Лекция 5

1. Приведение произвольной системы сил к динамическому винту.

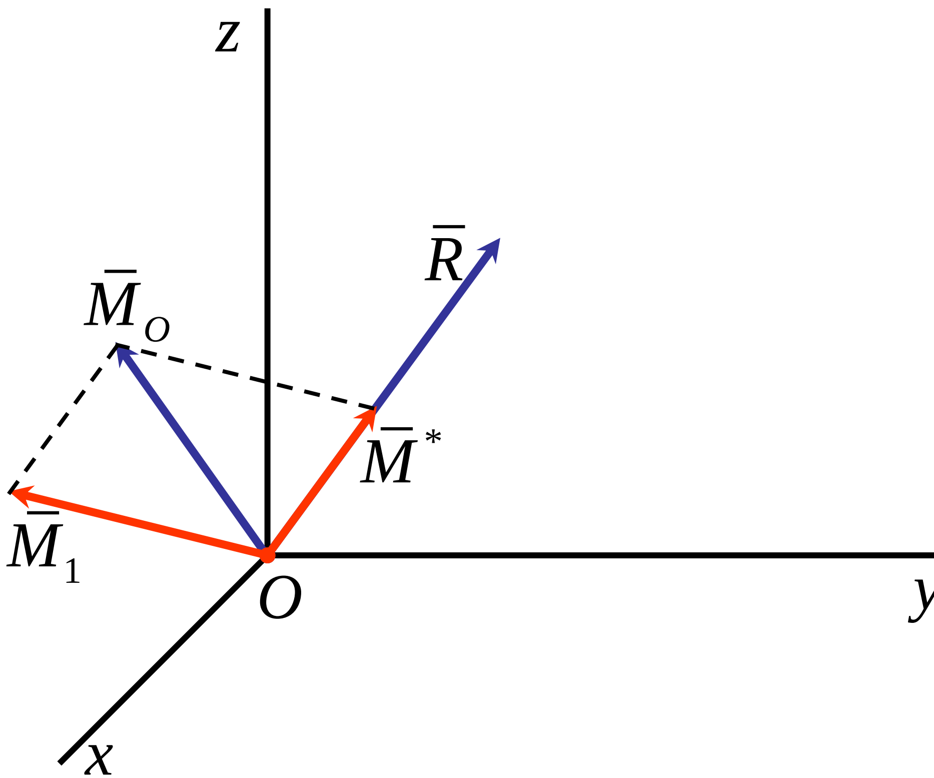
2. Частные случаи приведения произвольной пространственной системы сил к равнодействующей или паре сил.

3. Теорема Вариньона.

4. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

1.18 Приведение произвольной пространственной системы сил к динамическому винту

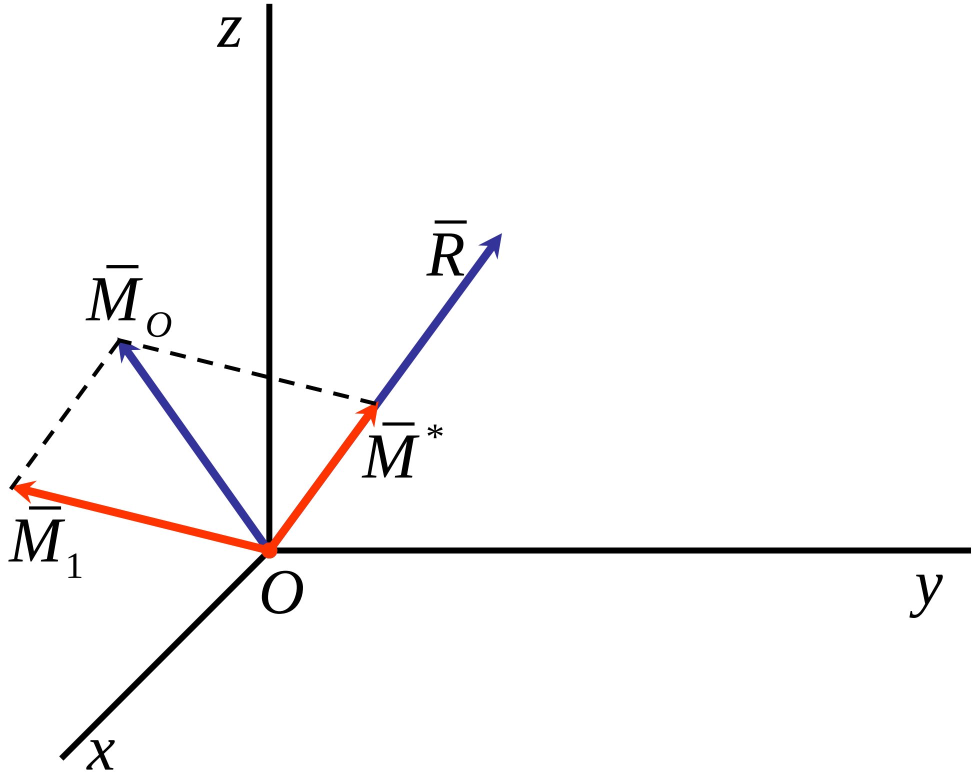
Совокупность силы, равной главному вектору, и пары сил с моментом, равным главному моменту, коллинеарным главному вектору, называется динамическим винтом или динамой. ($\bar{R}$ – главный вектор, $\bar{M}_O$ – главный момент)



