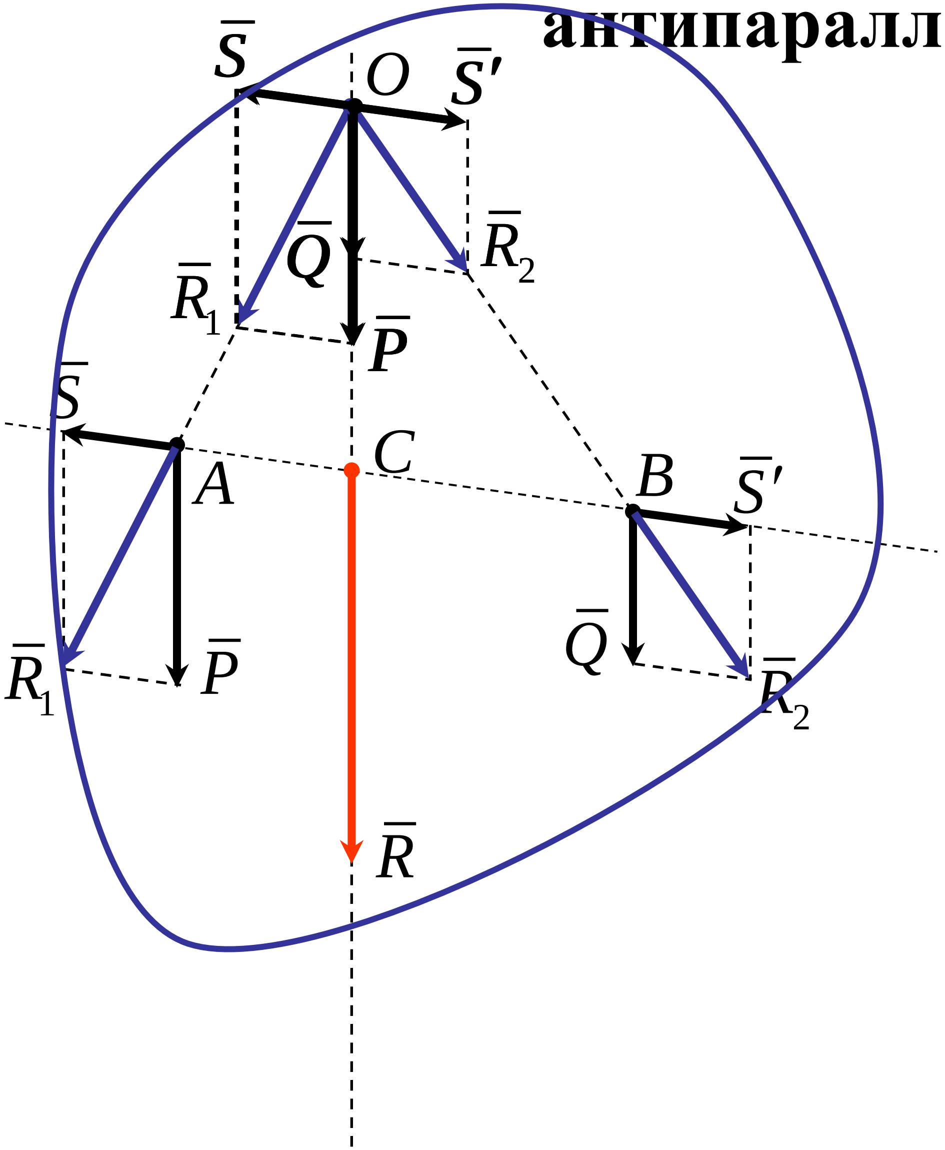
Лекция 3

1. Сложение параллельных и антипараллельных сил.
2. Пара сил. Момент пары.
3. Теоремы об эквивалентности и сложении пар: о переносе пары в плоскости ее действия, о переносе пары в плоскость параллельную плоскости ее действия, об изменении плеча и сил пары, о сложении пар. Условия равновесия системы пар.

