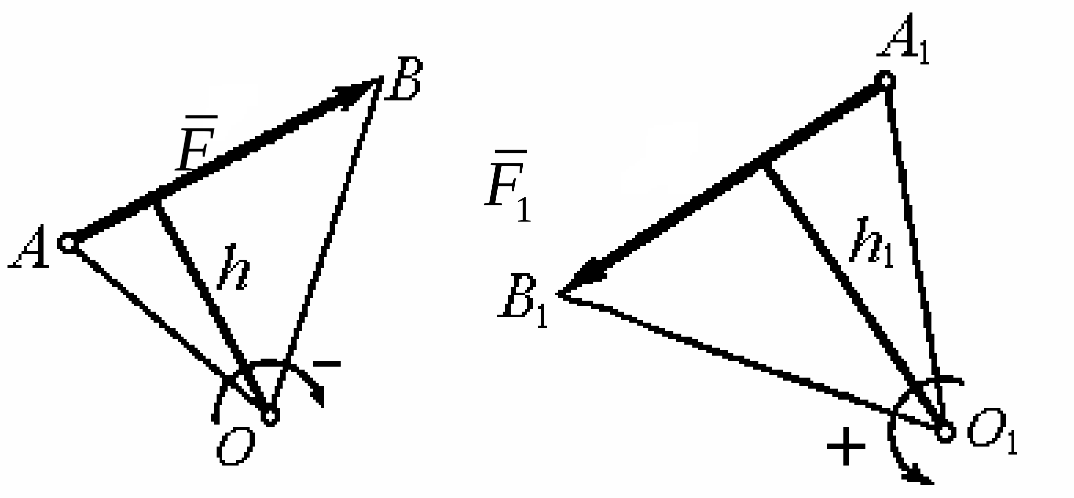
Лекция 2

1. Момент силы относительно точки.
2. Момент силы относительно оси.
3. Зависимость между моментом силы относительно оси и моментом силы относительно любой точки, лежащей на этой оси.
4. Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей. Пример.

1.6. Момент силы относительно точки

<u>На плоскости</u>

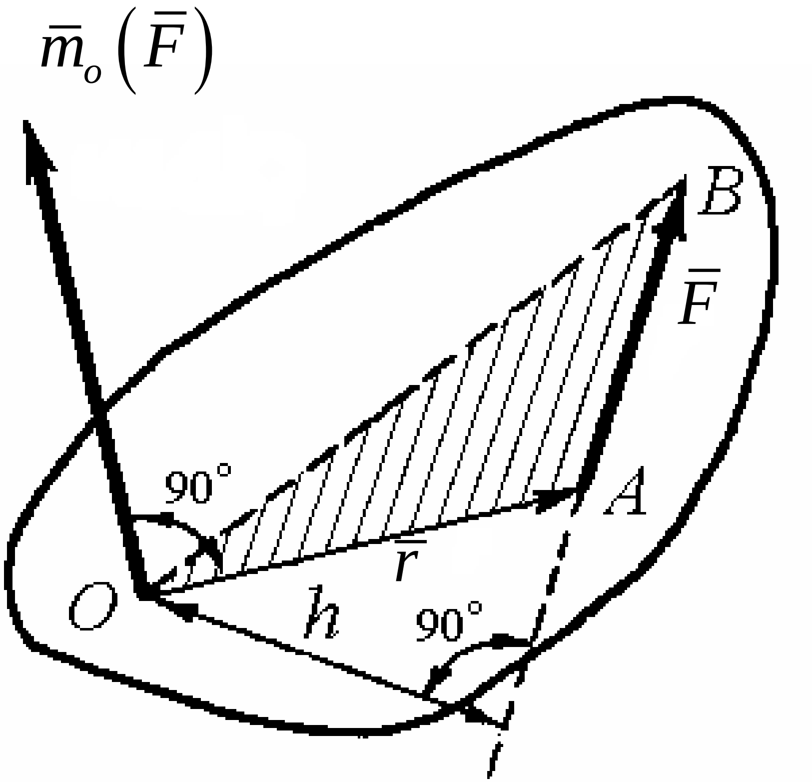


$$m_o\left(\bar{F}\right) = \pm Fh$$

$$\left|\bar{m}_o\left(\bar{F}\right)\right| = 2\text{пл}\Delta OAB$$

Моментом силы относительно точки называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы.

