УДК 539.03

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ РОТОРАМИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Т.М.МАВЛАНОВ- д.т.н., профессор, **К.М.ТУРАЖОНОВ**-асс. ТИИИМСХ

Аннотация: В работе на основе уравнения Лагранжа решены задачи о колебаниях механической системы с двумя роторами. При этом рассматривается малые движения двух роторных механической системы.

Аннотация: Burchak tezlikning cheksiz o'sishida umumiy inersiya markaziy o'qda joylashishga intiladi ya'ni, sistemaning inerisiyasining asosiy markaziy o'qi aylanish o'qi bilan ustma-ust tushishga harkat qiladi.

Abstract: In the work, based on the Lagrange equation, the problems of oscillations of a mechanical system with two rotors are solved. In this case, small movements of two rotor mechanical systems are considered.

Ключевые слова: ротор, катушка, диссипативные силы, критический угол, инерционный центр.

Применение роторной системы в машинах, различного назначения позволяет анализировать динамическую схему машин и качественного улучшения их динамических характеристик. [7].

Во многих машинах, используемых в различных областях, происходят колебательные процессы, изучение которых важно для повышения качества их работы. Это может достигаться совершенствованием конструкции.

Многие элементы машин и механизмов состоит из системы двойного ротора с целью улучшения работоспособных характеристик а также уменьшения веса и габаритов. В этом случае роторы вращаются с разными частотами. Такие роторные системы широко используется в центрефугах, в различных отраслях химической промышленности, в аппаратах, основанных на центростремительного движения. Потребность использования роторных систем, требует дальнейшего развития и усовершенствования методов динамического расчета таких систем. Известно, что в отличие, от ротора шнек вращаясь с определенной скорости, передвигает рассматриваемое тело вдоль оси шнека. Применение роторной системы в машинах, различного назначения позволяет анализировать динамическую схему машин и качественного улучшения их динамических характеристик . [7].

Рассмотрим малые движения двух роторных механической системы. Введем обобщенную координату q_r которая характеризует малые движения от начала равновесного положения. Причем скорость также считаем малыми. Допустим механическая система в начале движения, а также приложенная на эту систему находится в равновесие. В этом случае исследование движения намного упрощается. Пусть рассматриваемая механическая система находится под действием приложенных сил находится в равновесии. Из уравнения равновесия при $\frac{\partial v}{\partial q_r}=0$ потенциальная энергия достигает своего экстремума. Далее изменяя начальные условия, отклоним из исходного равновесного положения. При этом ограничимся первыми приближениями, входящих в уравнения движения, коэффициентами. Для этого выражение потенциальной энергии разлагается в ряд Тейлора вокруг точки $q_r=0$

$$V=V_0+\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial q_r}q_r+\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial q_r q_s}q_r q_s+..+ \qquad (1)$$

Аналогично разлагается в ряд Тейлора и кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}(a_{rs})_0\dot{q}_r\dot{q}_s;$$

$$F=\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}(\chi_{rs})_0\dot{q}_r\dot{q}_s \qquad (2)$$

Подставляя полученных выражений для кинетических и потенциальной энергии в уравнениях Лагранжа получим

$$\sum_{s=1}^{n}((a_{rs})_0\ddot{q}_s+(x_{rs})_0\dot{q}_s+(c_{rs})_0q_s)=0 \qquad (3)$$

$$(r=1,2,........n)$$

Переходим к решению систем дифференциальных уравнений (3). Решение системы (3) ищем в виде $q_s=A_se^{\lambda t}$ $q_s=A_se^{\lambda t}$ Подставляя эти выражения в (3). В результате получим систему уравнений относительно A_s и λ :

$$\sum_{s=1}^{n}A_s((a_{rs})_0\lambda^2+(\chi_{rs})_0\lambda+(c_{rs}))=0 \qquad (4)$$

Для того, чтобы система (4) имела решения необходимо приравнять нулю детерминант этой системы, т.е. $\Delta(\lambda)=\left\|(a_{rs})_0\lambda^2+(\chi_{rs})_0\lambda+(c_{rs})_0\right\|$=0. Данное уравнение называется частотным уравнением 2n-го порядка. Из полученной системы находим коэффициенты $A^{\alpha}{}_{s}....A^{\alpha}{}_{s}$.

Таким образом малые движения системы зависит от решения (4) λ_a . Зная λ_a и $A^{\alpha}{}_{s}....A^{\alpha}{}_{s}$ можно определить закономерности малых движений около равновесного положения по формуле $q_s=\sum_{a=1}^{2n}A_s^ae^{\lambda at}$.