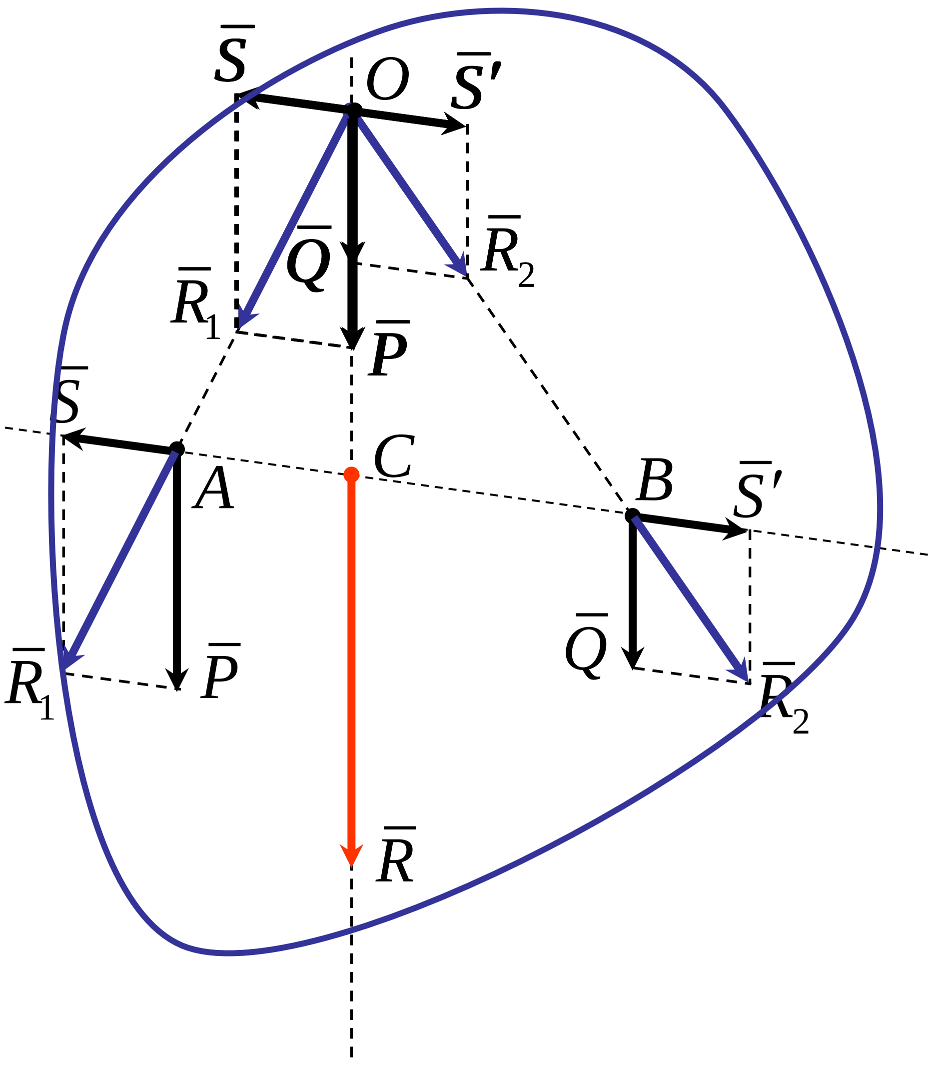
1.10. Сложение двух параллельных и антипараллельных сил



$$\left(\bar{S}, \bar{S}'\right) \sim 0$$

$$\left(\bar{P}, \bar{Q}\right) \sim \left(\bar{R}_1, \bar{R}_2\right)$$

$$R = P + Q$$



$$R = P + Q$$

$$\frac{P}{OC} = \frac{S}{AC} \qquad \frac{Q}{OC} = \frac{S'}{CB}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC} \qquad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$$

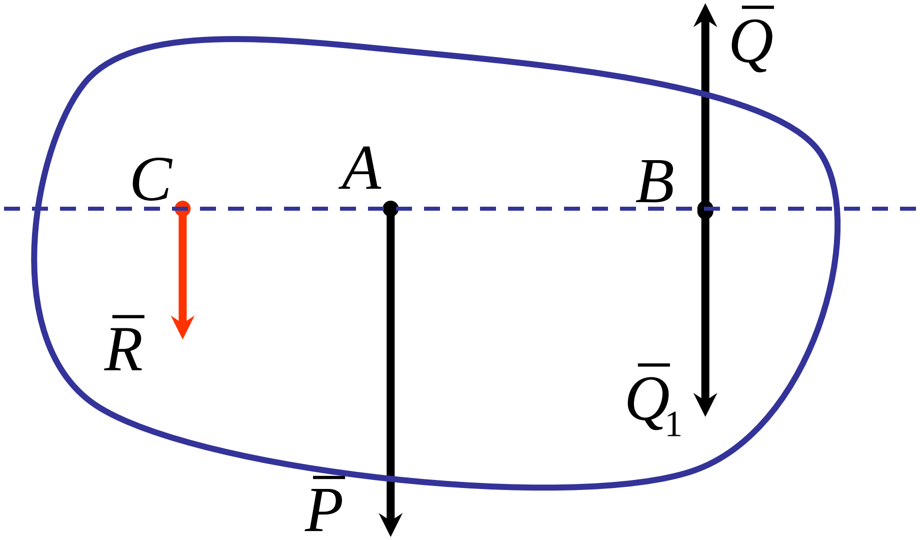
$$\frac{P+Q}{AC+CB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$$

$$\frac{R}{AB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}$$

$$\frac{R}{AB}=\frac{P}{CB}=\frac{Q}{AC}$$

Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, которая по модулю равна сумме модулей данных сил, параллельна им и направлена в ту же сторону.

Линия действия равнодействующей проходит через точку С, которая делит отрезок АВ, соединяющий точки приложения данных сил, на части, обратно пропорциональные этим силам, внутренним образом.



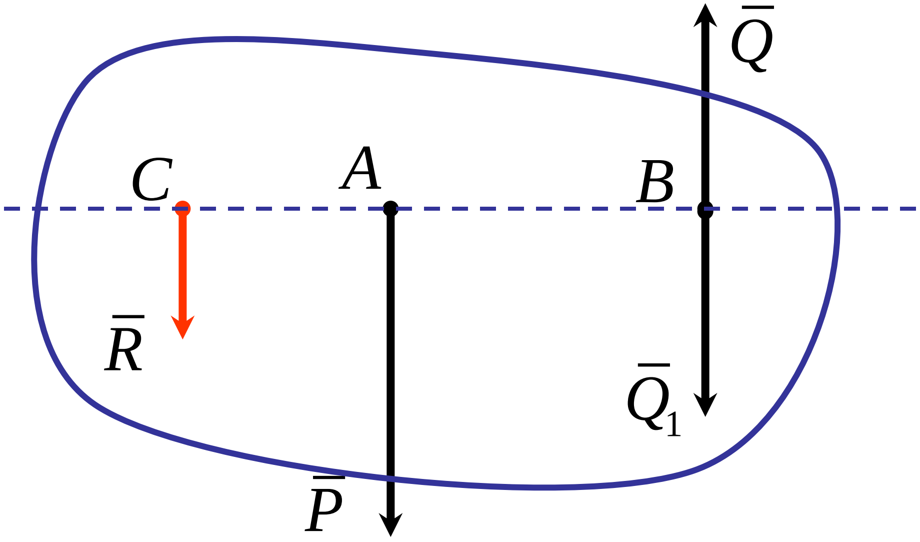
$$Q = Q_1$$

$$R = P - Q$$

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

$$\left(\bar{P}, \bar{Q}\right) \square \left(\bar{R}, \bar{Q}, \bar{Q}_1\right), \quad \text{\textit{но}} \; \left(\bar{Q}, \bar{Q}_1\right) \square \; 0,$$