В пространстве:



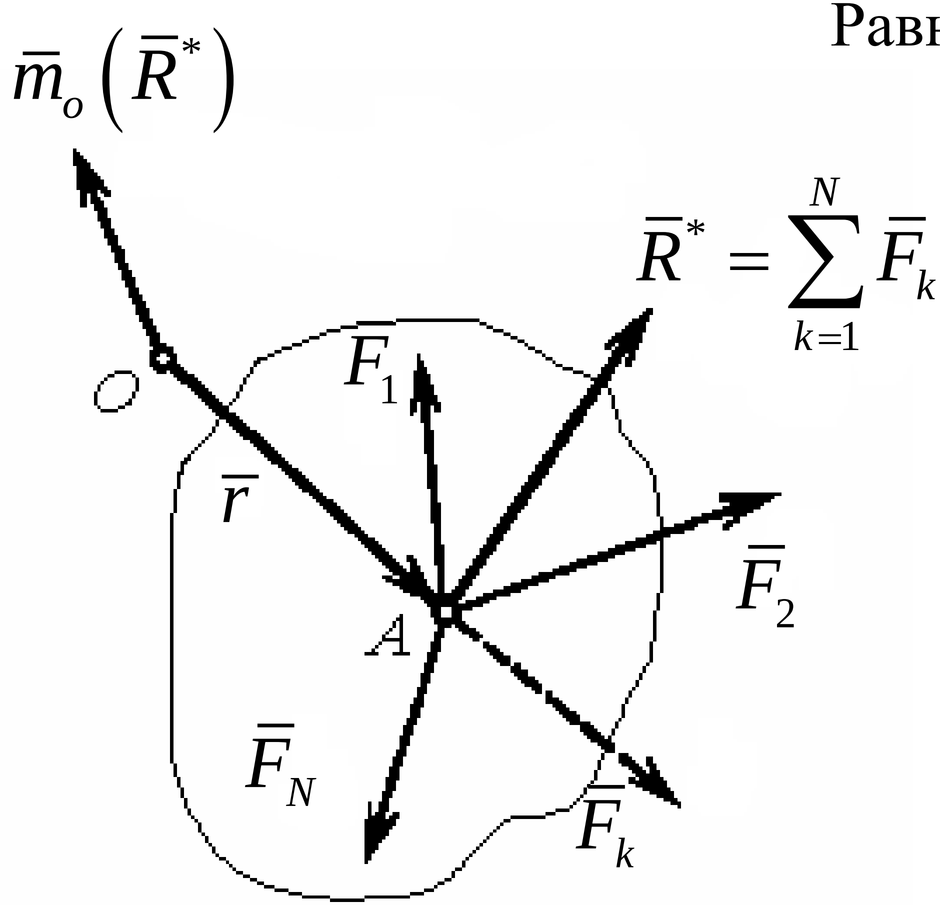
$$\bar{m}_o\left(\bar{F}\right)=\bar{r}\times\bar{F}$$

момент силы относительно некоторого центра равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы.

Пространственная система сходящихся сил:

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{m}_O(\bar{F}_k) = \sum_{k=1}^{N}\bar{r}\times\bar{F}_k = \bar{r}\times\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k$$

Равнодействующая $\bar{R}^* = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k$

