Поверхности второго порядка

- *Определение* ***Уравнение поверхности*** – уравнение вида

$$F\left(x, y, z\right) = 0$$

Поверхности второго порядка, можно разделить на пять классов:

эллипсоиды,

гиперболоиды,

параболоиды,

конусы

цилиндры.

Поверхности 2-го порядка

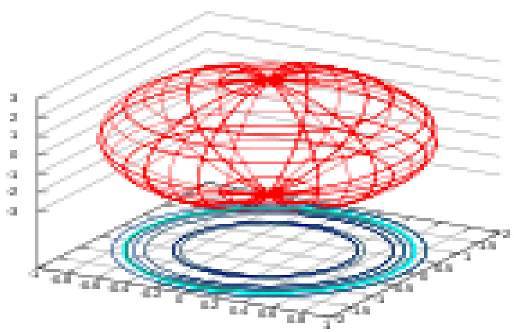
В общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+$$

$$+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0\ .$$

Эллипсоиды

- **Определение** *Эллипсоид* – поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, определяемая уравнением



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$a=b=c$ эллипсоид есть *сфера*

a,b,c *полуоси* эллипсоида, если они различны, то эллипсоид *трехосный*

Эллипсоид может быть получен вращением эллипса вокруг одной из его осей. Такой эллипсоид называют эллипсоидом вращения или *сфероидом*

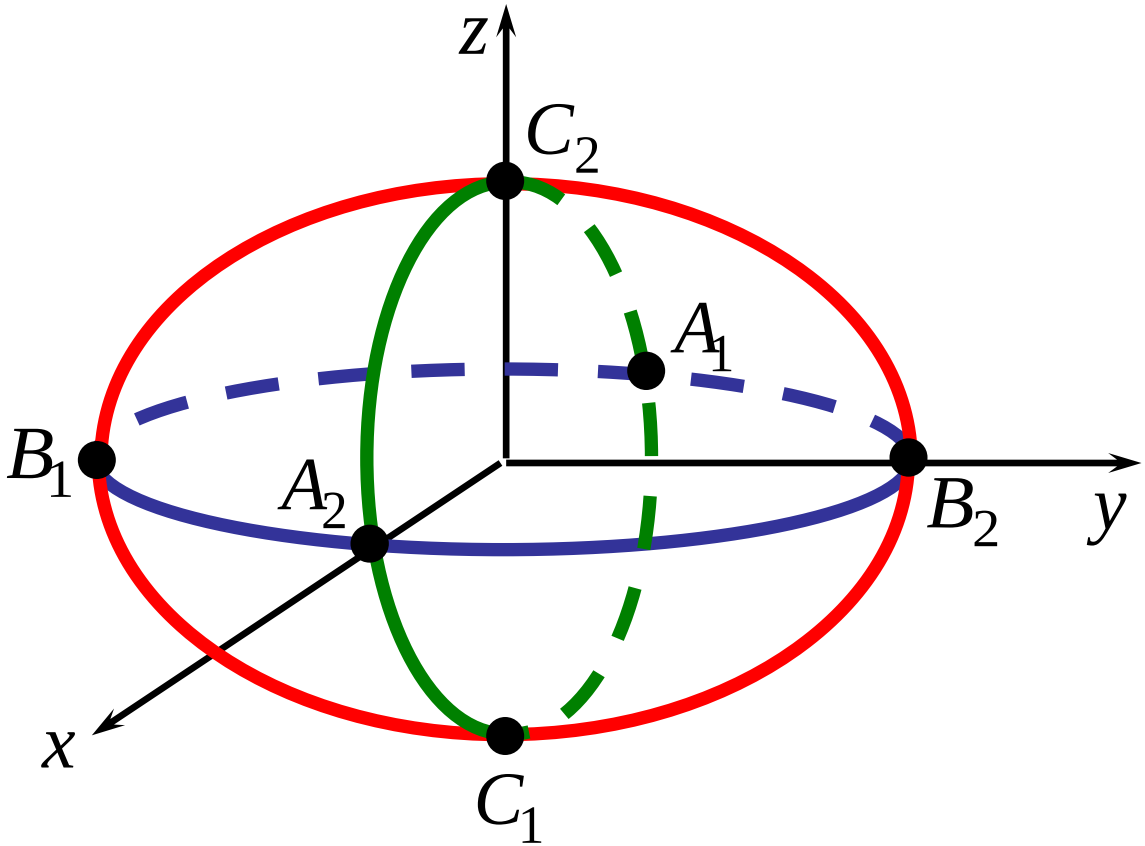
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Эллипсоид имеет центр симметрии $O(0;\ 0;\ 0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

- Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (1) называется его ***каноническ‌ой системой координат***, а уравнение (1) – ***каноническим уравнением эллипсоида***



Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида.
Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехостным***.

Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения.
Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < a$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = a$ – точку $A_{2,1}(\pm a; 0; 0)$;

в) при $|h| > a$ – мнимую кривую.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < b$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = b$ – точку $B_{2,1}(0; \pm b; 0)$;

в) при $|h| > b$ – мнимую кривую.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

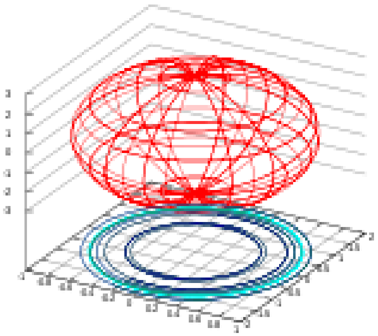
а) при $|h| < c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0;\, 0;\, \pm c)$;

в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.

