

# Идентификация технологических объектов

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В.

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**

(учебное пособие)

**2003**

Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.- 211 с. : ил. 59, табл. - , библиогр. 141 назв.

В учебном пособии рассматриваются модели детерминированных и стохастических объектов, анализируются основные методы их идентификации, показаны особенности применения временных, частотных, стохастических непараметрических и параметрических методов, спектральных методов и методов полиномиальной идентификации с использованием рядов Вольтерра и Винера. Рассматривается постановка и решение задачи идентификации линейных и нелинейных объектов в условиях априорной неопределенности статистических характеристик с использованием устойчивых (робастных) алгоритмов. Изложение сопровождается многочисленными примерами, поясняющими технологию использования MATLAB для решения задач идентификации.

Пособие подготовлено на кафедре «Автоматика и телемеханика» и предназначено для студентов специальности 21.02.00 при изучении дисциплин «Моделирование систем управления», «Теория управления», «Автоматизация технологических процессов и производств».

## Предисловие

Это учебное пособие предназначена для студентов, аспирантов и инженеров специализирующихся в области управления техническими системами.

Оно является результатом переработки конспектов лекций по курсам «Моделирование систем управления» и «Идентификация систем управления», читаемых авторами студентам различных специальностей.

В пособии конспективно рассматриваются линейные модели динамических систем и основные методы их параметрической идентификации. Показана взаимосвязь между непрерывными и дискретными структурированными моделями и моделями в пространстве состояний. Приводятся методы идентификации с использованием экспериментально снятых временных и частотных характеристик, коореляционный метод идентификации, рекуррентные методы построения АРСС – моделей и спектральные методы.

Ориентируясь на практические потребности построения имитационных математических моделей по результатам обработки физического эксперимента по каждому разделу пособия приводятся примеры и программы идентификации реализуемых на ЦВМ в среде MATLAB.

В разработке и отладке программ принимали участие аспирант Акчуринов Д.Х. и инженер Хромов Н.Н.

## *Содержание*

Введение	3
Глава 1. Основные понятия, определения и задачи идентификации	4
1.1. Основные понятия теории идентификации	4
1.2. Основные задачи идентификации	7
Глава 2. Математические модели технических систем	15
2.1 Математические модели в пространстве состояний	10
2.2. Линейные преобразования в пространстве состояний	16
2.3. Структурированные модели	26
2.4. Дискретные модели	34
2.5. Математические модели на базе матричных операторов	41
2.6. <i>Математические модели нелинейных систем</i> на базе функциональных рядов Вольтерра – Винера	48
2.7. Аппроксимация нелинейной системы ортогональными полиномами	58
2.8. Построение ортогональных функционалов для класса псевдослучайных сигналов	65
Глава 3. Математические модели внешних воздействий	
3.1. Характеристики внешних воздействий и их оценивание	73
3.2. Модели помех в реальных системах	78
3.3. Математические модели внешних возмущений	81
3.4. Линейные модели и их применение для оценивания характеристик случайных процессов	87
Глава 4. Непараметрическая идентификация	94
4.1. Определение передаточной функции по временным характеристикам объекта	94
4.2. Определение передаточной функции по частотным характеристикам объекта	102
4.3. Корреляционный метод идентификации	108

4.4. Идентификация параметров объекта спектральным методом	114
Глава 5. Параметрическая идентификация	117
5.1. Метод наименьших квадратов	117
5.2. Метод вспомогательных переменных	121
5.3. Метод максимального правдоподобия	123
5.4. Метод стохастической аппроксимации	125
5.5. Сравнительные характеристики рекуррентных методов идентификации	127
5.6. Особенности идентификации в замкнутых системах	135
Глава 6. Идентификация при наличии аномальных помех	140
6.1. Идентификация в условиях априорной неопределенности	140
6.2. Робастные методы идентификации	145
Глава 7. Идентификация переменных состояния объектов управления	151
7.1. Идентификация переменных состояния с использованием наблюдателей состояния	151
7.2. Наблюдатель пониженного порядка	154
7.3. Построение наблюдателя полного порядка методом модального управления	157
7.4. Оптимальный наблюдатель	160
Глава 8.. Идентификация нелинейных систем	
8.1. Построение и исследование оценок ядер Винера в частотной области	165
8.2. Статистическая идентификация нелинейных систем при случайных воздействиях	173
8.3. Быстрый алгоритм идентификации при псевдослучайных воздействиях	180
8. 8. Влияние ошибок вычисления ядер ортогональных функциональных рядов на точность моделирования	186
Литература	197

## **1. Основные понятия, определения и задачи идентификации.**

### **1.1. Основные понятия теории идентификации**

В настоящее время проблемы, связанные с созданием математических моделей объектов технологических процессов, экономики и живой природы, формируют одно из основных направлений науки и техники – моделирование. Это объясняется тем, что математические модели объектов широко применяются как при создании систем управления этими объектами, так и при их эксплуатации.

В данном учебном пособии рассматриваются только модели технических объектов и систем. Объекты и системы представляют собой совокупность материальных тел, находящихся в непрерывном взаимодействии друг с другом и с окружающей средой.

Построение математической модели объекта может производиться несколькими методами: аналитическим, экспериментальным и экспериментально-аналитическим [49, 57, 73, 100].

Аналитический метод предусматривает получение математического описания объекта на основе законов физики, механики, химии и т. д. Такой подход дает положительный результат, если рассматриваемый объект достаточно прост по структуре и хорошо изучен. Если же объект изучен недостаточно или же настолько сложен, что аналитическое описание его математической моделью практически невозможно, прибегают к экспериментальным методам, суть которых сводится к статистической обработке технологических данных. При экспериментально-аналитическом методе априорная модель, полученная аналитическим путем, уточняется в соответствующих экспериментах.

Взаимодействие объекта с окружающей средой поясним с помощью простейшей схемы (рис. 1.1). Воздействия внешней среды на объект в обобщенном виде изображены стрелками, направленными к объекту и обозначенными через  $x$  и  $v$ . Объект, в свою очередь, воздействует на

окружающую среду. Это воздействие показано стрелкой, направленной от объекта и обозначенной через  $y$ . Величину  $y$  принято называть выходным воздействием или выходной величиной объекта.

Рассмотрим более подробно воздействие среды на объект. Совокупность таких воздействий окружающего мира на объект можно разделить на две группы в соответствии с характером влияния среды на переменные состояния (фазовые координаты) объекта. В первую группу входят те воздействия, которые в точке приложения изменяют переменные состояния аддитивно. Это означает, что сигналы, пропорциональные этим воздействиям, суммируются с сигналами, пропорциональными соответствующим переменным состояниям.

Эти воздействия называют «входными», или «внешними», воздействиями. В дальнейшем будем называть эти воздействия «входными».

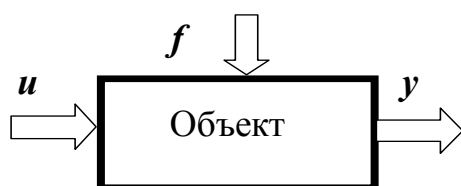


Рис. 1.1

Входные воздействия могут быть полезными (управляющими сигналами  $u$ ) и помехами (возмущающими воздействиями  $f$ ).

Вторая группа воздействий внешней среды изменяет переменные состояния объекта косвенно, обычно не аддитивно. Эти воздействия приводят к изменению оператора объекта (системы)  $A$ , под которым понимают закон преобразования входных воздействий в выходные переменные объекта. Вторую группу воздействий будем называть операторной, а воздействия – операторными.

Так, например, повышение температуры электродвигателя приводит к падению мощности и даже выходу его из строя.

В общем случае входные и выходные воздействия могут описываться определенными функциями (обычно функциями времени). Математическое соответствие между входной и выходной функциями можно записать в виде выражения

$$y(t) = A(f)u(t) \quad (1.1)$$



где  $A(f)$  – оператор, зависящий от возмущений (операторных воздействий);  $y(t)$  – вектор выходных координат объекта;  $u(t)$  – вектор управления (входа).

Оператор объекта является его математической характеристикой, т. е. математической моделью объекта.

Примерами операторов могут быть:

– оператор дифференцирования  $p$ :

$$y(t) = pu(t) = \frac{du(t)}{dt} = x'(t); \quad (1.2)$$

– дифференциальный оператор  $D(y)$  :

$$D(y) = \frac{d^n y}{dt^n} + \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{dy}{dt} + y, \quad (1.3)$$

– оператор обыкновенного линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка  $L(y)$

$$L(y) = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y, \quad (1.4)$$

– линейный интегральный оператор

$$y(t) = \int_0^t \omega(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (1.5)$$

где  $\omega(t)$  – функция веса объекта;

Математически операторы определяются в соответствующих пространствах, т. е. на множествах элементов, над которыми совершаются преобразования. Примерами таких пространств являются пространства: непрерывных функций; непрерывных функций, имеющих непрерывные производные до  $n$ -го порядка ( $n > 0$ ); функций с суммируемым квадратом и т. д. Множества входных и выходных сигналов объектов и систем могут рассматриваться как те или иные метрические пространства [4,12, 13, 37, 44].

Формально оператор характеризуется структурой и параметрами. Так, структура дифференциального оператора (1.3) определяется его порядком  $n$ . Для оператора дифференциального уравнения (1.4) структура задается его порядком  $n$ , а параметрами служат величины  $a_i(t)$ , [ $i = 0, n$ ]. Таким образом,

задачу идентификации в общем виде можно ставить как задачу определения оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные.

## 1.2. Основные задачи идентификации

Рассмотрим различные постановки задачи идентификации. Как уже отмечалось выше, в общем виде задача идентификации заключается в определении оператора объекта, преобразующего входные воздействия в выходные. В связи с этим выделяют задачи структурной и параметрической идентификации.

При структурной идентификации определяют структуру и вид оператора объекта, или другими словами вид математической модели объекта.

После того как математическая модель объекта определена, проводят параметрическую идентификацию, заключающуюся в определении числовых параметров математической модели.

Задачей структурной идентификации является представление реального объекта управления в виде математической модели. Конкретный выбор математической модели зависит от типа объекта.

Для описания больших систем и объектов, таких как социальные, производственные, финансово-экономические, используются семиотические (знаковые) и лингвистические модели, базирующиеся на теории множеств и абстрактной алгебры.

В качестве математических моделей технических систем применяются дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных производных. Причем при решении задач управления предпочтение отдается моделям в пространстве состояний и структурированным моделям, описываемым дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных.

Задачу параметрической идентификации можно сформулировать следующим образом [29]. Пусть имеется полностью наблюдаемый и полностью управляемый объект, задаваемый уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu; \\ y &= Cx; \\ x(t_0) &= x(0), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $B$  -  $n$ -мерный вектор –столбец, а  $C$  -  $n$ -мерный вектор –строка,  $A$  – квадратная матрица размером  $n \times n$ . Элементы этих векторов  $A$ ,  $B$  и  $C$  неизвестные числа. Целью идентификации является определение этих чисел.

Под идентификацией в дальнейшем будем понимать нахождение параметров моделей объектов, предполагая, что уравнения моделей заранее известны и задаются с помощью обобщенной структурной схемы объекта (рис. 1.2), т.е. будем рассматривать вопросы параметрической идентификации.

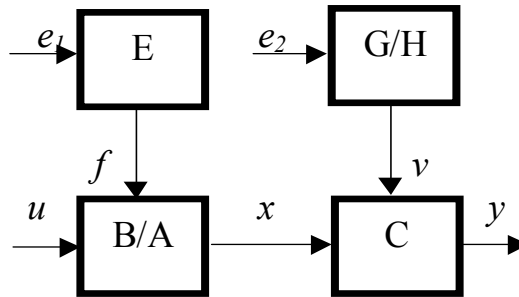


Рис. 1.2

На схеме приняты следующие обозначения:

$u$  и  $y$  – наблюдаемые входной и выходной сигналы;

$x$  – ненаблюдаемая (скрытая) переменная, оцениваемая косвенно по сигналам  $u$  и  $y$ , получаемым в результате преобразования в системе операторами  $A$ ,  $B$  и  $H$ ;

$e_1$  и  $e_2$  – ненаблюдаемые помехи (случайные процессы типа белого шума);

$f$  и  $v$  – ненаблюдаемые помехи (коррелированные во времени случайные сигналы, в некоторых случаях содержащие детерминированные составляющие);

$A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $H$  – операторы, вид которых известен, но неизвестны параметры.

Основными постановками задач идентификации являются:

- идентификация, или определение характеристик объекта (по значениям  $u$  и  $y$  определить операторы  $A$ ,  $B$  и  $C$ );
- генерация случайных сигналов с заданными характеристиками, или определение характеристик сигналов (по значениям  $f$  или  $v$  определить оператор  $E$  или  $G$ ,  $H$ );
- наблюдение за скрытыми переменными, или определение переменных состояния (по наблюдаемым  $u$  и  $y$ , известным операторам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $H$  определить  $x$ ).

Решение вышеназванных задач идентификации осуществляется методами параметрической и непараметрической идентификации. При использовании методов параметрической идентификации сразу определяются коэффициенты передаточной функции или уравнения объекта. Вторая группа методов используется для определения временных или частотных характеристик объектов, а также характеристик случайных процессов генерируемых объектами. По полученным характеристикам затем определяются передаточная функция или уравнения объекта. В настоящее время более широкое распространение получили методы параметрической идентификации.

## ***2. Математические модели технических систем***

### ***2.1. Математические модели в пространстве состояний***

Математическая модель (образ) представляет собой абстрактное отражение реального объекта (оригинала, прообраза). В зависимости от типа объекта и целей, ради которых строится и используется модель, формальное описание может быть различным. Для моделирования объектов могут быть использованы структурные схемы, операторные уравнения, алгебраические уравнения, дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, Марковские цепи, передаточные функции, частотные

характеристики, весовые функции, графы и т. д. Все эти методы функционально связывают входные и выходные сигналы объекта. По количеству входов и выходов объекты и соответствующие им модели разделяют на одномерные и многомерные. Одномерными называют объекты, имеющие один вход и один выход, многомерными – объекты, имеющие несколько входов и выходов, причем число входов не обязательно равно числу выходов. Блок-схемы одномерного и многомерного объектов изображены соответственно на рис. 2.1,а и рис. 2.1,б. Причем число входов не обязательно равно числу выходов.

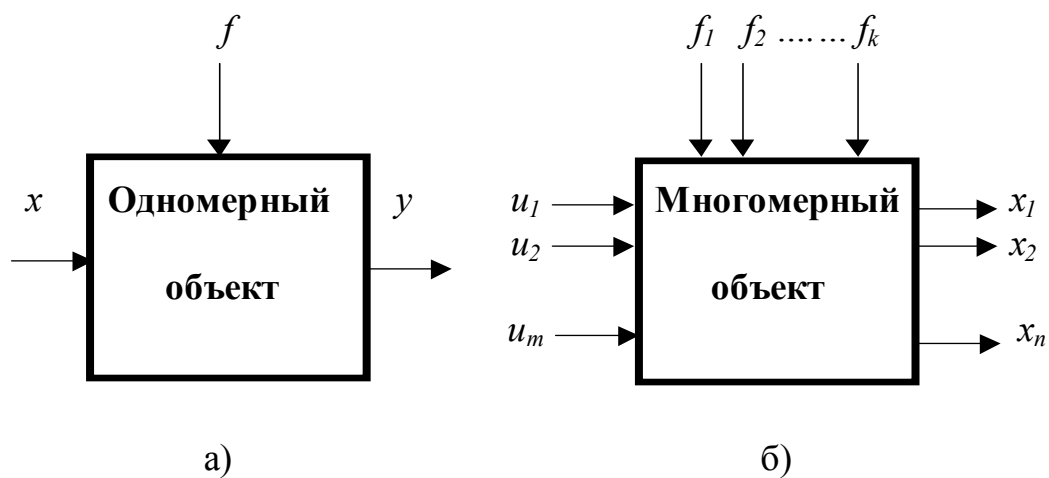


Рис. 2.1.

Наиболее полно идентифицируемый объект описывается в терминах пространства состояний. Под состоянием объекта понимается совокупность величин  $x_i$ , полностью определяющих его положение в данный момент времени.

Наиболее употребительной моделью динамических объектов являются дифференциальные уравнения. Будем рассматривать только объекты с сосредоточенными параметрами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей модель объекта, непосредственно не определяется количеством входов и выходов, а зависит от операторов, преобразующих входные сигналы в выходные.



Для динамических систем, в которых физические процессы протекают непрерывно во времени, скорости изменения переменной состояния объекта можно также задать вектором

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T, \quad (2.1)$$

где  $\frac{dx_i}{dt}$ ,  $i = \overline{1, n}$  – скорости изменения компонент многомерной переменной состояния.

В свою очередь эти скорости определяются текущими значениями переменной состояния  $\mathbf{X}$ , управлениями  $\mathbf{u}$  и возмущениями  $\mathbf{f}$ , действующими на объект

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t), x_i(t_0) = x_{i0}, i = \overline{1, n}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T$  – вектор функция;  $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$  – начальные условия.

Если  $\mathbf{g}(\cdot)$  – нелинейная функция, то решение уравнения (2.2) усложняется, так как сводится к интегрированию системы нелинейных ДУ. Так как методы интегрирования систем ДУ хорошо разработаны только для линейных систем, то перед работой с ними необходимо линеаризовать  $\mathbf{g}(\cdot)$  в окрестности рабочей точки, которой соответствует установившейся режим работы объекта.

Для линеаризованной функции  $\mathbf{g}(\cdot)$  ДУ вида (2.2) с учетом воздействия среды можно представить в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{e}(t), \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{A}(t)$ ;  $\mathbf{B}(t)$ ;  $\mathbf{E}(t)$  – матрицы преобразования, элементы которых в общем случае являются функциями времени.

Элементы  $x_i$  в уравнении (2.3) называются переменными состояния объекта или фазовыми координатами. Переменные состояния  $\mathbf{x}$  (фазовые координаты) образуют вектор состояния, переменные управления  $\mathbf{u}$  и возмущения  $\mathbf{f}$  образуют векторы управления и возмущения. Множество этих

векторов составляет пространство состояний (фазовое пространство)  $X$ , пространство управлений  $U$  и возмущений  $F$ .

Во многих физических объектах регулируются, измеряются и передаются по информационным каналам не значения вектора состояния  $x$ , а другие значения – функции составляющих вектора фазовых координат, называемые управляемыми или выходными величинами. Обозначим измеряемые величины через  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)$ , причем обычно  $s \leq n$ . Тогда уравнение измерения, связывающее регулируемые и фазовые координаты объекта примет вид

$$y(t) = \Phi[x(t)]. \quad (2.4)$$

Для линейного объекта это соотношение линейное:

$$y(t) = C(t)x(t). \quad (2.5)$$

Матрица  $C(t)$  называется матрицей измерения. Она показывает, как изменяются значения вектора состояний при измерении. При измерениях, описываемых выражениями (2.4) и (2.5), вектором выходных сигналов (или просто вектором выхода) является вектор  $y(t)$ . Отметим, что между векторами входа, выхода и состояния существует принципиальное различие. Если все составляющие вектора входа и вектора выхода являются вполне конкретными физическими величинами, то элементами вектора состояния могут быть некоторые абстрактные переменные, физическая природа которых не всегда определена.

Векторно-матричная запись модели линейного динамического объекта с учетом уравнения измерения принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_{n,n}(t)x(t) + B_{n,m}(t)u(t) \\ y(t) &= C_{s,n}(t)x(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  не зависят от времени, то объект называется объектом с постоянными коэффициентами, или стационарным, объектов. В противном случае объект будет нестационарным.

При наличии погрешностей при измерении, выходные (регулируемые) сигналы задаются линеаризованным матричным уравнением:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{y}(t)$  – вектор регулируемых (измеряемых) величин;  $\mathbf{C}(t)$  – матрица связи вектора измерений с вектором состояний;  $\mathbf{v}(t)$  – вектор ошибок измерений (помехи).

Структура линейной непрерывной системы, реализующая уравнения (2.6) и (2.7) приведена на рис. 2.2.

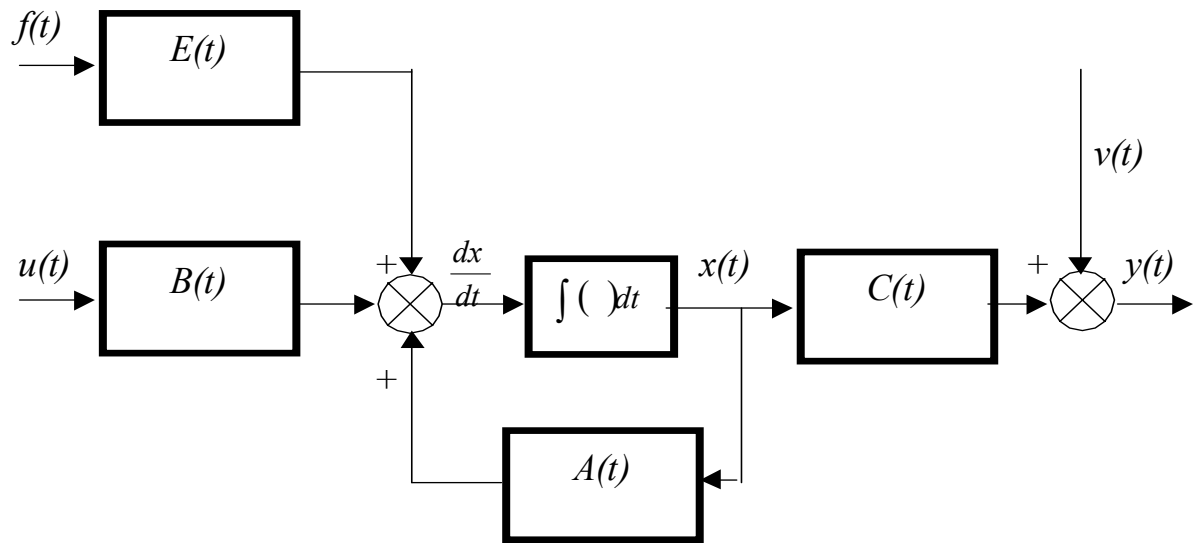


Рис. 2.2.

Данная структура соответствует математической модели объекта построенной в пространстве состояний его входных  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ , выходных  $\mathbf{y}(t)$  и внутренних, или фазовых координат  $\mathbf{x}(t)$ .

**Пример 2.1.** Рассмотрим математическую модель двигателя постоянного тока с независимым возбуждением от постоянных магнитов.

Система уравнений электрической и механической частей двигателя для рассматриваемого случая будет выглядеть:

$$\begin{aligned}
L \frac{dI}{dt} + RI + c_e \omega &= U; \\
J \frac{d\omega}{dt} &= M_d - M_c; \\
M_d &= c_m I.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Первое уравнение отражает взаимосвязь между переменными в цепи якоря, второе - условия механического равновесия. В качестве обобщенных координат выберем тока якоря  $I$  и частоту вращения якоря  $\omega$ . Управлением являются напряжение на якоре  $U$ , возмущением момент сопротивления нагрузки  $M_c$ . Параметрами модели являются активное сопротивление и индуктивность цепи и якоря, обозначенные соответственно  $R_{я}$  и  $L_{я}$ , а также приведенный момент инерции  $J$  и конструктивные постоянные  $c_e$  и  $c_m$ . В системе СИ  $c_e = c_m$ .

Разрешая исходную систему относительно первых производных, получим уравнения двигателя в пространстве состояний.

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}I - \frac{c_t}{L}\omega + \frac{1}{L}U; \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{c_m}{J}I - \frac{1}{J}M_c.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

В матричном виде уравнения (2.9) примут вид (2.6)

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{f}; \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где вектор обобщенных координат  $\mathbf{x} = (I \ \omega)^T$ , вектор управлений  $\mathbf{u} = U$  (в рассматриваемом случае он является скаляром), вектор (скаляр) возмущений  $\mathbf{f} = M_c$ . Матрицы модели

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{c_e}{L} \\ \frac{c_m}{J} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Если в качестве регулируемой величины выбрать частоту вращения, то уравнение измерения запишется в виде

$$y = \omega,$$

а матрица измерений примет вид

$$C = (0 \ 1).$$

Сформируем модель двигателя в MATLAB. Для этого вначале зададим конкретные значения параметров двигателя ( $U = 110$  В;  $R = 0,2$  Ом;  $L = 0,006$  Гн;  $J = 0,1$  кг/м<sup>2</sup>;  $c_e = c_m = 1,3$  В/С) и найдем значения коэффициентов матриц объекта из (2.10). Программа, формирующая модели двигателя приведена ниже.

```

u=110; % Напряжение якоря
J=.1; % Момент инерции
c=1.3; % Конструктивный коэффициент
R=.2; L=.006; % Активное сопротивление и индуктивность якоря
A=[-R/L -c/L;c/J 0];
B=[1/L;0];
C=[0 1];
D=0;
sd=ss(A,B,C,D) % Задание модели объекта в пространстве состояний
wd=tf(sd) % Задание передаточной функции двигателя
step(wd),grid % Построение переходной характеристики

```

## Результаты расчета

```

a =
      x1      x2
x1 -33.333 -216.67
x2   13      0

```

```

b =
      u1
x1 166.67
x2   0

```

```

c =
      x1      x2
y1   0      1

```

```

d =
      u1
y1   0

```

Continuous-time model.