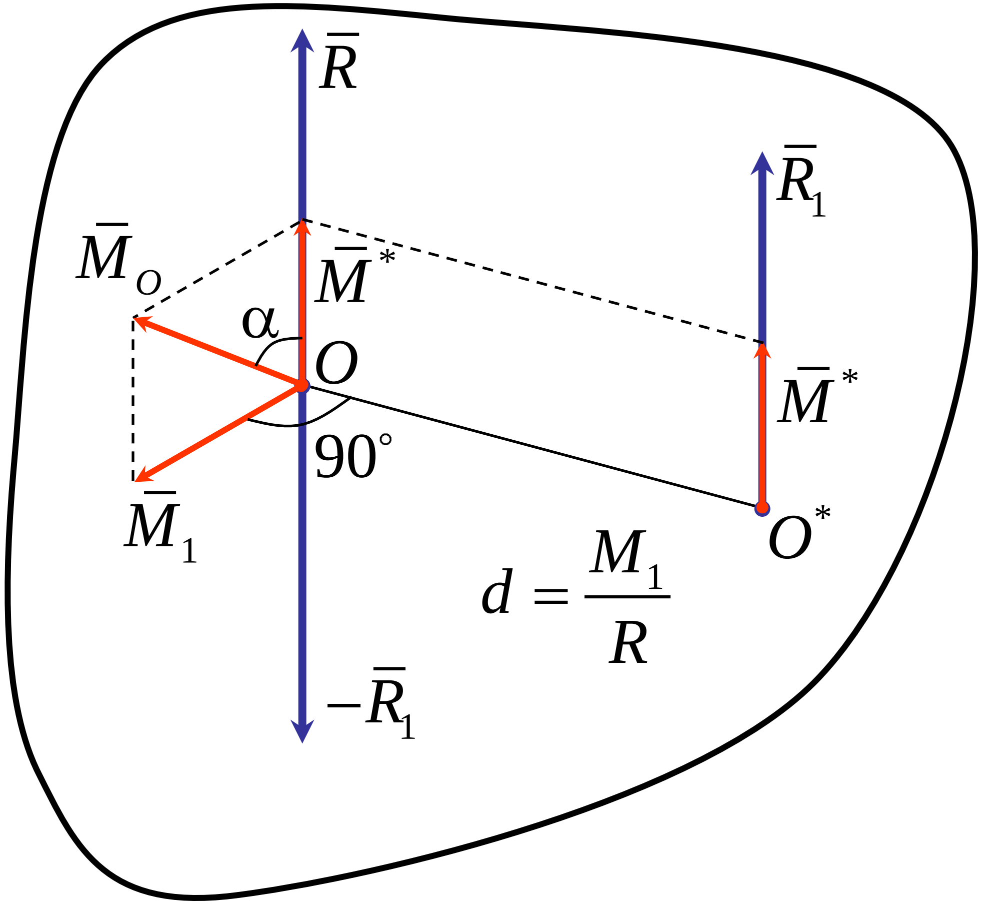
$$\bar{M}_O = \bar{M}^* + \bar{M}_1$$

$$\bar{M}^* \parallel \vec{R}; \quad \bar{M}_1 \perp \vec{R}$$

$\bar{M}^* = \text{const}$ - проекция главного момента на направление главного вектора



$$M^* = M_O \cos\alpha = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \frac{R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$