Сфера

- *Определение* ***Сфера*** в пространстве – геометрическое место точек, одинаково удаленных от некоторой точки, называемой ***центром*** сферы.



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

уравнение сферы радиуса r

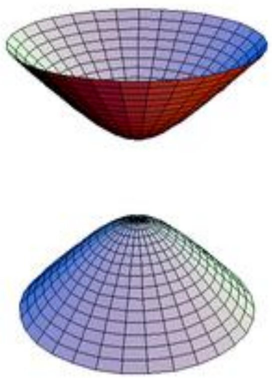
- Сфера с центром в начале координат есть уравнение

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

✓Замечание Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***

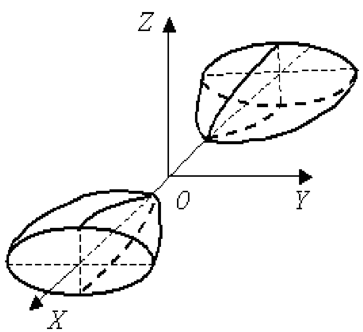
Гиперболоиды

- *Определение Двухполостный гиперболоид –* поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, определяется уравнением

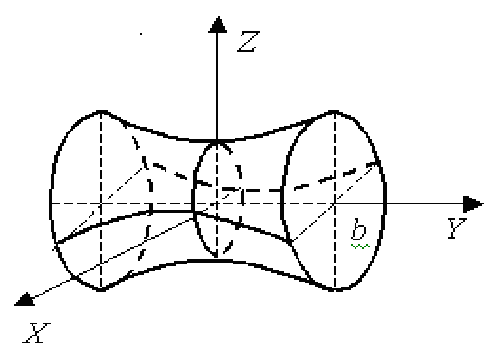


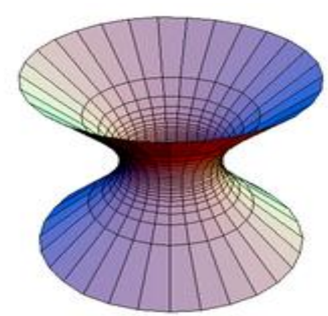
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Определение *Однополосный гиперболоид –* поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, определяется уравнением



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





- *Замечание* Шуховская башня расположена в Москве на улице Шаболовка. Построена в 1919—1922г. русским архитектором Владимиром Григорьевичем Шуховым (1853—1939).
- Шуховская башня имеет конструкцию, благодаря чему достигается минимальная ветровая нагрузка.

- По форме секции башни — это однополостные гиперболоиды вращения, сделанные из прямых балок, упирающихся концами в кольцевые основания.
- Такие конструкции часто употребляются для устройства высоких радиомачт, водонапорных башен

Гиперболоиды

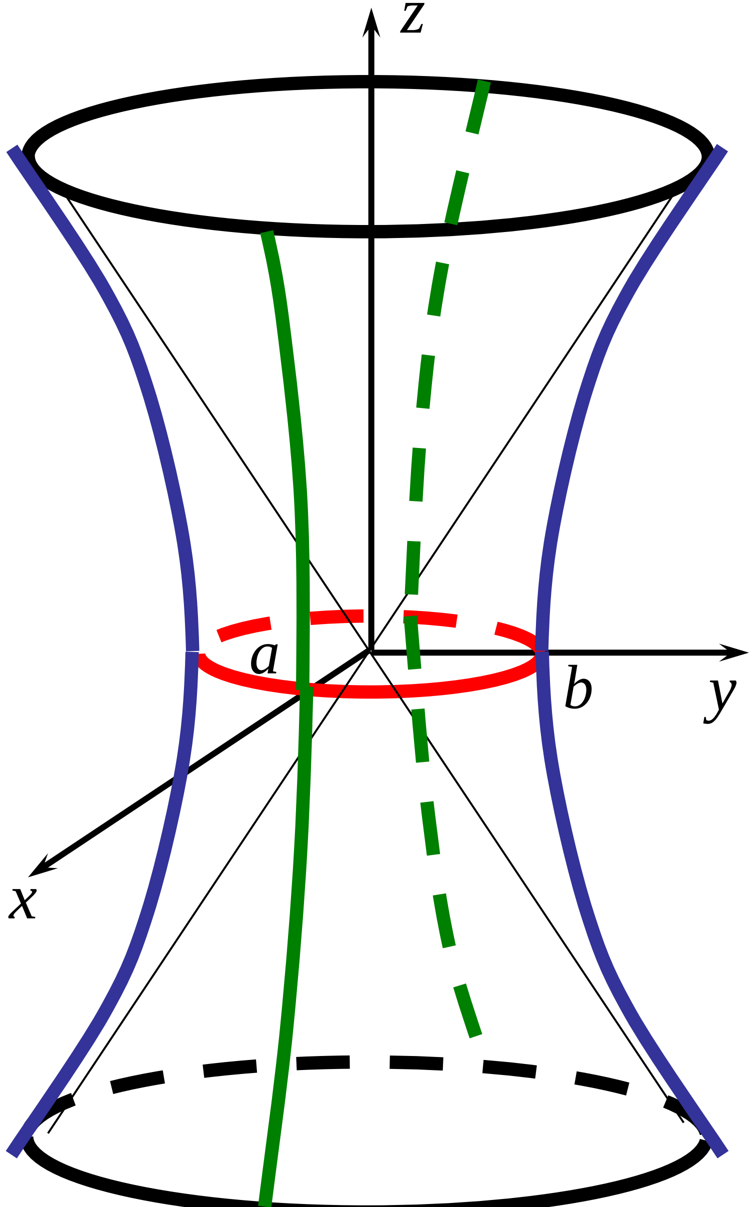
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Однополостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad (2)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (2) – ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.