$$\text{\textit{следовательно}} \qquad \left(\bar{P}, \bar{Q}\right) \square \; \bar{R}.$$



$$R = P - Q$$

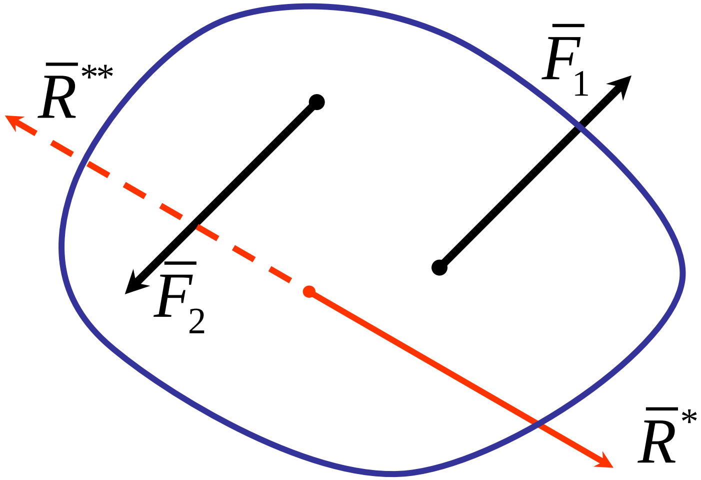
$$при \quad P \to Q \quad сила \quad R \to 0$$

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}$$

$$AC = \frac{Q}{R} AB$$

Система двух не равных по модулю антипараллельных сил имеет равнодействующую, которая по модулю равна разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая лежит на продолжении отрезка АВ и делит этот отрезок внешним образом на части, обратно пропорциональные силам.

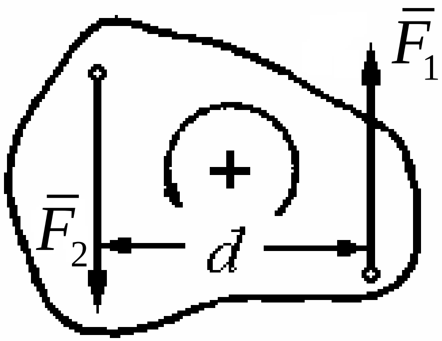
1.11. Пара сил. Момент пары

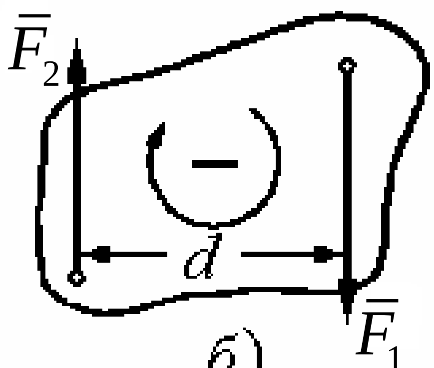


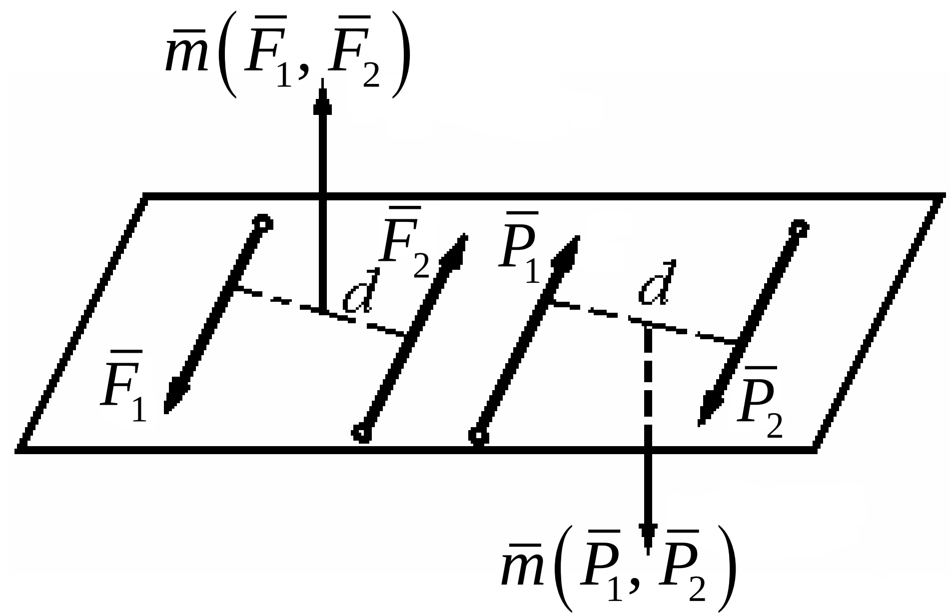
Система двух равных по величине, антипараллельных и не лежащих на одной прямой сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right)$, *называется парой сил.*