Transfer function:

2167

-----



$$s^2 + 33.33 s + 2817$$

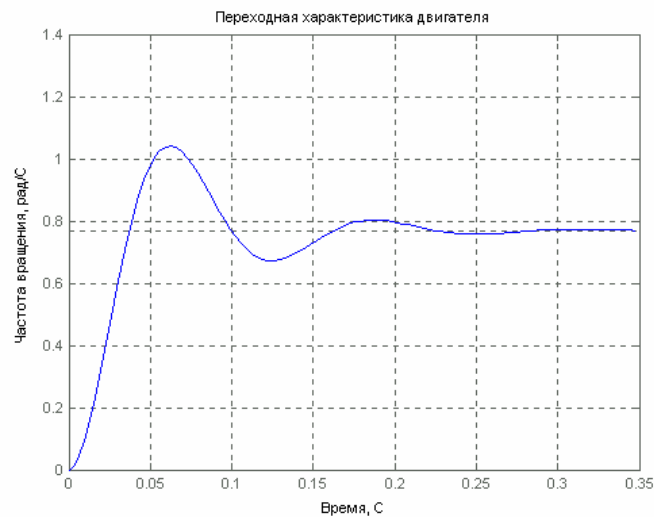


Рис. 2.3.

## 2.2. Линейные преобразования в пространстве состояний

Пусть в векторном пространстве (пространстве состояний)  $R$  задан базис определенный на координатах пространства состояний  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Из линейной алгебры [4, 12, 37] известно, что этот базис может быть получен из другого базиса с помощью линейного преобразования

$$x_i = \sum_{j=1}^k t_{ij} y_j \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{y}, \quad (2.11)$$

$$\text{где } T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{k1} & t_{k2} & \dots & t_{kk} \end{pmatrix}.$$

Можно, наоборот, выразить вектор  $y$  через вектор  $x$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x}. \quad (2.12)$$

Уравнения (2.11) и (2.12) являются уравнениями замены базиса в пространстве состояний  $R$  и, по сути, представляют уравнения перехода от



нетривиальные решения (2.13), называются собственными значениями матрицы  $A$ . Соответствующие им векторные решения (2.14) называют собственными векторами матрицы  $A$ .

Столбец, составленный из элементов собственного вектора, для конкретного значения  $\lambda_i$ , называют модальным столбцом.

Перенеся правую часть уравнения (2.14) влево, получим

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (2.15)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Это уравнение обладает нетривиальным решением только тогда, когда его определитель равен нулю

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Разложение этого определителя дает характеристическое уравнение системы или матрицы

$$(-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_1(-\lambda) + b_0 = 0, \quad (2.17)$$

из которого могут найдены все значения  $\lambda$ . Если теперь подставить найденные значения  $\lambda_i$  в уравнение (2.15) и решить его, то вычисленные значения составляющих вектора  $x$  для каждого значения  $\lambda_i$  будут собственными векторами матрицы  $A$ .

Собственные векторы матрицы имеющей действительные и различные собственные значения обладают следующими важными свойствами:

1. Собственные векторы такой матрицы попарно ортогональны.
2. Собственные векторы матрицы  $n$  – го порядка порождают  $n$  – мерное векторное пространство
3. Собственные векторы матрицы  $n$  – го порядка образуют ортогональный базис  $n$  – мерного векторного пространства.

Знание собственных значений и векторов матрицы системы позволяет осуществлять линейные преобразования (2.6) в пространстве состояний, придавая различный вид этой матрице. В задачах управления наиболее часто используются следующие канонические виды матрицы  $\mathbf{A}$  [30].

### 1. Диагональная каноническая форма

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где  $\lambda_i$  - собственные различные значения матрицы  $\mathbf{A}$ .

Диагональной канонической форме соответствует следующая структурная схема рис. 2.3.

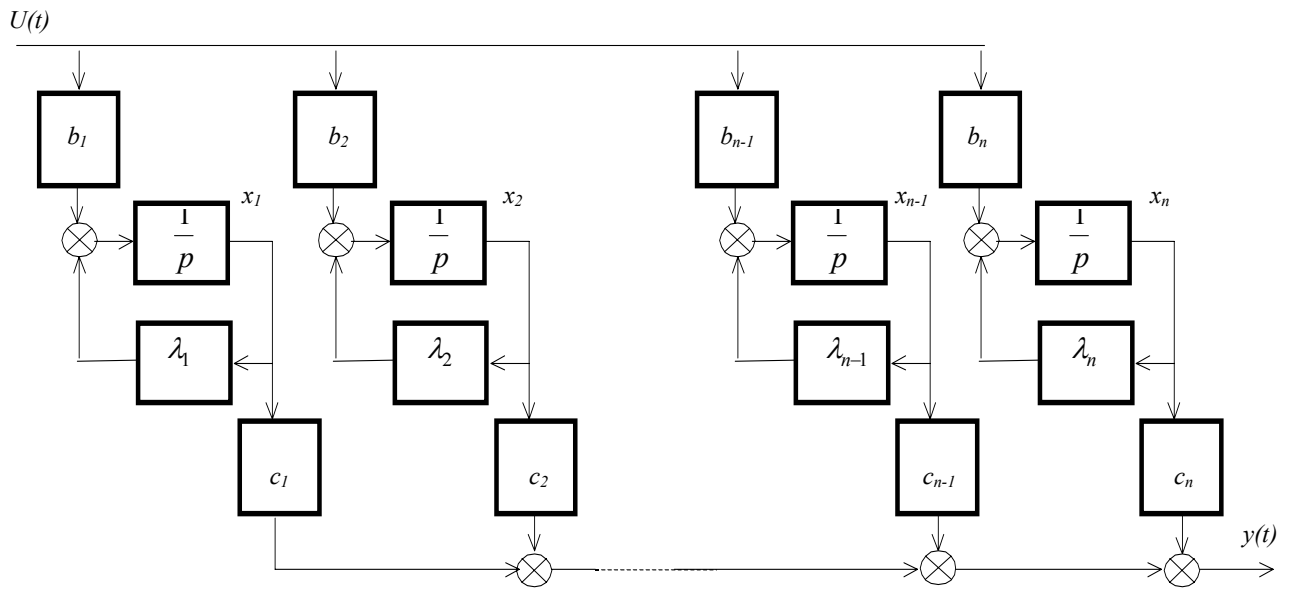


Рис. 2.3

### 2. Каноническая форма управляемости

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где  $d_i$  – коэффициенты характеристического уравнения матрицы (2.17).

Структурная схема для канонической формы управляемости показана на рис.2.4.

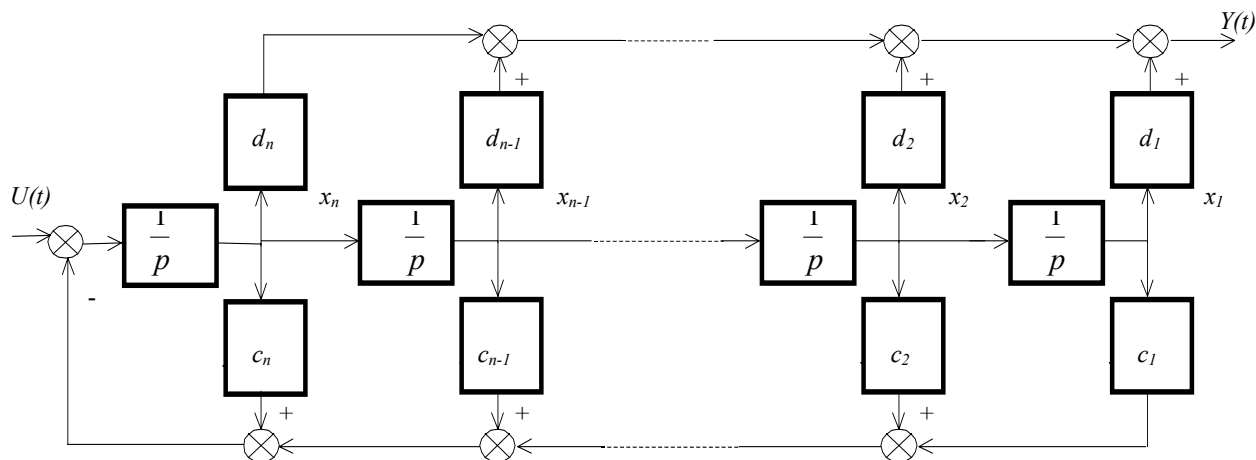


Рис. 2.4.

### 3. Каноническая форма наблюдаемости

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Этой канонической форме соответствует структура рис. 2.5

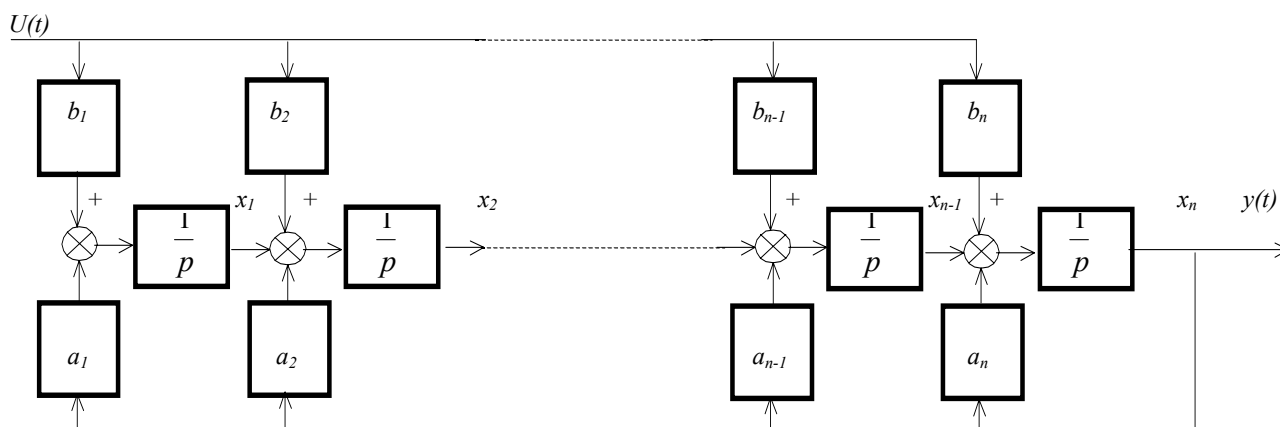


Рис. 2.5.



Наибольший интерес представляет получение диагональной канонической формы, так как все остальные формы легко получаются из нее путем линейных преобразований. Для диагонализации матрицы  $\mathbf{A}$  используется следующее выражение

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad (2.21)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ , а ее нормированные собственные векторы являются столбцами матрицы  $\mathbf{T}$ . Условием нормирования является равенство единице модуля собственных векторов.

Собственные векторы и собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  однозначно определяют динамические свойства системы, задаваемые уравнением (2.10).

**Пример 2.2.** Рассмотрим приведение многомерного объекта, задаваемого уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{22}u_2 \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

к канонической диагональной форме.

Матрицы объекта равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (3 \quad 2).$$

Вычислим собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  из условия (2.16)

$$\begin{vmatrix} -0,5 - \lambda & 3 \\ -0,25 & -2,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

Раскрывая полученный определитель, получим характеристическое уравнение объекта

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \quad (2.24)$$

Корни этого уравнения или собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  равны

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2$$

Найдем собственные векторы матрицы, подставляя в (2.23) вычисленные собственные значения. Для первого собственного значения имеем:

$$\begin{aligned} (-0,5 - \lambda_1)t_{11} + 3t_{21} &= 0 \\ -0,25t_{11} + (-2,5 - \lambda_1)t_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

При  $\lambda_1 = -1$  получаем следующую систему уравнений для вычисления первого собственного вектора

$$\begin{aligned} 0,5t_{11} + 3t_{21} &= 0 \\ -0,25t_{11} - 1,5t_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Откуда  $t_{11} = -6t_{21}$ .

Конкретные значения первого собственного вектора определяются условием нормировки

$$\sqrt{t_{11}^2 + t_{21}^2} = 1. \quad (2.26)$$

Подставляя сюда, решение уравнений  $t_{11} = -6t_{21}$  получим

$$t_{11} = \frac{6}{\sqrt{37}}; t_{21} = -\frac{1}{\sqrt{37}}$$

Аналогично найдем и второй собственный вектор

$$t_{12} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; t_{21} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Зная собственные векторы можно записать выражение для матрицы  $\mathbf{T}$  задающей переход в новую систему координат

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу  $\mathbf{T}^{-1}$

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T}^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор координат  $\mathbf{q}$  задается линейным преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{q} \quad . \quad (2.27)$$

Подставляя его в уравнения объекта (2.22), получим

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (2.28)$$

Умножая обе части уравнения на  $\mathbf{T}^{-1}$  слева будем иметь

$$\mathbf{I} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (2.29)$$

Матрица  $\mathbf{A}_\delta = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ , в соответствии с (2.21), будет иметь диагональный вид, где в главной диагонали стоят ее собственные значения.

Действительно

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим новую матрицу управления  $\mathbf{B}_\delta = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_\delta = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \sqrt{37} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & 3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

и матрицу измерения

$$\mathbf{C}_\delta = (3 \quad 2) \times \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{37}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Тогда в новых координатах  $q_1, q_2$  уравнения объекта примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= \lambda_1 q_1 + b_{\partial 11} u_1 + b_{\partial 12} u_2; \\ \frac{dq_2}{dt} &= \lambda_2 q_2 + b_{\partial 21} u_1 + b_{\partial 22} u_2; \\ y &= c_{d1} q_1 + c_{d2} q_2.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Проведем аналогичные расчеты, используя систему MATLAB, используя сначала операторы матричных преобразований, а затем - оператор **canon**, который осуществляет линейные преобразования моделей систем заданных в пространстве состояний и поддерживает две канонические формы модальную (диагональную) и присоединенную (форму наблюдаемости)

### *Программа расчета*

A=[-0.5 3;-0.25 -2.5]

B=[1 0;0 2]

C=[3 2]

**D=[0 0]**

[T Ad]=eig(A) % Вычисление собственных векторов и собственных значений матрицы A

To=inv(T) % Вычисление обратной матрицы T

I=T\*To % Умножение матрицы T на T<sup>-1</sup>

Ad=To\*A\*T % Вычисление коэффициентов канонической диагональной модели

**Bd=To\*B**

Cd=C\*T

sys=ss(A,B,C,D) % Модель исходной системы в пространстве состояний

sd=ss(Ad,Bd,Cd,D) % Модель приведенной системы в пространстве состояний

[sysd,Td]=canon(sys,'modal') % Получение канонической диагональной (модальной) формы

[sysn,Tn]=canon(sys,'companion') % Получение канонической формы наблюдаемости

Результаты расчетов с использованием матричных преобразований

T =

0.9864 -0.8944

-0.1644 0.4472

$A_d =$   
 $\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}$   
 $T_o =$   
 $\begin{matrix} 1.5207 & 3.0414 \\ 0.5590 & 3.3541 \end{matrix}$   
 $I =$   
 $\begin{matrix} 1.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 1.0000 \end{matrix}$   
 $A_d =$   
 $\begin{matrix} -1.0000 & 0 \\ 0.0000 & -2.0000 \end{matrix}$   
 $B_d =$   
 $\begin{matrix} 1.5207 & 6.0828 \\ 0.5590 & 6.7082 \end{matrix}$   
 $C_d =$   
 $\begin{matrix} 2.6304 & -1.7889 \end{matrix}$

*Результаты расчетов в пространстве состояний*

**Исходная модель**

$a =$   
 $\begin{matrix} & x1 & x2 \\ x1 & -0.5 & 3 \\ x2 & -0.25 & -2.5 \end{matrix}$   
 $b =$   
 $\begin{matrix} & u1 & u2 \\ x1 & 1 & 0 \\ x2 & 0 & 2 \end{matrix}$   
 $c =$   
 $\begin{matrix} & x1 & x2 \\ y1 & 3 & 2 \end{matrix}$   
 $d =$   
 $\begin{matrix} & u1 & u2 \\ y1 & 0 & 0 \end{matrix}$

Модель, преобразованная к диагональной форме

$a =$   
 $\begin{matrix} & x1 & x2 \\ x1 & -1 & 0 \\ x2 & 0 & -2 \end{matrix}$   
 $b =$   
 $\begin{matrix} & u1 & u2 \\ x1 & 1.5207 & 6.0828 \end{matrix}$



$$c = \begin{matrix} & x2 & 0.55902 & 6.7082 \\ & y1 & 2.6304 & -1.7889 \end{matrix}$$

$$d = \begin{matrix} & x1 & x2 \\ & y1 & 2.6304 & -1.7889 \end{matrix}$$

$$d = \begin{matrix} & u1 & u2 \\ & y1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Матрица перехода в новую систему координат

$$T_d = \begin{matrix} 1.5207 & 3.0414 \\ 0.5590 & 3.3541 \end{matrix}$$

Модель, преобразованная к форме наблюдаемости

$$a = \begin{matrix} & x1 & x2 \\ x1 & 0 & -2 \\ x2 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$$b = \begin{matrix} & u1 & u2 \\ x1 & 1 & -4 \\ x2 & 0 & -8 \end{matrix}$$

$$c = \begin{matrix} & x1 & x2 \\ y1 & 3 & -2 \end{matrix}$$

$$d = \begin{matrix} & u1 & u2 \\ y1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Матрица перехода в новую систему координат

$$T_n = \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{matrix}$$

### 2.3 Структурированные модели.

Реальные объекты управления представляют собой совокупность отдельных элементов и блоков соединенных между собой посредством связей. Поэтому в практике гораздо удобнее бывает представлять математическую модель всей системы, как совокупность относительно простых математических моделей отдельных элементов и блоков объекта, т.е. структурированную модель. Такая форма математического описания в отличии от (2.6) отражает не только физические, но и технические принципы построения системы

управления и позволяет исследовать процессы происходящие не только в системе в целом, но и процессы в отдельных ее элементах.

Структурированные модели, учитывающие техническую организацию систем управления, создаются на основе следующих допущений:

1. Все элементы системы являются простейшими звеньями, т.е. имеют один вход и один выход. Если звено характеризуется несколькими обобщенными координатами, то в качестве выходной величины выбирается та координата, которая является выходной или регулируемой величиной звена.

2. Все звенья, из которых состоит система, является детектирующими. В детектирующем звене выходная величина зависит только от входной. Если выходная величина звена оказывает влияние на входную, то звено называется недетектирующим.

Допущения о том, что в состав системы управления должны входить только детектирующие звенья не сужает область применения структурированных моделей, так как недетектирующее звено может рассматривать как совокупность детектирующих звеньев охватываемых обратной связью.

Таким образом, структурированная модель системы управления разбивается на ряд взаимосвязанных математических моделей отдельных звеньев. Тогда, последовательно, исключая из рассмотрения все внутренние переменные, являющиеся входными или выходными сигналами внутренних звеньев, можно найти дифференциальное уравнение описывающее взаимосвязь входной и выходной величины системы в виде.

$$a_0 \frac{d^n Y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dY}{dt} + a_n Y = b_0 \frac{d^m U}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_m U, \quad (2.31)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_n$  - постоянные коэффициенты;  $n$  - порядок системы.

Для реальных физически реализуемых систем управления  $m < n$ .

Подвергая (2.31) преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях получим алгебраическое уравнение, связывающее изображения по Лапласу от входной  $X(p)$  и выходной  $Y(p)$  величины объекта

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \cdot Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \cdot X(p), \quad (2.32)$$

где  $p$  – оператор Лапласа

Последнее уравнение можно представить в виде:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.33)$$

Это отношение называется передаточной функцией объекта и обозначается символом  $W(p)$ .

Передаточной функцией системы называется отношение выходной величины к входной, преобразованных по Лапласу при нулевых начальных условиях и возмущениях.

Зная передаточную функцию системы или звена можно легко получить дифференциальное уравнение в форме (2.31), справедливо также и обратное утверждение.

Введение векторных переменных при рассмотрении многомерных объектов позволяет для линейных систем использовать привычный аппарат передаточных функций и структурных схем, однако понятие передаточной функции значительно расширяется.

Пусть имеется многомерный объект управления со структурной схемой рис. 2.1 б. По аналогии с одномерными системами (2.32) можно записать:

$$\mathbf{Q}(p)\mathbf{y}(p) = \mathbf{R}(p)\mathbf{u}(p) + \mathbf{S}(p)\mathbf{f}(p), \quad (2.34)$$

где  $\mathbf{Q}(p)$ -квадратная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times n$

$$\mathbf{Q}(p) = \begin{pmatrix} q_{11}(p); q_{12}(p); \dots; q_{1n}(p) \\ q_{21}(p); q_{22}(p); \dots; q_{2n}(p) \\ \dots \dots \dots \\ q_{n1}(p); q_{n2}(p); \dots; q_{nn}(p) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{R}(p)$ -прямоугольная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times k$

$$\mathbf{R}(p) = \begin{pmatrix} r_{11}(p); r_{12}(p); \dots; r_{1k}(p) \\ r_{21}(p); r_{22}(p); \dots; r_{2k}(p) \\ \dots \\ r_{n1}(p); r_{n2}(p); \dots; r_{nk}(p) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{S}(p)$ - прямоугольная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times l$

$$\mathbf{S}(p) = \begin{pmatrix} s_{11}(p); s_{12}(p); \dots; s_{1l}(p) \\ s_{21}(p); s_{22}(p); \dots; s_{2l}(p) \\ \dots \\ s_{n1}(p); s_{n2}(p); \dots; s_{nl}(p) \end{pmatrix}.$$

Для получения системы дифференциальных уравнений необходимо перемножить прямоугольную или квадратную матрицы на матрицы - столбцы соответствующих переменных объекта.

Взаимосвязь уравнений состояния (2.6) с уравнениями системы в виде (2.34) определяется из следующих соотношений. Из второго уравнения (2.6) выразим переменную  $\mathbf{x}(t)$  через  $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{v}(t) \quad (2.35)$$

и подставим это выражение в первое уравнение (2.6)

$$\mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{y}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{v}(t)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{e}(t). \quad (2.36)$$

Преобразовывая по Лапласу (2.36) и группируя подобные члены, получим выражение аналогичное (2.34).

$$(\mathbf{I}p - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{y}(p) = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(p) + (\mathbf{I}p - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{v}(p) + \mathbf{C}\mathbf{E}\mathbf{e}(p), \quad (2.37)$$

где  $\mathbf{I}$  - единичная матрица.

Полагая  $\mathbf{v}(p) = \mathbf{f}(p)$ , а  $\mathbf{e}(p) = \mathbf{D}\mathbf{v}(p)$  найдем взаимосвязь параметров структурированной модели и модели в пространстве состояний

$$\mathbf{S}(p) = \mathbf{I}p - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}, \quad \mathbf{R}(p) = \mathbf{D}\mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{B}, \quad \mathbf{Q}(p) = \mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}. \quad (2.38)$$

По аналогии с одномерными системами, используя основные правила теории матриц, можно ввести понятие матрицы передаточной функции.

Если умножить (2.34) на обратную матрицу  $\mathbf{Q}^{-1}(p)$ , то получим:

$$\mathbf{y}(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{R}(p)\boldsymbol{\mu}(p) + \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{S}(p)\mathbf{f}(p). \quad (2.39)$$

Отсюда можно получить выражение для матриц передаточных функций системы по управлению

$$\mathbf{W}_u(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{R}(p) \quad (2.40)$$

и возмущению

$$\mathbf{W}_f(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{S}(p) \quad (2.41)$$

Как для одномерных, так и для многомерных систем одной и той же матрице передаточной функции может соответствовать несколько вариантов структурных схем и уравнений состояния. Т.е. по уравнениям состояния матрица передаточной функции может быть получена однозначно, обратное утверждение будет неверным. Это связано с тем, что при получении выражения передаточной функции исключаются из рассмотрения все внутренние переменные структурированной модели, которые нельзя уже восстановить по выражению передаточной функции.

**Пример 2.3.** Пусть имеется передаточная функция звена, записанная в виде:

$$W(p) = \frac{b_0 p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.42)$$

Запишем ее через отрицательные степени оператора  $p$ .

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_0 p^{-1} + b_1 p^{-2}}{1 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2}}. \quad (2.43)$$

Введем вспомогательную переменную  $E(p)$  равную

$$E(p) = \frac{u(p)}{1 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2}}, \quad (2.44)$$

или

$$E(p) = u(p) - a_1 p^{-1} E(p) - a_2 p^{-2} E(p), \quad (2.45)$$

откуда нетрудно составить и структурную схему (рис. 2.6).

