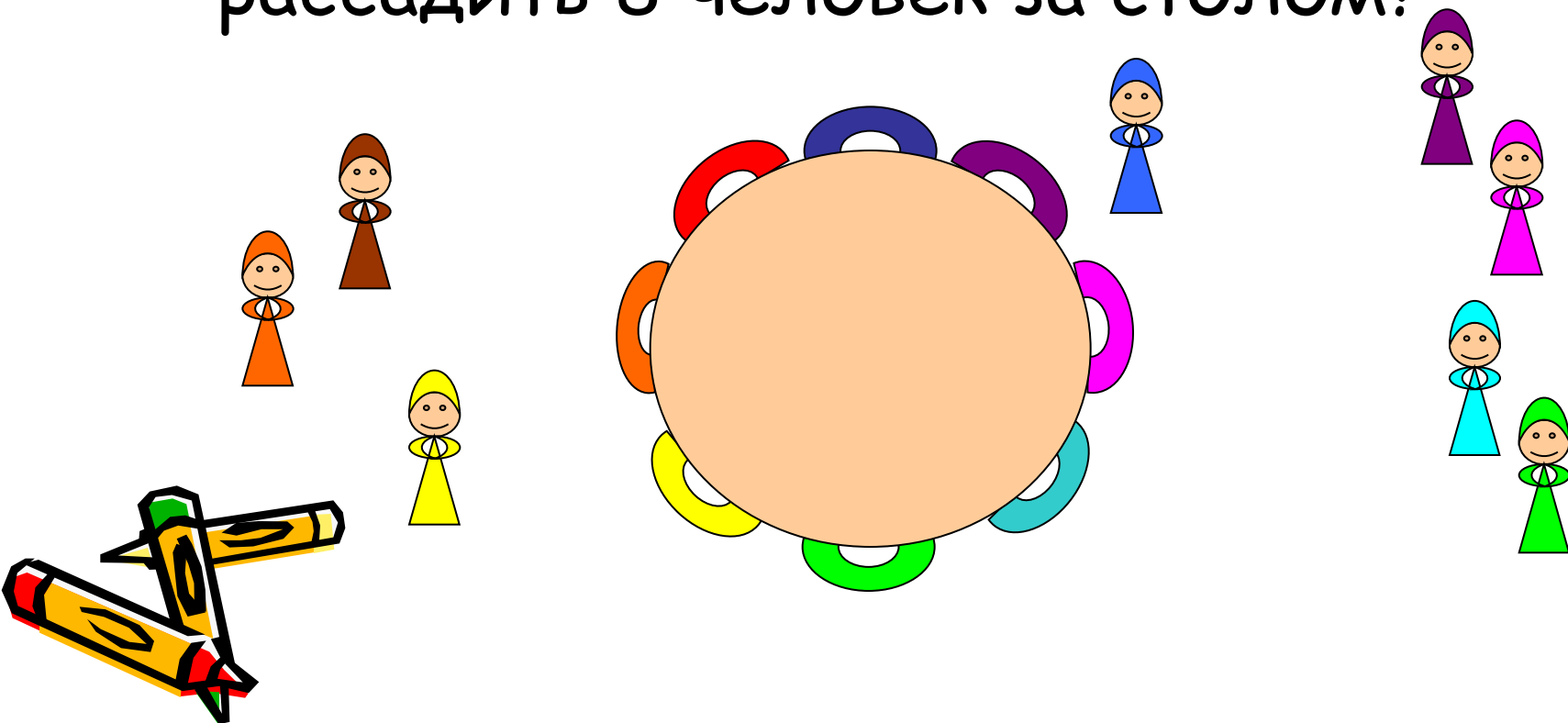
А А А    Н Н    С

$$P_{3;2;1} = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$$



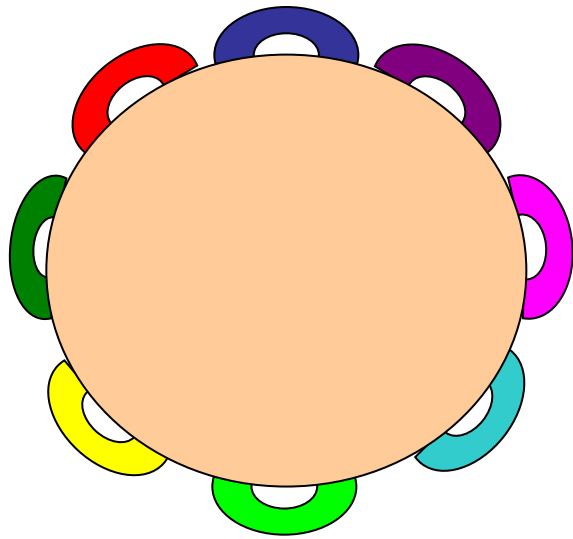
# Задача 13

К Маше пришли 7 подружек.  
Сколькими способами можно  
рассадить 8 человек за столом?