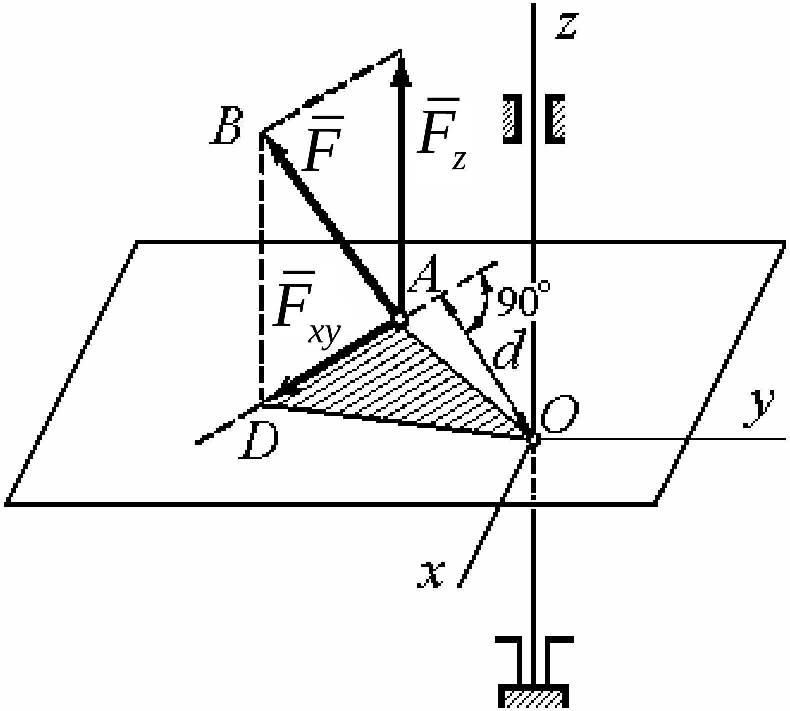


$$\bar{m}_o\left(\bar{R}^*\right) = \sum_{k=1}^{N}\bar{m}_o\left(\bar{F}_k\right)$$

$$\bar{m}_o\left(\bar{R}^*\right) = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_o\left(\bar{F}_k\right)$$

Момент равнодействующей пространственной системы сходящихся сил относительно произвольной точки равен геометрический сумме моментов сил данной системы относительно той же точки.

1.7 Момент силы относительно оси

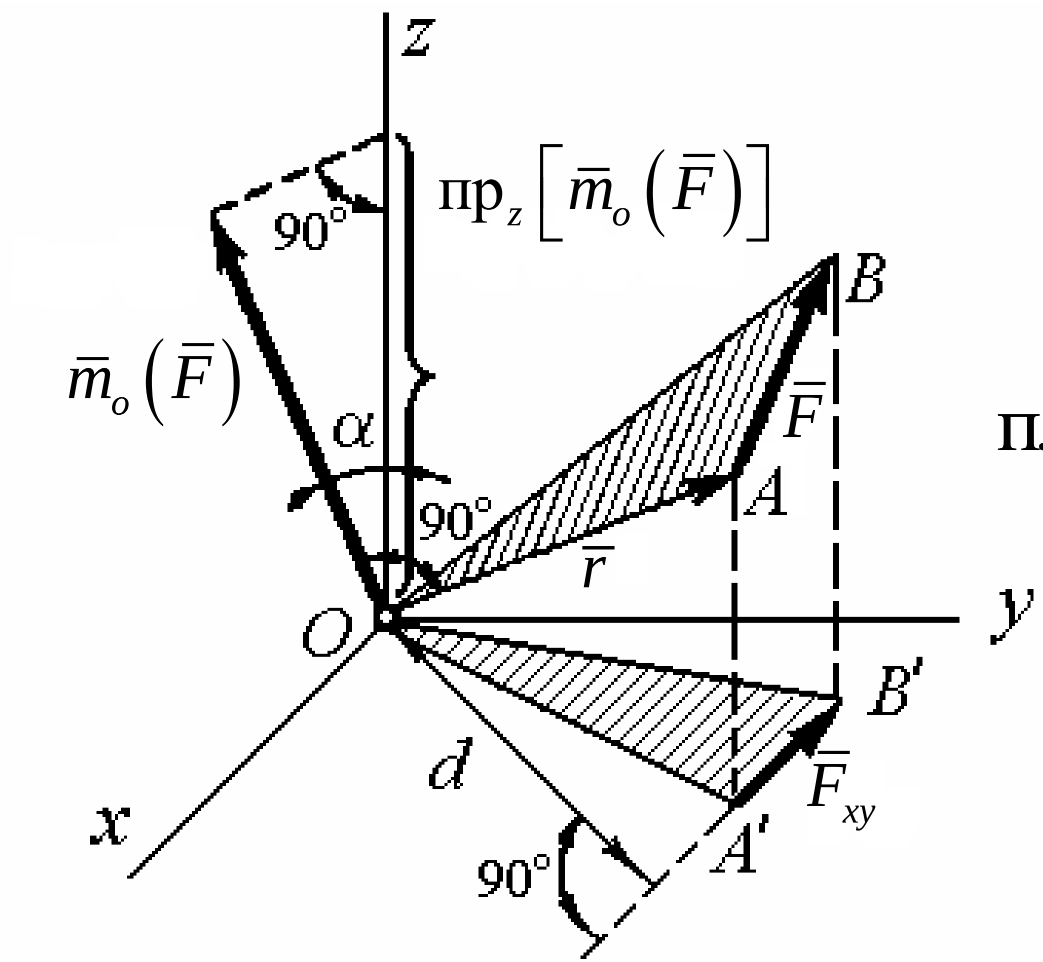


$$m_z\left(\bar{F}\right)=\pm F_{xy}\cdot d=\pm 2\text{пл}\Delta OAD$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси или пересекает ее.