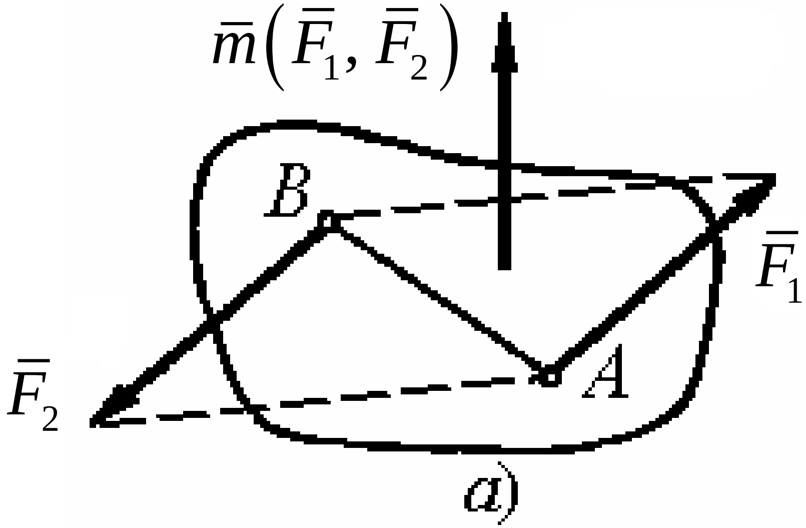
$$m\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2\right) = \pm F_1 d = \pm F_2 d$$

Численное значение момента пары равно произведению величины одной из сил пары на плечо этой пары.



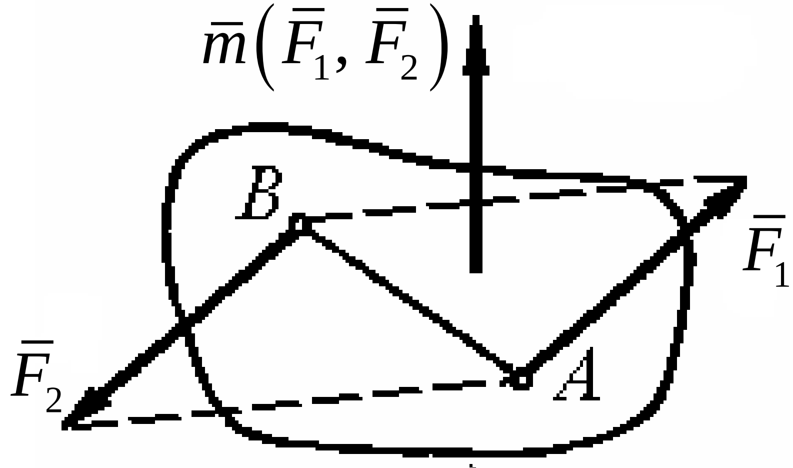




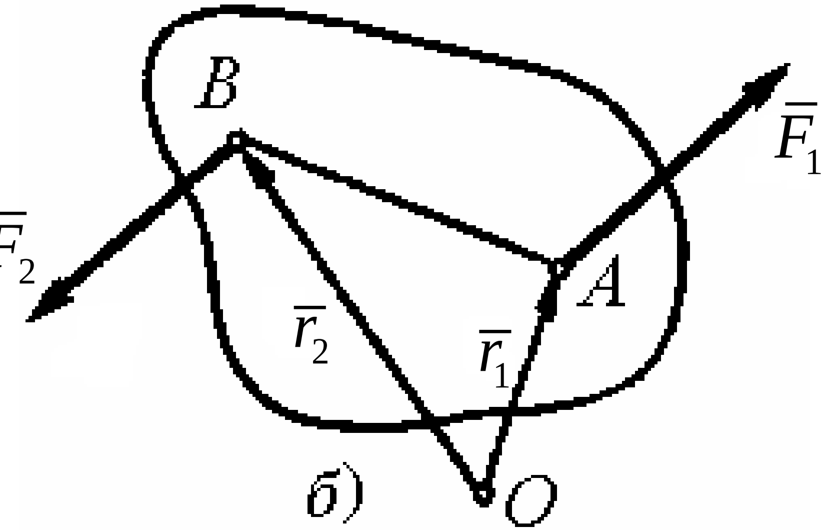


Момент пары есть вектор, перпендикулярный к плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда поворот тела данной парой виден происходящим против хода часовой стрелки.

$$\bar{m}(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \overline{AB} \times \bar{F}_2 = \overline{BA} \times \bar{F}_2$$



а)



б)

Сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары.

$$\bar{m}_o\left(\bar{F}_1\right)+\bar{m}_o\left(\bar{F}_2\right)=\bar{r}_1\times\bar{F}_1+\bar{r}_2\times\bar{F}_2 \qquad \bar{F}_2=-\bar{F}_1$$