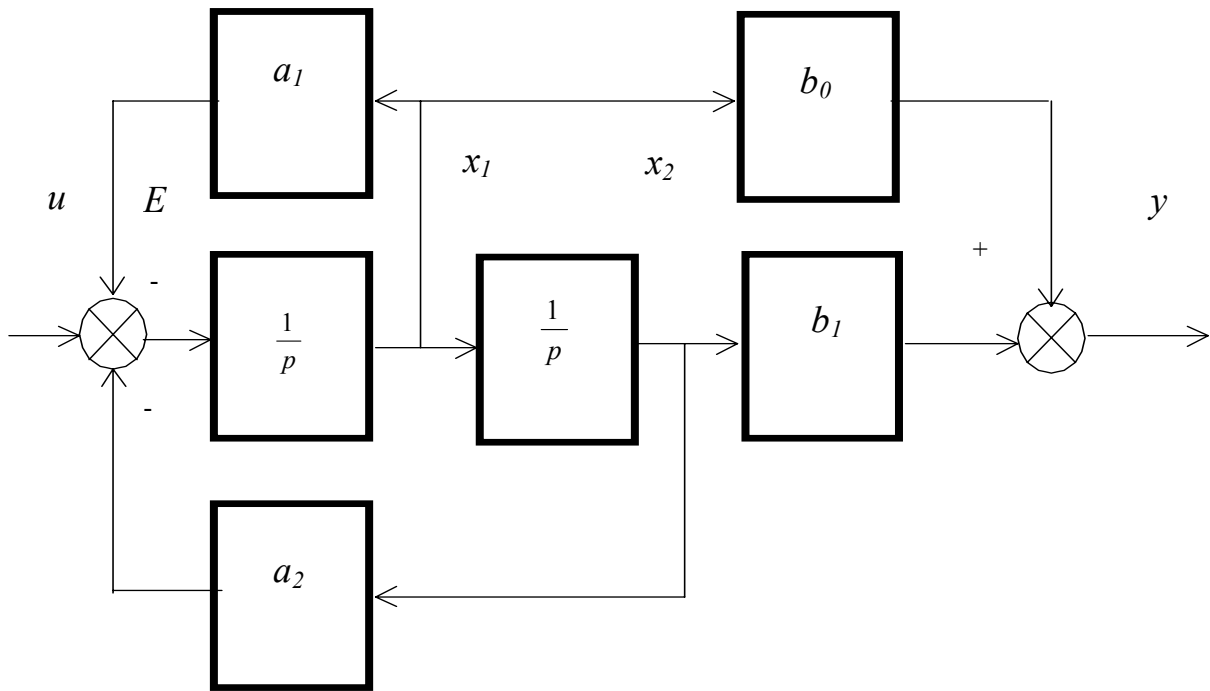


Рис. 2.6

Дифференциальные уравнения для переменных состояния могут быть легко найдены из рассмотрения структурной схемы системы.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u - a_1 x_1 - a_2 x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1; \\ y &= b_0 x_1 + b_1 x_2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Разложим (2.42) на простейшие дроби, предполагая, что характеристическое уравнение звена имеет действительные корни  $p_1$  и  $p_2$ . Согласно теореме Виетта  $-(p_1 + p_2) = a_1$ ,  $p_1 p_2 = a_2$ . Тогда выражение передаточной функции примет следующий вид:

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2}, \quad (2.47)$$

где  $A = \frac{b_0 p_1 + b_1}{p_1 - p_2}$ ,  $B = -\frac{b_0 p_2 + b_1}{p_1 - p_2}$ .

Структурная схема следует из выражения передаточной функции непосредственно (рис. 2.7).

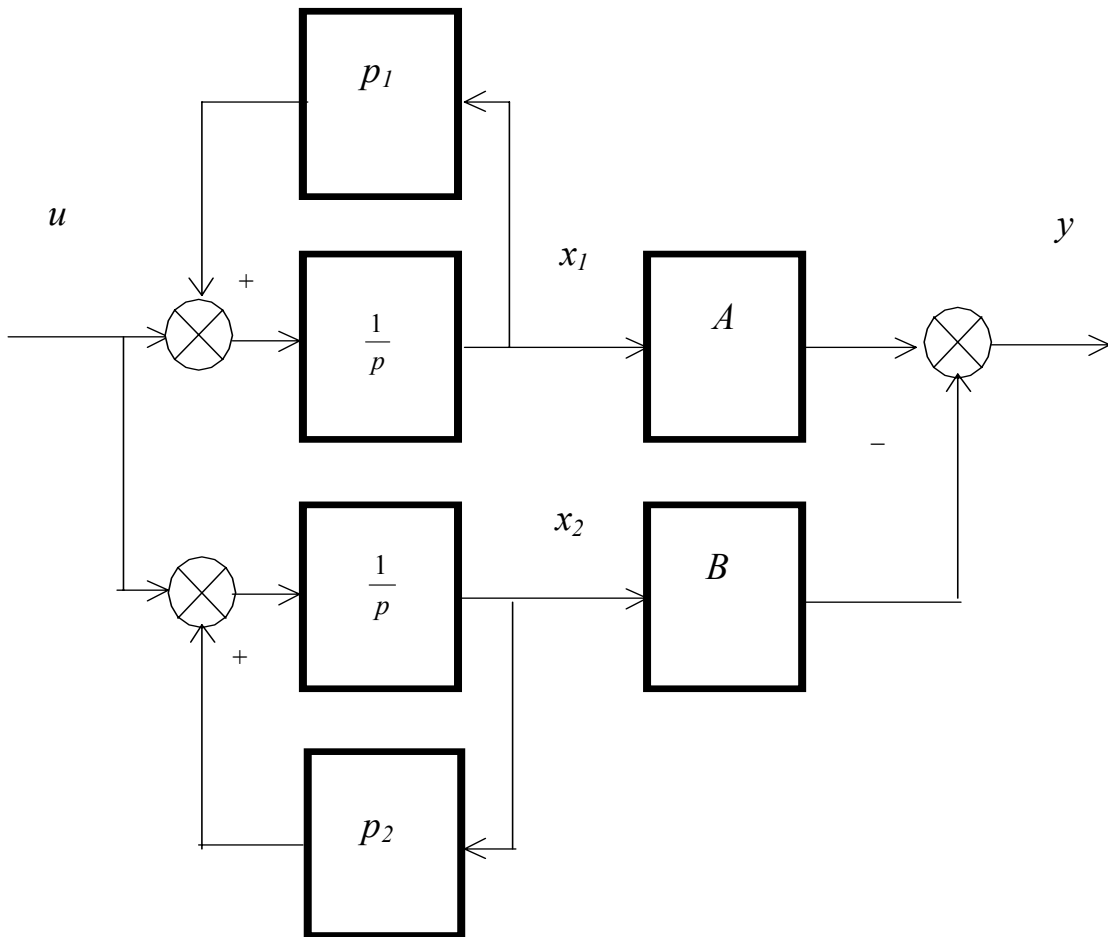


Рис. 2.7

Система дифференциальных уравнений теперь выглядит

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u + p_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u + p_2 x_2 . \\ y &= Ax_1 + Bx_2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Если теперь записать (2.42) в виде произведения дробей, то получим следующее выражение

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{(p - p_1)(p - p_2)} \quad (2.49)$$

Введем переменные состояния  $x_1 = \frac{x_2}{p - p_1}$   $x_2 = \frac{u}{p - p_2}$ , тогда

$$y(p) = (b_0 p + b_1)x_1 .$$

Отсюда можно получить структурную схему (рис. 2.8) и уравнения в переменных состояния

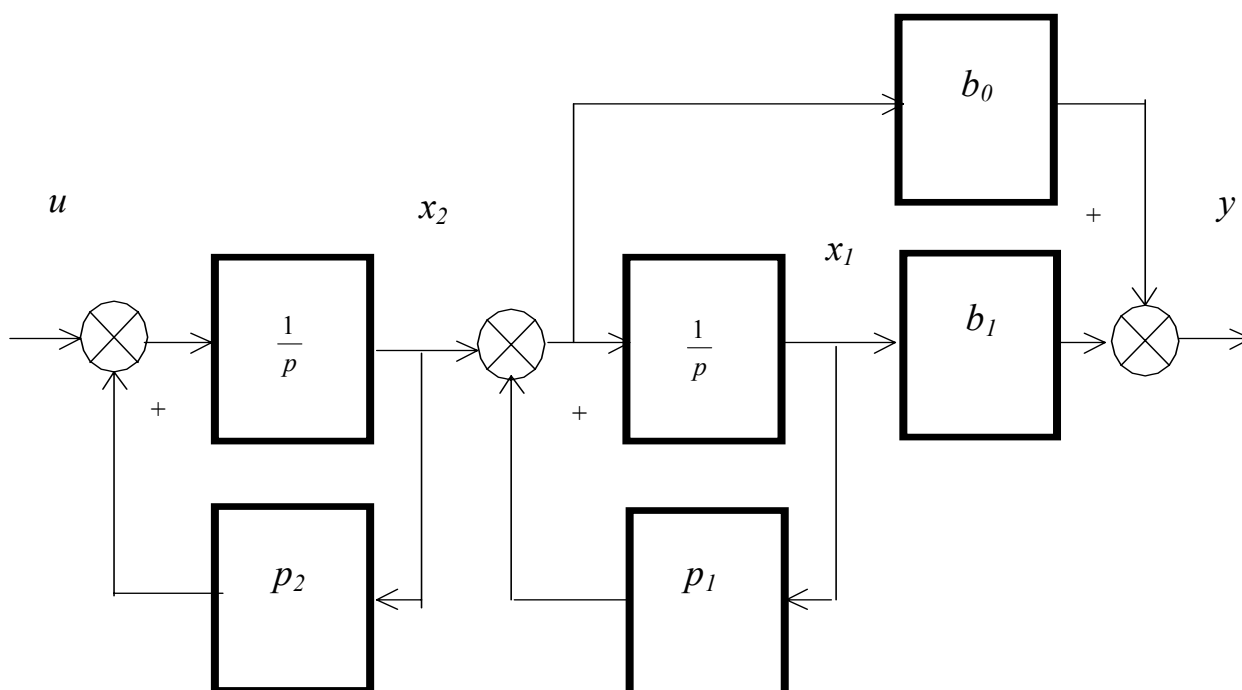


Рис. 2.8.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_1 x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u + p_2 x_2 \\ y &= (b_0 p_1 + b_1) x_1 + b_0 x_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Сравнивая уравнения состояния (2.46), (2.48) и (2.50) и структурные схемы рис. 2.6 -2.8 можно сделать вывод о том, что одной передаточной функции (2.42) могут соответствовать различные структуры и уравнения состояния. Такое многообразие структурных схем обусловлено выбором различных систем отсчета (базисов) для переменных состояния. Выбирая переменные состояния в различных координатных системах (базисах) можно получать и различные структурные схемы.

Программа, реализующая данный пример в MATLAB при  $b_0=1$ ;  $b_1=3$ ;  $a_1=10$ ;  $a_2=16$ , может быть записана следующим образом:

```
a1=10;a2=16;b0=1;b1=3;
nun=[b0 b1];
```



```

den=[1 a1 a2];
wm=tf(nun,den); % Задание передаточной функции
p=pole(wm); % Вычисление полюсов передаточной функции
A1=[-a1 -a2;1 0];
B1=[1;0];
C1=[b0 b1];
D=0;
s1=ss(A1,B1,C1,D) % Задание 1 варианта модели
[s1can,T1]=canon(s1,'modal') % Приведение модели к каноническому диагональному виду
A2=[-8 0;0 -2];
B2=[1;1];
C2=[(b0*p(1)+b1)/(p(1)-p(2)) -(b0*p(2)+b1)/(p(1)-p(2))];
D=0;
s2=ss(A2,B2,C2,D) % Задание 2 варианта модели
[s2can,T2]=canon(s2,'modal') % Приведение модели к каноническому диагональному виду
A3=[p(1) 1;0 p(2)];
B3=[0;1];
C3=[b0*p(1)+b1 b0];
D=0;
s3=ss(A3,B3,C3,D) % Задание 3 варианта модели
[s3can,T3]=canon(s3,'modal') % Приведение модели к каноническому диагональному виду

```

Ниже приведены только рассчитанные матрицы перехода T1, T2 и T3 из канонической диагональной формы в форму соответствующей модели

```

T1 =
    -1.3437   -2.6874
    -0.3727   -2.9814
T2 =
     1     0
     0     1
T3 =
     1.0000   -0.1667
     0         1.0138

```

Нетрудно убедиться, что  $T_i A_i T_i^{-1} = A_d = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  при любом  $i=1, 2, 3$ .

## 2.4. Дискретные модели

При анализе стохастических систем, встречающихся в самых различных областях науки и техники, исходными данными для анализа являются

реализации случайного процесса генерируемого этой системой. Полученные в виде графиков, или осциллограмм, реализации случайного процесса обрабатываются и представляются в виде временного ряда. Временной ряд содержит ординаты реализации случайного процесса снятые в дискретные и равноотстоящие моменты времени. Следовательно, о свойствах исходной непрерывной системы судят по результатам цифровой обработки сигналов (временных рядов) формируемых системой. В связи с этим широкое распространение получили цифровые параметрические стохастические модели авторегрессии и скользящего среднего (АРСС-модели). Эти модели достаточно просты и включают обычно небольшое число параметров, которые необходимо оценивать по наблюдениям. АРСС-модели могут быть использованы как для изучения временных рядов, так и при определении статистических характеристик этих рядов. Широко используются такие модели в управлении, экономике, медицине, геофизике, при обработке звуковых сигналов [3, 6, 9, 11, 33, 56, 101].

АРСС процессом порядка  $(p, q)$  называется ряд

$$v(k) = \sum_{i=1}^p c_i v(k-i) + \sum_{j=1}^q d_j e(k-j) + e(k), \quad (2.51)$$

где  $v(k)$  – значения временного ряда в  $k$ -й момент времени;  $e(k)$  – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (белый шум);  $\{c_i, i = 1, p\}$  – параметры авторегрессии;  $\{d_j, j = 1, q\}$  – параметры скользящего среднего.

Частными случаями АРСС  $(p, q)$  процессов является процесс АР $(p)$  – авторегрессии порядка  $p$ :

$$v(k) = \sum_{i=1}^p c_i v(k-i) + e(k), \quad (2.52)$$

и процесс СС $(q)$  – скользящего среднего порядка  $q$ :

$$v(k) = \sum_{j=1}^q d_j e(k-j) + e(k). \quad (2.53)$$

Уравнения (2.51) и (2.52) описывают рекурсивные фильтры, а уравнение (2.53) – трансверсальный фильтр [38]. Таким образом, процессы АРСС (p, q), АР(p) и СС(q) можно рассматривать как отклики соответствующих линейных фильтров на входной бело-шумный процесс  $\{e(t_k)\}$ .

Следовательно, условиями стационарности этих процессов являются условия устойчивости соответствующих фильтров: рекурсивный фильтр устойчив, если все корни характеристического уравнения

$$q^p - c_1 q^{p-1} - \dots - c_p = 0$$

находятся внутри окружности единичного радиуса [30]. Трансверсальный фильтр порядка q устойчив без ограничения на параметры.

Если в качестве стохастической системы рассматривается одномерный объект управления, то АРСС- модель объекта примет вид

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j u(k-j) + e(k), \quad (2.54)$$

где  $y(k)$ ,  $u(k)$  выходная и входная координаты объекта.

Аналогично (2.51) АР-модель запишется как

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i y(k-i) + bu(k) + e(k), \quad (2.55)$$

а СС-модель

$$y(k) = \sum_{j=1}^q b_j u(k-j) + e(k). \quad (2.56)$$

Уравнения (2.54) – (2.56) являются линейными разностными уравнениями объекта управления.

Используя  $z$  – преобразование их можно записать в символической форме.

АРСС –модель

$$A(z)y(z) = B(z)u(z) + e(z), \quad (2.57)$$

АР – модель

$$A(z)y(z) = bu(z) + e(z), \quad (2.58)$$

СС – модель

$$y(z) = B(z)u(z) + e(z), \quad (2.59)$$

где  $y(z)$ ,  $u(z)$  и  $e(z)$  –  $z$  –изображения соответствующих сигналов;

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}, \quad B(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{-j} - \text{коэффициенты уравнения.}$$

Вводя дискретную передаточную функцию объекта, как отношение  $z$  – изображений сигнала на входе к сигналу на выходе при нулевых начальных условиях можно записать

$$W(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_{01} + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.60)$$

При наличии запаздывания в объекте равному целому числу периодов дискретизации  $\tau = d$  выражение

для дискретной передаточной функции необходимо умножить на  $z^{-d}$

$$W_d(z) = W(z)z^{-d} = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d}. \quad (2.61)$$

Приводя помехи, действующие на объект управления к выходу, можно получить структурную схему объекта управления

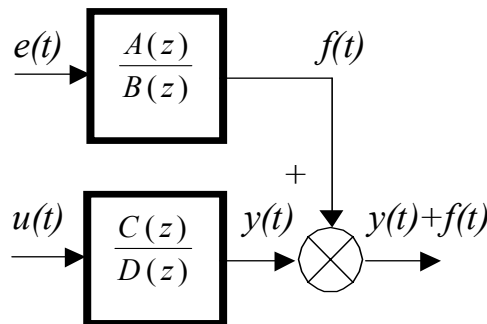


Рис. 2.9.

Для шума (по аналогии) передаточная функция будет иметь вид

$$W_f(z) = \frac{f(z)}{e(z)} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_s z^{-s}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_r z^{-r}} = \frac{D(z)}{C(z)}. \quad (2.62)$$

Объединив выражения (2.61) и (2.62), получим модель объекта с шумом измерений:

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{C(z)} e(z). \quad (2.63)$$

В зависимости от типа модели шума, при котором гарантируется сходимость оценок модели (2.63), используются модели частного вида [30]:

– МП-модель (модель максимального правдоподобия):

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{D(z)}{A(z)} e(z), \quad (2.64)$$

– НК-модель (модель наименьших квадратов):

$$y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} u(z) + \frac{1}{A(z)} e(z). \quad (2.65)$$

Переход от непрерывной модели к дискретной задается с помощью  $z$  – преобразования.

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}. \quad (2.66)$$

Тогда

$$W(p) = pZ^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} W(z) \right\} \quad (2.67)$$

Сомножитель  $\frac{z-1}{z}$  указывает на наличие в дискретной системе экстаполятора нулевого порядка, который фиксирует сигнал на выходе дискретного элемента между моментами квантования.

В том случае если объект управления многомерный и имеет математическую модель заданную в пространстве состояний (2.6), то последняя сводится к дискретной модели вида

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned}, \quad (2.68)$$

где параметры (матрицы) дискретной системы связаны с параметрами (матрицами) исходной непрерывной выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}h} \\ \mathbf{B}_d &= \int_0^h e^{\mathbf{A}s} \mathbf{B} ds \end{aligned} \quad (2.69)$$

где  $h$  – интервал квантования.

**Пример 2.4.** Найдем дискретную передаточную функцию исполнительного механизма, уравнения состояния которого имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_1 + u; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1; \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Для вычисления матричной экспоненты (2.69) найдем ее преобразование Лапласа, которое будет равно.

$$L[e^{\mathbf{A}t}] = (p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (2.71)$$

$\mathbf{I}$  – единичная матрица.

После подстановки в него матрицы  $\mathbf{A}$  получим

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.72)$$

Вычислим обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p(p+1)} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 1 & p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Откуда, осуществляя  $z$  – преобразование последней матрицы, найдем матрицу перехода дискретной системы  $\mathbf{A}_d$

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}h} = \mathbf{Z} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{p+1} & 0 \\ \frac{1}{p(p+1)} & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{-h} & 0 \\ 1 - e^{-h} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

где  $h$  – интервал дискретизации по времени.

Матрица  $\mathbf{B}_d$  в соответствии с (2.69) будет равна

$$\mathbf{B}_d = \int_0^h \begin{pmatrix} e^{-s} \\ 1 - e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - e^{-h} \\ h - 1 + e^{-h} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Тогда дискретный аналог модели исполнительного механизма будет выглядеть

$$x_1(k+1) = e^{-h}x_1(k) + (1 - e^{-h})u(k)$$

$$x_2(k+1) = (1 - e^{-h})x_1(k) + x_2(k) + (h - 1 + e^{-h})u(k).$$

Этот пример в MATLAB для  $h=0,1$  запишется так

```
A=[-1 0;1 0];
B=[1;0];
C=[0 1];
D=0;
sn=ss(A,B,C,D) % Модель непрерывной системы
h=.1; % Период дискретизации
sd=c2d(sn,h) % Модель дискретной системы
```

Полученные непрерывная и дискретная модель будут выглядеть:

### ***Непрерывная модель***

a =

	x1	x2
x1	-1	0
x2	1	0

b =

	u1
x1	1
x2	0

c =

	x1	x2
y1	0	1

d =

	u1
y1	0

Continuous-time model.

### ***Дискретная модель***

a =

	x1	x2
x1	0.90484	0
x2	0.095163	1

```

b =
      u1
x1  0.095163
x2  0.0048374
c =
      x1      x2
y1    0        1
d =
      u1
y1    0

```

Sampling time: 0.1  
Discrete-time model.

## 2.5. Математические модели на базе матричных операторов.

При исследовании нестационарных и нелинейных систем использование линейных моделей, рассмотренных в п. 2.1- 2.4 становится громоздким и неэффективным, поэтому возникла идея создания методов использующих аппарат матричных операторов и спектральную форму описания процессов [4, 5, 49, 60]. Аппарат матричных операторов базируется на использовании теории ортогональных функций использующей в качестве базиса не только тригонометрические, но и другие виды ортогональных функций образующих новые базисы. В качестве таких функций используют полиномы Лежандра, Чебышева, Лагерра, функции Уолша и др.

Метод матричных операторов и спектральные методы предполагают разложение сигналов и временных динамических характеристик системы по ортогональным базисам.

Пусть  $\Phi[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)]^T$  одностолбцовая матрица элементов ортонормированного базиса порождающее в общем случае некоторое банахово пространство функций. Тогда произвольный сигнал системы  $x(t)$  заданный на отрезке  $[t_0 \ t_1]$  можно приблизить с помощью разложения

$$x(t) = \Phi^T(t)C^x, \quad (2.76)$$



где  $\mathbf{C}^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  коэффициенты разложения  $x(t)$  по базисным функциям (не обязательно тригонометрическим).

В терминах спектральных методов  $\mathbf{C}^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  представляет совокупность коэффициентов Фурье исходного сигнала  $x(t)$  относительно выбранной ортонормированной системы функций  $\Phi(t)$ . Применение спектральной формы описания сигналов позволяет перейти от исследования самих сигналов к рассмотрению их спектральных характеристик относительно выбранного базиса.

Выбранный базис образует пространство состояний системы, в котором ее входной и выходной сигналы будут соответственно векторами  $\mathbf{C}^x = [c_1^x, c_2^x, \dots, c_n^x]$  и  $\mathbf{C}^y = [c_1^y, c_2^y, \dots, c_m^y]$ . Без нарушения общности рассуждений можно положить  $m=n$ . Тогда в пространстве состояний, определяемом выбранным ортонормированным базисом, система осуществляет отображение входного вектора в выходной с помощью матричного оператора  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{C}^y = \mathbf{A}\mathbf{C}^x. \quad (2.77)$$

Этот оператор называется матричным оператором или спектральной характеристикой системы относительно ортонормированного базиса.

Выразим этот оператор через параметры системы, задаваемой дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=1}^m b_k(t) \frac{d^k x}{dt^k}. \quad (2.78)$$

Интегрируя  $n$ -раз исходное уравнение системы и осуществляя последующее интегрирование по частям с учетом нулевых начальных условий получим интегральное уравнение Вольterra 2 – го рода эквивалентное исходному дифференциальному уравнению

$$y(t) + \int_0^t \bar{h}_y(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t), \quad (2.79)$$

где

$$\bar{h}_y(t, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} [a_k(\tau)(t-\tau)^{n-1}], \quad (2.80)$$

$$f(t) = \int_0^t h_x(t, \tau)x(\tau)d\tau \quad (2.81)$$

$$\bar{h}_x(t, \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} [b_k(\tau)(t-\tau)^{n-1}] \quad (2.82)$$

$$h(t, \tau) = \begin{cases} \bar{h}(t, \tau), & 0 \leq \tau \leq t \\ 0, & 0 \leq \tau \leq T \end{cases} \quad (2.83)$$

Функции  $h(t, \tau)$  называются ядрами интегрального уравнения.

Выражая переменные интегрального уравнения в ортонормируемом базисе, получим

$$x(t) = \Phi^T(t)C^x, \quad y(t) = \Phi^T(t)C^y, \quad (2.84)$$

$$h_x(t, \tau) = \Phi^T(t)A^x\Phi(\tau), \quad h_y(t, \tau) = \Phi^T(t)A_0^y\Phi(\tau), \quad (2.85)$$

где

$$c_i^x = \int_0^T x(t)\varphi_i(t)dt, \quad c_i^y = \int_0^T y(t)\varphi_i(t)dt, \quad i=1,2,\dots,m$$

$$A^x = \left( \iint_T k_x(t, \tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \right)_{i,j=1}^k, \quad A_0^y = \left( \iint_T k_x(t, \tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \right)_{i,j=1}^k$$

Подставляя (2.84) и (2.85) в (2.79) с учетом (2.80) – (2.83) получим:

$$\Phi^T(t)C^y + \int_0^T \Phi^T(t)A_0^y\Phi(\tau)\Phi^T(\tau)C^y d\tau = \int_0^T \Phi^T(t)A^x\Phi(\tau)\Phi^T(\tau)C^x d\tau, \quad (2.86)$$

или, после преобразований

$$\Phi^T(t)C^y + \Phi^T(t)A_0^yC^y \int_0^T \Phi(\tau)\Phi^T(\tau)d\tau = \Phi^T(t)A^xC^x \int_0^T \Phi(\tau)\Phi^T(\tau)d\tau. \quad (2.87)$$

$$\text{Поскольку } \int_0^T \Phi(\tau)\Phi^T(\tau)d\tau = \mathbf{I} \text{ - единичная матрица, то} \quad (2.87)$$

преобразуется к виду:

$$\mathbf{C}^y + \mathbf{A}_0^y \mathbf{C}^x = \mathbf{A}^x \mathbf{C}^x. \quad (2.88)$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{A}^y = \mathbf{I} + \mathbf{A}_0^y, \quad (2.89)$$

из (2.88) находим отображение входного вектора  $\mathbf{C}^x$  в выходной вектор  $\mathbf{C}^y$

$$\mathbf{C}^y = (\mathbf{A}^y)^{-1} \mathbf{A}^x \mathbf{C}^x = \mathbf{A} \mathbf{C}^x \quad (2.90)$$

Квадратную матрицу  $\mathbf{A}$  вида

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^y)^{-1} \mathbf{A}^x \quad (2.91)$$

называют матричным оператором или спектральной характеристикой системы относительно ортонормируемого базиса  $\Phi \times \Phi$ .

Вводя, по аналогии с типовыми динамическими звеньями линейных систем, типовые матричные операторы интегрирования, дифференцирования и умножения можно формировать из этих операторов матричные структурные схемы системы в выбранном базисе.