# Решение

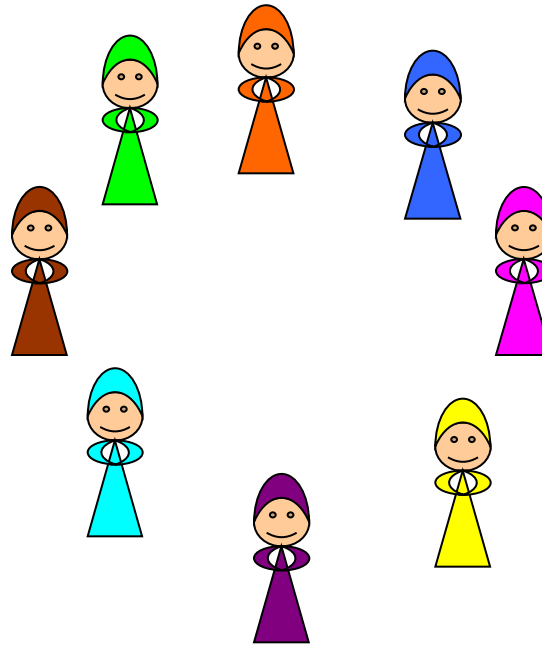


$$\begin{aligned} P_8 &= 8! = \\ &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 40320 \end{aligned}$$

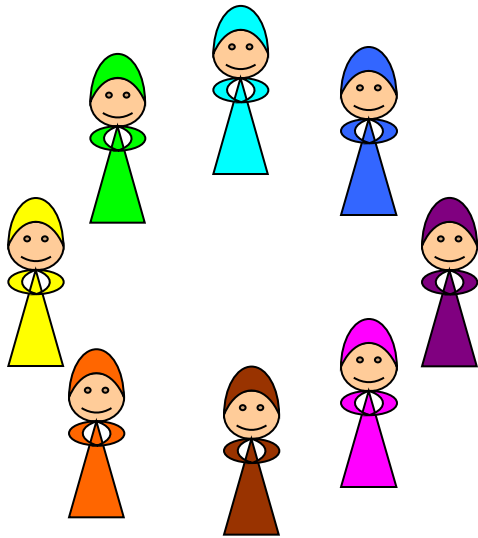


# Задача 14

8 девушек водят хоровод.  
Сколькими способами они могут  
встать в круг?



# Решение



Девушки могут перемещаться по кругу.

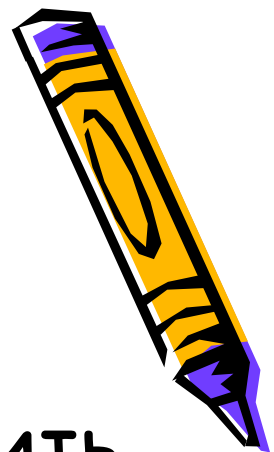
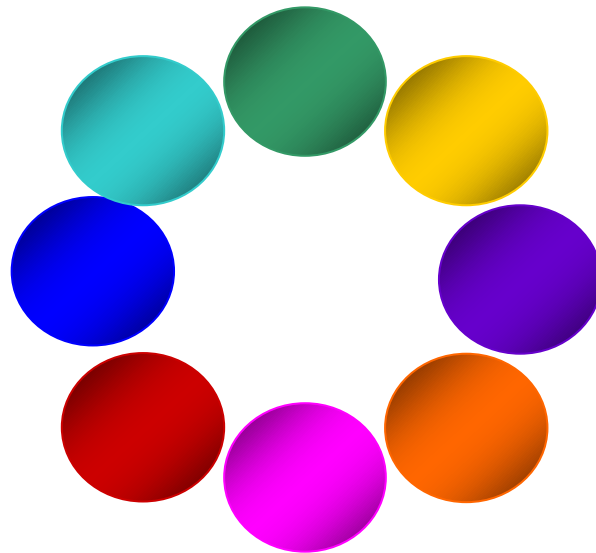
Число перестановок уменьшается в 8 раз.

Ответ: 7!