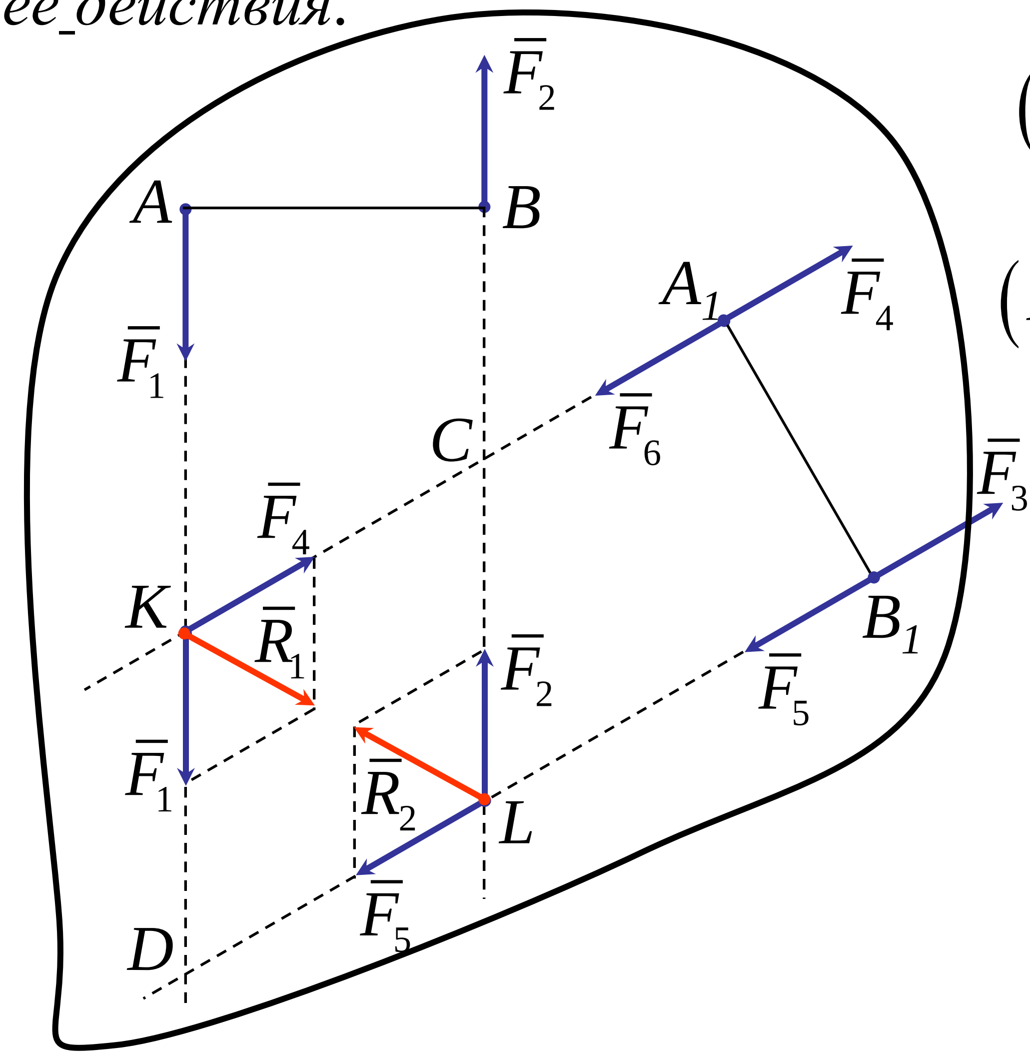
$$\bar{m}_o\left(\bar{F}_1\right)+\bar{m}_o\left(\bar{F}_2\right)=\bar{r}_1\times\bar{F}_1-\bar{r}_2\times\bar{F}_1=\left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\times\bar{F}_1$$

$$\bar{r}_1-\bar{r}_2=\overline{BA}$$

$$\bar{m}_o\left(\bar{F}_1\right)+\bar{m}_o\left(\bar{F}_2\right)=\overline{BA}\times\bar{F}_1=\bar{m}\left(\bar{F}_1,\bar{F}_2\right)$$

1.12.Теоремы об эквивалентности и сложении пар

Теорема 1. *Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если пару переместить в другое положение в плоскости ее действия.*



$$\left(\bar F_3, \bar F_5\right) \sim 0, \quad и \quad \left(\bar F_4, \bar F_6\right) \sim 0$$

$$\left(\bar F_1, \bar F_2\right) \sim \left(\bar F_1, \bar F_2, \bar F_3, \bar F_4, \bar F_5, \bar F_6\right)$$