Причем для таких структурных справедливы те же правила преобразования, что и для линейных систем.

Матричный оператор последовательного соединения элементов равен произведению матричных операторов отдельных элементов

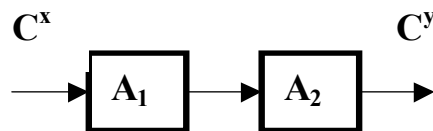


Рис. 2.10.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1. \quad (2.92)$$

Следует обратить внимание на то, что матричные операторы перемножаются от выхода ко входу.

Матричный оператор параллельного соединения элементов равен сумме матричных операторов отдельных элементов

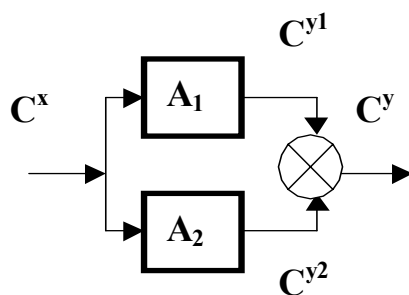


Рис. 2.11.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2. \quad (2.93)$$

Матричный оператор соединения с обратной связью определяется произведением матричного оператора прямой цепи на матричный оператор вида  $(\mathbf{I} + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1)^{-1}$

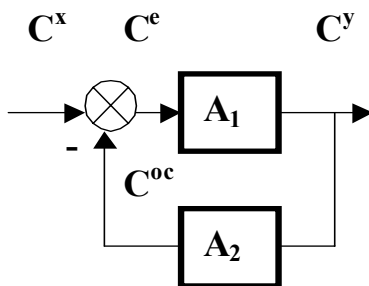


Рис. 2.12.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\mathbf{I} + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1). \quad (2.94)$$

**Пример 2.5.** Рассмотрим построение матричного оператора интегрирования

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (2.95)$$

в базисе функций Уолша для входного сигнала  $x(t) = t$  заданного на интервале времени  $[0, 1]$ . Поскольку функции Уолша принимают значения  $+1$  и  $-1$ , то их дискретным аналогом будут являться строки матрицы Адамара  $\Phi(t_i) = \mathbf{H}$ , элементы которой определяют значение функций на множестве равноудаленных точек.

Построив матрицу Адамара, коэффициенты разложения функции  $x(t)$  можно вычислить по формуле

$$\mathbf{C}^x = \frac{1}{n} \mathbf{H} \mathbf{X}, \quad (2.96)$$

где  $n$  – число дискретных значений,  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор, элементы которого представляют дискретные значения функции  $x(t)$  определенные в середине интервалов дискретизации.

Для нахождения матричного оператора интегрирования подставим в выражение для интегрируемой функции ее разложение по выбранному базису

$$y(t) = \int_0^T x(\tau) d\tau = \int_0^T \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^x d\tau. \quad (2.97)$$

Поскольку  $\mathbf{C}^x$  не зависит от  $\tau$  ее можно вынести за знак интеграла

$$y(t) = \int_0^T \Phi^T(\tau) d\tau \mathbf{C}^x, \quad (2.98)$$

а интеграл от базисных функций также разложить по выбранному базису

$$\Phi_s(t) = \int_0^t \Phi^T(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n \Phi(\tau_i) \Delta\tau = A_u \Phi(\tau_i). \quad (2.99)$$

Откуда можно найти искомый оператор интегрирования

$$\mathbf{A}_u = \Phi^{-1} \Phi_s. \quad (2.100)$$

Как следует из (2.99) матрицу  $\Phi_s$  можно получить суммированием с накоплением матрицы  $\Phi(t_i) = \mathbf{H}$  или матрицы Адамара.

Программа, осуществляющая интегрирование в базисе функций Уолша для  $n=8$ , приведена ниже.

```
n=8;
t=1/(2*n):1/n:1; %Задание дискретного времени
x=t; % Задание подынтегральной функции
H=hadamard(n); % Формирование матрицы Адамара
Cx=H*x'./n; % Вычисление коэффициентов разложения входного сигнала
sH=cumsum(H)/n; % Суммирование с накоплением матрицы Адамара
Ai=inv(H)*sH; % Вычисление интегрального оператора
Cy=Ai*Cx; % Вычисление коэффициентов разложения выходного сигнала
```

```

y=H*Cy % Вычисление интеграла от входного сигнала
stairs(t,y) % Построение приближения выходного сигнала
hold on
plot(t,x.^2/2),grid % Построение выходного сигнала
hold off

```

### Результаты расчетов

Матрица Адамара

**H** =

1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Коэффициенты разложения входного сигнала

$C^x = [0,5000 \quad -0,0625 \quad -0,1250 \quad 0 \quad -0,2500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Интегральный оператор

**A<sub>и</sub>** =

0,5625	0,0625	0,1250	0	0,2500	0	0	0
-0,0625	0,0625	0	0	0	0	0	0
-0,1250	0	0,0625	0,0625	0	0	0	0
0	0	-0,0625	0,0625	0	0	0	0
-0,2500	0	0	0	0,0625	0,0625	0,1250	0
0	0	0	0	-0,0625	0,0625	0	0
0	0	0	0	-0,1250	0	0,0625	0,0625
0	0	0	0	0	0	-0,0625	0,0625

Коэффициенты разложения выходного сигнала

$C^y = [0,1992 \quad -0,0352 \quad -0,0703 \quad 0,0078 \quad -0,1406 \quad 0,0156 \quad 0,0313 \quad 0]$

Значения выходного сигнала

$y=[0,0078 \quad 0,0313 \quad 0,0703 \quad 0,1250 \quad 0,1953 \quad 0,2813 \quad 0,3828 \quad 0,5000]$

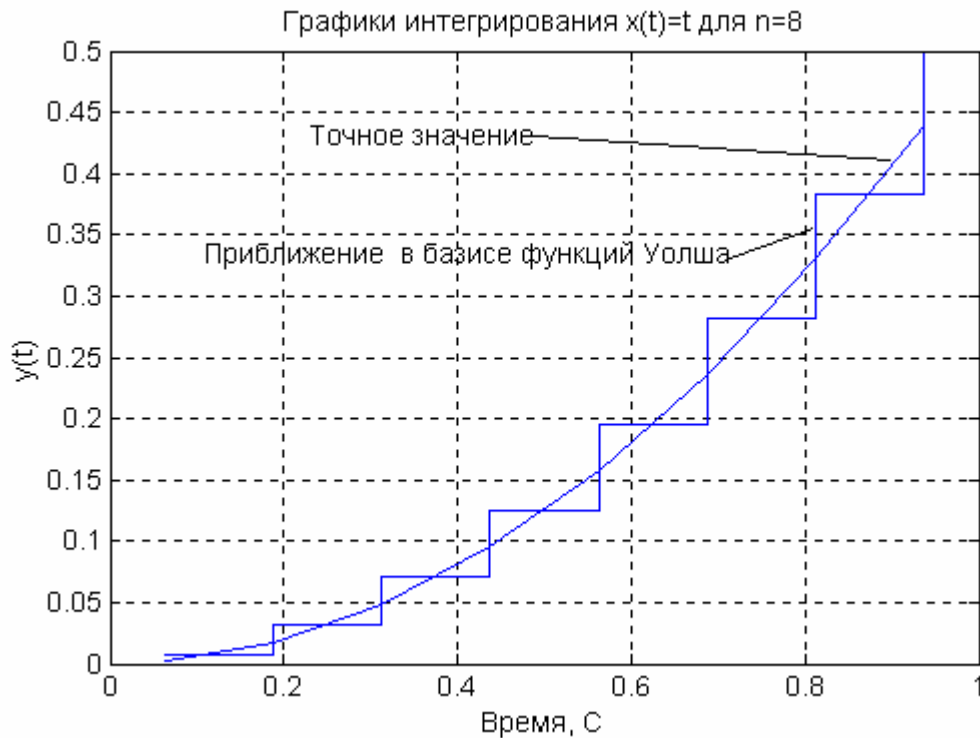


Рис.2.13.

## 2.6. Математические модели нелинейных систем

на базе функциональных рядов Вольтерра – Винера

Данные модели являются дальнейшим развитием метода матричных операторов и применяются для исследования нелинейных систем. В отличие от линейных для нелинейных систем нарушается принцип суперпозиции и постоянство масштаба переменных. Вследствие этого становится неприменимым математический аппарат теории линейных систем, а в нелинейных системах возникают многие явления, не имеющие места в линейном случае и связанные, например, с появлением комбинационных гармоник и расширением спектра выходного сигнала, возникновении автоколебаний и нелинейного резонанса.

С позиции теории функций, моделирование нелинейной системы можно рассматривать как аппроксимацию оператора, характеризующего систему, в классе функциональных полиномов заданной степени. Решение данной задачи методом матричных операторов существенно упрощается при условии ортогональности используемых полиномов. Для аппроксимации статических нелинейных систем (без памяти) могут применяться обычные полиномы: Чебышева, Эрмита, Лагерра и др. Для динамических систем (с памятью) требуется построение функциональных полиномов, ортогональных для заданного класса входных и выходных сигналов системы. В частности, известные функционалы Винера ортогональны для белого гауссова шума [24].

*С математической точки зрения процесс в нелинейной системе может быть представлен как преобразование множества  $X$  входных сигналов в множество  $Y$  выходных сигналов с помощью нелинейного оператора  $F$ . Различные классы процессов определяются видом элементов тройки  $\langle X, Y, F \rangle$ . В свою очередь сигналы, являющиеся носителями информации во времени и пространстве, могут быть определены в виде двойки  $\langle T, S \rangle$ , где множество  $T$  определяет область задания сигнала, а множество  $S$  – область его значений. Для непрерывных сигналов множества  $T$  и  $S$  являются бесконечными, а для дискретных сигналов, ограниченных по длительности, данные множества являются конечными.*

В классе линейных систем, как уже отмечалось, выполняется принцип суперпозиции, согласно которому для любых  $x_1, x_2 \in X$  справедливо

$$F[ax_1 + bx_2] = aF[x_1] + bF[x_2], \quad (2.101)$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные константы. Если условие (2.101) не выполняется, то система является нелинейной.

При заданных множествах  $T$  и  $S$  и операциях над ними вид линейного оператора  $F$  определяется однозначно. В частности, для непрерывных одномерных сигналов  $x(t)$  оператор линейного преобразования, как известно, определяется интегральным уравнением



$$y(t) = F[x(t)] = \int_T h(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad (2.102)$$

а при условии стационарности оператора – интегралом свертки

$$y(t) = F[x(t)] = \int_T \omega(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (2.103)$$

Аналогом данного выражения в дискретном случае является линейная свертка вида

$$y(n) = \sum_{i \in T} \omega(i)x(n - i). \quad (2.104)$$

Если множество  $T = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ , то выражение (2.104) определяет линейный дискретную систему не рекурсивного типа с импульсной характеристикой длиной  $N$ .

В отличие от линейных систем класс нелинейных систем значительно богаче, что не дает возможности описать его единым выражением, подобным линейной свертке. Это обстоятельство, с одной стороны, расширяет возможности нелинейных систем, а с другой, – в значительной степени усложняет их проектирование.

При выборе формы математического описания нелинейных систем необходимо учитывать не только общность используемого аппарата, но и возможность применения уже устоявшихся понятий и обобщения известных методов линейных систем на нелинейный случай. Наибольшими преимуществами в этом смысле обладает подход, основанный на использовании функциональных рядов, предложенных В. Вольтерра [21]. Для описания нелинейных систем данные ряды впервые были использованы Н. Винером [13]. Следуя функциональному подходу [89], введем следующие понятия.

Определение 1.1. Оператор  $H_m(x_1, \dots, x_m)$  называется  *$m$ -линейным*, если он линеен по каждой из переменных  $x_i, i = 1, \dots, m$ .

Примерами  $m$ -линейных стационарных операторов для непрерывных и дискретных сигналов соответственно являются функционалы

$$y(t) = H_m[x_1(t), \dots, x_m(t)] = \int_{T_1} \dots \int_{T_m} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x_i(t - \tau_i) d\tau_i,$$

$$y(n) = H_m[x_1(n), \dots, x_m(n)] = \sum_{T_1} \dots \sum_{T_m} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x_i(n - n_i). \quad (2.105)$$

Определение 1.2. Оператор  $H_m(x)$ , полученный из  $m$ -линейного оператора подстановкой  $x_1 = \dots = x_m = x$  называется *однородным оператором* степени  $m$ .

Однородный оператор степени  $m$  обладает следующим свойством:

$$H_m[\alpha x] = \alpha^m H_m[x].$$

Например, линейные операторы вида (2.102) – (2.104) являются однородными операторами первой степени. Функционалы вида

$$y(t) = H_m[x(t)] = \int_{T_1} \dots \int_{T_m} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x(t - \tau_i) d\tau_i, \quad (2.106)$$

$$y(n) = H_m[x(n)] = \sum_{T_1} \dots \sum_{T_m} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (2.107)$$

являются примерами однородных операторов степени  $m$  соответственно для непрерывного и дискретного случаев. Однородный оператор нулевой степени представляет собой постоянную  $h_0$ .

Многомерные функции  $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m)$  называются *ядрами* порядка  $m$ . Однородные функционалы с симметричными ядрами называются *регулярными*. Ядра однородных операторов всегда можно симметризовать, положив их равными

$$\frac{1}{y!} \sum h_m(\tau_1, \dots, \tau_m),$$

где сумма вычисляется по всем перестановкам аргументов  $\tau_1, \dots, \tau_m$ . Сказанное относится также и к дискретным ядрам  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ .

Определение 1.3. *Функциональным полиномом* степени  $M$  называется сумма однородных операторов

$$P_M[x] = \sum_{m=0}^M H_m[x]. \quad (2.108)$$

Функциональные полиномы имеют много аналогий с обычными полиномами. Их можно складывать и умножать, причем результат также будет являться полиномом. Обычные полиномы являются частным случаем функциональных. Действительно, полагая в (2.106) ядро  $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m)$  равным  $m$ -мерной  $\delta$ -функции

$$h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) = \delta(\tau_1, \dots, \tau_m) = \delta(\tau_1) \cdot \dots \cdot \delta(\tau_m),$$

получим  $H_m(x) = x^m(t)$ . Аналогично однородный функционал (2.107) будет равен  $x^m(n)$  при равенстве его ядра  $h_m(n_1, \dots, n_m)$   $m$ -мерной дискретной  $\delta$ -функции

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = \delta(n_1, \dots, n_m) = \delta(n_1) \cdot \dots \cdot \delta(n_m).$$

Поэтому, функциональный полином (2.108) будет представлять из себя обычный полином, если  $h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) = a_m \delta(\tau_1, \dots, \tau_m)$  в непрерывном случае и  $h_m(n_1, \dots, n_m) = a_m \delta(n_1, \dots, n_m)$  – в дискретном.

В отличие от обычных полиномов, определяющих статическую нелинейность, функциональные полиномы характеризуют динамические нелинейные свойства и могут быть использованы для аппроксимации широкого класса нелинейных операторов, подобно разложению функции в степенные ряды (например, ряды Тэйлора). Правомерность такого подхода следует из известной теоремы М. Фреше [86], согласно которой любой непрерывный функционал  $F[x]$ , заданный на множестве  $X$  функций  $x(t)$ , непрерывных на интервале  $T = [a, b]$ , с какой угодно степенью точности  $\varepsilon$  можно приблизить функциональным полиномом  $P_M[x]$

$$|F[x] - P_M[x]| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Требование непрерывности функционала  $F[x]$ , необходимое для приближения его последовательностью функциональных полиномов, с физической точки зрения означает отсутствие скачков в изменении выходного сигнала  $y(t)$  при малых изменениях входного сигнала  $x(t)$ . На практике данное условие выполняется для широкого класса нелинейных систем, имеющих гладкий характер нелинейности.

Если входной сигнал  $x(t)$  непрерывен всюду на действительной оси, то выходной сигнал  $y(t)$  системы может быть представлен сходящимся функциональным рядом Вольтерра

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(t)] = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K \int_{-\infty}^{\infty} h_m(\tau_1, \dots, \tau_m) \prod_{i=1}^m x(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (2.109)$$

В дискретном случае аналогом данного ряда является разложение вида

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(n)] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (2.110)$$

Определение 1.4. Цифровой *полиномиальной системой* порядка  $M$  будем называть дискретную систему, определяемую дискретным функциональным полиномом вида

$$y(n) = \sum_{m=0}^M H_m[x(n)] = \sum_{m=0}^M \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (2.111)$$

Отдельные составляющие уравнения (2.111), определяемые сверткой

$$y_m(n) = H_m[x(n)] = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} K \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i) \quad (2.112)$$

будем называть *однородной цифровой полиномиальной системой* порядка  $m$ .

При  $m = 1$  выражение (2.112) представляет собой обычную линейную свертку, определяющую линейный дискретную систему с импульсной характеристикой  $h_1(n)$ . Так как для  $m > 1$  свертка (2.112) нелинейная относительно  $x(n)$ , назовем ее *нелинейной сверткой порядка  $m$* . Такая свертка определяет однородную систему  $m$ -го порядка с ядром  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ . По аналогии с  $h_1(n)$  будем также называть ядро  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  *нелинейной импульсной характеристикой* порядка  $m$ .

Многие понятия линейных систем легко переносятся на случай полиномиальных систем. Условием физической реализуемости однородной системы порядка  $m$  является

$$h_m(n_1, \dots, n_m) = 0 \text{ при } n_i < 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

а гарантией его устойчивости является неравенство

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} |h_m(n_1, \dots, n_m)| < \infty.$$

Данное условие выполняется, если длительность нелинейной импульсной характеристики ограничена некоторой величиной  $N$ .

Таким образом, физически реализуемая устойчивая полиномиальная система  $M$ -го порядка можно представить в виде

$$y(n) = \sum_{m=0}^M \sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N-1} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i). \quad (2.113)$$

Для данной системы выходной сигнал  $y_m(n)$  в точке  $n$  нелинейным образом зависит от предшествующих  $N$  отсчетов  $x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)$  входного сигнала. Если рассматривать эти отсчеты как  $N$  переменных  $x_i = x(n-i+1)$ , то выражение (2.113) можно интерпретировать как полиномиальное приближение некоторой функции  $F(x_1, \dots, x_N)$  многих переменных. В зависимости от решаемой задачи функция  $F(x_1, \dots, x_N)$  может иметь различный смысл, характеризуя заданное поведение системы.

Как известно [49], импульсную характеристику  $h_1(n)$  можно рассматривать как реакцию линейной системы на единичный импульс. Нелинейным импульсным характеристикам  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  также можно дать наглядную интерпретацию. Согласно принципу суперпозиции реакция линейной системы на входной сигнал  $x(n) = \delta(n - s_1) + \delta(n - s_2)$  в виде суммы двух единичных импульсов будет равна

$$y_1(n) = H_1[\delta(n - s_1)] + H_1[\delta(n - s_2)] = h_1(n - s_1) + h_1(n - s_2). \quad (2.114)$$

Определим теперь реакцию  $y_2(n)$  однородной системы второго порядка на данную пару импульсов

$$y_2(n) = H_2[\delta(n - s_1)] + H_2[\delta(n - s_2)] + 2h_2(n - s_1, n - s_2).$$

В отличие от (2.114) выходной сигнал  $y_2(n)$  такой квадратичной полиномиальной системы наряду с реакциями на отдельные импульсы

содержит дополнительный член, равный  $2h_2(n - s_1, n - s_2)$  и определяющий взаимное влияние пары импульсов друг на друга. В общем случае можно показать, что при воздействии суммы  $m$  импульсов на однородную систему  $m$ -го порядка ее реакция будет равна

$$y_m(n) = \sum_{i=0}^m H_m[\delta(n - s_i)] + \sum \frac{m!}{v_1! \dots v_p!} h_m(n - i_1, \dots, n - i_m),$$

где первый член представляет собой сумму реакций на отдельные импульсы, а второй определяет их взаимодействие и образован различными сочетаниями  $(i_1, \dots, i_m)$  с повторениями из совокупности элементов  $(s_1, \dots, s_m)$ , причем каждое такое сочетание состоит из  $p$  групп ( $p > 1$ ), содержащих  $v_j$  равных между собой элементов.

Таким образом, нелинейная импульсная характеристика  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  определяет составляющую реакции  $y(n)$  системы, обусловленную взаимодействием  $m$  импульсов, расположенных от текущей точки  $n$  на расстоянии в  $i_1, \dots, i_m$  отсчетов. Так как произвольный дискретный сигнал  $x(n)$  можно представить в виде суммы  $\delta$ -функций

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\delta(n - i),$$

импульсную характеристику  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  порядка  $m$  можно рассматривать как количественную меру нелинейного взаимодействия между  $m$  отсчетами входного сигнала.

Одномерные функциональные ряды без труда обобщаются на многомерный случай [134]. Для  $r$ -мерных сигналов дискретный ряд Вольтерра можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} y(n_1, \dots, n_r) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m[x(n_1, \dots, n_r)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n_{11}=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_{1r}=-\infty}^{\infty} \sum_{n_{m1}=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_{mr}=-\infty}^{\infty} h_m(n_{11}, \dots, n_{1r}, \dots, n_{m1}, \dots, n_{mr}) \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{i=1}^m x(n - n_{i1}, K, n - n_{ir}),$$

где  $h_m(n_{11}, \dots, n_{1r}, \dots, n_{m1}, \dots, n_{mr})$  –  $r$ -мерное ядро Вольтерра порядка  $m$ , представляющее собой функцию  $rm$  аргументов. С целью упрощения выражений пространственные переменные далее будем объединять в векторы, записывая  $r$ -мерные сигналы и ядра в виде функций векторных аргументов:  $x(\mathbf{n}), y(\mathbf{n}), h_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m)$ , где  $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_r]^T$  и  $\mathbf{n}_i = [n_{i1} \ n_{i2} \ \dots \ n_{ir}]^T$ .

Многомерный полиномиальная модель системы характеризуется функциональным полиномом

$$y(\mathbf{n}) = \sum_{m=0}^M H_m[x(\mathbf{n})],$$

где  $x(\mathbf{n})$  и  $y(\mathbf{n})$  обозначают соответственно  $r$ -мерные входной и выходной сигналы,  $H_m[x(\mathbf{n})]$  – однородный  $r$ -мерный дискретный функционал  $m$ -го порядка, определяющий выходной сигнал  $y_m(\mathbf{n})$  однородного нелинейного фильтра  $m$ -го порядка и равный

$$y_m(\mathbf{n}) = H_m[x(\mathbf{n})] = \sum_{\mathbf{n}_1}^K \sum_{\mathbf{n}_m} h_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) \prod_{j=1}^m x(\mathbf{n} - \mathbf{n}_j), \quad (2.115)$$

где  $\sum_{\mathbf{n}}$  означает  $r$ -кратное суммирование по всем элементам вектора  $\mathbf{n}$ .

Назовем для краткости однородную систему уравнений описывающих полиномиальную систему вида (2.115)  $rm$ - системой.

При  $m = 1$  ядро  $h_m(\mathbf{n}_1)$  представляет собой обычную импульсную характеристику многомерной линейной системы, в то время как при  $m = 2, \dots, M$  ядра  $h_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m)$  можно рассматривать как импульсные характеристики высших порядков, характеризующие нелинейные свойства многомерных полиномиальных систем. Используя в качестве входного сигнала сумму пространственных  $\delta$ -функций, импульсную характеристику  $h_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m)$   $m$ -го порядка можно интерпретировать аналогично одномерному случаю, рассматривая ее как составляющую реакции системы, обусловленную взаимодействием  $m$  пространственных импульсов.

В заключение покажем, что имеет место тесная взаимосвязь между многомерной линейной и нелинейной системой аппроксимированной полиномиальными функциональными многочленами. Как известно [31], линейное многомерное преобразование сигнала  $u(n_1, \dots, n_s)$  описывается многомерной линейной сверткой вида

$$y(n_1, \dots, n_s) = \sum_{i_1=0}^{\infty} L \sum_{i_s=0}^{\infty} h(i_1, \dots, i_s) u(n_1 - i_1, \dots, n_s - i_s). \quad (2.116)$$

Как частные случаи, для  $s = 1$  получаем линейную свертку для одномерных систем, для  $s = 2$  – линейную свертку, описывающую двухмерные системы.

Допустим теперь, что  $s$ -мерный входной сигнал является сепарабельной функцией, т. е. представим в виде произведения  $m$  сигналов меньшей размерности  $r = s/m$ . Используя векторные аргументы, запишем:

$$u(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \prod_{j=1}^m x(\mathbf{n}_j). \quad (2.117)$$

Для данного воздействия выражение (2.116) принимает вид

$$y(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \sum_{\mathbf{i}_1} L \sum_{\mathbf{i}_m} h(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_m) \prod_{j=1}^m x(\mathbf{n}_j - \mathbf{i}_j).$$

Выделяя из выходного сигнала лишь диагональные блоки размерности  $r$ , т. е. полагая  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \dots = \mathbf{n}_m = \mathbf{n}$ , получим:

$$y_m(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}_1} L \sum_{\mathbf{i}_m} h(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_m) \prod_{j=1}^m x(\mathbf{n} - \mathbf{i}_j).$$

Это выражение есть не что иное, как нелинейная свертка, характеризующая  $rm$ -систему.