Замечание Однополостный гиперболоид имеет центр симметрии $O(0;\,0;\,0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** однополостного гиперболоида.

Если $a = b$, то однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей мнимой оси гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oy$;

б) при $|h| > a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|h| = a$ – пару прямых.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Ox$;

б) при $|h| > b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|h| = b$ – пару прямых.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет эллипс при любом h.

При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими.

Этот эллипс называют ***горловым эллипсом*** однополостного гиперболоида.

✓ *Замечание.*

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

определяют однополостные гиперболоиды,

но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

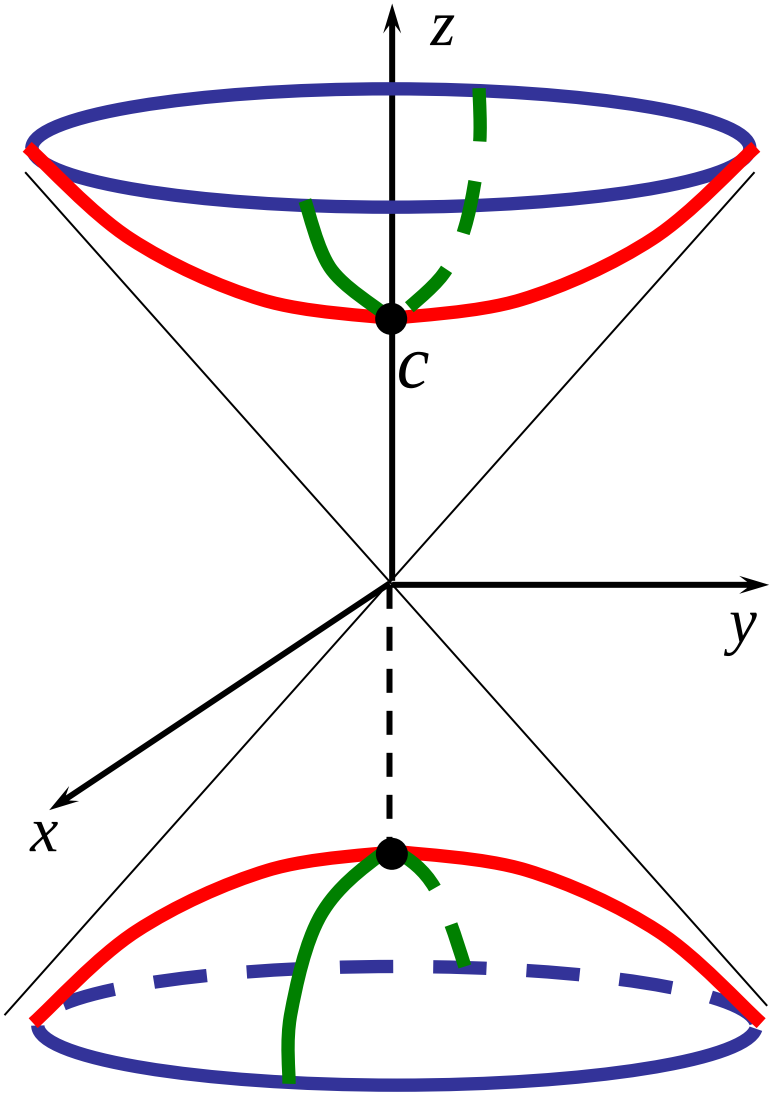
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Двуполостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (3)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3) называется его ***канонической системой координат***,

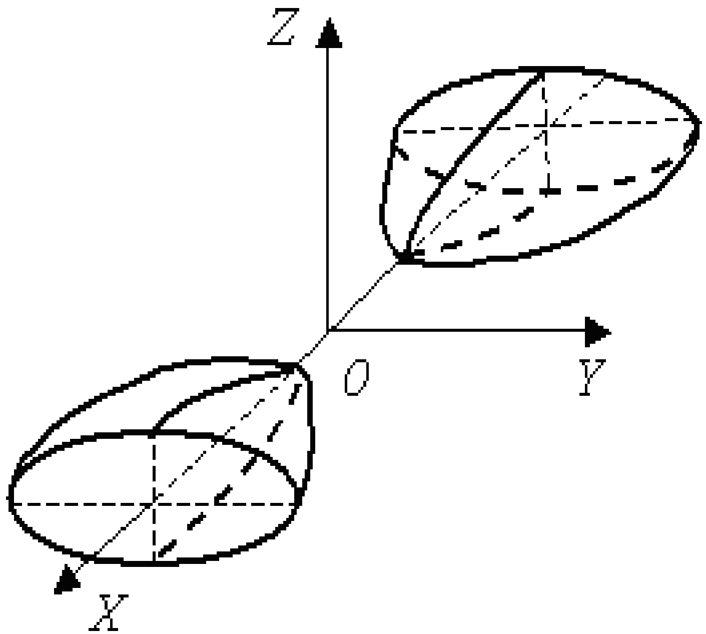
а уравнение (3) – ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** двуполостного гиперболоида.

Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей действительной оси гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



- Двуполостный гиперболоид имеет центр симметрии
- $O(0; 0; 0)$
- и три плоскости симметрии *xOy*, *xOz*, *yOz*.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ x = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 + \dfrac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| > c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0;\,0;\,\pm c)$;

в) при $|h| < c$ – мнимую кривую.