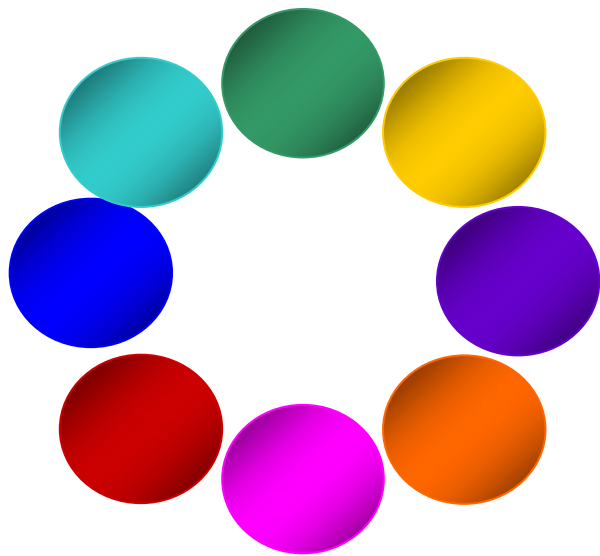


# Задача 15

Сколько ожерелий можно составить из 8 различных бусин?



# Решение



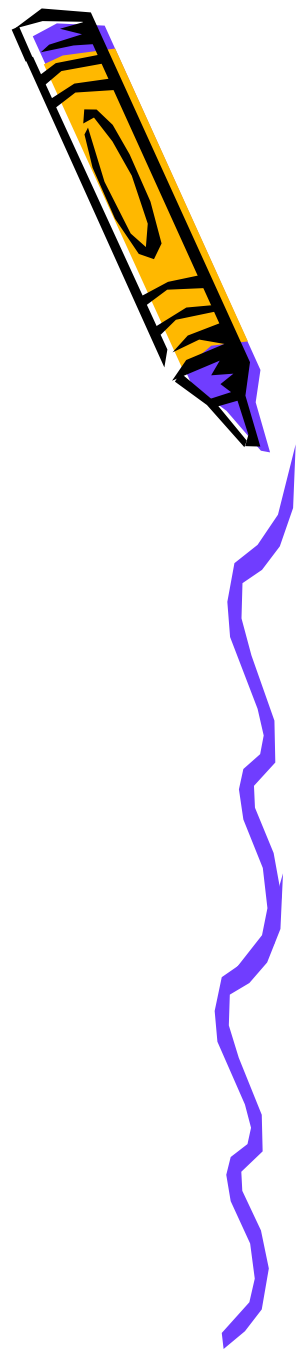
- Ожерелье можно вращать.
- Его можно и перевернуть.
- Число перестановок уменьшается ещё вдвое.

Ответ:  $7!/2$



# Размещения

- Число упорядоченных  $k$  элементных подмножеств множества из  $n$  элементов называется **числом размещений** из  $n$  элементов по  $k$  и обозначается  $A_n^k$



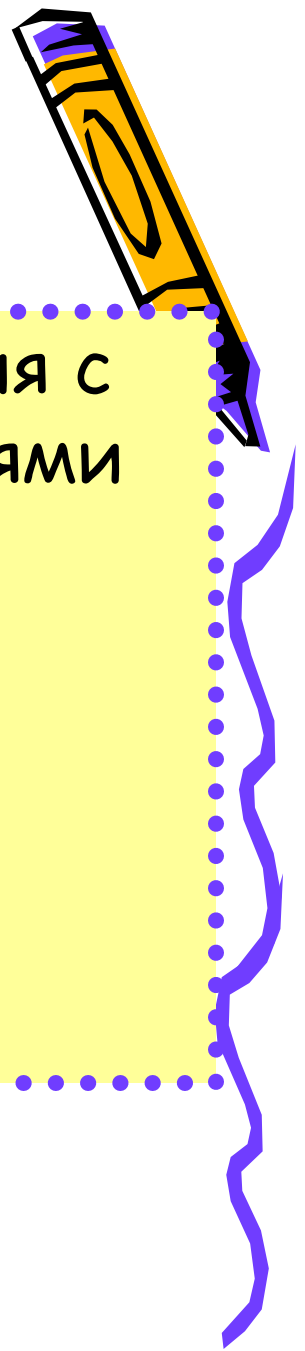
# Размещения

Размещения без повторений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} =$$
$$= n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

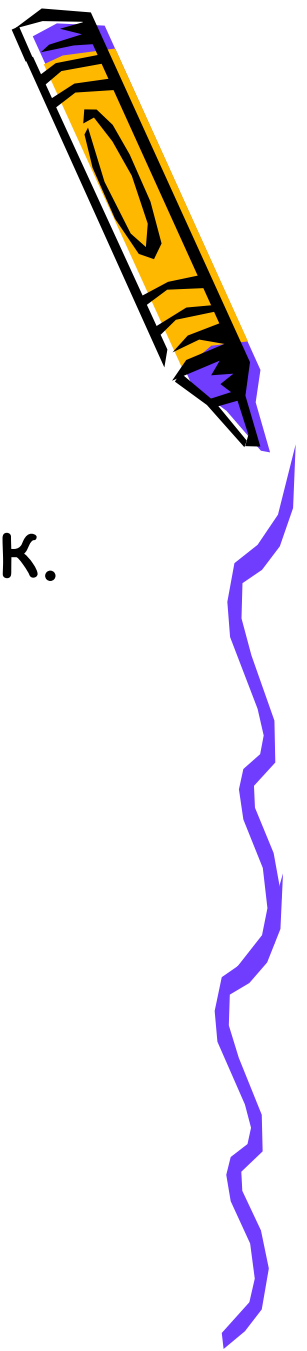
Размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^m = n^m$$