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина момента проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения этой плоскости с осью.

1.8 Зависимость между моментом силы относительно оси и моментом силы относительно любой точки, лежащей на этой оси



$$\left|m_o\left(\bar{F}\right)\right| = 2\text{пл}\Delta OAB$$

$$\left|m_z\left(\bar{F}\right)\right| = 2\text{пл}\Delta OA'B'$$

$$\text{пл}\Delta OA'B' = \text{пл}\Delta OA'B' \cos\alpha$$

$$\left|m_z\left(\bar{F}\right)\right| = \left|m_o\left(\bar{F}\right)\right|\cos\alpha,$$

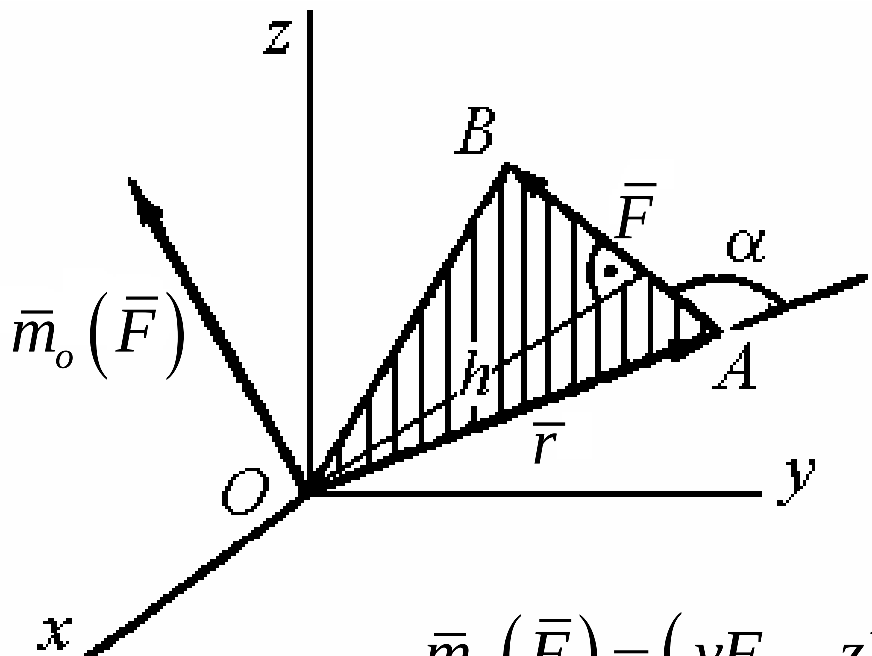
или $\left|m_z\left(\bar{F}\right)\right| = \text{пр}_z\bar{m}_o\left(\bar{F}\right)$

$$\left|m_z\left(\bar{F}\right)\right| = \left|m_o\left(\bar{F}\right)\right|\cos\alpha,$$

или $$\left|m_z\left(\bar{F}\right)\right| = \text{пр}_z\bar{m}_o\left(\bar{F}\right)$$

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно произвольной точки, лежащей на этой оси.

1.9 Аналитические выражения моментов силы относительно координатных осей



$$\bar m_o\left(\bar F\right)=\bar r\times\bar F=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\bar m_o\left(\bar F\right)=\left(yF_z-zF_y\right)\bar i+\left(zF_x-xF_z\right)\bar j+\left(xF_y-yF_x\right)\bar k$$

$$m_x\left(\bar F\right)=yF_z-zF_y,\quad m_y\left(\bar F\right)=zF_x-xF_z,\quad m_z\left(\bar F\right)=xF_y-yF_x$$

Момент силы относительно оси можно вычислить, зная проекции силы и координаты точки ее приложения.