Далее получим квадратное уравнение вида:

$$\lambda^2(F(\alpha)+F(\beta))+\lambda(F(\alpha)+F(\beta))+(V(\alpha)+V(\beta))$$

Отсюда $\lambda_{1,2}=\frac{\left[F(\alpha)+F(\beta)\pm\sqrt{(F(\alpha)+F(\beta))^2-4(F(\alpha)+F(\beta))(V(\alpha)+V(\beta))}\right]}{2(F(\alpha)+F(\beta))}$

Таким образом в зависимости от дискримината $\Delta=((F(\alpha)+F(\beta))^2-4(F(\alpha)+F(\beta))(V(\alpha)+V(\beta))$ значения λ могут быть следующими: 1. $\lambda>0$ решение действительные и разные, 2. $\lambda<0$ решение комплексное,
3. $\lambda=0$ решение действительны и равны.

Таким образом, решение характеристического уравнения зависит от значения потенциальной энергии. После вычисления кинетической и потенциальной энергии на основе уравнения Лагранжа второго тура составляем дифференциальные уравнения движения механической системы с двумя роторами.

$$\begin{aligned}
&k_1\ddot{y}+k_2\ddot{y}_2+L_2\dot{z}_1-L_2\dot{z}_2+C_1y_1=s_1\cos\omega_1t+s_2\cos\omega_2t+N_1\cos(\omega_1t-e_1)+N_2\cos(\omega_2t-e_2),\\
&k_2\ddot{y}_1+L_1\ddot{y}_2-L_2\dot{z}_1+L_2\dot{z}_2+C_2y_2=Q_1\cos\omega_1t+Q_2\cos\omega_2t-N_1\cos(\omega_1t-e_1)-N_2\cos(\omega_2t-e_2),\\
&k_1\ddot{z}_1+k_2\ddot{z}_2-L_2\dot{y}_1+L_2\dot{y}_2+C_2z_1=s_1\sin\omega_1t+s_2\sin\omega_2t+N_1\sin(\omega_1t-e_1)+N_2\sin(\omega_2t-e_2),\\
&k_1\ddot{z}_1+L_1\ddot{z}_2-L_2\dot{y}_1-L_2\dot{y}_2+C_2z_2=Q_1\sin\omega_1t+Q_2\sin\omega_2t-N_1\sin(\omega_1t-e_1)-N_2\sin(\omega_2t-e_2),
\end{aligned} \qquad (5)$$

Ищем решения (11) в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\cos\omega_1 t + a_{12}\cos\omega_2 t + b_{11}\sin\omega_1 t + b_{12}\sin\omega_2 t \\ y_2 &= a_{21}\cos\omega_1 t + a_{22}\cos\omega_2 t + b_{21}\sin\omega_1 t + b_{22}\sin\omega_2 t \\ z_1 &= a_{31}\cos\omega_1 t + a_{32}\cos\omega_2 t + b_{31}\sin\omega_1 t + b_{32}\sin\omega_2 t \\ z_2 &= a_{41}\cos\omega_1 t + a_{42}\cos\omega_2 t + b_{41}\sin\omega_1 t + b_{42}\sin\omega_2 t \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя (12) в уравнения движения приходим к следующим соотношениям:

1). Если выполняется условия

$$\Delta_2 = (c_1 - k_1\omega^2{}_2 - L_2\omega_2)(c_2 - L_1\omega^2{}_2 - L_2\omega_2) - (L_2\omega^2{}_2 - k_2\omega^2{}_2)^2 \neq 0 \tag{7}$$

то коэффициенты a_{ij} и b_{ij} определяется по формулам:

$$\begin{aligned} a_{12} = b_{12} &= \frac{(c_2 - L_1\omega^2{}_2 + L_2\omega_2)(s_2 + N_2\cos e_2) + (k_2\omega^2{}_2 - L_2\omega_2)(Q_2 + N_2\cos e_2)}{\Delta_2} \\ a_{22} = b_{42} &= \frac{(c_1 - k_1\omega^2{}_2 + L_2\omega_2)(Q_2 - N_2\cos e_2) + (k_2\omega^2{}_2 + L_2\omega_2)(S_2 + N_2\cos e_2)}{\Delta_2} \\ b_{12} = -a_{32} &= \frac{N_2\sin e_2(c_2 - (k_2 + L_1)\omega^2{}_2)}{\Delta_2} \\ b_{22} = -a_{42} &= \frac{N_2\sin e_2((k_1 + k_2)\omega^2{}_2 - e_1)}{\Delta_2} \end{aligned} \tag{8}$$