# Задача

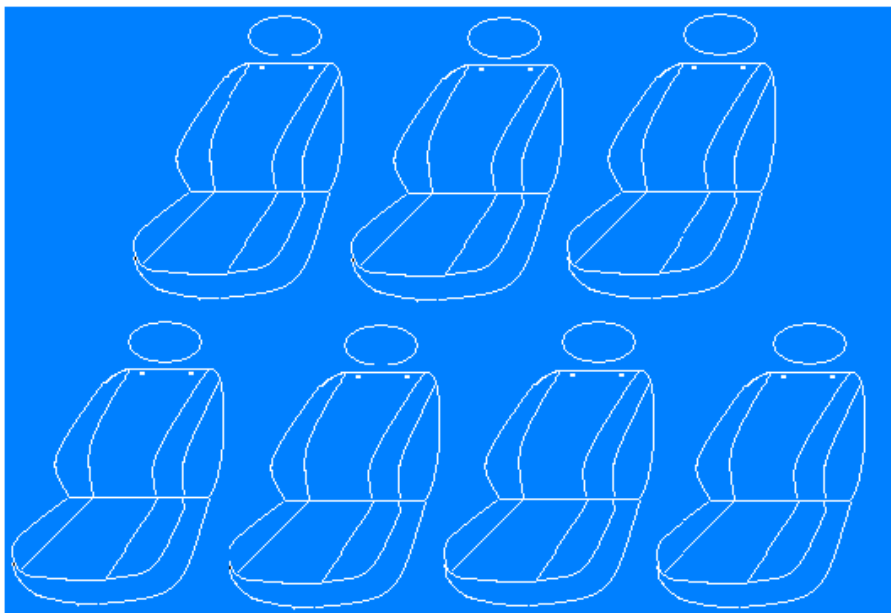
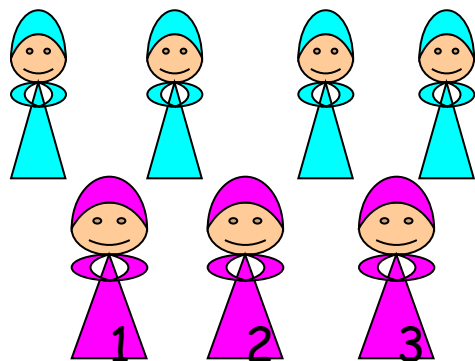
В машине 7 мест, включая  
водительское. Поедут 7 человек.  
Сколько существует способов  
распределения пассажиров по  
местам, если права есть лишь у  
троих?





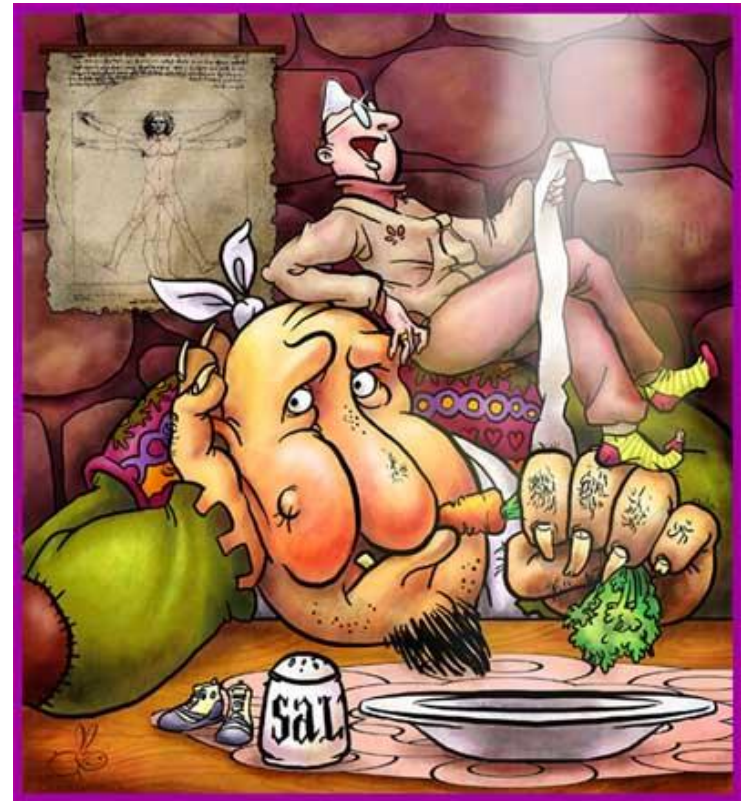
# Решение

$$(3 \cdot 6! = 2160)$$



# Задача

У людоеда в подвале томятся 25 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?