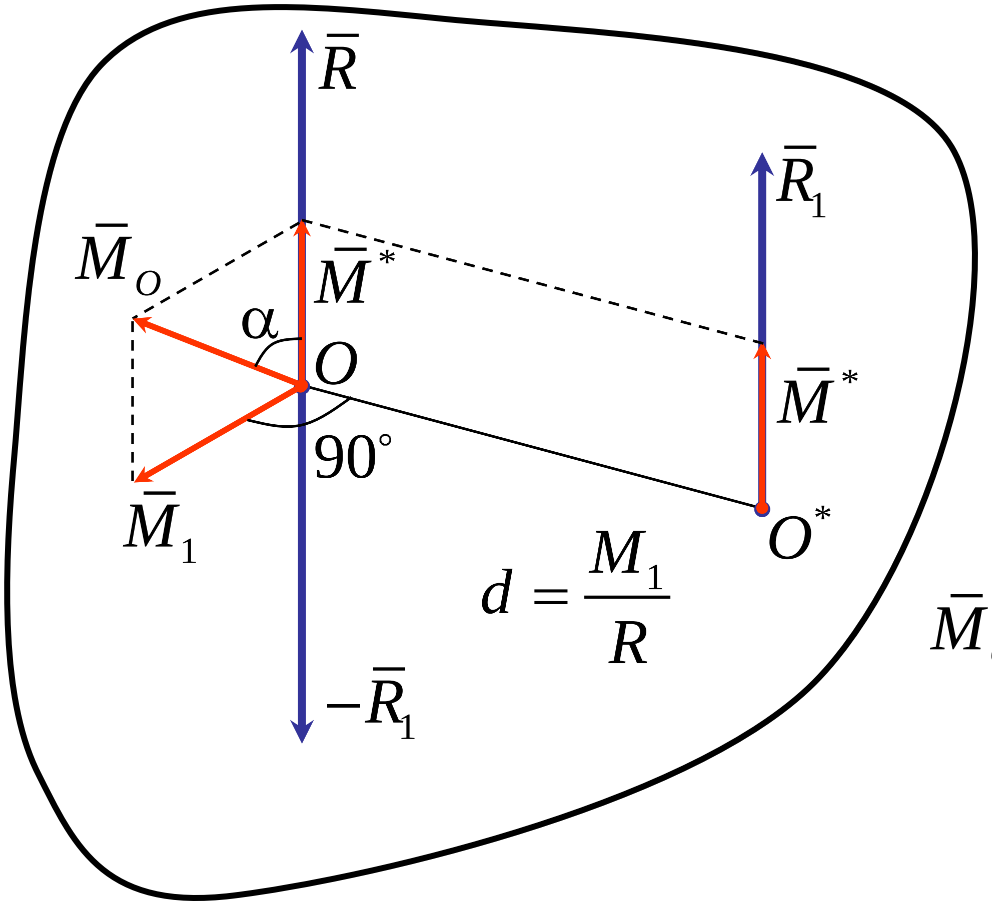
$$\bar{M}_1 = \bar{M}\left(\bar{R}_1, -\bar{R}_1\right)$$

$$\bar{R}_1 = -\bar{R}_1 = \bar{R}$$

$$\left(\bar{M}, \bar{R}\right) \parallel \left(\bar{M}^*, \bar{R}\right)$$

Геометрическое место центров приведения, относительно которых главный момент коллинеарен главному вектору, называется центральной осью данной системы сил.

$$\bar{M}^* = \bar{M}_O + \overline{O^*O} \times \bar{R} = \bar{M}_O - \overline{OO^*} \times \bar{R}$$



$$\bar{M}^* = p\bar{R}$$

$$p = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R^2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$\bar{M}_O - \overline{OO^*} \times \bar{R} = p\bar{R}$$

$$\bar{M}_O\left(M_x, M_y, M_z\right), \quad \bar{R}\left(R_x, R_y, R_z\right),$$

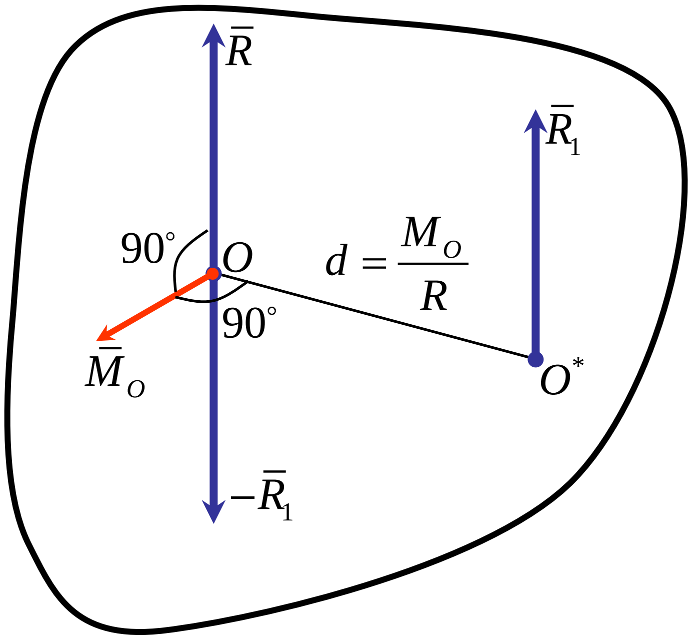
$$\overline{OO^*}\left(x, y, z\right)$$

$$\frac{M_x - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_y - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_z - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p$$

Всякая система сил, действующая на твердое тело, для которой второй инвариант не равен нулю, приводится к динаме.