Таким образом, имеет место тесная взаимосвязь между многомерной линейной и полиномиальной нелинейной системой, состоящая в следующем. Выходной сигнал нелинейной системы порядка  $m$  и размерности  $r$  может быть получен из реакции многомерной линейной системы (прототипа) размерности  $rm$  при сепарабельном воздействии вида (2.117) путем выделения из выходного



сигнала данной системы лишь диагональных блоков размерности  $r$ . В частности, например, из шестимерного линейного системы в зависимости от представления  $s = 6$  в виде произведения  $rm$  могут быть построены следующие  $rm$ -системы:

1. Нелинейная система шестого порядка ( $r = 1, m = 6$ )

$$u(n_1, K, n_6) = \prod_{j=1}^6 x(n_j),$$

$$y_6(n) = y(n_1, K, n_6) \Big|_{n = n_1 = K = n_6}.$$

2. Двухмерный нелинейная система третьего порядка ( $r = 2, m = 3$ )

$$u(n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, n_{31}, n_{32}) = \prod_{j=1}^3 x(n_{j1}, n_{j2}),$$

$$y_3(\mathbf{n}) = y(\underbrace{n_{11}, n_{12}}_{\mathbf{n}_1}, \underbrace{n_{21}, n_{22}}_{\mathbf{n}_2}, \underbrace{n_{31}, n_{32}}_{\mathbf{n}_3}) \Big|_{\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3}.$$

3. Трехмерная нелинейная система второго порядка ( $r = 3, m = 2$ )

$$u(n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{21}, n_{22}, n_{23}) = \prod_{j=1}^2 x(n_{j1}, n_{j2}, n_{j3}),$$

$$y_2(\mathbf{n}) = y(\underbrace{n_{11}, n_{12}, n_{13}}_{\mathbf{n}_1}, \underbrace{n_{21}, n_{22}, n_{23}}_{\mathbf{n}_2}) \Big|_{\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2}.$$

### ***2.7. Аппроксимация нелинейной системы ортогональными полиномами***

Рассмотрим пространство функционалов  $F[x(n)]$ , заданных на множестве  $X = \{x(n): n \in T\}$  реализаций стационарного дискретного процесса  $x(n)$ , и определим норму и скалярное произведение функционалов в виде

$$\|F[x(n)]\|^2 = (F[x(n)], F[x(n)]),$$

$$(F_1[x(n)], F_2[x(n)]) = M \{F_1[x(n)] \cdot F_2[x(n)]\}.$$

Тогда задачу моделирования нелинейной системы с помощью полинома  $M$ -го порядка можно интерпретировать как аппроксимацию функционала

$$y(n) = F[x(n)],$$

описывающего поведение нелинейной системы, функциональным полиномом  $P_M[x(n)]$ , минимизирующим квадрат нормы

$$\|F[x(n)] - P_M[x(n)]\|^2 \rightarrow \min. \quad (2.118)$$

Решение данной задачи в гильбертовом пространстве функционалов [44] приводит к следующему уравнению:

$$(P_M[x(n)] - F[x(n)], P_M[x(n)]) = 0. \quad (2.119)$$

Определение ядер дискретного функционального полинома можно существенно упростить, если воспользоваться представлением  $P_M[x(n)]$  в виде суммы ортогональных функционалов

$$P_M[x(n)] = \sum_{m=0}^M G_m[h_m, x(n)]. \quad (2.120)$$

Полином, определяемый данным выражением, будем называть *ортогональным полиномом порядка  $M$  для класса входных сигналов  $x(n)$* . Ортогональность функционалов  $G_m[h_m, x(n)]$  в (2.120) понимается в смысле равенства нулю скалярного произведения функционалов различных порядков

$$(G_i[h_i, x(n)], G_j[h_j, x(n)]) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \|G_i[h_i, x(n)]\|^2, & i = j. \end{cases} \quad (2.121)$$

Заметим, что в отличие от разложения в ряд Вольтерра (2.110), являющегося обобщением ряда Тейлора, разложение оператора  $F[x(n)]$  по ортогональным функционалам  $G_m[h_m, x(n)]$  можно рассматривать как обобщенный ряд Фурье [137]. В этом случае ядра ортогонального полинома определяются из системы независимых уравнений вида

$$(F[x(n)], G_m[h_m, x(n)]) = \|G_m[h_m, x(n)]\|^2, \quad (2.122)$$

которая легко может быть получена из (1.119) с учетом свойства ортогональности (2.121).

Структура ортогональных функционалов  $G_m[h_m, x(n)]$  зависит от вероятностных свойств процесса  $x(n)$ . Для статических нелинейных систем без памяти ( $T = \{n\}$ ) определение ортогональных функционалов не составляет труда. Они фактически совпадают с обычными полиномами (Эрмита, Чебышева, Лежандра и др.), ортогональными с весом, равным плотности вероятности  $f(x)$  сигнала  $x(n)$  [38]. В случае динамических систем с памятью ( $T = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots \}$ ) и статистически независимыми процессами на входе для построения  $G_m[h_m, x(n)]$  также можно воспользоваться одномерными ортогональными полиномами [127, 131].

Пусть для процесса  $x(n)$  существует полиномиальный базис  $p_i[x(n)]$ , такой, что

$$M \{ p_i[x(n)] p_j[x(n)] \} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ p_i^2[x(n)], & i = j. \end{cases}$$

Вид полиномов определяется плотностью  $f(x)$  случайного процесса  $x(n)$ . В частности, для гауссова процесса  $x(n)$  с математическим ожиданием  $M\{x(n)\} = 0$  и дисперсией  $M\{x^2(n)\} = \sigma^2$  таким базисом будут являться многочлены Эрмита вида

$$p_m(x) = \sum_{r=0}^{\lceil m/2 \rceil} \frac{(-1)^r m! \sigma^{2r}}{r! 2^r (m-2r)!} x^{m-2r}, \quad (2.123)$$

первые из которых равны

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2 - \sigma^2, \quad p_3(x) = x^3 - 3\sigma^2 x. \quad (2.124)$$

Определим теперь симметричные многомерные полиномы вида

$$\Phi_m[\underbrace{x(i_1), \dots, x(i_1)}_{m_1}, \dots, \underbrace{x(i_s), \dots, x(i_s)}_{m_s}] = p_{m_1}[x(i_1)] \cdot \dots \cdot p_{m_s}[x(i_s)],$$

для которых  $m = m_1 + \dots + m_s$ , а все индексы  $i_1, \dots, i_s$  различны. Из статистической независимости отсчетов  $x(i_1), \dots, x(i_s)$  случайного процесса следует ортогональность таких полиномов в следующем смысле:

$$M \left\{ \Phi_m[\underbrace{x(i_1), \dots, x(i_1)}_{m_1}, \dots, \underbrace{x(i_s), \dots, x(i_s)}_{m_s}] \Phi_n[\underbrace{x(j_1), \dots, x(j_1)}_{k_1}, \dots, \underbrace{x(j_r), \dots, x(j_r)}_{k_r}] \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & (m \neq n) \text{ è } \forall \text{Per}(k_1, \dots, k_s) \neq (m_1, \dots, m_s); \\ \prod_{j=1}^s M \left\{ p_{m_j}^2 [x(i_j)] \right\}, & (m = n) \text{ è } \exists \text{Per}(k_1, \dots, k_s) = (m_1, \dots, m_s), \end{cases} \quad (2.125)$$

т. е. скалярное произведение полиномов отлично от нуля только в том случае, если их степени равны и существует перестановка  $\text{Per}(k_1, \dots, k_s)$  совокупности индексов  $(k_1, \dots, k_s)$ , переводящая ее в  $(m_1, \dots, m_s)$ .

Данное свойство дает основание утверждать, что функционалы вида

$$G_m[h_m, x(n)] = \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_m \in T} h_m(i_1, \dots, i_m) \Phi_m[x(n - i_1), \dots, x(n - i_m)] \quad (2.126)$$

будут удовлетворять условию (2.121) ортогональности. Используя в данном выражении полиномы Эрмита (2.124), получаем как частный случай известные функционалы Винера [24, 105]:

$$\begin{aligned} G_0[h_0, x(n)] &= h_0, & G_1[h_1, x(n)] &= \sum_{i \in T} h(i)x(n - i), \\ G_2[h_2, x(n)] &= \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} h_2(i_1, i_2)x(n - i_1)x(n - i_2) - \sigma^2 \sum_{i \in T} h_2(i, i), \\ G_3[h_3, x(n)] &= \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} \sum_{i_3 \in T} h_3(i_1, i_2, i_3)x(n - i_1)x(n - i_2)x(n - i_3) - \\ &- 3\sigma^2 \sum_{i_1 \in T} \sum_{i_2 \in T} h_3(i_1, i_2, i_2)x(n - i_1), \end{aligned} \quad (2.127)$$

ортогональные для белого гауссова шума  $x(n)$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Аналогичным образом можно построить ортогональные функционалы для случайных процессов типа белого шума с другими законами распределений. Известны, например, ортогональные функционалы для импульсных шумов с пуассоновским распределением, определяемые через многомерные многочлены Шарлье [137].

Для ортогональных функционалов вида (2.126) уравнение (2.122), определяющее его ядра  $h_m(i_1, \dots, i_m)$ , будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} M \left\{ y(n) \Phi_m[x(n - i_1) \cdot \mathbb{K} \cdot x(n - i_m)] \right\} &= \sum_{n_1} \sum_{n_m} h_m(n_1, \dots, n_m) \times \\ \times M \left\{ \Phi_m[x(n - i_1) \cdot \mathbb{K} \cdot x(n - i_m)] \Phi_m[x(n - n_1) \cdot \mathbb{K} \cdot x(n - n_m)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

С учетом свойства (2.125) ортогональности функционалов решение может быть получено в явном виде:

$$h_m(\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{i_s, \dots, i_s}_{m_s}) = \frac{m_1! \dots m_s! \mathbb{M}\{y(n)v_{m_1}(n-i_1) \dots v_{m_s}(n-i_s)\}}{m! \mathbb{M}\{v_{m_1}^2(n)\} \dots \mathbb{M}\{v_{m_s}^2(n)\}},$$

где  $v_i(n) = p_i[x(n)]$ , все  $i_1, \dots, i_s$  различны,  $m = m_1 + \dots + m_s$ , а  $m = 0, 1, \dots, M$ . Числитель полученного выражения представляет собой многомерную взаимную корреляционную функцию выходного сигнала  $y(n)$  системы и различных сигналов  $v_i(n)$ , полученных преобразованием входного сигнала  $x(n)$  ортогональными многочленами различного порядка, а знаменатель определяется произведением мощностей сигналов  $v_i(n)$ .

Для случайных процессов, отличных от белого шума (окрашенных), с корреляционной функцией  $R_x(n) \neq \delta(n)$ , условие (2.125) ортогональности многомерных полиномов будет нарушаться. В этом случае ортогональные функционалы  $G_m[h_m, x(n)]$  могут быть получены непосредственно из системы линейно независимых функциональных полиномов

$$P_m[x(n)] = \sum_{s=0}^m \sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_s \in T} h_s(i_1, \dots, i_s) \prod_{j=1}^s x(n-i_j), \quad m = 0, 1, \dots, M$$

с помощью процедуры ортогонализации Грама–Шмидта [70, 86]. Можно показать [131], что для гауссовых процессов с произвольной корреляционной функцией  $R_x(n)$  ортогональные функционалы Винера определяются выражением

$$G_m[h_m, x(n)] = \sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_m \in T} h_m(i_1, \dots, i_m) He_m[x(n-i_1), \dots, x(n-i_m)], \quad (2.129)$$

где  $h_m(i_1, \dots, i_m)$  – ядра Винера во временной области.

Входящие в (2.129) многомерные полиномы Эрмита в данном случае определяются следующим образом:

$$He_m[x(n_1), \dots, x(n_m)] = \sum_{r=0}^{[m/2]} (-1)^r \sum \left\{ \prod_{(r)} R_x(n_i - n_j) \prod_{(m-2r)} x(n_k) \right\}, \quad (2.139)$$

где  $R_x(n)$  – корреляционная функция процесса  $x(n)$ ,  $\lceil m/2 \rceil$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $m/2$ , а суммирование производится по всевозможным разбиениям совокупности  $\{n_1, \dots, n_m\}$  на  $r$  пар  $\{n_i, n_j\}$  и  $(m - 2r)$  элементов  $n_k$ . Например, первые полиномы будут равны

$$\begin{aligned} He_0 &= 1, & He_1[x(i)] &= x(i), & He_2[x(i_1), x(i_2)] &= x(i_1)x(i_2) - R_x(i_1 - i_2), \\ He_3[x(i_1), x(i_2), x(i_3)] &= x(i_1)x(i_2)x(i_3) - \\ &- x(i_1)R_x(i_3 - i_2) - x(i_2)R_x(i_3 - i_1) - x(i_3)R_x(i_2 - i_1). \end{aligned}$$

Свойство ортогональности данных полиномов имеет следующий вид:

$$M \{He_m[x(i_1), \dots, x(i_m)]He_m[x(j_1), \dots, x(j_n)]\} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \sum \prod_{(m)} R_x(i_s - j_r), & m = n, \end{cases} \quad (2.131)$$

где суммирование осуществляется по различным разбиениям (всего  $m!$ ) на пары  $(i_s, j_r)$ ,  $i_s \in (i_1, \dots, i_m)$ ,  $j_r \in (j_1, \dots, j_m)$ , а произведение содержит  $m$  сомножителей, соответствующих каждому такому разбиению. В отличие от выражения (2.125), определяющего условие ортогональности для белого шума, здесь скалярное произведение отлично от нуля как только  $m = n$  и не требуется существования перестановки  $Per(i_1, \dots, i_s) = (j_1, \dots, j_s)$ . Поэтому (2.131) отлично от нуля в большей области, чем (2.125).

Для функционалов (2.129) уравнение (2.128), определяющее оптимальные ядра ортогонального ряда Винера с окрашенным процессом на входе, выглядит

$$\sum_{i_1 \in T} K \sum_{i_m \in T} h_m(i_1, \dots, i_m) \prod_{j=1}^m R_x(n_j - i_j) = R_{yHe}(n_1, \dots, n_m), \quad (2.132)$$

где  $R_{yHe}(n_1, \dots, n_m) = M\{y(n)x(n - n_1) \dots x(n - n_m)\}$  представляет собой взаимную корреляционную функцию выходного сигнала  $y(n)$  системы и многомерного многочлена Эрмита вида (2.130) от входного сигнала  $x(n)$ . Хотя полученное уравнение и не допускает явного решения во временной области, как это было в случае белого шума, оно может быть решено в частотной. Действительно, вычисляя многомерное преобразование Фурье от обеих частей уравнения (2.132), получим:

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{S_{yHe}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{m! S_x(\omega_1) \cdot \dots \cdot S_x(\omega_m)}, \quad (2.133)$$

где  $S_x(\omega)$  – спектр мощности процесса  $x(n)$ ,  $S_{yHe}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  – преобразование Фурье функции  $R_{yHe}(n_1, \dots, n_m)$ .

Для выполнения практических расчетов ядер рядов Винера целесообразно выразить  $R_{yHe}(n_1, \dots, n_m)$  и  $S_{yHe}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  непосредственно через данные вход-выход моделируемой системы. Учитывая, что скалярное произведение функционала  $m$ -го порядка и однородного функционала меньшего порядка равно нулю, можно записать:

$$\begin{aligned} R_{yHe}(n_1, \dots, n_m) &= M \{ y_m(n) He_m[x(n - n_1), \dots, x(n - n_m)] \} = \\ &= M \left\{ y_m(n) \prod_{i=1}^m x(n - n_i) \right\}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

где сигнал  $y_m(n)$  формируется в виде разности выходных сигналов системы и ортогонального фильтра  $(m - 1)$ -го порядка

$$y_m(n) = y(n) - y_{m-1}(n) = y(n) - \sum_{i=1}^{m-1} G_i[h_i, x(n)]. \quad (2.135)$$

Правую часть (2.134) можно рассматривать как многомерную взаимную корреляционную функцию

$$R_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m) = M \left\{ y_m(n) \prod_{i=1}^m x(n - n_i) \right\},$$

а ее преобразование  $S_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  – как многомерный взаимный спектр разностного  $y_m(n)$  и входного  $x(n)$  сигналов системы. С использованием данных величин, выражение (2.133) для ядер Винера в частотной области может быть записано в следующей эквивалентной форме:

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{S_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{m! S_x(\omega_1) \cdot \dots \cdot S_x(\omega_m)}. \quad (2.136)$$

Найдем связь взаимного спектра  $S_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  процессов  $y_m(n)$  и  $x(n)$  с преобразованием Фурье их реализаций  $y_{mN}(n)$  и  $x_N(n)$  длительностью  $N$

отсчетов. Используя свойства преобразования Фурье, можно показать справедливость следующего соотношения [107]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[ Y_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \prod_{i=1}^m X^*(\omega_i) \right] = \\ & = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m) \exp(-j \sum_{i=1}^m n_i \omega_i), \end{aligned} \quad (2.137)$$

где  $Y_m(\omega)$  и  $X(\omega)$  – преобразования Фурье соответственно реализаций  $y_{mN}(n)$  и  $x_N(n)$ ;  $\hat{R}_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m)$  – оценка многомерной корреляционной функции, определяемая выражением

$$\hat{R}_{y_m x \dots x}(n_1, \dots, n_m) = \frac{1}{N} \sum_n y_{mN}(n) \prod_{i=1}^m x_N(n - n_i).$$

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей уравнения (2.137) и устремляя  $N$  к бесконечности, получим:

$$S_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} M \left\{ Y_m(\omega_1 + \dots + \omega_m) \prod_{i=1}^m X^*(\omega_i) \right\}. \quad (2.138)$$

Выражения (2.136) и (2.138) характеризуют ядра  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  Винера как многомерные периодические в комплексном пространстве функции, обладающие свойством симметрии относительно всевозможных перестановок аргументов и свойством комплексно сопряженной симметрии:

$$H_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = H_m^*(-\omega_1, \dots, -\omega_m) \quad (2.139)$$

относительно начала координат. Рассматривая ядро  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  на одном периоде, область его задания можно определить следующей системой неравенств:

$$\left. \begin{aligned} & |\omega_1 + \dots + \omega_m| \leq \Omega_y \leq \Omega/2, \\ & |\omega_i| \leq \Omega_x \leq \Omega/2, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

где  $\Omega$  – частота дискретизации,  $\Omega_x$  и  $\Omega_y$  – верхние граничные частоты входного и выходного сигналов системы. Отмеченные обстоятельства дают возможность ограничиться определением ядра Винера  $m$ -го порядка лишь в некоторой области  $m$ -мерного куба.



В заключение следует отметить, что несмотря на тождественность математической структуры рядов Вольтерра и Винера, последние имеют ряд преимуществ, так как ортогональный базис, в во-первых, позволяет существенно упростить определение ядер функционалов; во-вторых, дает возможность увеличения порядка системы без пересчета ранее полученных ядер и, в-третьих, облегчает статистический анализ характеристик системы и сигналов на его выходе.

## 2.8. Построение ортогональных функционалов для класса псевдослучайных сигналов

Опишем статистические свойства псевдослучайного процесса  $x(n)$ , определяемым дискретным аналогом известного разложения Райса – Пирсона [46] вида:

$$x(n) = \sum_{k=-N_x}^{N_x} X(k) \exp(j \frac{2\pi}{N} kn), \quad (2.141)$$

задаваемого с помощью высших моментов комплексных коэффициентов  $X(k)$  ДПФ [85]. Вследствие симметрии плотности распределения  $x(n)$  нечетные моменты  $X(k)$  равны нулю. Для моментов четных порядков имеем следующее соотношение:

$$M \left\{ \prod_{i=1}^{2m} X(k_i) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^m} \prod_{i=1}^{2m} A(k_i) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[ j \sum_{i=1}^{2m} \varphi(k_i) \right] \prod_{i=1}^{2m} d\varphi(k_i),$$

которое отлично от нуля лишь для тех наборов  $(k_1, \dots, k_{2m})$ , для которых

$$\sum_{i=1}^{2m} \varphi(k_i) = 0.$$

Данное условие выполняется только в том случае, если возможно разбиение совокупности  $\{\varphi(k_1), \dots, \varphi(k_{2m})\}$  на  $m$  пар  $\{\varphi(k_i), \varphi(-k_i)\}$ . Учитывая

это, запишем соотношение для первых двух четных моментов комплексных коэффициентов  $X(k)$ :

$$\begin{aligned} M\{X(k_1)X(k_2)\} &= A^2(k_1)\delta(k_1 + k_2), \\ M\{X(k_1)X(k_2)X(k_3)X(k_4)\} &= A^2(k_1)A^2(k_3)J(k_1, k_3)\delta(k_1 + k_2)\delta(k_3 + k_4) + \\ &+ A^2(k_1)A^2(k_2)J(k_1, k_2)\delta(k_1 + k_3)\delta(k_2 + k_4) + \\ &+ A^2(k_2)A^2(k_4)J(k_2, k_4)\delta(k_2 + k_3)\delta(k_1 + k_4), \end{aligned} \quad (2.142)$$

где коэффициент  $J(k_i, k_j)$  определяется следующим образом:

$$J(k_i, k_j) = \begin{cases} 1/2, & |k_i| = |k_j|; \\ 1, & |k_i| \neq |k_j| \end{cases}$$

и исключает повторный учет одной и той же комбинации. Так, например, для момента  $M\{X(k)X^*(k)X^*(k)X(k)\}$  вклад в (2.142) дают первое и второе слагаемые. Введение нормализующих коэффициентов  $J(k_i, k_j)$  позволяет получить правильный результат, равный  $A^4(k)$ .

Можно показать, что в общем случае соотношение для четных моментов  $X(k)$  имеет вид

$$M\left\{\prod_{i=1}^{2m} X(k_i)\right\} = \sum J(k_{i_1}, \dots, k_{i_m}) \prod_{r=1}^m A^2(k_{i_r}) \delta(k_{i_r} + k_{j_r}). \quad (2.143)$$

Здесь суммирование выполняется по различным разбиениям совокупности индексов  $\{k_1, \dots, k_{2m}\}$  на  $m$  пар  $\{k_{i_r}, k_{j_r}\}$ , а коэффициент  $J(k_{i_1}, \dots, k_{i_m})$  равен  $1/n_1! \dots n_m!$ , где  $n_i$  – количество аргументов из  $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_m}\}$ , имеющих одинаковые абсолютные значения, например  $J(-1, 1, 1, 2, -2) = 1/3!2!$ .

Полученная статистика позволяет наиболее просто выполнить процедуру ортогонализации в частотной области, определяя условие ортогональности следующим образом:

$$M \left\{ G_i[H_i, X(k)] \cdot G_j^*[H_j, X(k)] \right\} = 0, \quad i \neq j, \quad (2.144)$$

где  $G_i[H_i, X(k)]$  – изображение Фурье  $G_i[h_i, x(n)]$  как функции от  $n$ . Заметим, что из (2.144) следует также ортогональность функционалов во временной области в смысле (2.121), так как

$$M \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} G_i[H_i, X(k)] \cdot G_j^*[H_j, X(k)] \right\} = M \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} G_i[h_i, x(n)] \cdot G_j[h_j, x(n)] \right\}.$$

Воспользуемся далее известным алгоритмом Грама – Шмидта [64]. В качестве элементов системы линейно независимых функций возьмем дискретные однородные функционалы

$$F_m[h_m, x(n)] = \sum_{n_1, \dots, n_m} h_m(n_1, \dots, n_m) \prod_{i=1}^m x(n - n_i),$$

которые в частотной области могут быть записаны в виде

$$F_m[H_m, X(k)] = \sum_{k_1, \dots, k_m} H_m(k_1, \dots, k_m) \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod_{i=1}^m X(k_i).$$

В данных выражениях и далее для обозначения кратных сумм

$$\sum_{n_1=0}^{N-1} \dots \sum_{n_m=0}^{N-1} \quad \text{и} \quad \sum_{k_1=-N_x}^{N_x} \dots \sum_{k_m=-N_x}^{N_x}$$

используются следующие сокращенные обозначения  $\sum_{n_1, \dots, n_m}$  и  $\sum_{k_1, \dots, k_m}$ .

Положим  $G_0 = \delta_k^0$  и найдем функционал первого порядка

$$G_1[H_1, X(k)] = H_{10} \delta(k) + H_1(k) X(k),$$

ортогональный к  $G_0$

$$M \{G_1 \cdot G_0^*\} = H_{10}\delta(k) = 0.$$

Следовательно,  $H_{10} = 0$ , и ортогональный функционал  $G_1[H_1, X(k)]$  будет равен

$$G_1[H_1, X(k)] = H_1(k)X(k). \quad (2.145)$$

Найдем далее функционал второго порядка

$$G_2[H_2, X(k)] = H_{20}\delta(k) + H_{21}(k)X(k) + \\ + \sum_{k_1, k_2} H_2(k_1, k_2)\delta(k - k_1 - k_2)X(k_1)X(k_2),$$

ортогональный к  $G_0$  и  $G_1[H_1, X(k)]$ . Используя соотношение (2.143) для моментов комплексных коэффициентов  $X(k)$  и условие (2.144) ортогональности, получим:

$$M \{G_2 \cdot G_0^*\} = \left( H_{20} + \sum_{k_1} H_2(k_1, -k_1)A^2(k_1) \right) \delta(k) = 0,$$

$$M \{G_2 \cdot G_1^*\} = H_1^*(k)H_{21}(k)A^2(k) = 0.$$

Так как ядро  $H_1(k)$  – произвольная функция, то

$$H_{20}(k) = -\sum_{k_1} H_2(k_1, -k_1)A^2(k_1), \quad H_{21}(k) = 0$$

и выражение для функционала  $G_2[H_2, X(k)]$  принимает вид

$$G_2[H_2, X(k)] = \sum_{k_1, k_2} H_2(k_1, k_2)\delta(k - k_1 - k_2)X(k_1)X(k_2) - \\ - \sum_{k_1} H_2(k_1, -k_1)A^2(k_1)\delta(k).$$

Данное соотношение может быть также записано в следующей форме:

$$\begin{aligned}
G_2[H_2, X(k)] &= \sum_{k_1, k_2} H_2(k_1, k_2) \delta(k - k_1 - k_2) [1 - \delta(k_1 + k_2)] X(k_1) X(k_2) = \\
&= \sum_{k_1, k_2} H_2^*(k_1, k_2) \delta(k - k_1 - k_2) X(k_1) X(k_2), \quad (2.146)
\end{aligned}$$

где  $H_2^*(k_1, k_2)$  – функция, тождественно равная нулю на диагонали  $k_1 = -k_2$  и  $H_2(k_1, k_2)$  в остальных точках.