Пример 1.2

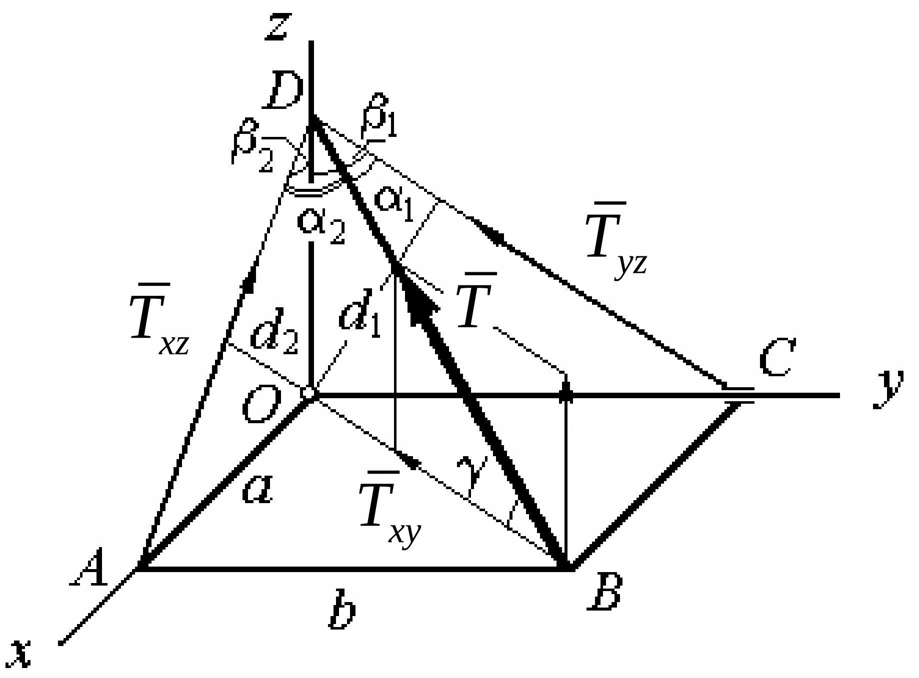
Дано:

$OA=CB=a$

$OC=AB=b$

$\angle DBO=\gamma$

Определить моменты силы $\bar{T}$



Решение:

I. По определению:

$$m_x\left(\bar{T}\right)=T_{yz}\cdot d_1$$

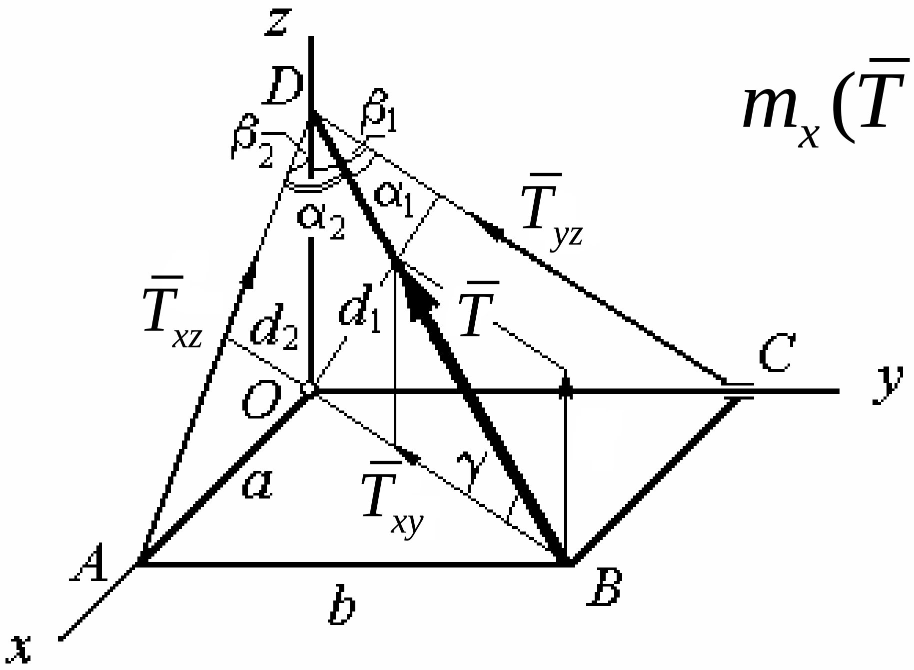
Обозначим теперь

$\angle BDC=\alpha_1$ и $\angle ODC=\beta_1$,

находим

$$T_{yz}=T\cdot\cos\alpha_1=T\frac{DC}{DB}$$

$$d_1=OD\cdot\sin\beta_1=OD\,\frac{OC}{DC}$$



$$m_x(\bar{T}) = T\frac{DC}{DB}OD\frac{OC}{DC} = T\cdot OC\frac{OD}{BD}$$

$OC=b$, а $\dfrac{OD}{BD} = \sin\gamma$.