1.19 Частные случаи приведения произвольной пространственной системы сил

Приведение к равнодействующей



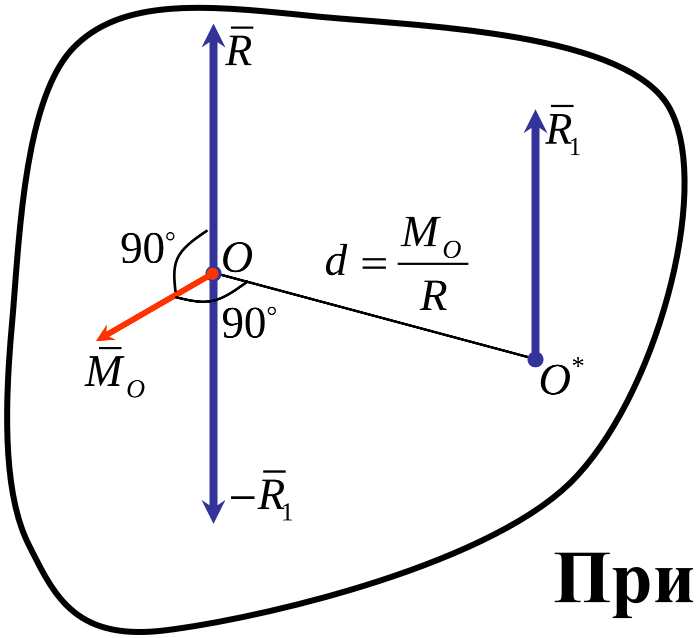
$$\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0, \text{ но } \overline{R} \neq 0 \text{ и } \overline{M}_O \neq 0$$

$$OO^* = \frac{M_O}{R}$$

Чтобы система сил имела равнодействующую, необходимо и достаточно:

1) $\overline{R} \neq 0$;

2) $\overline{M}_O \cdot \overline{R} = 0$ для любого центра приведения.



Приведение к паре сил

Если $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0$, $\bar{R} = 0$, *но* $\bar{M}_O \neq 0$, то главный момент не зависит от выбора центра приведения. Система сил приводится к паре с моментом $\bar{M}_O$.

Система сил эквивалентна нулю

Если при приведении произвольной системы сил оказалось, что $\bar{R} = 0$ и $\bar{M}_O = 0$, то рассматриваемая система эквивалентна нулю, т.е. уравновешена.

Возможные случаев приведения произвольной пространственной системы сил

1. $\bar{M}_O \cdot \bar{R} \neq 0 \quad \bar{R} \neq 0 \quad \bar{M}_O \neq 0$ *Общий случай, динамический винт.*

2. $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0 \quad \begin{cases} \bar{R} \neq 0 \quad \bar{M}_O \neq 0 & \text{\textit{Равнодействующая.}} \\ \bar{R} \neq 0 \quad \bar{M}_O = 0 & \text{\textit{Равнодействующая в центре приведения.}} \end{cases}$

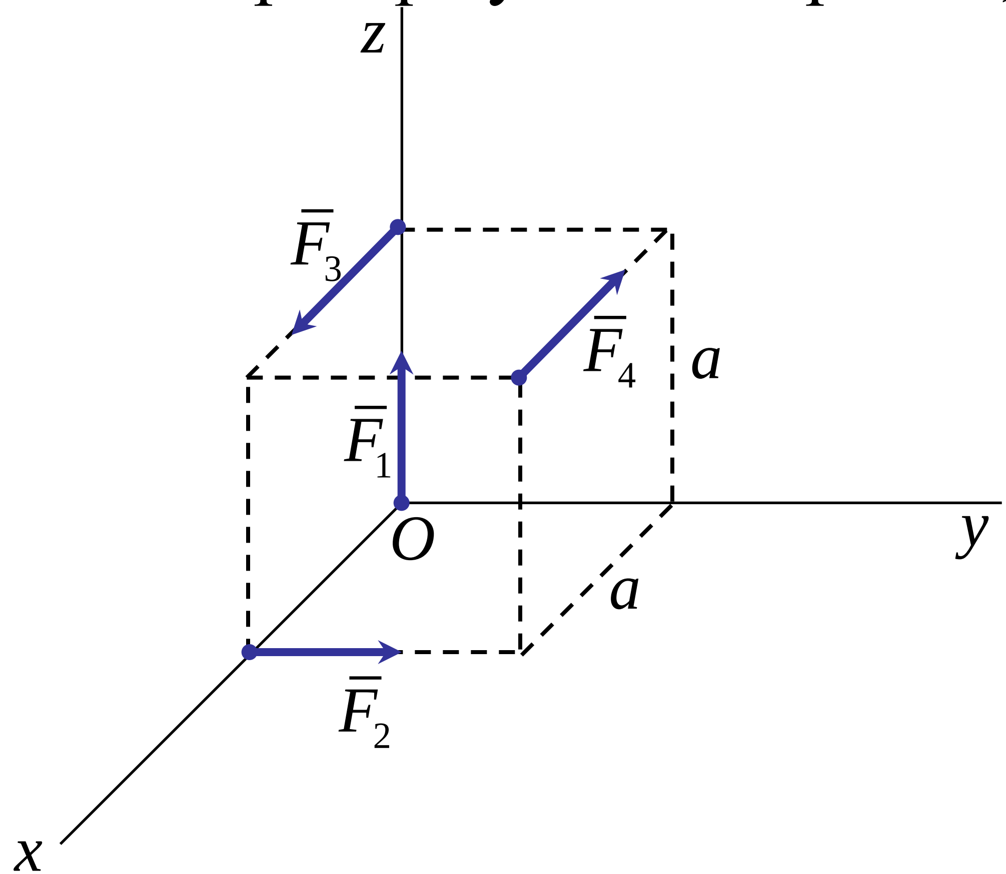
3. $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0 \quad \bar{R} = 0 \quad \bar{M}_O \neq 0$ *Пара сил.*