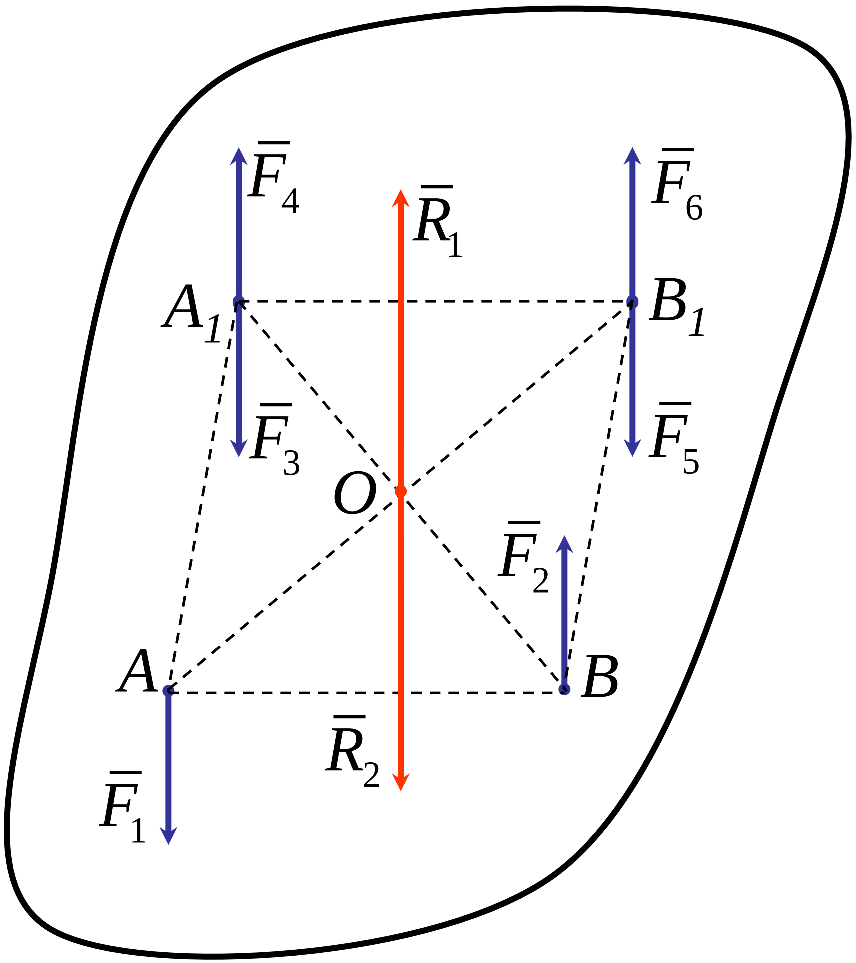
$$\bar R_1 = \bar F_1 + \bar F_4$$

$$\bar R_2 = \bar F_2 + \bar F_5$$

$$\left(\bar R_1, \bar R_2\right) \sim 0$$

$$\left(\bar F_1, \bar F_2\right) \sim \left(\bar F_6, \bar F_3\right)$$

Теорема 2. *Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если ее перенести в любую плоскость, параллельную плоскости действия данной пары.*



$$\left(\bar{F}_3, \bar{F}_4\right) \sim 0, \quad и \quad \left(\bar{F}_5, \bar{F}_6\right) \sim 0$$

$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2\right) \sim \left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6\right)$$

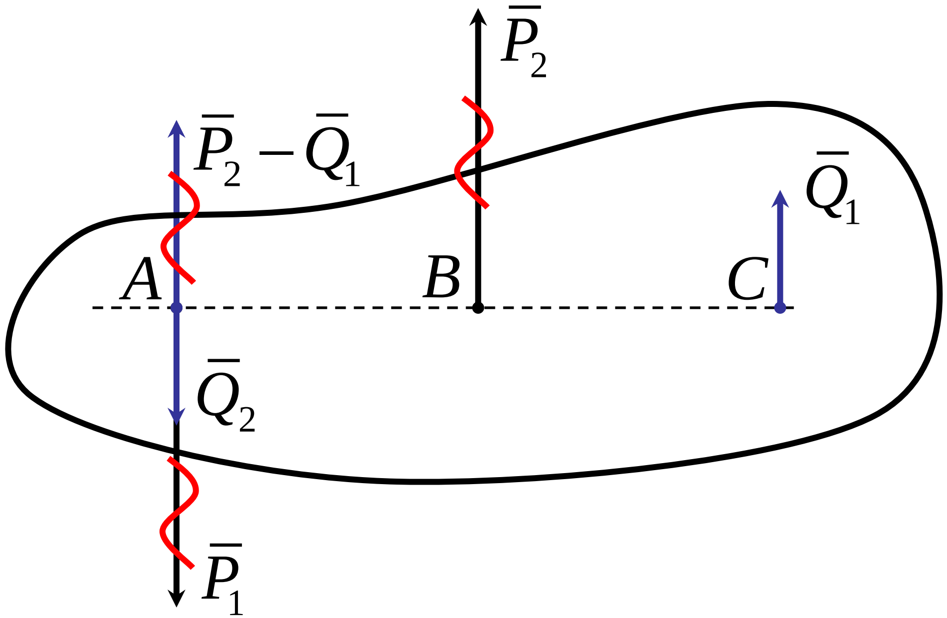
$$\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_5$$

$$\bar{R}_2 = \bar{F}_2 + \bar{F}_4$$

$$\left(\bar{R}_1, \bar{R}_2\right) \sim 0$$

$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2\right) \sim \left(\bar{F}_3, \bar{F}_6\right)$$

Теорема 3. *Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если любым способом видоизменить модули сил и плечо пары, сохраняя постоянным их произведение, т.е. момент пары.*



$$\bar{P}_2 \square \left(\bar{Q}_1, \bar{P}_2 - \bar{Q}_1\right)$$

$$\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2 - \bar{Q}_1\right) \square \bar{Q}_2$$