Определим функционал  $G_3[H_3, X(k)]$  третьего порядка в виде

$$\begin{aligned}
G_3[H_3, X(k)] &= H_{30} \delta(k) + H_{31}(k) X(k) + \\
&+ \sum_{k_1, k_2} H_{32}(k_1, k_2) \delta(k - k_1 - k_2) X(k_1) X(k_2) + \\
&+ \sum_{k_1, k_2, k_3} H_3(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 - k_2 - k_3) X(k_1) X(k_2) X(k_3)
\end{aligned}$$

и вычислим математическое ожидание от произведения данного функционала на ортогональные функционалы меньших порядков

$$M \{G_3 \cdot G_1^*\} = H_1^*(k) A^2(k) \left[ H_{31}(k) + 3 \sum_{k_1} H_3(k, k_1, -k_1) J(k, k_1) A^2(k_1) \right],$$

$$\begin{aligned}
M \{G_3 \cdot G_2^*\} &= 2 \sum_{k_1, k_2} H_{32}(k_1, k_2) H_2^*(k_1, k_2) A^2(k_1) A^2(k_2) \delta(k - k_1 - k_2) \times \\
&\times [2 - \delta(k_1 - k_2)] [1 - \delta(k_1 + k_2)].
\end{aligned}$$

Приравнивая полученные математические ожидания нулю, получим искомые ядра ортогонального функционала третьего порядка:

$$H_{31}(k) = -3 \sum_{k_1} H_3(k, k_1, -k_1) J(k, k_1) A^2(k_1), \quad H_{32}(k) = 0.$$

Тогда выражение для ортогонального функционала  $G_3[H_3, X(k)]$  примет вид

$$\begin{aligned} G_3[H_3, X(k)] &= \sum_{k_1, k_2, k_3} H_3(k_1, k_2, k_3) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) X(k_1) X(k_2) X(k_3) - \\ &- 3 \sum_{k_1} H_3(k, k_1, -k_1) J(k, k_1) A^2(k_1) X(k). \end{aligned}$$

Данный функционал может быть записан в следующей форме:

$$\begin{aligned} G_3[H_3, X(k)] &= \sum_{k_1, k_2, k_3} H_3(k_1, k_2, k_3) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) \times \\ &\times [1 - \delta(k_1 + k_2)][1 - \delta(k_1 + k_3)][1 - \delta(k_2 + k_3)] X(k_1) X(k_2) X(k_3) = \\ &= \sum_{k_1, k_2, k_3} \mathcal{H}_3(k_1, k_2, k_3) \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) X(k_1) X(k_2) X(k_3), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{H}_3(k_1, k_2, k_3)$  – функция, тождественно равная нулю на диагоналях  $k_1 = -k_2, k_1 = -k_3, k_2 = -k_3$  и  $H_3(k_1, k_2, k_3)$  в остальных точках.

Аналогичным образом могут быть получены ортогональные функционалы более высоких порядков. В общем случае ортогональный функционал  $m$ -го порядка будет иметь вид

$$\begin{aligned} G_m[H_m, X(k)] &= \sum_{k_1, \dots, k_m} H_m(k_1, \dots, k_m) \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod [1 - \delta(k_r + k_j)] \prod_{i=1}^m X(k_i) = \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_m} \mathcal{H}_m(k_1, \dots, k_m) \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod_{i=1}^m X(k_i), \end{aligned} \quad (2.147)$$

где  $\prod [1 - \delta(k_r + k_j)]$  означает произведение  $m(m-1)/2$  сомножителей, образованных всевозможными сочетаниями  $(r, j)$  из совокупности элементов  $\{1, \dots, m\}$ ;  $\mathcal{H}_m(k_1, \dots, k_m)$  – ядро, тождественно равное нулю, если хотя бы два аргумента равны по модулю и имеют противоположные знаки.

Ядра Винера полученной модели, оптимальные в среднеквадратическом смысле, определим из уравнения (2.122), которое в частотной области имеет вид

$$M \left\{ \sum_k |G_m[H_m, X(k)]|^2 \right\} = M \left\{ \sum_k Y(k) G_m^*[H_m, X(k)] \right\}, \quad (2.148)$$

где  $Y(k)$  – ДПФ выходного сигнала системы.

Подставляя в (2.148) выражение для ортогонального функционала нулевого порядка, получим

$$M \left\{ \sum_k \dot{I}_0^2 \delta(k) \right\} = M \left\{ \sum_k Y(k) \dot{I}_0 \delta(k) \right\},$$

и, следовательно,  $\dot{I}_0 = M \{Y(0)\}$ .

Полагая далее в (2.148)  $m = 1$  и учитывая (2.145), запишем уравнение, определяющее ядро Винера первого порядка

$$\sum_k \dot{I}_1(k) H_1^*(k) A^2(k) = \sum_k H_1^*(k) A^2(k_1) M \{Y(k) X^*(k)\},$$

из которого следует, что

$$\dot{I}_1(k) = \frac{M \{Y(k) X^*(k)\}}{A^2(k)}.$$

Определим ядро Винера второго порядка. Подставляя в уравнение (2.148) выражение (2.146) для ортогонального функционала  $G_2[H_2, X(k)]$ , после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} 2! \sum_{k_1, k_2} \dot{I}_2(k_1, k_2) H_2^*(k_1, k_2) A^2(k_1) A^2(k_2) J(k_1, k_2) = \\ = \sum_{k_1, k_2} H_2^*(k_1, k_2) M \{Y(k_1 + k_2) X^*(k_1) X^*(k_2)\}. \end{aligned}$$

Из рассмотрения данного уравнения имеем

$$H_2(k_1, k_2) = \frac{[1 - \delta(k_1 + k_2)] M \{Y(k_1 + k_2) X^*(k_1) X^*(k_2)\}}{2! J(k_1, k_2) A^2(k_1) A^2(k_2)}.$$

Таким же образом может быть получено уравнение, определяющее ядро Винера  $m$ -го порядка

$$\begin{aligned} m! \sum_{k_1, K, k_m} \tilde{H}_m(k_1, K, k_m) H_m^*(k_1, K, k_m) J(k_1, K, k_m) \prod_{i=1}^m A^2(k_i) = \\ = \sum_{k_1, K, k_m} H_m^*(k_1, K, k_m) M \left\{ Y(k_1 + L + k_m) \prod_{i=1}^m X^*(k_i) \right\}, \end{aligned}$$

анализ которого приводит к следующему результату:

$$H_m(k_1, K, k_m) = \frac{\prod [1 - \delta(k_r + k_j)] M \left\{ Y(k_1 + K + k_m) X^*(k_1) \cdot X^*(k_m) \right\}}{m! J(k_1, K, k_m) A^2(k_1) \cdot A^2(k_m)}, \quad (2.149)$$

где  $\prod [1 - \delta(k_r + k_j)]$  имеет тот же смысл, что и в (2.147).

Полученные выражения (2.147) и (2.148) для ортогональных функционалов и ядер Винера могут быть записаны в более простом виде, если принять во внимание свойство симметрии ядер  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  относительно перестановки аргументов и определить опорную область  $D_m$  как множество всевозможных сочетаний индексов  $(k_1, \dots, k_m)$  из совокупности чисел  $\{-N_x, \dots, -1, 1, \dots, N_x\}$ , таких, что  $k_i \neq -k_j$ . Тогда на основании (2.149) ортогональный функционал  $m$ -го порядка можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} G_m[H_m, X(k)] = \sum_{D_m} m! J(k_1, K, k_m) H_m(k_1, K, k_m) \times \\ \times \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod_{i=1}^m X(k_i). \end{aligned} \quad (2.150)$$

Так как выражения (2.149) и (2.150) содержат один и тот же множитель  $m! J(k_1, \dots, k_m)$  они допускают дальнейшее совместное упрощение и приобретают следующий окончательный вид:



$$G_m[H_m, X(k)] = \sum_{D_m} H_m(k_1, K, k_m) \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod_{i=1}^m X(k_i),$$

$$H_m(k_1, K, k_m) = \frac{M \left\{ Y(k_1 + K + k_m) X^*(k_1) \cdot X^*(k_m) \right\}}{A^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)}.$$

### 3. Математические модели внешних воздействий

#### 3.1. Характеристики внешних воздействий и их оценивание

Внешние воздействия, как отмечалось в п. 1.1 могут быть полезными (управляющими сигналами  $u$ ) и помехами (возмущающими воздействиями  $f$ ). Управляющие сигналы, вырабатываемые устройством управления, являются полностью наблюдаемыми. Возмущающие воздействия, в отличие от них, как правило, ненаблюдаемые и случайные сигналы. В результате выходные переменные объекта  $y(t)$  определяются не только входными сигналами  $x(t)$ , но и ненаблюдаемыми и неуправляемыми воздействиями (помехами), что вызывает неконтролируемые отклонения выходных переменных от заданных значений. При повторения процессов управления, происходящих в системе, выходные переменные могут иметь различные значения при одних и тех же значениях времени отсчитываемых от начала процесса. Выходная величина объекта при каждом повторном цикле управления, в этом случае, представляет собой реализацию одного и того же случайного процесса управления.

Таким образом, под действием ненаблюдаемых, неуправляемых и случайных внешних воздействий наблюдаемые переменные объекта также становятся случайными сигналами, являющимися реализациями случайного процесса управления.

Для количественной оценки и сравнения различных случайных сигналов используют различные характеристики этих сигналов, представляющие собой абстрактные математические понятия, которые существуют объективно, но не могут быть измерены или определены в строгом смысле слова.

К таким характеристикам относятся

1. Функция распределения вероятностей случайного процесса, или интегральная функция распределения.  $F(y, t)$ , Функция распределения вероятностей, это вероятность того, что случайный процесс  $x(t)$  в момент времени  $t$  принимает значения меньше  $y$

$$F(y) = P\{x(t) < y\}. \quad (3.1)$$

2. Плотность вероятностей, или дифференциальное распределение (распределение)  $w(x, t)$ .

$$F(y, t) = \int_{-\infty}^y w(x, t) dx, \quad (3.2)$$

откуда

$$w(y, t) = \frac{dF(y, t)}{dy}.$$

(3.3)

3. Математическое ожидание случайного процесса  $M[x(t)] = m(t)$ ,

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(x, t) dx. \quad (3.4)$$

4. Дисперсия случайного процесса

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 w(x, t) dx, \quad (3.5)$$

или

$$D(t) = M[x^2(t)] - \{m(t)\}^2.$$

(3.6)

4. Корреляционная (автокорреляционная) функция  $R_{xx}(t_1, t_2)$ .

Корреляционная функция это математическое ожидание произведений двух значений одного и того же сигнала, сдвинутых по времени.

$$R_{xx}(t_1, t_2) = M[x(t_1), x(t_2)]. \quad (3.7)$$

5. Взаимная корреляционная функция  $R_{xy}(t_1, t_2)$ .

Взаимная корреляционная функция это математическое ожидание произведений двух сигналов один из которых сдвинут относительно другого по времени.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M[x(t_1), y(t_2)]. \quad (3.8)$$

Точное определение этих характеристик невозможно, так как неизвестен вид закона распределения и конечно число реализаций случайного процесса. Поэтому в реальных условиях эти характеристики вычисляют приблизительно, оценивая их с какой-то погрешностью.

Оценка характеристик случайных процессов проводится на основе роинятия гипотез о стационарности и эргодичности случайного процесса.

Случайный процесс называют стационарным, если характеризующая его функция распределения не зависит от времени. Отсюда следует, что от времени не будут зависеть и все характеристики случайного процесса. Условие стационарности значительно упрощает вычисление характеристик случайных процессов, так как в выражениях (3.1) - (3.8) исчезает аргумент времени. Однако и в этом случае для вычисления характеристик необходимо достаточно большое количество независимых реализаций случайного процесса (ансамбль реализаций).

Эргодическая гипотеза позволяет заменить ансамбль реализаций одной реализацией снятой за достаточно продолжительный интервал времени. Согласно эргодической гипотезе средние значения случайного сигнала по множеству и времени совпадают.

$$M[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.9)$$

Тогда для случайных стационарных эргодических процессов оценки их характеристик (3.1) - (3.8) с учетом конечности времени наблюдения  $T$ , записываются в следующем виде.

1. Оценка математического ожидания

$$\hat{m} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (3.10)$$

2. Оценка дисперсии

$$\hat{D} = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m]^2 dt, \quad (3.11)$$

или

$$D = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T x^2(t) dt - \int_0^T x(t) dt \right]. \quad (3.12)$$

### 3. Оценка корреляционной функции

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_0(t)x_0(t+\tau)dt, \quad (3.13)$$

где  $x_0(t) = x(t) - \hat{m}$  - центрированный случайный сигнал.

Корреляционную функцию центрированного сигнала еще называют ковариационной или автоковариационной функцией.

4. Спектральная плотность мощности  $S(\omega)$ , связанная с корреляционной функцией преобразованием Фурье.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.14)$$

Для получения приемлемой точности оценок характеристик случайных процессов длительность реализации процесса по которой вычисляются оценки должна превышать интервал корреляции. Интервал корреляции  $\tau_{\max}$  это значение аргумента корреляционной функции начиная с которого все ее последующие значения не превышают  $(0,01 - 0,05R(0))$ .

Более подробно о вычислении характеристик случайных процессов и их оценок можно познакомиться в специальной литературе [8, 12, 23, 25, 27, 31, 32, 38, 49, 54, 59, 63, 77, 99].

**Пример 3.1.** Вычислим статистические характеристики входного и выходного сигналов линейной системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2}{10p + 1}.$$

Входной сигнал генерируется оператором **randn** MATLAB и является случайной функцией с нормальным распределением.

Ниже приводится программа и результаты расчетов.

```

w=tf(2,[10,1]) % Передаточная функция системы
tm=1000;
t=1:tm; % Задание времени наблюдения
n=length(t); % Вычисление длины вектора времени
u=randn(1,tm); % Формирование входного сигнала
y=lsim(w,u,t); % Формирование выходного сигнала
plot(t,u,t,y)
tau=-tm+1:1:tm-1;
mu=mean(u) % Вычисление среднего значения входного сигнала
my=mean(y) % Вычисление среднего значения выходного сигнала
du=std(u)% Вычисление среднеквадратичного отклонения входного сигнала
dy=std(y) % Вычисление среднеквадратичного отклонения выходного сигнала
ruu=xcorr(u,u,'biased'); % Вычисление корреляционной функции входного сигнала
ryu=xcorr(y,u,'biased'); % Вычисление корреляционной функции выходного
сигнала
ryy=xcorr(y,y,'biased'); % Вычисление взаимной корреляционной функции
subplot (3,1,1)
plot(tau,ruu),grid
subplot(3,1,2)
plot(tau,ryu),grid
subplot(3,1,3)
plot(tau,ryy),grid
pause
subplot(2,1,2)
[Su,f]=psd(u,n,1); % Вычисление спектральной плотности входного сигнала
[Sy,f]=psd(y,n,1); % Вычисление спектральной плотности выходного сигнала
subplot(2,1,1)
plot(f,Su),grid
subplot(2,1,2)
plot(f,Sy),grid

```

$$m_u = -0,0376; m_y = -0,0736; \sigma_u = 1,0191; \sigma_y = 0,3901/$$

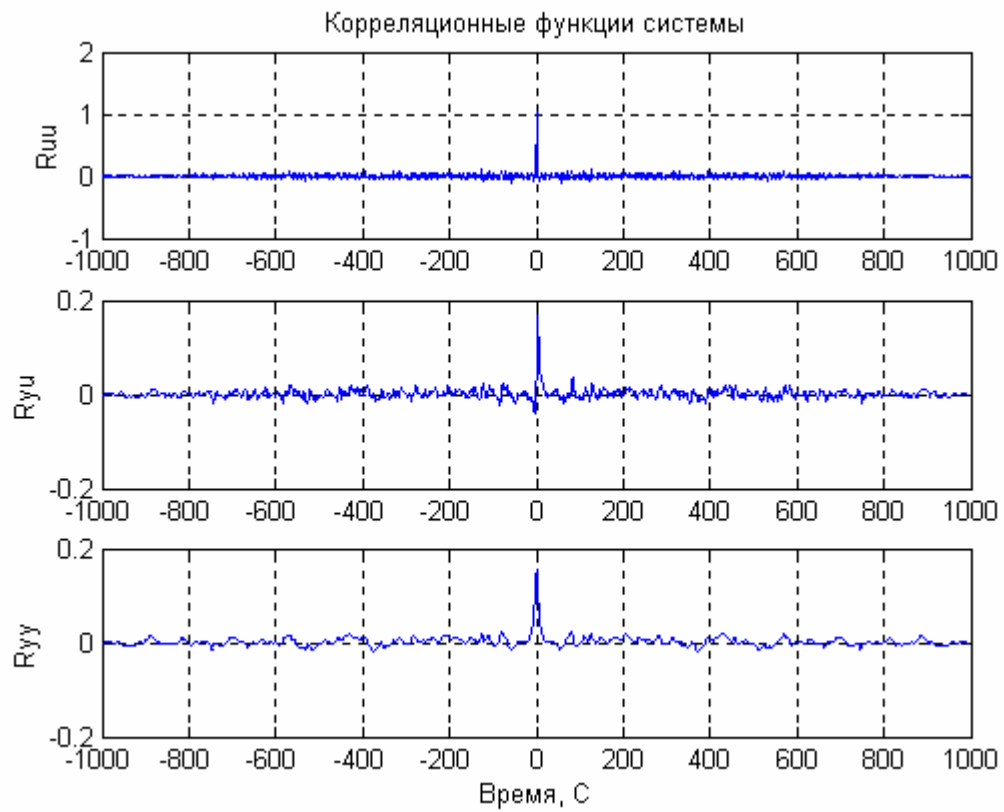


Рис. 3.1.

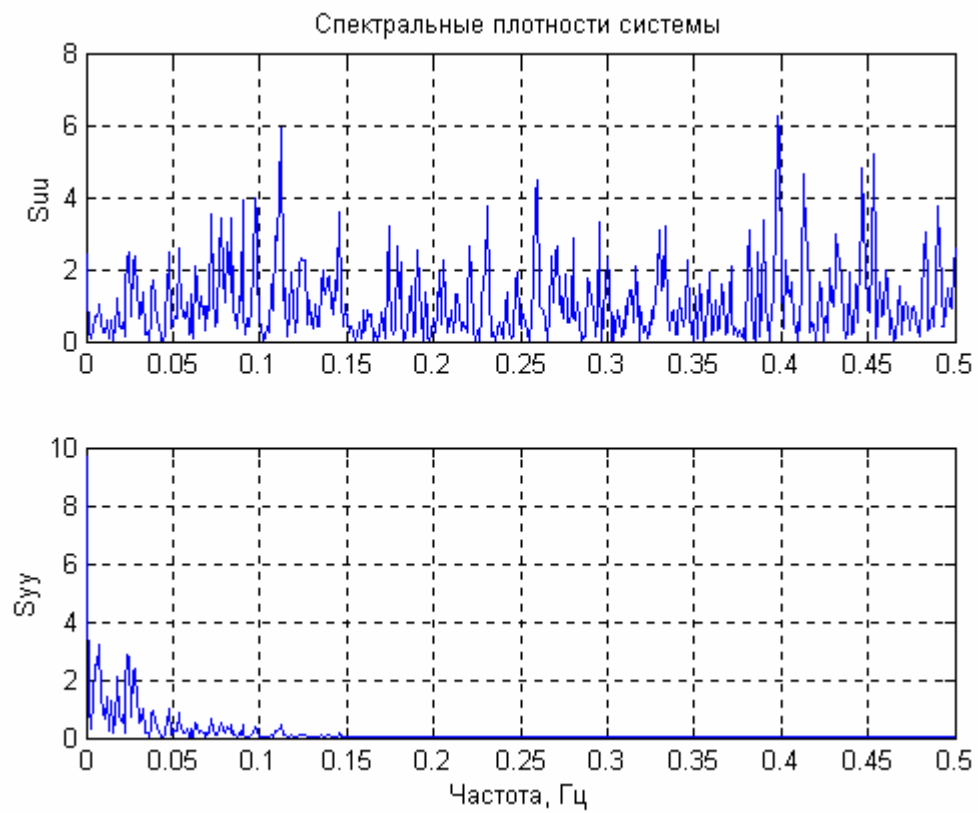


Рис. 3.2.

### 3.2. Модели помех в реальных системах

В [17, 81] показано, что в условиях индустриального развитого промышленного производства действуют различные виды помех, которые, воздействуя на информационные каналы технических систем, приводят к тому, что искаженный сигнал отличается от полезного сигнала, полученного от источника сообщения  $y(t)$ , и в общем случае имеет вид

$$y(t) = C[v(t)]x(t) + e(t), \quad (3.15)$$

где  $v(t)$  – мультипликативная составляющая помехи;  $e(t)$  – аддитивная составляющая.

Мультипликативная составляющая может быть сведена к эквивалентной аддитивной составляющей [39]. Поэтому выражения, полученные для случая аддитивных ошибок, могут быть использованы и при наличии мультипликативной ошибки, для чего величина  $C[v(t)]$  в выражении (3.15) заменяется величиной эквивалентной аддитивной ошибки  $e(t)_{\text{адд.экв.}}$ .

В дальнейшем будем считать, что воздействие помех на полезный сигнал носит исключительно аддитивный характер, и рассматривать только аддитивные помехи. Сигнал в этом случае будет иметь вид

$$y(t) = x(t) + e(t). \quad (3.16)$$

Принимая обозначения плотности распределения  $p(e)$  для флюктуационных шумов и  $h(e)$  для импульсных помех, запишем результирующую плотность распределения в виде аддитивной смеси распределения флюктуационных и импульсных помех [17, 18]:

$$p(e, \delta) = (1 - \delta)p(e) + \delta h(e). \quad (3.17)$$

Результирующая плотность имеет вид одномодального симметричного распределения с центральной частью, похожей на нормальное распределение, и более «тяжелыми» хвостами. Так, для вероятностного описания распределения процесса, почти совпадающего с распределением Гаусса либо соответствующего асимптотического распределения оценок параметров

процесса, необходимо применение более чем одного распределения конечной размерности.

Несмотря на широкий спектр описаний процессов, можно выделить некоторые типы редких выбросов, которые присутствуют в таких процессах [82]. Первый тип – редкие выбросы или выбросы с сильно отличающимися значениями, природа которых связана с различными погрешностями при регистрации данных. Их можно описывать как независимые одинаково распределенные величины (выбросы).

Второй тип – неоднородные выбросы, поведение которых только отчасти связано с поведением оставшейся части последовательности выбросов. Такие выбросы обуславливаются сбоями в работе регистрирующей аппаратуры или особенностями процесса.

Третий тип – неоднородность, в случае которой характер выбросов определяется самой последовательностью сбоев (встречается редко).

Модель аддитивных выбросов (АО-модель) описывает наиболее простым образом особенности первых двух типов.

Пусть  $w(k)$  – выборка из стационарного, полностью недетерминированного случайного процесса, описываемого распределением Гаусса с нулевым средним значением;  $const$  – параметр сдвига;  $v(k)$  – выборка из процесса, элементы которой не зависят от  $w(k)$ , и их распределение удовлетворяет условию  $P(v(k) = 0) = 1 - \delta$ . Тогда наблюдаемый процесс записывается так:

$$y(k) = const + v(k) - w(k), \quad k = \overline{1, n}. \quad (3.18)$$

Структура  $v(k)$ , как последовательности независимым образом распределенных величин, обеспечивает моделирование первого типа выбросов.

Процессы  $v(k)$ , значения которых коррелированы друг с другом, но не с процессом  $w(k)$ , будут давать вариант второго типа.

Третий тип особенностей можно получить, если предположить  $v(k) = 0$  и негауссово распределение  $w(k)$ . В силу того, что  $w(k)$  – недетерминированный процесс, можно записать:



$$w(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i e(k-i), \quad (3.19)$$

где  $e(k)$  – начальная последовательность некоррелированных случайных величин, имеющих нулевое среднее значение и  $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$ .

Предполагается, что  $w(k)$  имеет конечную дисперсию [39].

Таким образом, если  $e(k)$  подчиняется распределению (3.17), то в этом случае модель вида

$$y(k) = \text{const} + w(k) \quad (3.20)$$

называется моделью выбросов с обновлением (ИО – моделью).

Если  $w(k)$  описывается моделью Гаусса, выбросов нет.

Следует отметить, что если процесс  $\{v(k)\}$  имеет смешанное распределение (например, описываемое выражением (3.17)), то в случае АО-модели выбросов такое же распределение будет иметь сам процесс  $\{y(k)\}$ .

Очевидно, что более сложные модели по сравнению с АО- и ИО-моделями точнее описывают временные ряды, однако задача оценивания становится сложной даже в случае использования этих моделей. Далее в задаче идентификации будет использована АО-модель.

### 3.3. Математические модели внешних воздействий

Задача получения математической модели внешних возмущений заключается в воспроизведении случайного, стационарного, эргодического сигнала, имеющего заранее заданные статистические характеристики и удовлетворяющего условиям марковского случайного процесса. У марковского процесса вероятность реализации текущего значения случайной величины зависит только от ее предыдущего значения и не зависит от всех остальных предшествующих значений.