Замечание.

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

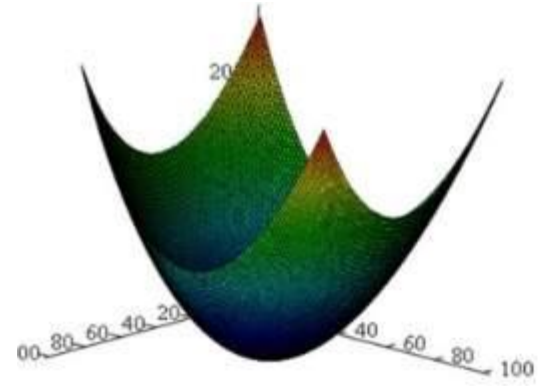
Параболоиды

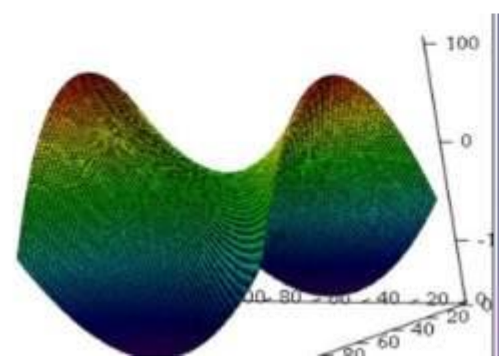
Параболоиды делятся на

- Эллиптические;

и

- Гиперболические.

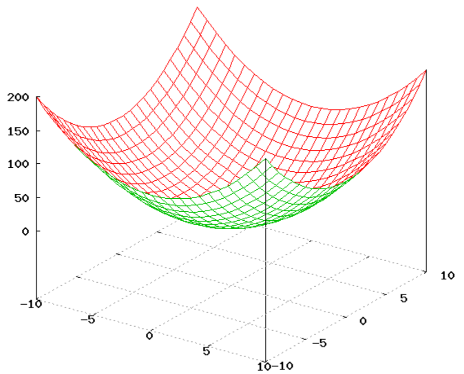


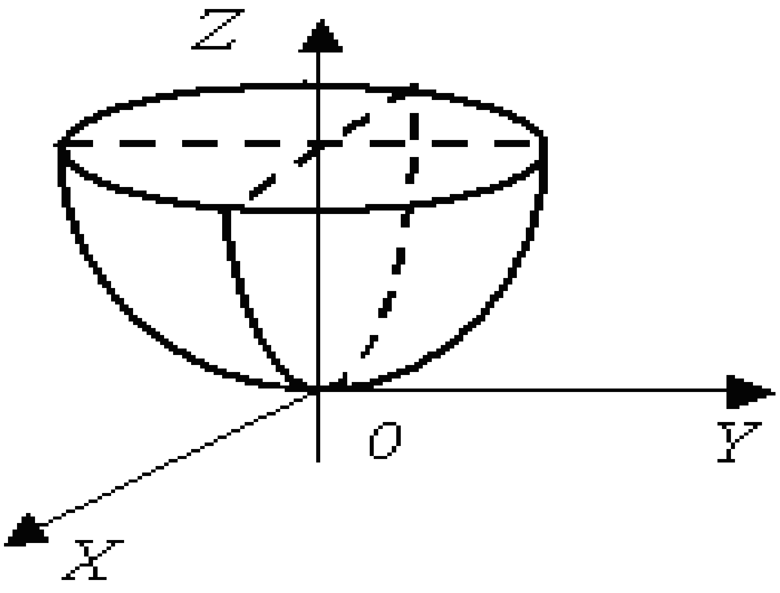


Параболоиды

- *Определение* ***Эллиптический параболоид*** – поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, определяется уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$





Параболоиды

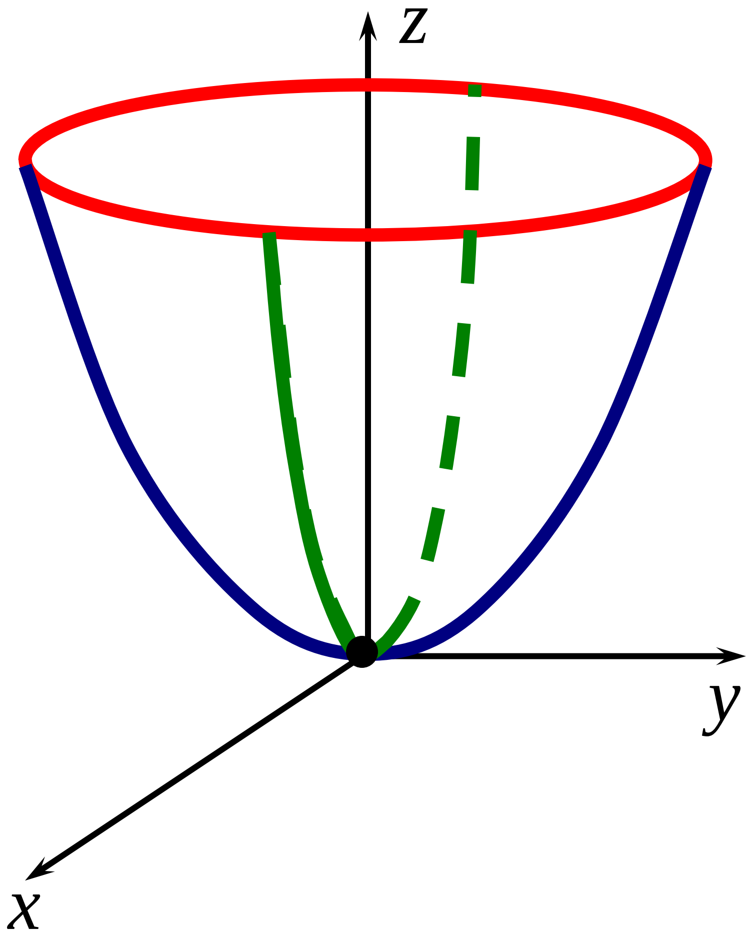
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллиптическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \qquad (5)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (5) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (5) – ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.

Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии xOz, yOz.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a = b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz параболы

$$y^2 = 2b^2 z$$

Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

а) при $h > 0$ – эллипс (причем, чем больше h, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = 0$ – точку $O(0;\,0;\,0)$;

в) при $h < 0$ – мнимую кривую.

✓ ***Замечания***:

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$$

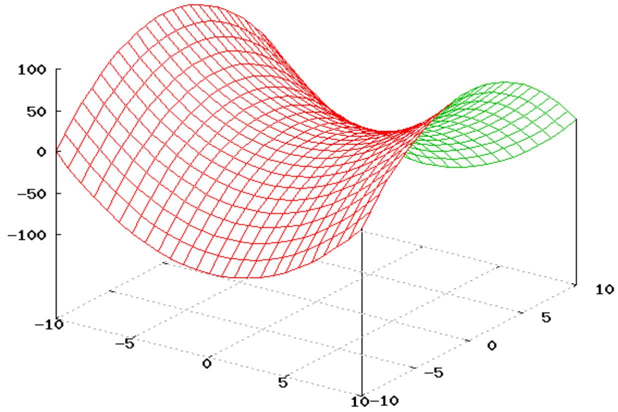
тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

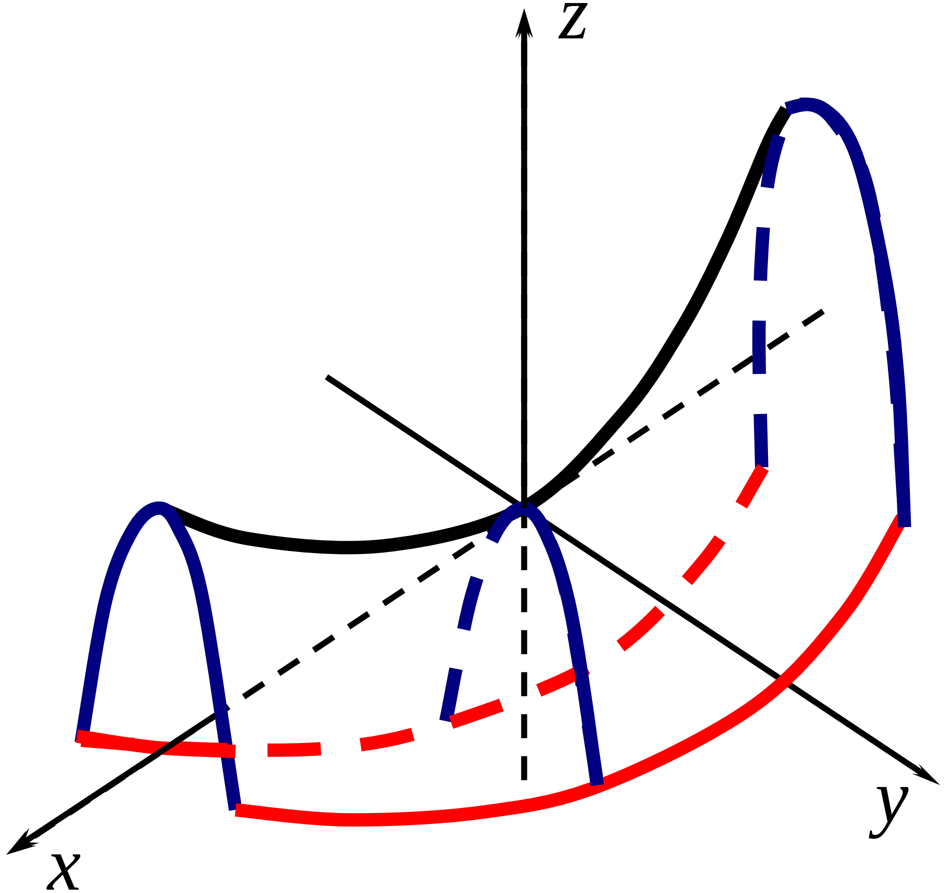
- *Определение* Г*иперболический параболоид* – поверхность определяемая уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$



Ввиду схожести гиперболический параболоид называют *«седлом»*.

Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии *xOz*, *yOz*.



Величины *a* и *b* называются ***параметрами*** параболоида.

Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \qquad (6)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (6) – ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вниз, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

3) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу

при $h > 0$ – действительная ось гиперболы || Ox,

при $h < 0$ – действительная ось гиперболы || Oy;

б) при $h = 0$ – пару прямых .

✓ ***Замечания:***

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

определяют гиперболические параболоиды, у которых «неподвижные параболы» лежат в плоскости xOy и имеют оси Oy и Ox соответственно.

Цилиндрические поверхности второго порядка

- *Определение* ***Цилиндрическая поверхность –*** поверхность, образованная прямыми (образующими), параллельными некоторой данной прямой и пересекающими данную линию (направляющую).