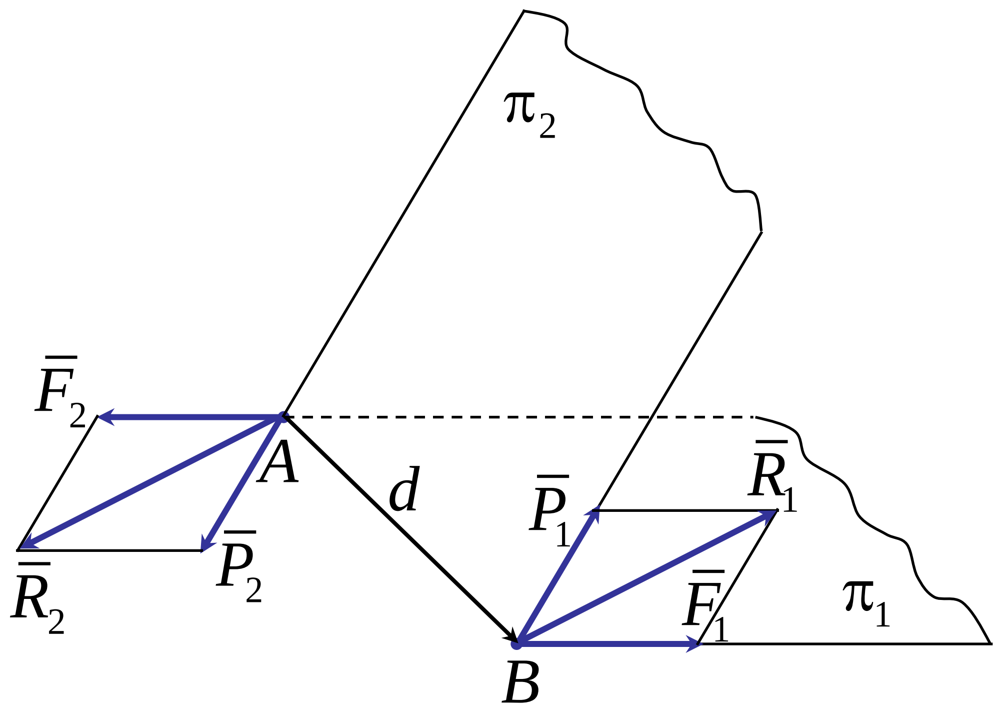
$$Q_2 = P_1 - (P_2 - Q_1) = Q_1$$

$$\frac{Q_2}{AB} = \frac{P_2}{AC}$$

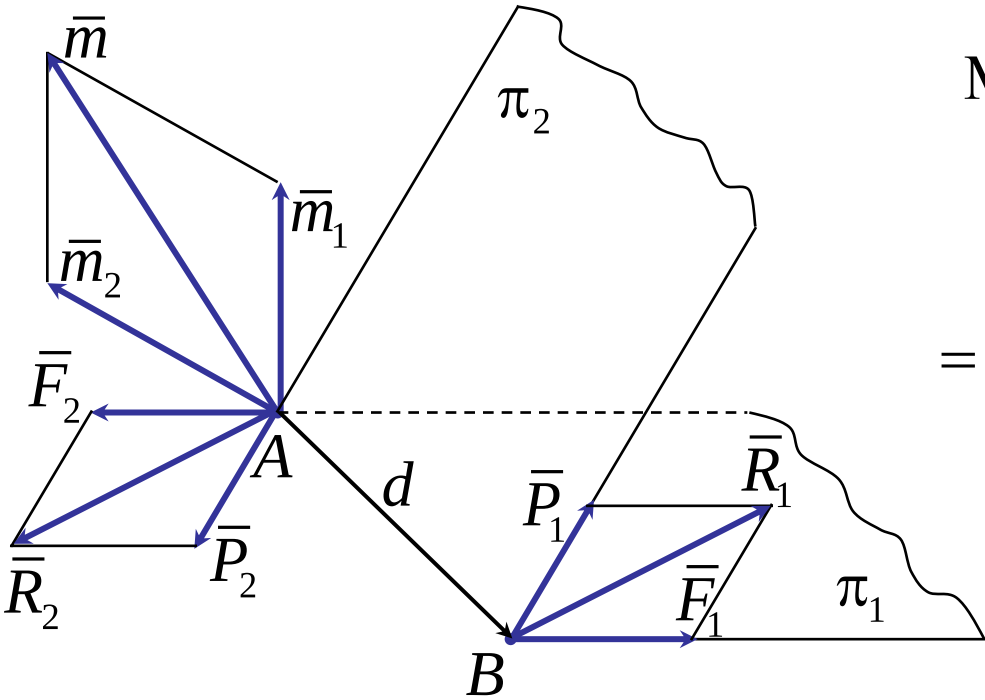
$$Q_2 AC = P_2 AB$$

$$\left(\bar{P}_1, \bar{P}_2\right) \square \left(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\right)$$

Теорема 4. *Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре, вектор-момент которой равен геометрической сумме моментов слагаемых пар*



Сложив далее силы $\overline{F}_1$ и $\overline{P}_1$, а затем $\overline{F}_2$ и $\overline{P}_2$ получим результирующую пару $\left(\overline{R}_1, \overline{R}_2\right)$, т.е. первая половина теоремы доказана.



Момент результирующей пары:

$$\bar{m}\left(\bar{R}_1\,,\,\bar{R}_2\right)=\overline{AB}\times\bar{R}=$$

$$=\overline{AB}\times\left(\bar{F}_1+\bar{P}_1\right)=\overline{AB}\times\bar{F}_1+\overline{AB}\times\bar{P}_1$$