Одним из наиболее распространенных подходов к моделированию случайных сигналов является метод формирующих фильтров [15, 26, 32, 51, 56,

80]. Моделирование случайного сигнала этим методом осуществляется в предположении, что он является реакцией линейной системы на случайный входной сигнал, характеристики которого известны.

Пусть на вход линейной системы с передаточной функцией  $W(p)$  и функцией веса  $\omega(t)$  действует центрированный, стационарный, эргодический, случайный сигнал  $x(t)$  с известной корреляционной функцией  $R_{xx}(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_{xx}(\omega)$ . Тогда случайный сигнал на выходе системы вычисляется с помощью интеграла Дюамеля по формуле

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau)x(t - \tau)d\tau. \quad (3.21)$$

Умножив это выражение сначала на  $x(t + \tau)$ , а затем на  $y(t + \tau)$ , и проинтегрировав обе части по  $\tau$  в пределах от  $-T$  до  $T$  (при  $T \rightarrow \infty$ ), получим соотношения Винера - Ли:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)R_{xx}(t - \tau)dt \\ R_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)R_{yx}(t - \tau)dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

Отсюда следует, что

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\omega\omega}(\tau)R_{xx}(t - \tau)dt, \quad (3.23)$$

где

$$R_{\omega\omega}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau)\omega(\tau + \lambda)d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 e^{j\omega\lambda} d\omega. \quad (3.24)$$

Эти соотношения значительно упрощаются, если представить их через спектральные плотности, используя соотношения Винера – Хинчина (3.14)

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= W(j\omega)S_{xx}(\omega); \\ S_{yx}(\omega) &= W(-j\omega)S_{xx}(\omega); \\ S_{yy}(\omega) &= W(-j\omega)S_{yx}(\omega) = W(j\omega)S_{yx}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \end{aligned} \quad (3.25)$$

При моделировании в качестве входного сигнала используют стационарный белый шум со следующими характеристиками

$$S_{xx} = S_0$$

$$R_{xx} = \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{j\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau), \quad (3.26)$$

где  $S_0$  – интенсивность белого шума.

Белый шум представляет собой сумму гармонических колебаний всех частот, имеющих одну и ту же дисперсию амплитуды.

При наличии на входе линейной системы белого шума на ее выходе формируется случайный сигнал, характеристики которого легко определяются через параметры системы с помощью формул (3.22) – (3.25).

$$R_{xy}(\tau) = S_0 \omega(\tau)$$

$$R_{yy}(\tau) = S_0 R_{\omega\omega}(\tau), \quad (3.27)$$

$$S_{yy}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_0. \quad (3.28)$$

Очевидно, что успех и точность статистического моделирования зависят в основном от качества формирования последовательности случайных чисел имеющих свойства белого шума.

Задача получения последовательности случайных чисел обычно разбивается на две. Вначале получают последовательность случайных чисел, имеющих равномерное распределение в интервале  $[0, 1]$ . Затем из нее получают последовательность случайных чисел, имеющих произвольный закон распределения. Один из способов такого преобразования состоит в использовании нелинейных преобразований. Пусть необходимо получить случайную величину  $x$ , функция распределения вероятностей которой

$$F(y) = P\{x \leq y\}. \quad (3.29)$$

Значения искомой функция распределения вероятностей лежат в диапазоне  $0 \leq F(y) \leq 1$ . Если теперь придавать функции  $F(y)$  произвольные случайные значения, лежащее в диапазоне ее существования  $[0,1]$ , то значения

ее аргумента будут иметь заданный закон распределения. Значения функции  $F(y)$  задаются от датчика случайных чисел имеющих равномерное распределение в диапазоне  $[0,1]$ , а значения аргумента находятся как обратная функция от  $F(y)$ .

$$\begin{aligned} x &= F_{обр}(y) \\ 0 &\leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Таким образом, основная проблема моделирования случайных последовательностей заключается в получении независимых, равномерно распределенных чисел в интервале  $[0,1]$ . Различают два способа получения таких чисел – физический (аппаратный) и алгоритмический (программный).

При аппаратном генерировании чаще всего используют шумящие электронные устройства, шум которых связан с шумами электронных ламп или транзисторов. При усилении этих шумов получается напряжение, которое является случайным процессом. Если брать его значения, достаточно далеко отстоящие друг от друга, так чтобы они были некоррелированы, то величины получаемых напряжений образуют последовательность независимых случайных величин.

Для программной генерации случайных чисел разработано большое количество специальных программ, имеющихся практически в каждом языке программирования. На ЦВМ принципиально невозможно получить идеальную последовательность случайных чисел из-за конечного числа разрядов, поэтому такие последовательности являются псевдослучайными. Псевдослучайные последовательности характеризуются длиной отрезка аперидичности и длиной периода. Под длиной отрезка аперидичности понимается совокупность последовательно полученных случайных чисел, в которой ни одно число не встречается дважды. Под длиной периода последовательности случайных чисел понимается такая длительность этой последовательности, при превышении которой, числа начнут периодически повторяться. У современных программ эти характеристики имеют порядок  $10^{10}$ - $10^{30}$ , что вполне приемлемо для задач моделирования случайных процессов.

При моделировании непрерывных систем в качестве генератора белого шума можно использовать телеграфную волну, порождаемую процессом Пуассона, который в свою очередь является частным случаем марковского процесса. Функция, задаваемая телеграфной волной, принимает только положительные и отрицательные значения равные по модулю, причем последовательность изменений знака представляет собой процесс Пуассона со средней скоростью изменения  $\lambda$ . Такой процесс стационарен и эргодичен, если он начинается с  $t \rightarrow -\infty$  и для него

$$\begin{aligned} M[x(t)] &= 0 \\ R_{xx}(\tau) &= a^2 e^{-2\lambda|\tau|} \quad . \\ S_{xx}(\omega) &= \frac{4a^2\lambda}{\omega^2 + 4a^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Если выбрать среднюю скорость изменения знака телеграфной волны в несколько раз большей частоты генерируемого случайного сигнала, то приближенно можно считать, что телеграфная волна обладает свойствами белого шума.

**Пример 3.2.** Сгенерируем последовательности псевдослучайных чисел имеющих равномерный, нормальный и экспоненциальный законы распределения. Генерация псевдослучайных чисел  $r_n$  имеющих равномерный закон распределения в диапазоне  $[0,1]$  осуществляется программно рекуррентным мультипликативным способом с последующим усечением старших разрядов по формуле:

$$r_{n+1} = D(Kr_n), \quad (3.32)$$

где  $D$  – операция выделения дробной части числа  $Kr_n$ ,  $K$  – любое достаточно большое простое число, выбрано ( $K=37$ ),  $n=1,2,3,\dots$ . Для запуска программы необходимо задать начальное значение  $r_1 < 1$ , т.е. провести рандомизацию. По умолчанию выбрано  $r_1=0,1234567$ .

Для получения случайных чисел имеющих равномерное распределение в другом диапазоне  $[a,b]$  используют случайные числа  $r_n$  имеющих равномерный

закон распределения в диапазоне  $[0,1]$  с последующем пересчетом искомым чисел по формуле:

$$R_n = (b - a)r_n + a, \quad (3.33)$$

Генерация случайных чисел с нормальным законом распределения, имеющим нулевое математическое ожидание ( $m=0$ ) и единичную дисперсию ( $\sigma^2=1$ ) проводится по формуле

$$n_n = \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{r_n}\right)} \cos(2\pi r_{n-1}). \quad (3.34)$$

Для получения случайных чисел  $N_n$  с другими параметрами закона распределения используют формулу:

$$N_n = \sigma n_n + m. \quad (3.35)$$

Генерация случайных чисел с экспоненциальным законом распределения проводится методом обратной функции по формуле

$$E_n = -\frac{\ln(1 - r_n)}{\lambda}. \quad (3.36)$$

Программа и результаты расчетов приводятся ниже.

```

r(1)=.1234567; % Начальное значение случайного числа
l=.01; % Параметр экспоненциального закона распределения
for i=2:1000
    x=37*r(i-1);
    z=floor(x); % Выделение целой части числа x
    r(i)=x-z; % Вычисление случайных чисел с равномерным законом
    n(i)=sqrt(2*log(1/r(i)))*cos(2*pi*r(i-1)); % Вычисление случайных чисел с
                                                нормальным законом
end
rr=rand(1000,1); % Вычисление случайных чисел с равномерным законом в
MATLAB
hist(r) % Построение гистограммы для r
pause
hist(rr) % Построение гистограммы для rr
pause
nr=randn(1000,1); % Вычисление случайных чисел с нормальным законом в
MATLAB
hist(n)
pause
hist(nr)
pause

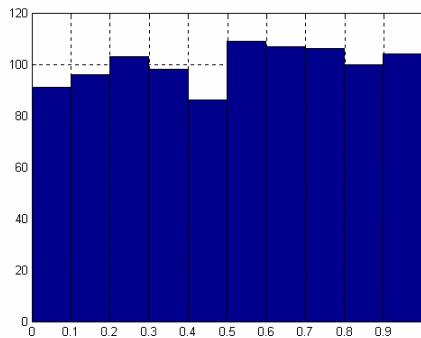
```

```

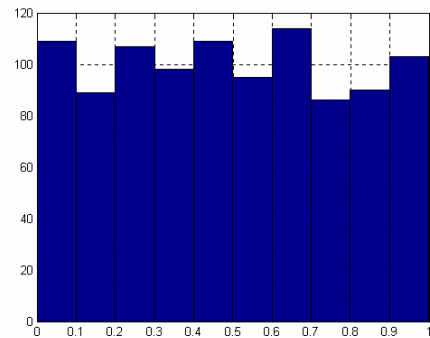
ex=-log(1-r)/l; % Вычисление случайных чисел с экспоненциальным законом
hist(ex)
pause
exr=-log(1-rr)/l; % Вычисление случайных чисел с экспоненциальным законом в
MATLAB
hist(exr)

```

Гистограммы выборки 1000 случайных чисел с равномерным законом



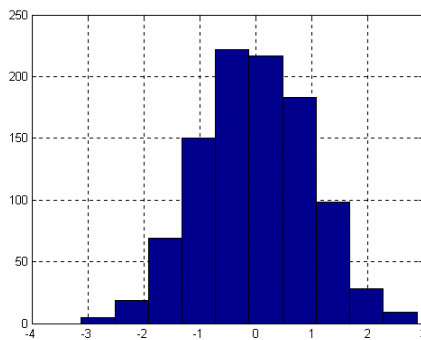
а) расчет по (3.34)



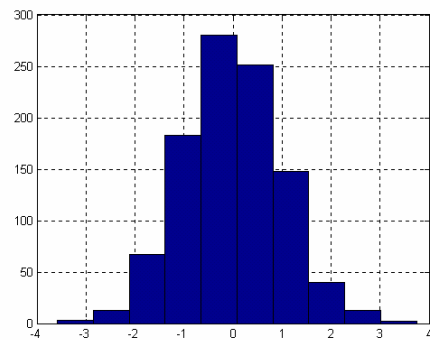
б) расчет в MATLAB

Рис.3.3.

Гистограммы выборки 1000 случайных чисел с нормальным законом



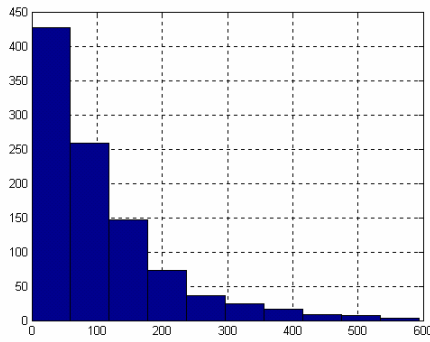
а) расчет по (3.32)



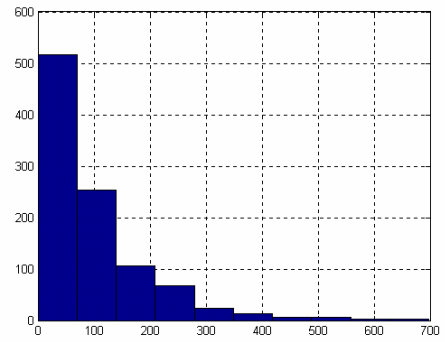
б) расчет в MATLAB

Рис.3.4.

Гистограммы выборки 1000 случайных чисел с экспоненциальным законом



а) расчет по (3.32)



б) расчет в MATLAB

Рис.3.5.

### 3.4. Линейные модели и их применение для оценивания характеристик случайных процессов

Как известно [58], спектральная плотность процесса, полученного в результате прохождения белого шума через линейную систему, равна произведению интенсивности входного шума на квадрат модуля комплексной частотной характеристики системы. В свою очередь, комплексная частотная характеристика рекурсивного формирующего фильтра представляет собой функцию, полученную в результате подстановки  $z = e^{j\omega}$ , где  $j = \sqrt{-1}$ .

Определим спектральную плотность процесса АРСС (p, q), если передаточная функция рекурсивного фильтра

$$G(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{1 + \sum_{k=1}^q d_k z^{-k}}{1 - \sum_{i=1}^p c_i z^{-i}}. \quad (3.37)$$

Делая подстановку  $z = e^{j\omega}$ , в передаточную функцию (3.37) получим:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1 + \sum_{k=1}^q d_k e^{-j\omega k}}{1 - \sum_{i=1}^p c_i e^{-j\omega i}}. \quad (3.38)$$



Тогда квадрат модуля комплексной частотной характеристики

$$\left|G(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^q d_k \cos k\omega\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^q d_k \sin k\omega\right)^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^p c_i \cos i\omega\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^p c_i \sin i\omega\right)^2}; \quad (3.39)$$

следовательно, спектральная плотность АРСС-процесса описываемого передаточной функцией (3.37)

$$S(\omega) = \left|G(e^{j\omega})\right|^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2 \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^q d_k \cos k\omega\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^q d_k \sin k\omega\right)^2}{\left(1 - \sum_{i=1}^p c_i \cos i\omega\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^p c_i \sin i\omega\right)^2}, \quad (3.40)$$

где  $\sigma_e^2$  – дисперсия процесса.

Отметим, что оценивание спектральной плотности (3.40) сводится к оцениванию коэффициентов передаточной функции (3.37) и дисперсии ненаблюдаемого белого шума, т. е. к идентификации АРСС-процесса. Таким образом, АРСС-процессы позволяют получать оценки спектральной плотности непосредственно по наблюдениям, минуя вычисления статистических характеристик наблюдений. Благодаря этому применение АРСС - моделей несколько потеснило методы, основанные на быстром преобразовании Фурье, которое применялось для оценивания спектральных плотностей по значениям ковариационной функции [3] для определения передаточных функций  $w(t)$ .

Рассмотрим теперь автокорреляционные функции (АКФ) процессов АР(p), СС(q), АРСС(p, q). АКФ процесса АР(p) выражается разностным уравнением, которое аналогично уравнению, описывающему сам процесс:

$$R(m) = c_1 R(m-1) + c_2 R(m-2) + \dots + c_p R(m-p), \quad (3.41)$$

где  $R(m)$  – значение АКФ при дискретном сдвиге  $m$ .

Таким образом, АКФ процесса АР(p) бесконечна и представляет собой затухающую экспоненту или экспоненциально затухающую косинусоиду.

Выражение для дисперсии процесса АР(p) имеет вид

$$\sigma_{AP}^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - c_1 R(1) - c_2 R(2) - \dots - c_p R(p)}. \quad (3.42)$$

АКФ процесса СС(q) определяется следующим образом:

$$R(m) = \begin{cases} \frac{d_m + d_1 c_{m+1} + \dots + d_{q-m} d_q}{1 + d_1^2 + \dots + d_q^2}, m = \overline{1, q} \\ 0, m > q \end{cases}. \quad (3.43)$$

АКФ процесса скользящего среднего равна нулю при сдвиге, большем q, т. е. большем, чем порядок процесса. Дисперсия процесса СС(q)

$$\sigma_{CC}^2 = (1 + d_1^2 + \dots + d_q^2) \sigma_e^2. \quad (3.44)$$

Общего выражения АКФ для АРСС - процесса для  $m[0, \infty]$  не существует.

В каждом случае АКФ вычисляется по известным  $\{c_i\}$  и  $\{d_k\}$  и выражению для автоковариационной функции процесса АРСС(p, q), которое имеет вид:

$$R(m) = c_1 R(m-1) + \dots + c_p R(m-p) + R_{xe}(m) + d_1 R_{xe}(m-1) + \dots + d_q R_{xe}(m-q), \quad (3.45)$$

где  $R(m)$  – значение автоковариационной функции при сдвиге  $m$ ;  $R_{xe}(m)$  – значение взаимной ковариационной функции процесса и шума.

Подробный вывод приведенных выражений для корреляционных функций можно найти в [32].

Рассмотренные модели случайных последовательностей позволяют с помощью небольшого числа параметров описать обширный класс случайных процессов. На практике часто оказывается, что адекватное описание наблюдаемых временных рядов достигается с помощью моделей авторегрессии, скользящего среднего или комбинированной модели, в которых  $p$  и  $q$  не больше трех [56].

Рассмотрим процессы АР(1) и АРСС(1,1) более подробно. Процесс авторегрессии первого порядка (марковский процесс)

$$v(k) = c_1 v(k-1) + e(k) \quad (3.46)$$

часто используется в качестве модели случайных сигналов и возмущений [18]. Для стационарности процесса необходимо, чтобы  $c_i \in [-1,1]$ . Согласно формуле (3.37) АКФ процесса AP(1) удовлетворяет разностному уравнению первого порядка:

$$R(m) = c_1 R(m-1), m > 0, \quad (3.47)$$

которое при  $R(0)=1$  имеет решение

$$R(m) = c_1^m, m \geq 0. \quad (3.48)$$

Согласно выражению (3.40) дисперсия процесса имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - R(1)c_1}, \quad (3.49)$$

или заменяя  $R(1)$  на  $c_1$ ,

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - c_1^2}. \quad (3.50)$$

Используя формулу (3.40), найдем спектр процесса:

$$S(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{1 - 2c_1 \cos \omega + c_1^2}, 0 \leq \omega \leq 2\pi. \quad (3.51)$$

На рис. 3.6 по реализациям процесса AP(1) рассчитаны соответствующие АКФ и спектры для случаев  $c = 0,8$  (рис. 3.1,а) и  $c = -0,8$  (рис. 3.6,б).

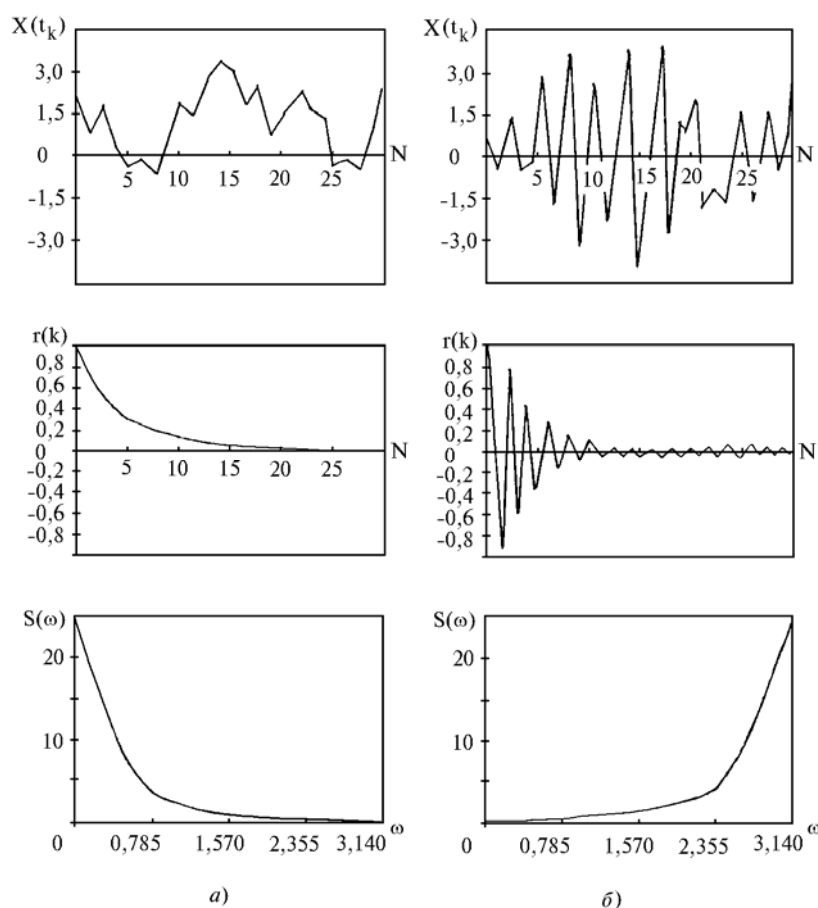


Рис. 3.6.

Видно, что в случае большого положительного параметра  $c = 0,8$  соседние значения последовательности близки, и наблюдается заметный период (медленное устойчивое колебание). Это отражается на виде АКФ, которая спадает к нулю по экспоненциальному закону, и на виде спектра, в котором преобладают низкие частоты. В случае, когда параметр  $c = -0,8$ , последовательность быстро колеблется. Это находит отражение в поведении АКФ; она экспоненциально спадает к нулю, периодически меняя знак. В спектре процесса  $AR(1)$  при  $c = -0,8$  преобладают высокие частоты.

Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего первого порядка  $ARCC(1,1)$  – описывается формулой

$$v(k) = c_1 v(k-1) + d_1 e(k-1) + e(k). \quad (3.52)$$

Этот процесс, как и процесс  $AR(1)$ , стационарен, если  $c_1 \in [-1,1]$ . Определим АКФ процесса. Из выражения (3.45) получаем:



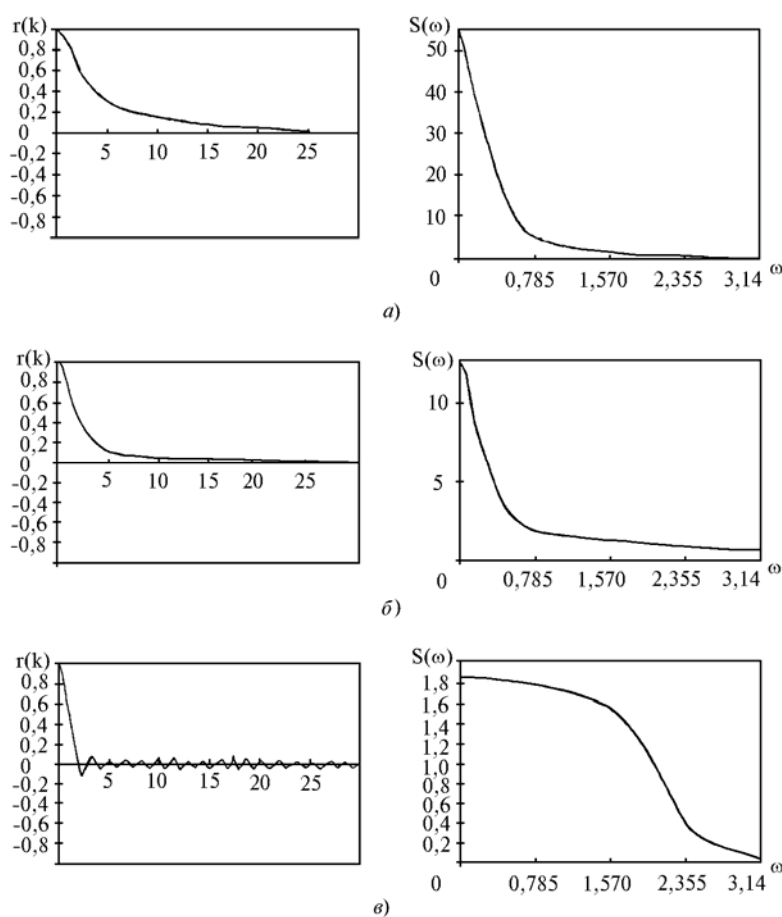


Рис. 3.7.

Таким образом, для описания стохастических систем можно применять модели  $CC(q)$ ,  $AR(p)$  или  $ARCC(p, q)$ . Доказательство этого следует из теоремы представления Острема [58]. Согласно этой теореме, для заданной в виде рациональной функции спектральной плотности  $S(\omega)$ , существует асимптотически устойчивая линейная динамическая система, такая, что при воздействии на ее вход белым шумом с дискретным временем, выходным сигналом будет стационарный процесс со спектральной плотностью  $S(\omega)$ .

Необходимо отметить, что выбор конкретного типа модели и ее порядка можно сделать только на основании тщательного анализа реальных значений процесса.

## 4. Непараметрическая идентификация

### 4.1. Определение передаточной функции по временным характеристикам объекта

Уравнения связи между входными и выходными переменными можно записать в различной форме. Наиболее универсальной из них является дифференциальные уравнения объекта (1.12), (1.25).

Широко используется также уравнение связи между входом и выходом типа интеграла свертки (интеграл Дюамеля):

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_0^t w(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad (4.1)$$

где  $w(\tau)$  – функция веса объекта, т. е. реакция объекта на входной сигнал в виде дельта функции

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (4.2)$$

Дифференциальные уравнения и передаточная функция являются наиболее общими формами связи между переменными состояния на входе и выходе линейной системы. Но в реальных условиях часто наблюдаются только сигналы управления и реакции систем, по которым необходимо получить уравнение связи.

Таким образом, с помощью эксперимента можно получить график, определяющий частное решение при определенном входном сигнале. Затем, аппроксимировав аналитическим выражением полученные реализации, можно построить ДУ заданной структуры и записать его в одной из форм, приведенных выше (т. е. получить модель объекта).