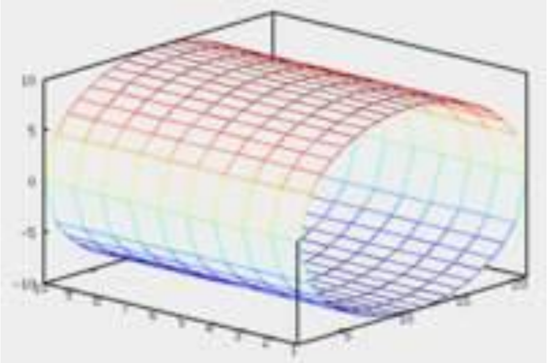
$$F(x, y) = 0$$

- ***Определение*** Тело, ограниченное замкнутой конечной цилиндрической поверхностью
- и двумя сечениями, благодаря которым она была получена, называется *цилиндром*.

Классификация цилиндрических поверхностей второго порядка

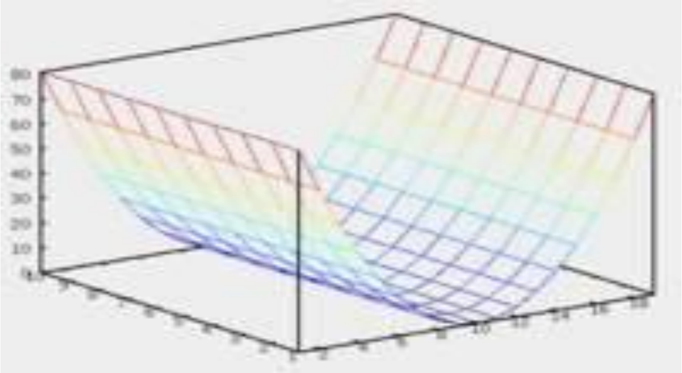
- Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



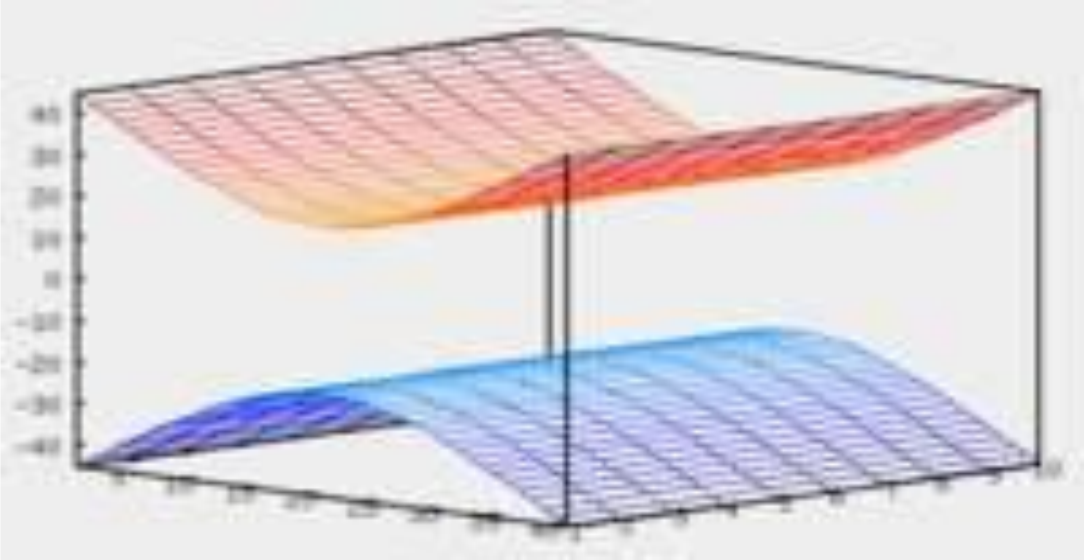
Параболический цилиндр

$$y^2=2px$$



- **Гиперболический цилиндр**

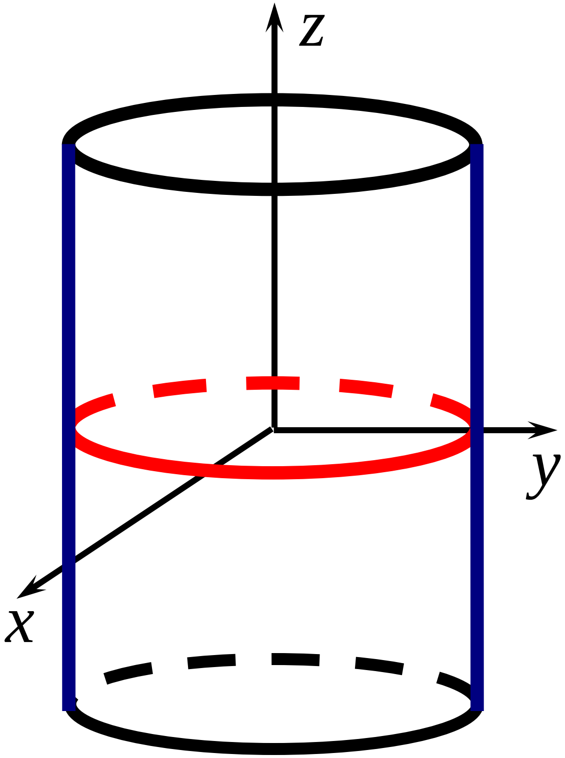
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