Окончательно: $$m_x\left(\bar{T}\right) = T\cdot b\cdot\sin\gamma$$

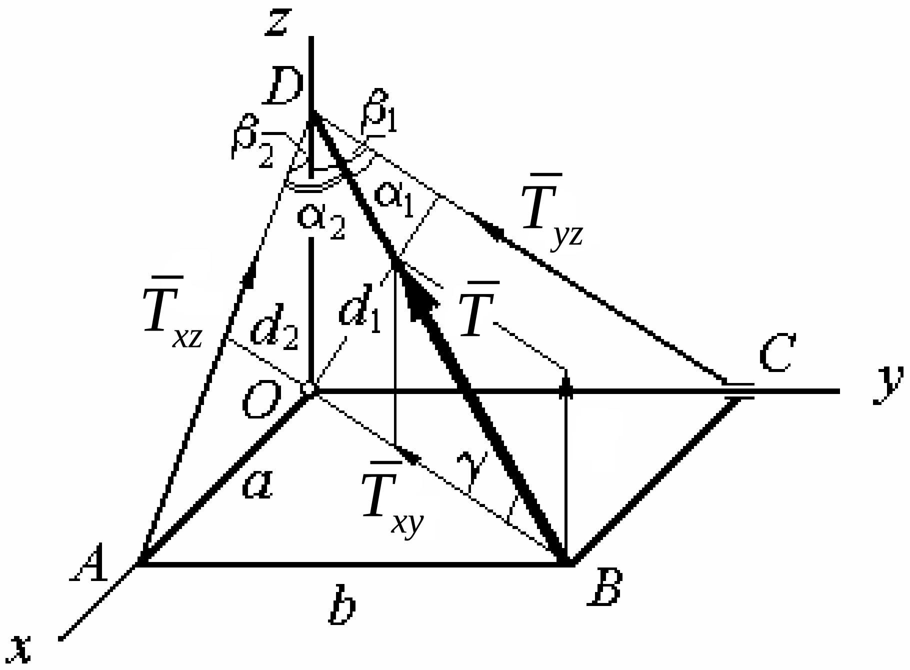
Аналогично: $$m_y\left(\bar{T}\right) = -T_{xz}\cdot d_2$$

$$T_{xz} = T\cos\alpha_2 = T\frac{DA}{DB}, \qquad d_2 = OD\sin\beta_2 = OD\frac{OA}{DA}$$

$$m_y(\bar{T}) = -T\,\frac{DA}{DB}\,OD\,\frac{OA}{DA} = -T \cdot OA\,\frac{OD}{DB}$$

$$m_y\left(\bar{T}\right) = -T \cdot a \cdot \sin\gamma$$

$$m_z\left(\bar{T}\right) = 0$$ (т.к. линия действия силы пересекает ось z)



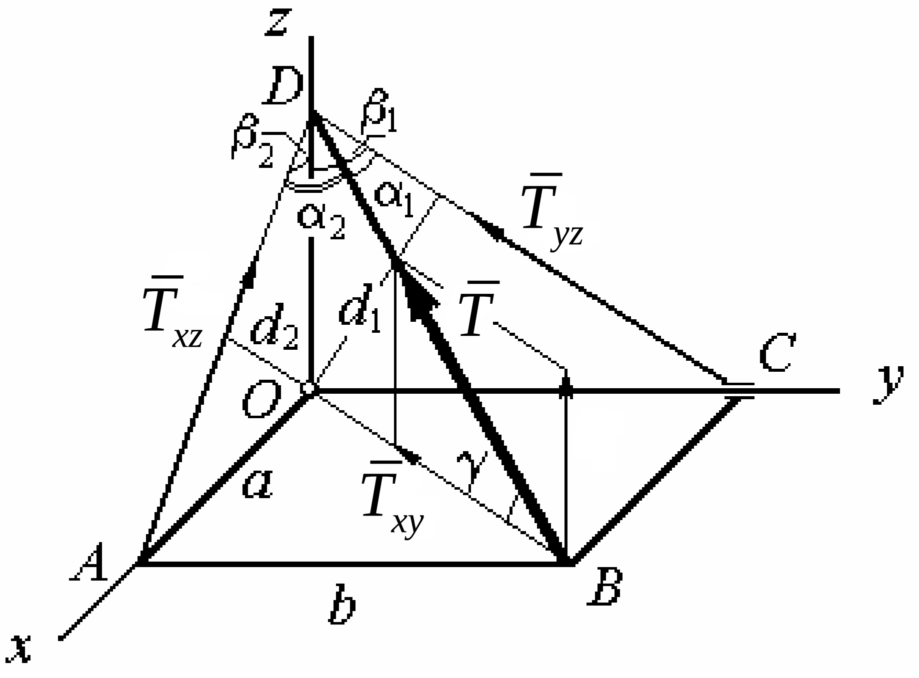
II. $\bar{T} = \bar{T}_z + \bar{T}_{xy}$