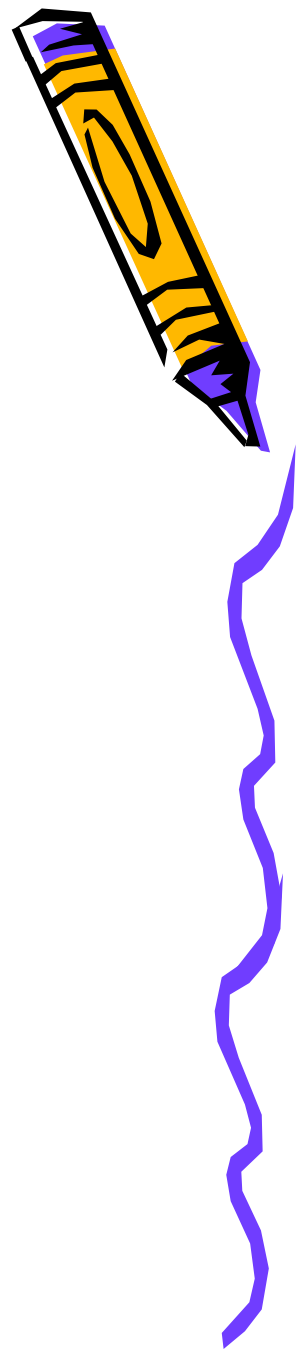
# Решение

$$A_{25}^3 = \frac{25!}{22!} = 25 \times 24 \times 23 = 13800$$



# Задача

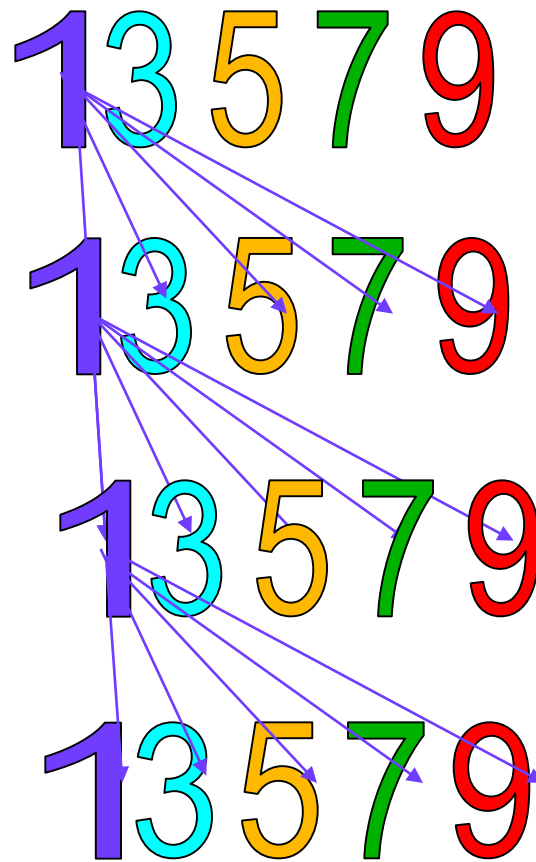
Сколько существует 4-значных чисел, в записи которых встречаются только нечетные цифры?



# Решение

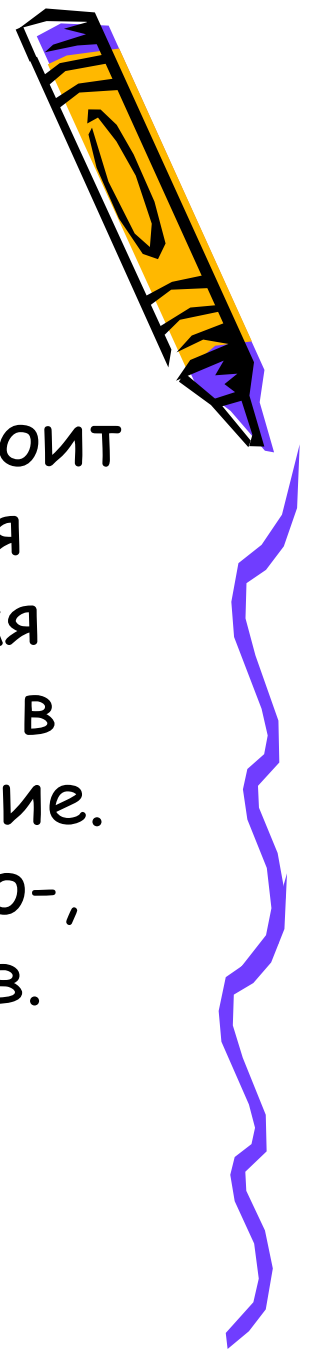
- Однозначных нечётных чисел ровно 5.
- К каждому однозначному нечётному числу вторая нечетная цифра может быть дописана 5 различными способами.
- Далее - по аналогии:


$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$



# Задача

Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо? Указание. Сосчитайте отдельно количества одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов.