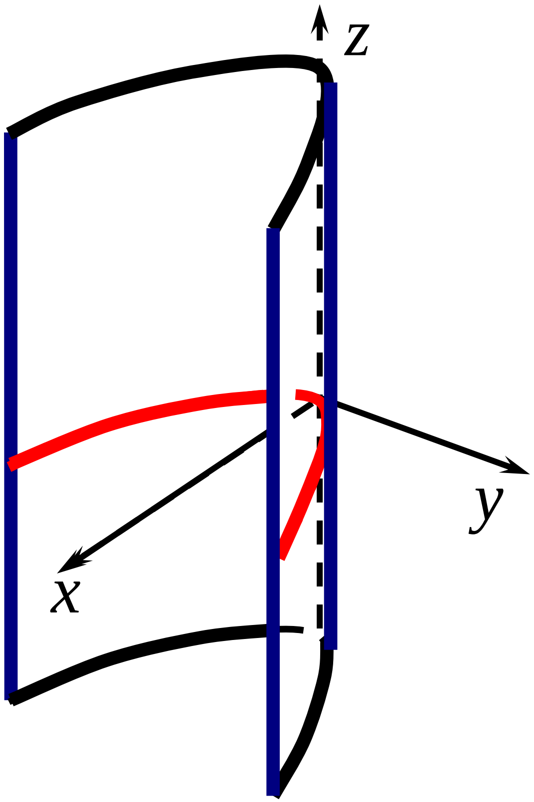


Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Цилиндрической поверхностью*** (***цилиндром***) *называется поверхность, которую описывает прямая (называемая **образующей**), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой **направляющей**)* .

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.

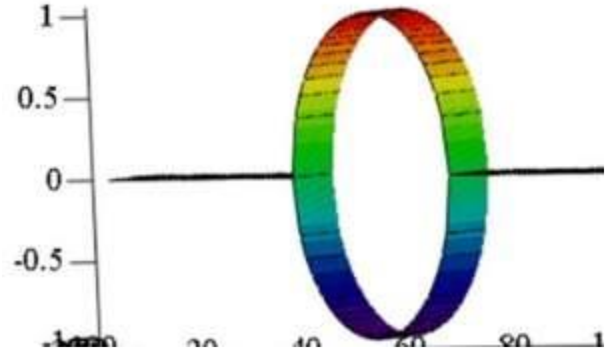


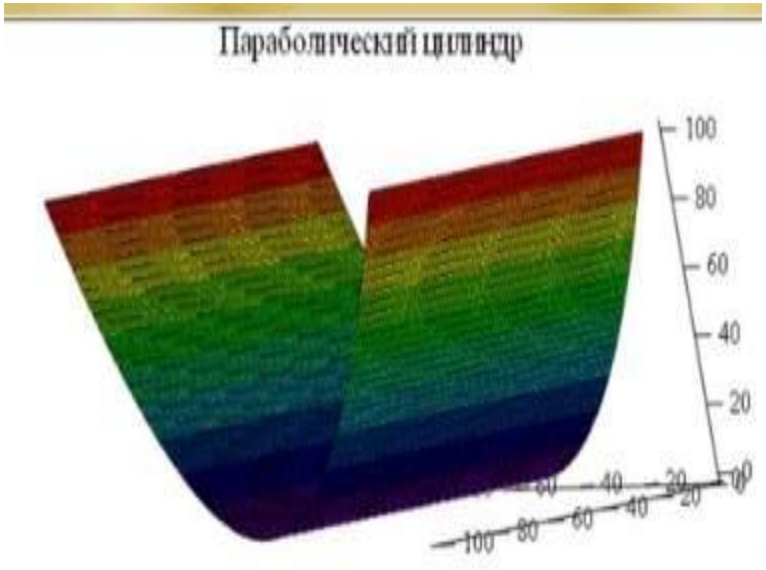


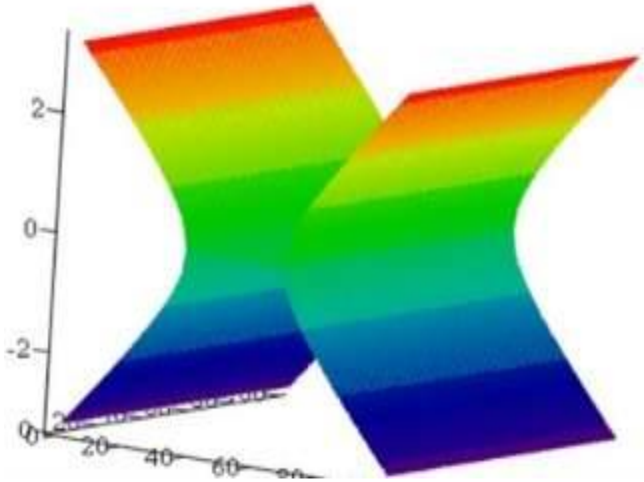
Замечание *Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат.*

Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

Цилиндры

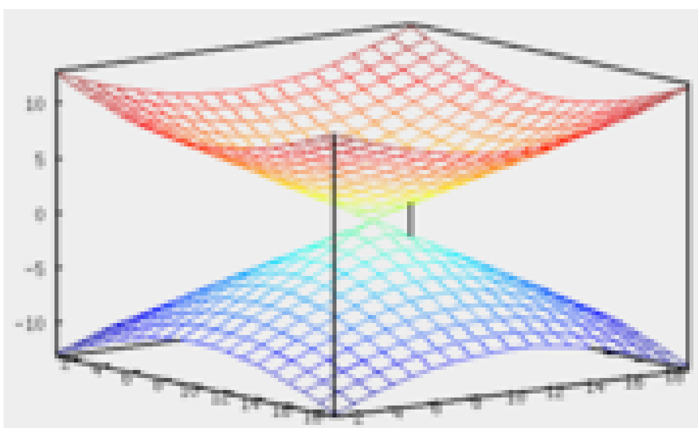

1
0.5
0
-0.5
20
40
60
80


Параболический цилиндр
100
80
60
40
20
0
100
80
60
40
20


2
0
-2
0
20
40
60

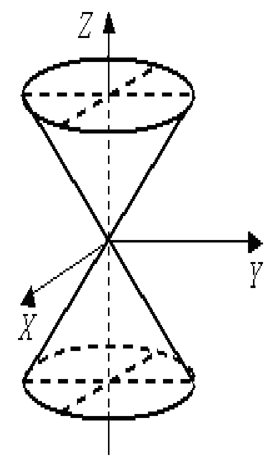
Конические поверхности 2-го порядка

- *Определение* *Коническая поверхность*– поверхность, образованная прямыми (***образующими конуса***), проходящими через данную точку (***вершину конуса***) и пересекающими данную линию (***направляющую конуса***).



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

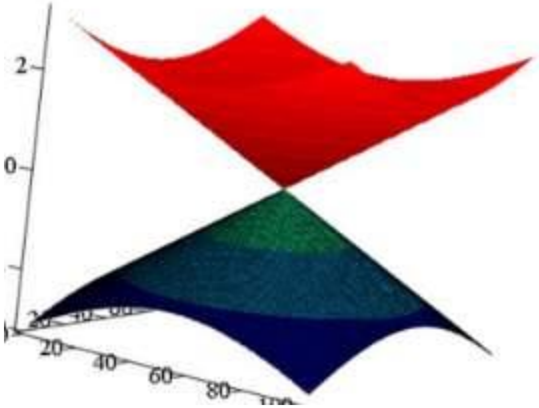
Конус



Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Конусом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

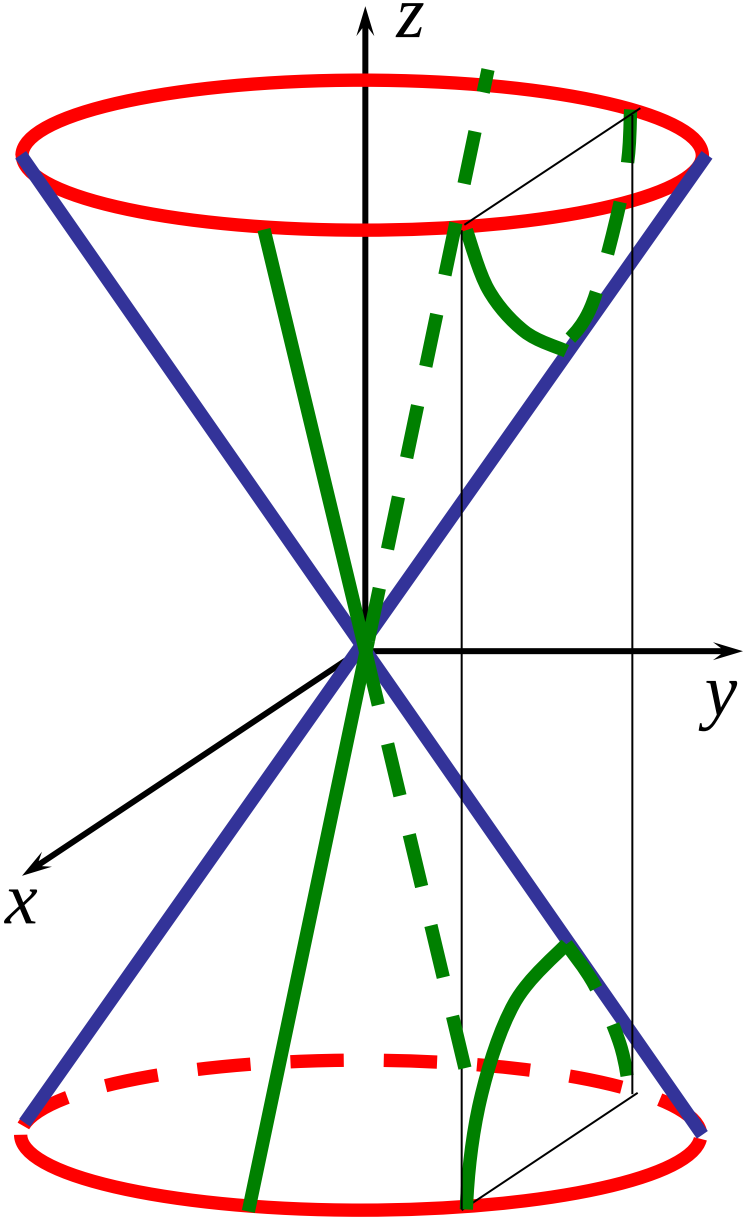
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,, \qquad (4)$$



где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой конус имеет уравнение (4) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (4) – ***каноническим уравнением конуса***.

Конус имеет центр симметрии $O(0;\,0;\,0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz



Величины a, b и c называются ***полуосями*** конуса.

Центр симметрии O называется ***вершиной конуса***.

Если $a = b$, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНУСА

1) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ x=h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

2) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью || Oz;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

3). Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h. \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = 0$ – точку $O\ (0;\ 0;\ 0)$.

✓ ***Замечание.***

Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.