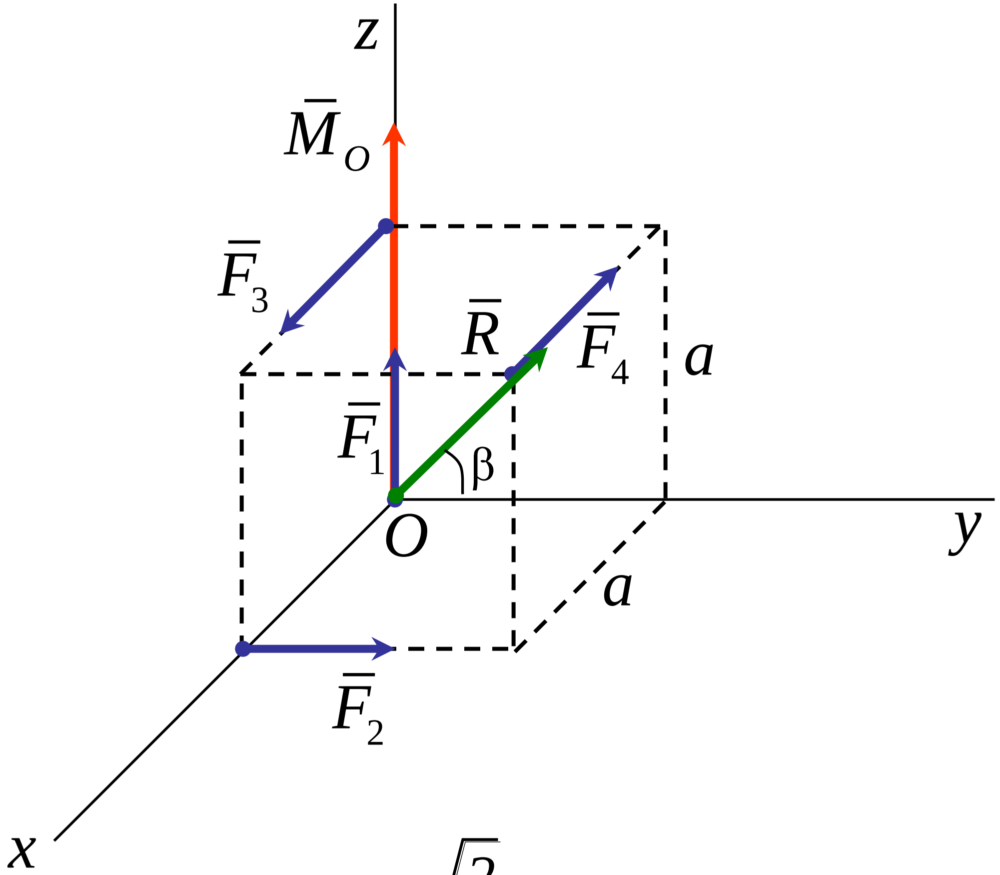
4. $\bar{M}_O \cdot \bar{R} = 0 \quad \bar{R} = 0 \quad \bar{M}_O = 0$ *Система сил эквивалентна нулю.*

Пример 1.3. Упростить систему четырех одинаковых по величине сил, действующих вдоль ребер куба со стороной, равной a.

$$R_x = 0, \quad R_y = F, \quad R_z = F,$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 2aF$$