2) Если выполняется условие.

$$\Delta_1 = (c_1 - k_1\omega^2{}_1 - L_2\omega_1)(c_2 - L_1\omega^2{}_1 - L_2\omega_1) - (L_2\omega^2{}_1 - k_2\omega^2{}_1)^2 \neq 0$$

то для коэффициентов a_{ij} и b_{ij} получим соотношений

$$\begin{aligned} a_{11} = b_{31} &= \frac{(s_1 + N_1\cos e_1)(c_2 - L_1\omega^2{}_1 + L_2\omega_1) + (Q_1 - N_1\cos e_1)(k_2\omega^2{}_1 + L_2\omega_1)}{\Delta_1} \\ a_{21} = b_{41} &= \frac{(s_1 + N_1\cos e_1)(k_2\omega^2{}_1 + L_2\omega_1) + (Q_1 - N_1\cos e_1)(e_1 - k_1\omega^2{}_1 + L_2\omega_1)}{\Delta_1} \\ b_{11} = -a_{31} &= \frac{N_1\sin e_1(e_2 - (k_2 + L_1)\omega^2{}_1)}{\Delta_1} \\ b_{21} = -a_3 &= \frac{N_1\sin e_1((k_2 + k_1)\omega^2{}_1 - c_1)}{\Delta_1} \end{aligned} \tag{9}$$

вводим обозначения

$$\begin{aligned} &\frac{b_{12}}{a_{22}} = tg\varphi_1 \; \frac{b_{11}}{a_{21}} = tg\chi_1 \; \sqrt{a^2{}_{12} + b^2{}_{12}} = H_1 \\ &\frac{b_{22}}{a_{22}} = tg\varphi_2 \; \frac{b_{21}}{a_{21}} = tg\chi_2 \; \sqrt{a^2{}_{12} + b^2{}_{22}} = H_2 \\ &\sqrt{a^2{}_{11} + b^2{}_{11}} = H_1' \; \sqrt{a^2{}_{21} + b^2{}_{21}} = H_2' \end{aligned} \tag{10}$$

После этих обозначений получим

$$\begin{aligned} y_1 &= H_1\cos(\omega_2 t - \varphi_1) + H_1'\cos(\omega_1 t - \chi_1) \\ y_2 &= H_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2) + H_1'\cos(\omega_1 t - \chi_2) \\ z_1 &= H_1\sin(\omega_2 t - \varphi_1) + H_1'\sin(\omega_1 t - \chi_1) \\ z_2 &= H_2\sin(\omega_2 t - \varphi_2) + H_2'\cos(\omega_1 t - \chi_2) \end{aligned} \tag{11}$$

Выводы: Полученные результаты позволяет сделать вывод о том, что бесконечное возрастание двух угловых скоростей приводить к приближению центра инерции к центральной оси инерции. Центральная ось инерции при этом приближается к оси вращения. Таким образом, механическая система с двумя роторами на упругом основании, в отличие от однороторного, при отсутствии сил сохроняет ннаправление оси. Однако каждый ротор имеет две критические угловые скорости. Необходимо отметить, что полученные результаты качественно совпадает с известным результатами, полученными в [7].

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1.В. Г. Быков. Стационарные режимы движения неуравновешенного роторас автобалансировочным механизмом // Астрономия. — 2006 г. № 2. — С. 90–101.

2. В. Г Быков, А. С. Ковачев. Об устойчивости стационарных движений рото-ра с эксцентрическим шаровым автобалансировочным устройством // Седь-мые Поляховские чтения. Тезисы докладов Международной научной кон-ференции по механике, Санкт-Петербург, 2-6 февраля 2015 г. — С. 197.

3.В. П.Нестеренко, А. П. Соколов. Остаточный дисбаланс, вызванный экс-центриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. — 1983 г.

4.G.Genta. Dynamics of Rotating Systems. — Springer, 2005 y. — P. 658.

5.М.А. Берсугир Аналитические решения некоторых задач динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Автореферат канд. диссер. Алма-Аты. 2010 г.

6.Горлатов Д. В. Моделирование двухроторной вибрационной установки и алгоритма прохождения роторами резонансных частот // Неделя науки СПБПУ. Материалы научного форума с международным участием.Институт металлургии, машиностроения и транспорта. СПб., 2015. – С. 49-51.

7.Горлатов Д. В. Алгоритм управления типовыми режимами работы мехатронных вибрационных установок. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург 2016г.