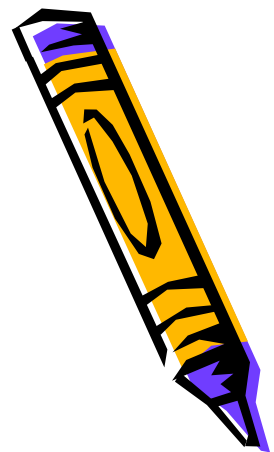
Решение

$$3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$$

А

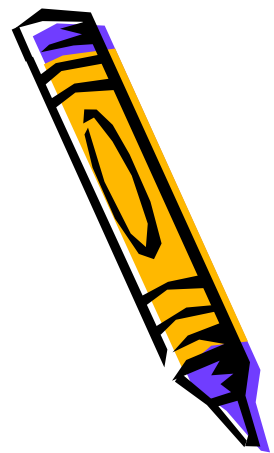
Б

В



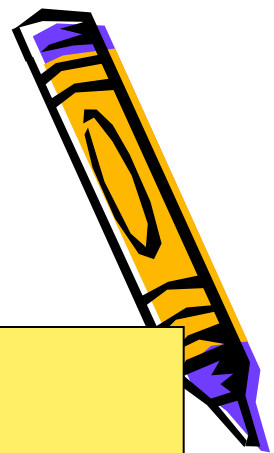
# Сочетания

- Если из  $n$  элементов составлять группы по  $m$  элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются **сочетаниями** без повторений из  $n$  элементов по  $m$ .





# Сочетания



Сочетания без повторений

$$\begin{aligned} C_n^m &= \frac{A_n^m}{P_m} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \end{aligned}$$

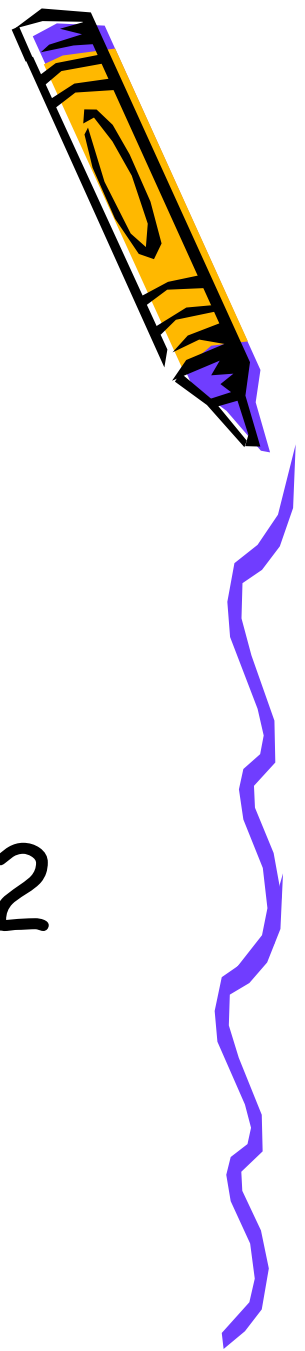
Сочетания с повторениями

$$\begin{aligned} \overline{C}_n^m &= C_{n+m-1}^m = \\ &= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \end{aligned}$$



# Задача.

В городе проводится  
первенство по футболу.  
Сколько в нем состоится  
матчей, если участвуют 12  
команд?



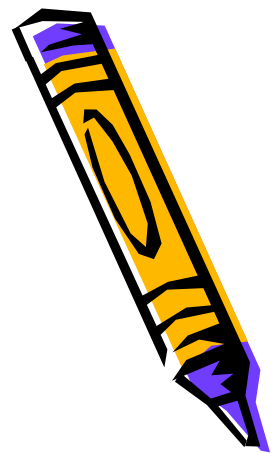
Решение.

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$



# Задача.

- В группе 10 стрелков, из них 6 снайперов. Для выполнения боевой задачи нужно отобрать 5 стрелков, причем снайперов должно быть не меньше 4. Сколькими способами это можно сделать?