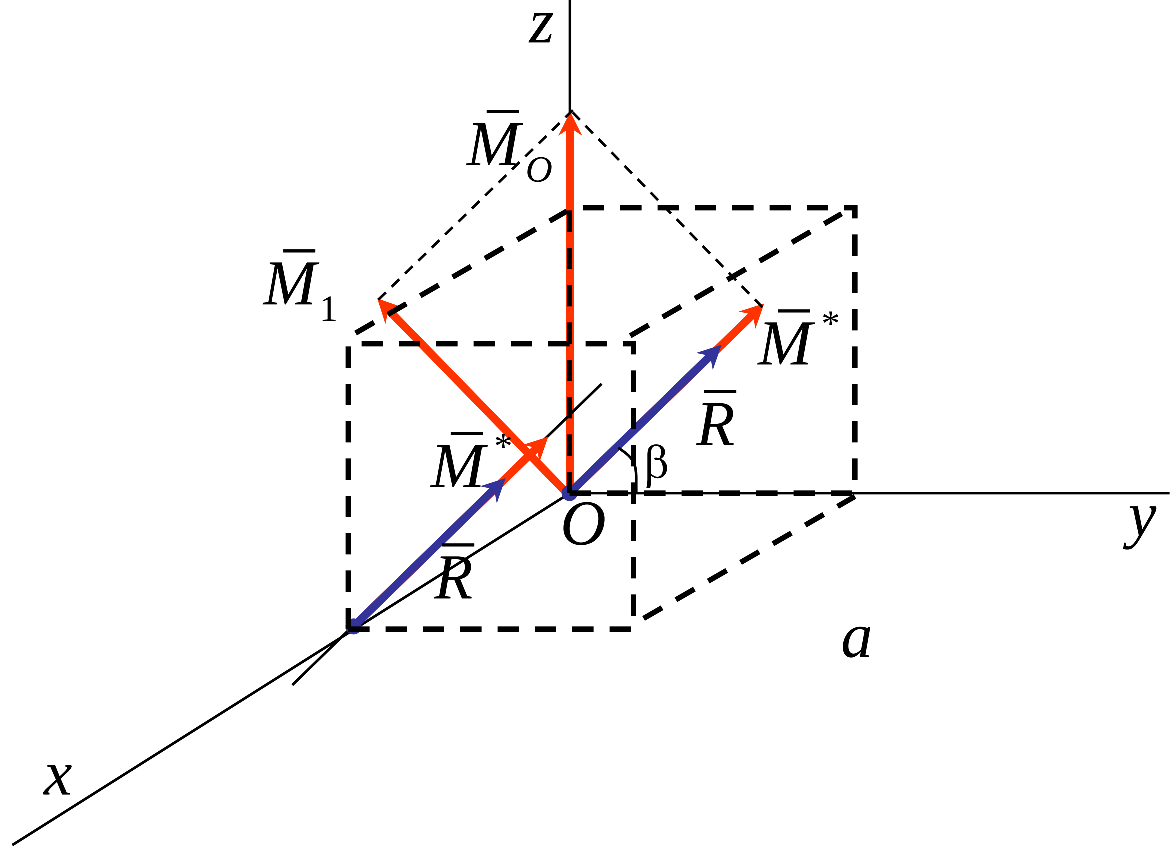


$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R = \sqrt{2}F$$

$$\beta = 45^\circ$$

$$M_O = 2aF$$

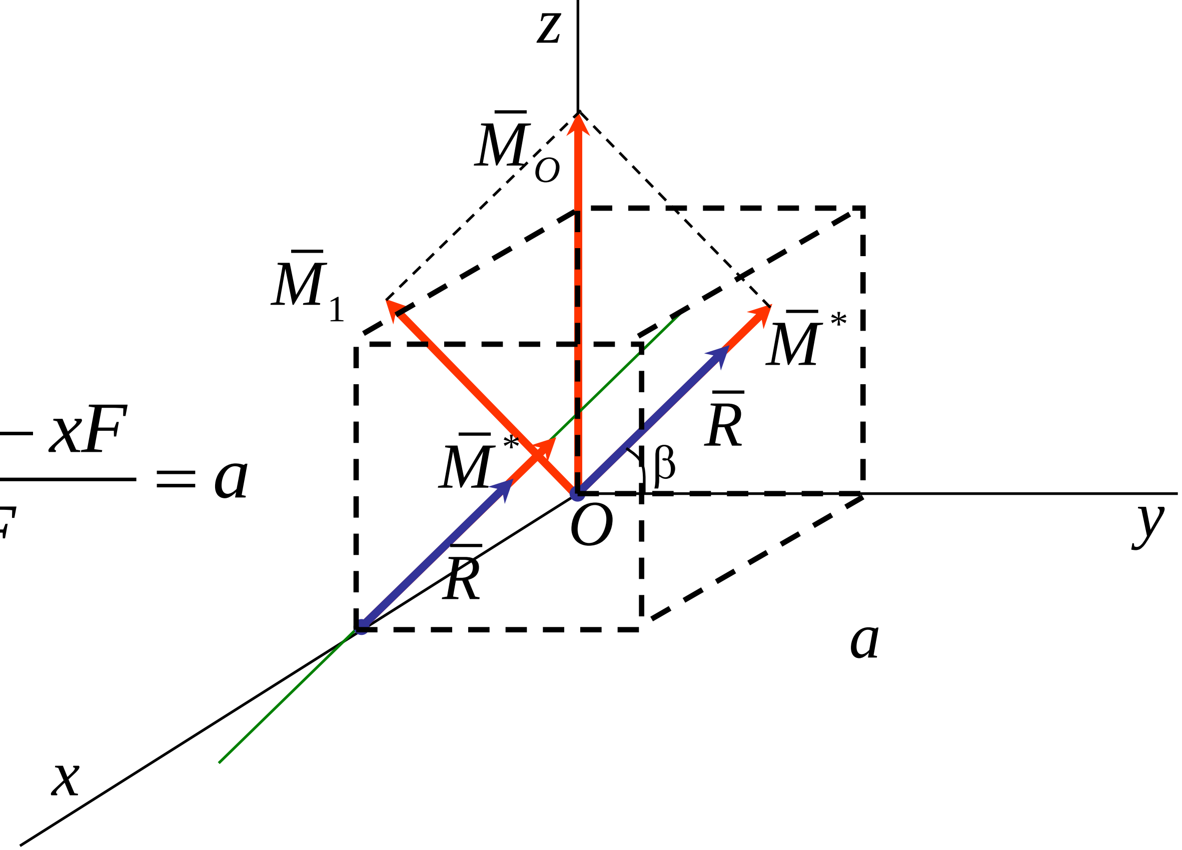


$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{M}_O = M_x R_x + M_y R_y + M_z R_z = 2aF^2$$