$$\bar{m}_o\left(\bar{T}\right) = \bar{m}_o\left(\bar{T}_z\right) + \bar{m}_o\left(\bar{T}_{xy}\right)$$

$$m_x\left(\bar{T}\right) = m_x\left(\bar{T}_z\right) + m_x\left(\bar{T}_{xy}\right)$$

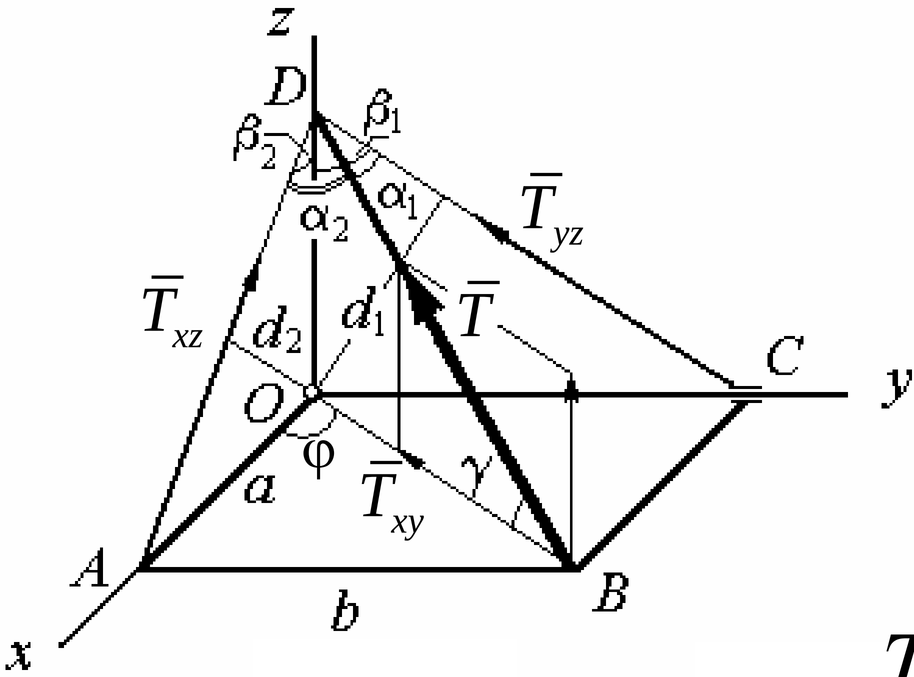
$$m_y\left(\bar{T}\right) = m_y\left(\bar{T}_z\right) + m_y\left(\bar{T}_{xy}\right)$$

$$m_z\left(\bar{T}\right) = m_z\left(\bar{T}_z\right) + m_z\left(\bar{T}_{xy}\right)$$



$$m_x\left(\bar{T}\right)=m_x\left(\bar{T}_z\right),\qquad m_y\left(\bar{T}\right)=m_y\left(\bar{T}_z\right)$$

$$m_x\left(\bar{T}\right)=T\cdot b\cdot\sin\gamma\qquad m_y\left(\bar{T}\right)=-T\cdot a\cdot\sin\gamma$$



III.

$$m_x = yF_z - zF_y,$$

$$m_y = zF_x - xF_z$$

$$T_x = T\cdot\cos\gamma\cdot\cos\varphi\ ,$$

$$T_y = T\cdot\cos\gamma\cdot\sin\varphi\ , \qquad T_z = T\cdot\sin\gamma.$$

$x = a$, $y = b$ и $z = 0$, тогда

$$m_x\left(\bar{T}\right) = T\cdot b\cdot\sin\gamma \qquad m_y\left(\bar{T}\right) = -T\cdot a\cdot\sin\gamma$$