# Решение

Не меньше 4 - это значит, что снайперов должно быть либо 4, либо 5. 4 снайпера из 6 можно выбрать  $C_6^4$  способами, остальных стрелков выбираем из оставшихся 4 стрелков  $(10-6)$   $C_4^1$  способами. Проводим аналогичные рассуждения, когда в группе снайперов 5.

$$C_6^4 \cdot C_4^1 + C_6^5 \cdot C_4^0 = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = 66$$

# Задача.

В классе 24 ученика, из них 8 отличников. Нужно выбрать 12 человек так, чтобы среди них было хотя бы 5 отличников. Сколькими способами можно это сделать?

Ответ: 901628



# СВОЙСТВА СОЧЕТАНИЙ

$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$



Решить систему  
уравнений:

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$$



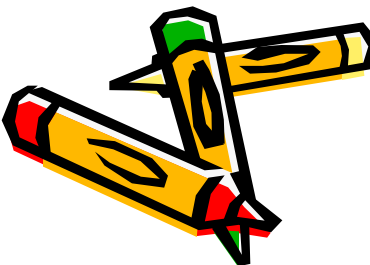


# Решение

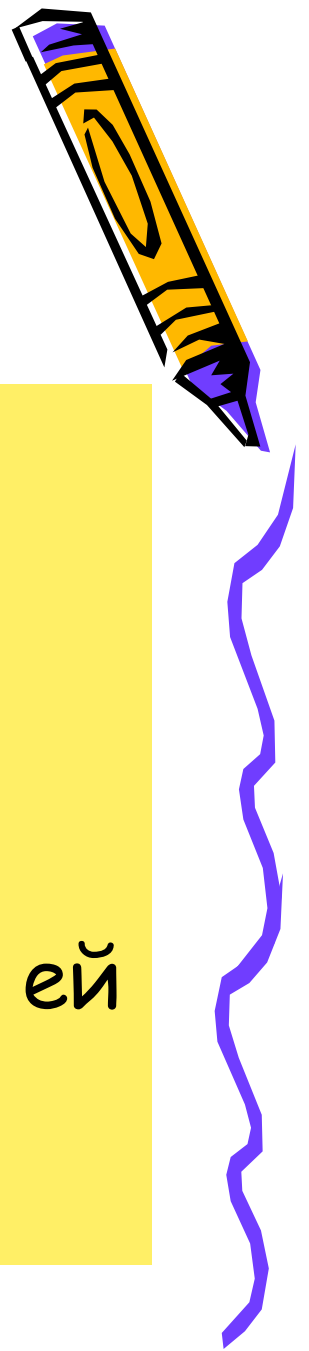
$$C_x^2 = \frac{x!}{2(x-2)!} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ \frac{x^2 - x}{2} = 153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 18, \\ y = 8. \end{cases}$$



# Треугольник Паскаля



- Треугольник Паскаля является одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике.
- Блез Паскаль, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике".



# Треугольник Паскаля



- Эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата.
- В 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом.

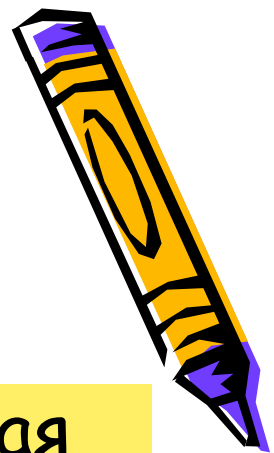




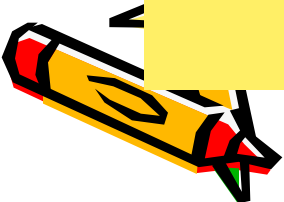
- Изображен треугольник на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году.
- Омар Хайям, бывший философом, поэтом, математиком, знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.



# Построение треугольника Паскаля

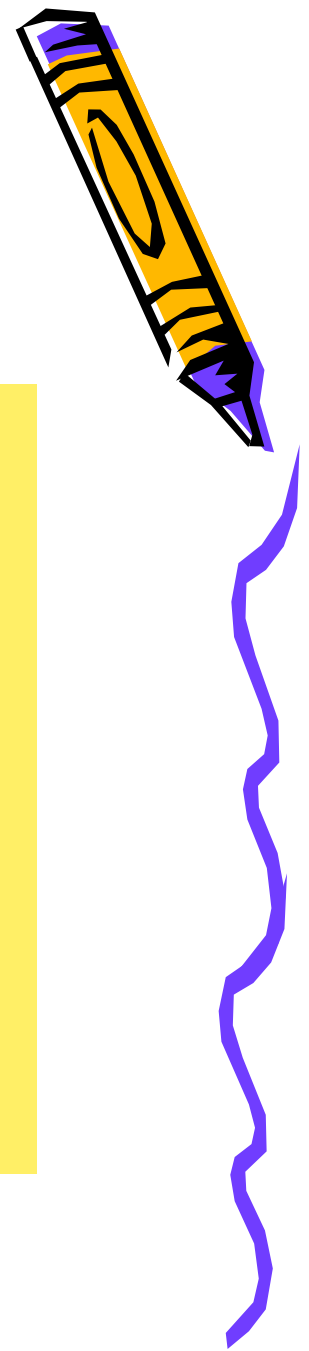


- Треугольник Паскаля - это бесконечная числовая таблица "треугольной формы", в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.
- Таблица обладает симметрией относительно оси, проходящей через его вершину.