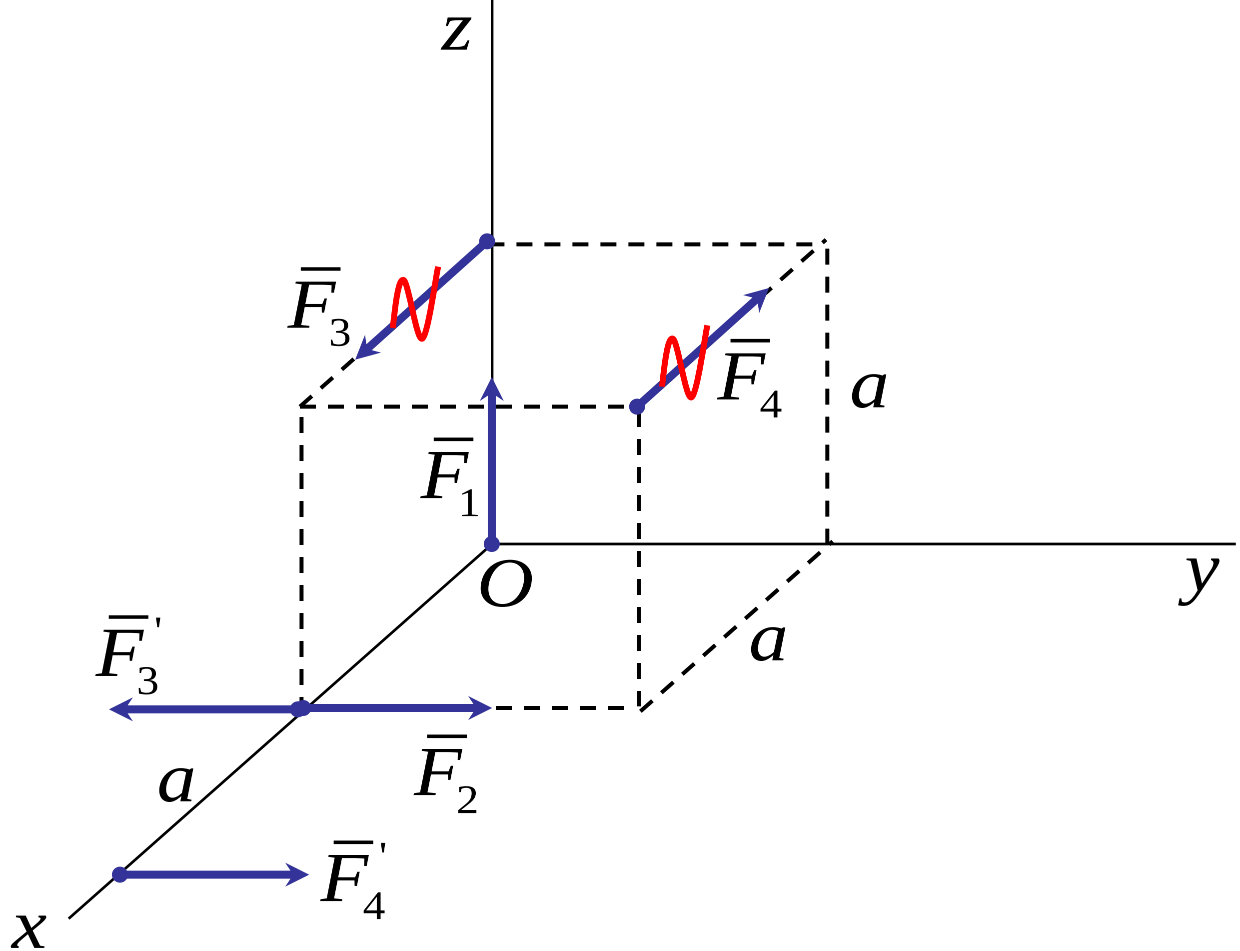
$$M^* = \frac{\bar{R} \cdot \bar{M}_O}{R} = \sqrt{2}aF$$