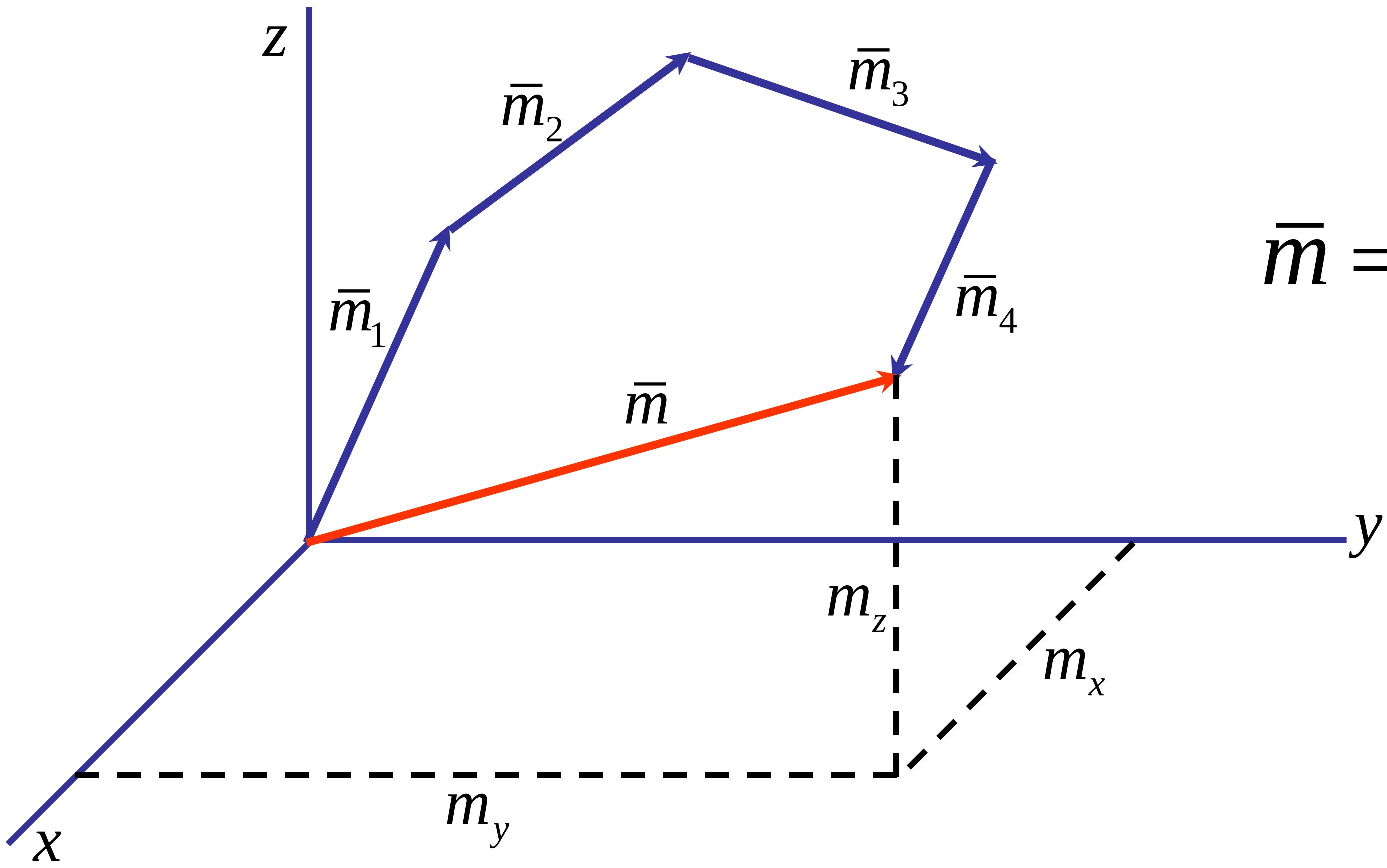
но $\overline{AB}\times\bar{F}_1=\bar{m}_1\left(\bar{F}_1,\bar{F}_2\right),$

а $\overline{AB}\times\bar{P}_1=\bar{m}_2\left(\bar{P}_1,\bar{P}_2\right)$

Поэтому окончательно получим:

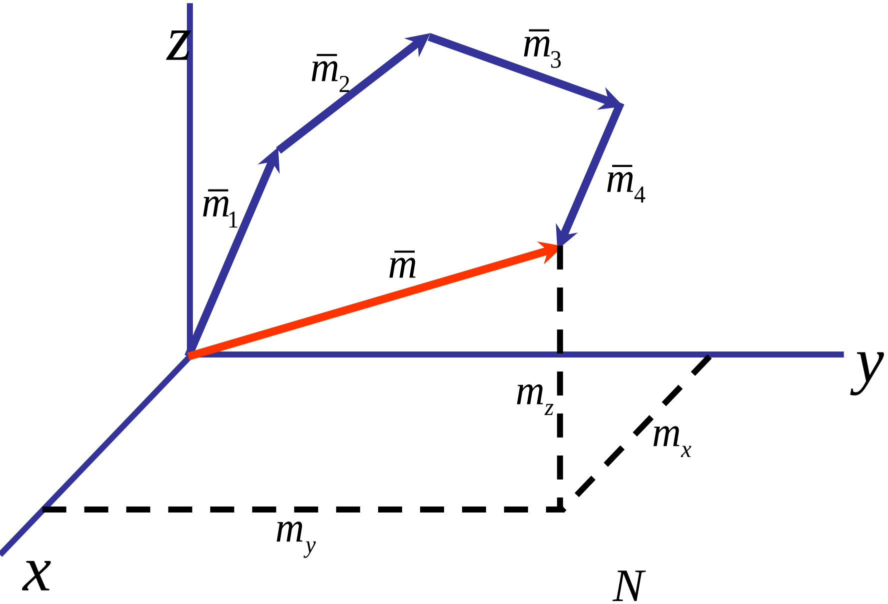
$$\bar{m}\left(\bar{R}_1\,,\,\bar{R}_2\right)=\bar{m}_1\left(\bar{F}_1,\bar{F}_2\right)+\bar{m}_2\left(\bar{P}_1,\bar{P}_2\right)$$

Момент результирующей пары по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах-моментах слагаемых пар, т.е. равен их геометрической сумме.



$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_k$$

$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_k = 0$$



$$\bar{m} = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_{kx} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_{ky} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{N} m_{kz} = 0$$

Для равновесия системы пар, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций векторов-моментов всех пар системы на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.