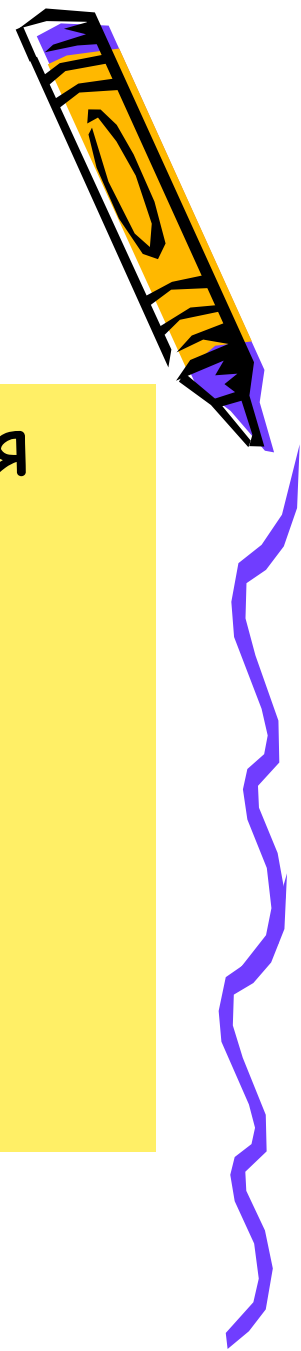
# Свойства строк

Сумма чисел  $n$ -й строки Паскаля равна  $2^n$  (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна  $2^0 = 1$ )



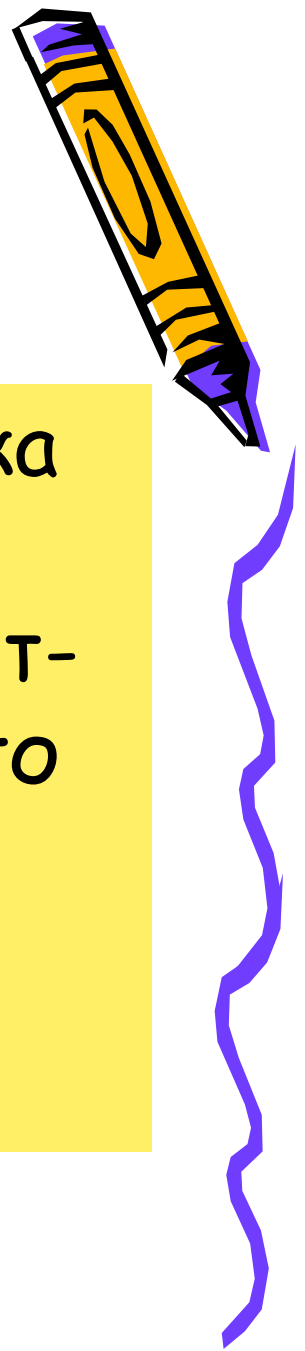
# Свойства строк

Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется, а нулевая строка симметрична).



# Свойства строк

Каждый член строки треугольника Паскаля с номером  $n$  тогда и только тогда делится на  $t$ , когда  $t$  - простое число, а  $n$  - степень этого простого числа

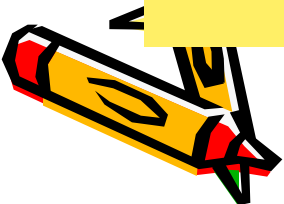
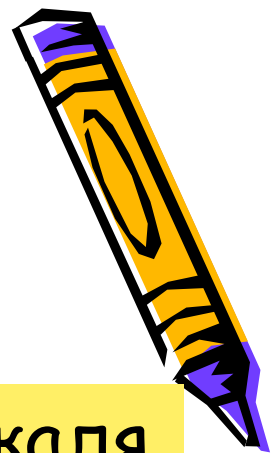




# Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля можно определить тремя способами:

- $C_n^k$ , где  $n$  - номер строки,  $k$  - номер элемента в строке;
- оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.





- Каждое число треугольника Паскаля, уменьшенное на единицу, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит данное число, причем сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются.