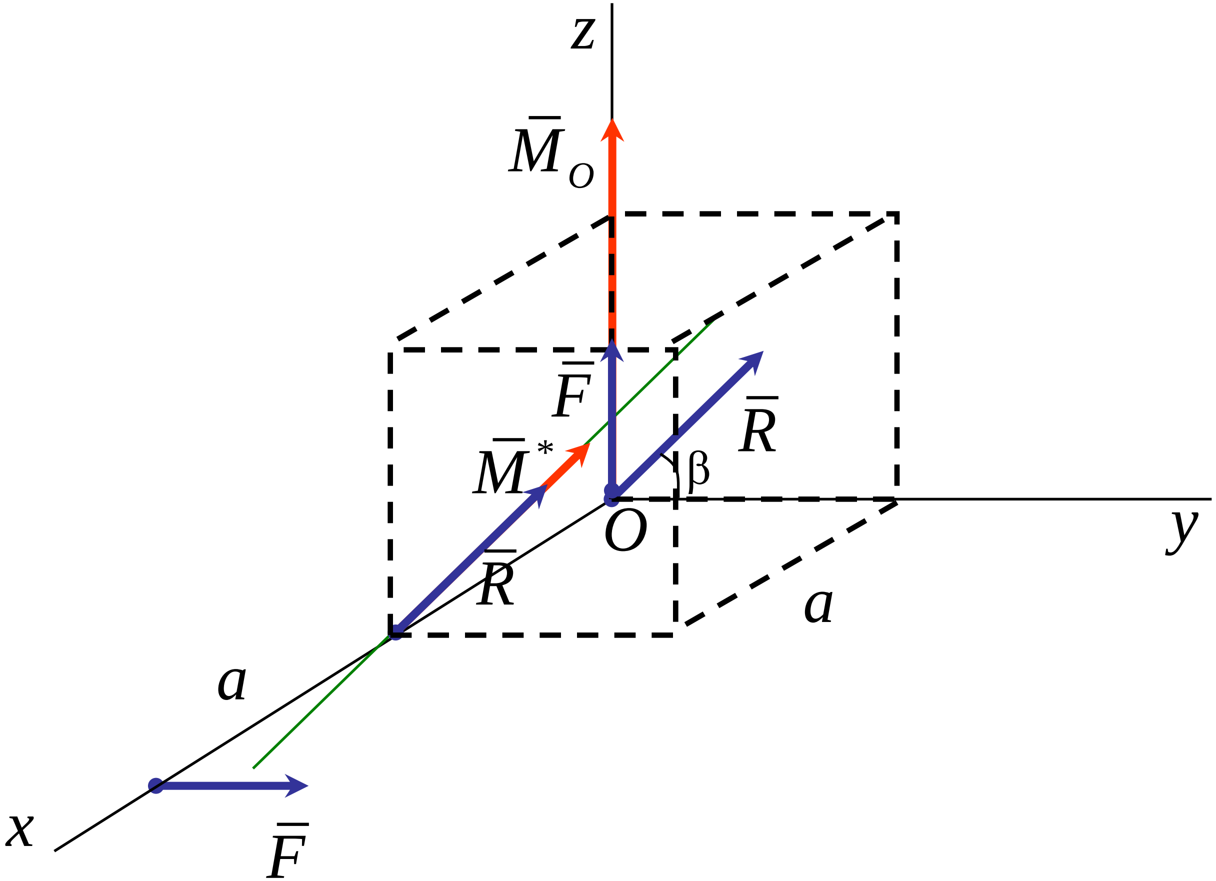
$$p = \frac{M^*}{R} = a$$

$$\frac{-yF + zF}{0} = \frac{xF}{F} = \frac{2aF - xF}{F} = a$$



Так как $a \neq 0$, то из первого соотношения следует, что $-y+z=0$, а из второго $x=a$. Следовательно, центральная ось определяется как пересечение плоскостей $y = z$ и $x = a$, т.е. совпадает с диагональю передней грани куба.


z
$\bar{F}_3$
$\bar{F}_4$
a
$\bar{F}_1$
O
y
$\bar{F}_3'$
a
$\bar{F}_2$
a
$\bar{F}_4'$
x



z
$\bar{M}_O$
$\bar{F}$
$\bar{M}^*$
$\bar{R}$
β
O
y
$\bar{R}$
a
a
x
$\bar{F}$

1.20. Теорема Вариньона

Если произвольная система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме моментов всех сил этой системы относительно того же центра.

$$\left(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots \bar{F}_N\right) \sim \bar{R}^* \qquad \bar{R}^* = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k$$

$$\bar{M}_O = \bar{m}_o\left(\bar{R}^*\right) \qquad \bar{M}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_o\left(\bar{F}_k\right)$$

$$\bar{m}_o\left(\bar{R}^*\right) = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_o\left(\bar{F}_k\right)$$

ВАРИНЬОН (Varignon) Пьер (1654-1722)

Французский механик и математик. Труды по теоретической механике, геометрии, гидромеханике и др. Дал систематическое изложение учения о сложении и разложении сил, о моментах сил. Вывел (в 1687 г.) теорему, названную его именем.

1.21 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{N} \bar{F}_k = 0 \quad \text{и} \quad \bar{M}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{m}_o\left(\bar{F}_k\right) = 0$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы относительно произвольно выбранного центра приведения равнялись нулю.

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{N} m_x(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} m_y(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} m_z(\bar{F}_k) = 0.$$

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на оси координат x, y и z, а также сумма моментов всех сил относительно этих же осей равнялись нулю.