Большое распространение получили методы идентификации детерминированных объектов путем определения переходной характеристики  $h(t)$  по кривой разгона при ступенчатом изменении управления на входе.

$$h(t) \approx \frac{y(t) - y_0}{u - u_0}, \quad (4.3)$$

где  $y(t)$  – изменение выходной величины объекта при подаче на его вход ступенчатого управления  $u$  (кривая разгона),  $y_0$  и  $u_0$  установившиеся значения выхода и входа объекта до начала проведения эксперимента.

Если объект управления не допускает изменения выходной координаты, то на его вход вместо ступенчатого воздействия подают единичный импульс или серию импульсов.

При проведении эксперимента по снятию кривой разгона необходимо тщательно изолировать объект от случайных возмущений, стремиться, как можно точнее воспроизвести заданную форму возмущения на входе, дублировать проведение экспериментов по снятию кривой разгона для различных начальных значений  $y_0$  и  $u_0$ .

Рассмотрим определение передаточной функции объекта по кривой разгона логарифмическим методом. Преимущество этого метода состоит в том, что результаты идентификации получаются в виде аналитического выражения, хорошо поддающегося дальнейшей машинной обработке. Методика идентификации в этом случае [57] заключается в аппроксимации переходной характеристики аналитическим выражением типа

$$h(t) = k_o + \sum_{k=1}^n C_k e^{-p_k t}, \quad (4.3)$$

где  $k_o = \frac{y(\infty) - y_0}{u - u_0}$  – коэффициент передачи объекта  $y(\infty)$  – установившееся

значение выходной величины объекта, соответствующее частному решению его ДУ и определяемое вынужденным движением под действием входного сигнала, остальные слагаемые определяют свободные движения и представляют общее решение однородного ДУ объекта,  $C_k$  – постоянные интегрирования,  $p_k$  – корни характеристического уравнения.

Положим, для определенности, что в (4.3) имеется один действительный корень, два комплексно сопряженных и два кратных корня. Логарифмируя (4.3) получим



$$z = \ln[h(t) - k_o] = \ln \left[ \sum_{k=1}^5 C_k e^{p_k t} \right]. \quad (4.4)$$

Для устойчивого объекта свободные движения с течением времени стремятся к нулю, причем время переходного процесса будет определяться корнем имеющим минимальную действительную часть (например, действительным корнем). Тогда начиная с некоторого момента времени слагаемыми в (4.4), имеющими большие действительные части можно пренебречь и приближенно записать

$$z = \ln[h(t) - k_o] \approx \ln C_1 + p_1 t. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) является асимптотой (2.4) при  $t \rightarrow \infty$ .

Если теперь в полулогарифмическом масштабе построить график уравнения (4.4), откладывая на оси абсцисс время на оси ординат  $z = \ln[h(t) - k_o]$ , то неизвестные коэффициенты  $C_1 p_1$  легко определить графически, как показано на рис 4.1.

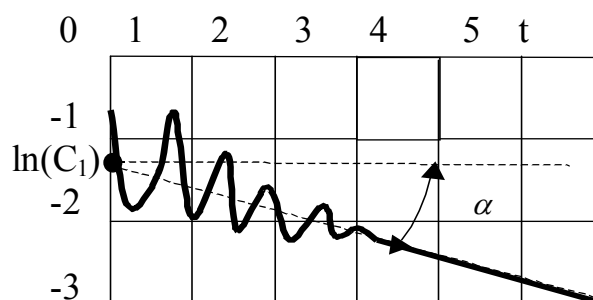


Рис.4.1.

Ордината асимптоты при  $t=0$  равна  $\ln(C_1)$ , а  $p_1 = \tan(\alpha)$ . После чего из (4.4) можно исключить одно слагаемое соответствующее действительному корню, тогда

$$z_1 = \ln[h(t) - k_o - C_1 e^{p_1 t}] = \ln \left[ \sum_{k=1}^4 C_k e^{p_k t} \right]. \quad (4.6)$$

Аналогично, начиная с некоторого момента времени слагаемыми в (4.6), имеющими большие действительные части можно пренебречь и приближенно записать

$$h(t) - k_o - C_1 e^{p_1 t} \approx C_2 e^{-\lambda t} \text{Sin}(\omega t + \varphi), \quad (4.7)$$

Логарифмируя, получим

$$z_1 = \ln[h(t) - k_o - C_1 e^{p_1 t}] \approx \ln(C_2) - \lambda t + \ln[|\text{Sin}(\omega t + \varphi)|]. \quad (4.8)$$

Уравнение прямой на графике (рис.4.2), проходящей через точки в которых  $\text{Sin}(\omega t + \varphi) = 1$  имеет вид:

$$z_1 \approx \ln(C_2) + \lambda t. \quad (4.9)$$

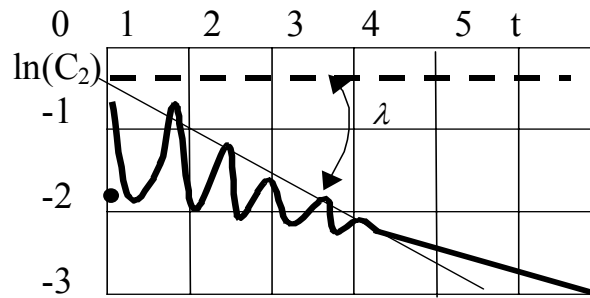


Рис. 4.2.

Неизвестные параметры  $C_2$  и  $\lambda$  находятся, как и в предыдущем случае. Круговую частоту  $\omega$  и начальную фазу  $\varphi$  можно определить из очевидного условия  $\text{Sin}(\omega t + \varphi) = \pm 1$

$$\frac{\pi}{2} + (i-1)\pi = \omega t_i + \varphi, \quad (4.10)$$

где  $t_i$  – значения времени при которых ординаты переходной характеристики принимают экстремальные значения.

Минимизируя квадрат невязки (4.10) по  $\omega$  и  $\varphi$  получим систему алгебраических уравнений для их определения.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m t_i^2 f + \sum_{i=1}^m t_i b &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (2i-1)t_i \\ \sum_{i=1}^m t_i f + mb &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m (2i-1) \end{aligned}, \quad (4.11)$$

где  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  – неизвестная частота,  $b = \frac{\varphi}{2\pi}$  – относительная фаза,  $m$  – число экстремальных значений переходной характеристики.

Коэффициенты последних слагаемых от корней, имеющих кратность – два, в уравнении переходной характеристики (4.3) получают из выражения аналогичного (4.6)

$$z_2 = \ln[h(t) - k_o - C_1 e^{p_1 t} - C_2 e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi)] = \ln \left[ \sum_{k=1}^2 C_k e^{p_k t} \right]. \quad (4.12)$$

Приближенно при больших  $t$  можно записать

$$z_2 \approx \ln(C_3) + \ln(t) + pt, \quad (4.13)$$

где  $p=p_4=p_5$  – корень двойной кратности.

Асимптотой этого уравнения будет прямая, тангенс угла наклона которой будет равен  $p$ .

Если теперь построить в логарифмических координатах функцию  $z_2 - pt$ , то ее асимптотой будет  $\ln(t) + \ln(C_3)$ . Тангенс угла наклона асимптоты дает кратность корня. Ордината асимптоты при  $t=0$  равна  $\ln(C_3)$ .

Зная корни выражение для переходной характеристики нетрудно определить и передаточную функцию через преобразование Лапласа.

$$W(p) = pL[h(t)] = p \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt. \quad (4.14)$$

Удовлетворительные результаты при использовании этого метода получаются в том случае, если корни характеристического уравнения далеко отстоят друг от друга. Желательно, чтобы каждый следующий корень был в 2-3 раза меньше предыдущего. Следует отметить, что точность определения характеристик объекта с помощью временных характеристик невысока. Качество идентификации снижают случайные помехи, искажающие реакцию объекта и неточность аппроксимации объекта линейной моделью. Все это не позволяет считать эти методы перспективными.

Пример 4.1. Проведем идентификацию объекта с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}.$$

Корни характеристического уравнения объекта

$$(p + 0,1)(p^2 - 6p + 25) = 0$$

будут равны  $p_1 = -0,1$ ;  $p_2 = -3 + j4$ ;  $p_3 = -3 - j4$ , а его коэффициент передачи  $k_o = 1$ .

Зная передаточную функцию объекта нетрудно построить его переходную характеристику  $h(t)$  (рис. 4.3), используя преобразование Лапласа

$$h(t) = L\left[\frac{W(p)}{p}\right].$$

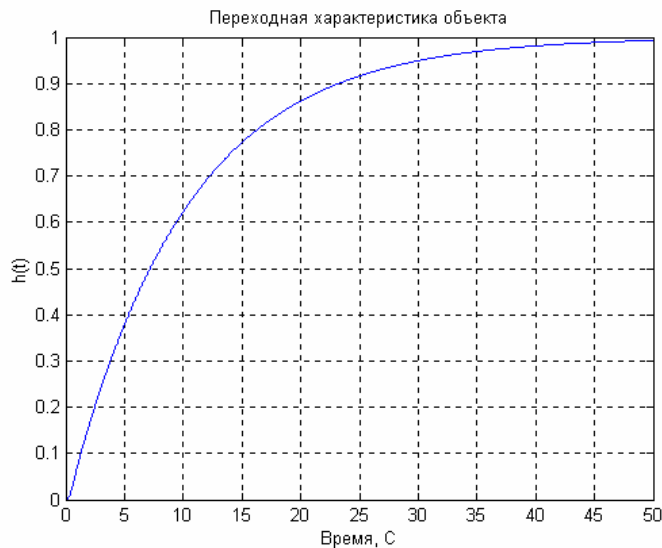


Рис. 4.3.

По переходной характеристике определяем коэффициент передачи  $\hat{k}_o = h(\infty) = 1$  и строим по формуле (4.4) график относительной переходной характеристики в полулогарифмическом масштабе рис. 4.4

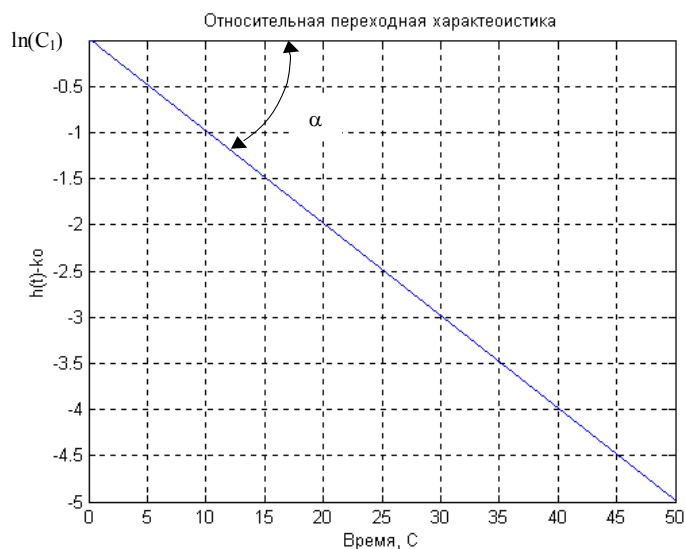


Рис. 4.4.

По графику находим значение коэффициента  $C_I = 1,0242$  и оценку первого корня характеристического уравнения  $p_I = -0,1$ , которая совпадает с его истинным значением.

Исключаем из переходной характеристики слагаемое, соответствующее действительному корню и строим по формуле (4.8), новую переходную характеристику рис. 4.5

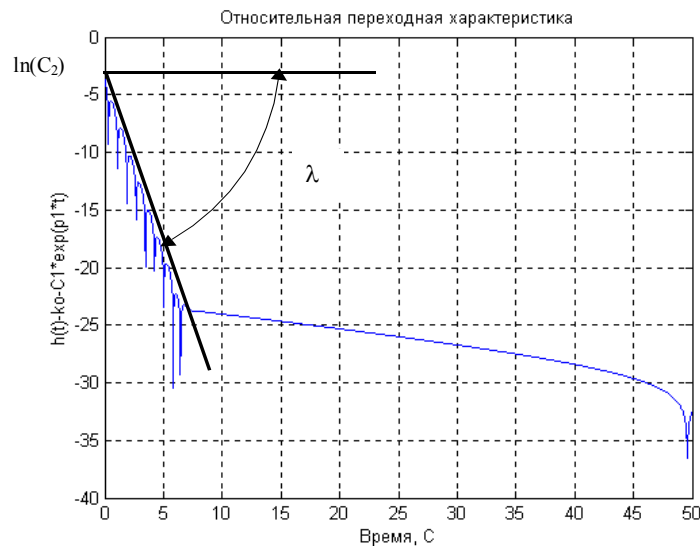


Рис. 4.5.

Из графических построений и по формулам (4.11) находим оценки параметров объекта  $\hat{p}_2 = -2,9959 + j3,0084$ ;  $\hat{p}_3 = -2,9959 - j3,0084$ , хорошо совпадающие с истинными значениями. Программа идентификации рассматриваемого объекта приведена ниже.

```
k=2.5;p1=-1;p2=-.3+4*i;p3=-.3-4*i; % Параметры объекта
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);% Передаточная функция объекта
ko=-k/(p1*p2*p3);
Tm=-5/min(p);
dt=.01;
t=0:dt:Tm;
h=step(wo,t);% Переходная характеристика объекта
plot(t,h),grid
pause
% Вычисление первого слагаемого переходной характеристики
lh1=log(ko-h);
plot(t,lh1),grid
pause
n=length(lh1);
```

```

pr1=(lh1(n)-lh1(n-1))/dt % Первый (действительный) корень характеристического
уравнения
b1=(t(n)*lh1(n-1)-t(n-1)*lh1(n))/dt;
c1=exp(b1);% Первая постоянная интегрирования
s1=c1*exp(pr1*t);
% Вычисление второго слагаемого переходной характеристики
lh2=log(abs(ko-h'-s1));
plot(t,lh2),grid
% Определение координат огибающей полулогарифмической переходной характеристики
z(1)=0;l=0;
for j=2:n
    z(j)=lh2(j)-lh2(j-1);
    if z(j)*z(j-1)<0 & z(j)<z(j-1)
        l=l+1;
        y(l)=lh2(j-1);
        tt(l)=t(j-1);
    end
end
end
% Вычисление частоты и начальной фазы
m=7;
a11=sum(tt(1:m).*tt(1:m));
a12=sum(tt(1:m));
a21=a12;
a22=m;
j=1:m;
b1=sum((2*j-1).*tt(j))/4;
b2=sum(2*j-1)/4;
d=a11*a22-a12*a21;
d1=b1*a22-b2*a21;
d2=a11*b2-a21*b1;
x=d1/d;
z=d2/d;
w=2*pi*x; %Частота
f=2*pi*z; % Начальная фаза
b1=sum(y(j).*tt(j));
b2=sum(y(j));
d=a11*a22-a12*a21;
d1=b1*a22-b2*a21;
d2=a11*b2-a21*b1;
x=d1/d;
z=d2/d;
p2r=x+i*w % Корни (мнимые) характеристического уравнения
p3r=x-i*w
c2=exp(x); % Вторая постоянная интегрирования
s2=c2*exp(x*t).*sin(w*t-f);

```

$$lh3=\log(\text{abs}(ko-h'-s1-s2));$$

#### 4.2. Определение передаточной функции объекта по частотным характеристикам

Этот метод идентификации относится к непараметрическим методам, т. к. вначале экспериментально снимают частотные характеристики объекта, а затем уже по полученным экспериментальным характеристикам вычисляют передаточную функцию. Основные трудности при проведении экспериментов заключаются в определении рабочего диапазона частот и дрейфе оси колебаний на выходе объекта. Чаще всего область рабочих частот задается ориентировочно и наибольшее внимание уделяется диапазону, в котором сдвиг по фазе между входным и выходным гармоническими сигналами составляет  $180^\circ$ .

При снятии частотных характеристик используют различные методы воздействия на объект.

Метод синусоидальной волны предполагает подачу на вход объекта гармонических колебаний. На каждой из выбранных в пределах рабочего диапазона частот проводится отдельный опыт. На входе исследуемого объекта возбуждаются колебания выбранной частоты. Процессу колебаний дают установиться и, когда ось колебаний, их форма и амплитуда станут неизменными, измеряют амплитуды входных и выходных колебаний и фазовый сдвиг между ними. Частное от деления амплитуды выходных колебаний на амплитуду входных колебаний дает амплитуду частотной характеристики на взятой частоте, сдвиг по фазе – ординату фазовой частотной характеристики.

Основным затруднение при использовании этого метода является необходимость возбуждения колебаний большой мощности, имеющих правильную синусоидальную форму.

Поэтому чаще применяют метод «прямоугольной» волны. При этом по прибору, измеряющему входную величину объекта, градуируются три положения регулирующего органа, изменяющего эту величину. Среднее положение соответствует значению входной величины, при котором стабилизируется режим работы объекта перед началом испытаний (ось колебаний); два других равноотстоят от среднего положения. Перед началом опыта регулирующий орган устанавливается в среднее положение и удерживается там до установления в объекте стабильного режима. Затем регулирующее устройство через равные промежутки времени, соответствующие полупериоду избранной частоты, переводится из одного крайнего положения в другое и обратно. Эти переключения продолжаются до тех пор, пока на выходе объекта колебания  $y(t)$  не примут установившейся формы. После чего производят регистрацию этих колебаний.

На основе полученных осциллограмм колебаний на выходе объекта проводят их гармонический анализ, ограничиваясь вычислением амплитуд и фаз первой и третьей гармоник.

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \\
 c_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \\
 a_k &= \sqrt{b_k^2 + c_k^2}; \\
 \varphi_k &= \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{c_k}\right),
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

где  $T$  – период колебаний;  $k$  – номер гармоники.

В том случае если значения выходной величины известны только в дискретные, равноотстоящие моменты времени интегралы в (4.15) заменяются суммами



$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \cos\left(2\pi \frac{ik}{N}\right); \\
 c_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y_i \sin\left(2\pi \frac{ik}{N}\right),
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

где  $N$  – число дискрет выходного сигнала.

Гармонический анализ входного прямоугольного сигнала приводит к такому выражению

$$u(t) = \frac{4A}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \dots \right],
 \tag{4.17}$$

где  $A$  – амплитуда прямоугольной волны.

Вычислив амплитуды и фазы входных и выходных гармонических составляющих можно вычислить значения амплитудно-частотной характеристики на выбранной частоте, как отношение амплитуд гармонических составляющих на выходе и входе объекта и значения фазо-частотной характеристики, как соответствующий фазовый сдвиг  $\varphi_k$ .

Для повышения точности определения частотных характеристик рекомендуется использовать при гармоническом анализе только первую гармонику.

Для того чтобы не допускать больших отклонений регулируемой величины в процессе проведения опытов переключения регулирующего органа осуществляют в моменты времени, когда регулируемая (выходная) величина достигает заранее выбранные граничные значения. Для реализации такого режима используют двух позиционный регулятор с регулируемой зоной нечувствительности. Изменяя величину зоны нечувствительности и знак обратной связи можно изменять частоту возникающих в такой системе автоколебаний.

Эксперимент обычно начинают на частоте, при которой фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами равен  $\pi$ . Это достигается при нулевой зоне нечувствительности позиционного регулятора и отрицательной обратной связи. Увеличивая зону нечувствительности при отрицательной обратной связи,

уменьшают частоту автоколебаний. Увеличивая зону нечувствительности при положительной обратной связи, увеличивают частоту автоколебаний. Результаты экспериментов обрабатываются так же, как и в методе прямоугольной волны.

Основным недостатком рассмотренных методов является длительное время эксперимента, затрачиваемое в основном на ожидание установившегося режима колебаний и получения достаточного для аппроксимации частотных характеристик значений их ординат. Для ускорения экспериментов иногда на вход объекта подается сумма гармонических составляющих разных частот. Установившиеся колебания выходной величины также подвергают гармоническому анализу и сразу находят несколько ординат частотной характеристики. Однако в этом случае требуется специальный источник полигармонического воздействия и линейность объекта.

Определение аналитического выражения передаточной функции по частотным характеристикам может быть осуществлено несколькими способами. Рассмотрим один из них [57] позволяющий аналитически вычислить выражение для передаточной функции по дискретным ординатам вещественной частотной характеристики.

Будем искать выражение для передаточной функции в виде ряда

$$W(p) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^k. \quad (4.18)$$

Тогда делая подстановку

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \omega, \quad (4.19)$$

выражение для вещественной частотной характеристики можно записать в виде

$$U(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \operatorname{Cos}(k\varphi). \quad (4.20)$$

Если теперь провести гармонический анализ экспериментально полученной вещественной частотной характеристики, то в результате будут получены неизвестные коэффициенты передаточной функции  $A_k$ .

Ограничиваясь значащими членами ряда (4.20) можно записать выражение передаточной функции объекта в виде (4.18).

Ограничение на использование данного метода вычисления передаточной функции относятся к самовыравнивающимся, устойчивым и неминимально-фазовым объектам. В том случае если объект не отвечает этим требованиям, то при вычислении вещественной частотной характеристики необходимо учесть влияние интегрирующих звеньев и звеньев запаздывания на вид этой характеристики и проводить ее расчет с учетом этого влияния.

Компенсация запаздывания осуществляется выражением

$$U_s(\omega) = U(\omega)\cos\omega\tau - V(\omega)\sin\omega\tau, \quad (4.21)$$

а компенсация интегрирующих звеньев –

$$U_u(\omega) = \frac{V(\omega)}{\omega}, \quad (4.22)$$

где  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  - экспериментальные вещественная и мнимая частотные характеристики.

#### **Пример 4.2. Проведем идентификацию объекта с передаточной функцией**

$$W(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}.$$

Идентификация проводилась программой приведенной ниже.

```
k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*i;p3=-3-4*i;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
%wo=tf(1,[1 2 1]);
f=0:180/30:180;
w=tan(pi*f/360);
H=freqresp(wo,w);% Вычисление амплитудно - частотной характеристики объекта
H=squeeze(H);
U=real(H);% Вычисление вещественной характеристики объекта
n=length(U);
u=[U(n:-1:2);U];
ab=fft(u)/(n-1); % Фурье- преобразование вещественной характеристики
f=angle(ab);
a=abs(ab);
a(1)=a(1)/2;
```

```

w0=tf([-1 1],[1 1]);
ws=a(1);nun=a(1);
pp=[1 1];pm=[-1 1];
den=1;d=1;
% Вычисление передаточной функции объекта по (4.18)
for j=2:(n+1)/2
    den=conv(den,pp);
    d=conv(d,pm);
    nun=conv(nun,pp)+a(j)*d;
    ww=tf(nun,den)
end
ww=minreal(ww)% Получение минимальной реализации передаточной функции
step(ww,wo)
pause
bode(ww,wo)
pause
[wb,g]=balreal(ww);)% Получение сбалансированной реализации передаточной функции
wm=modred(wb,[4:(n-1)/2]);
step(wm,ww,wo)
ww=zpk(tf(wm))

```

На рис. 4.6 показана вещественная частотная характеристика объекта для относительных значений частоты  $\varphi = 2 \arctg(\omega)$

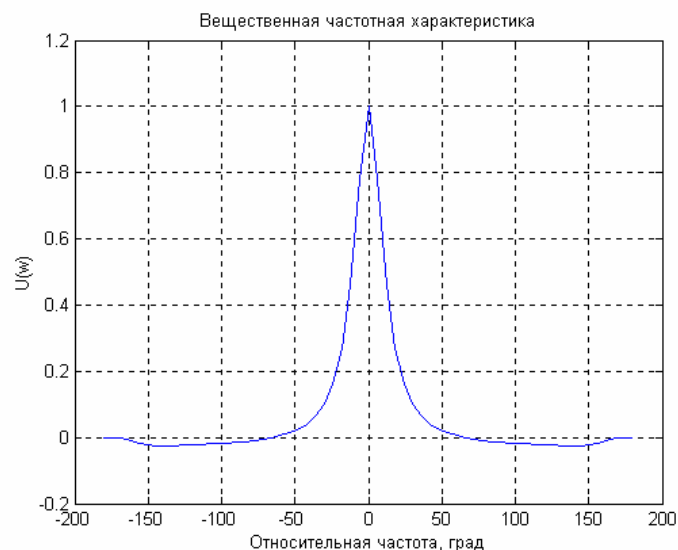


Рис. 4.6.

На рис. 4.7 приведены результаты гармонического анализа вещественной частотной характеристики (рис. 4.6), позволившие найти амплитуды гармоник  $A_k$ .

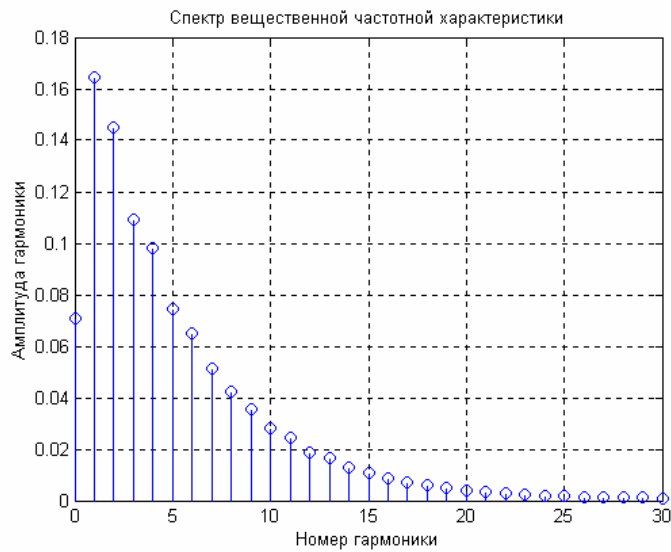


Рис. 4.7.

*Расчет передаточной функции по формуле (4.18) с удержанием трех составляющих сбалансированной реализации модели (4.18) дает следующее выражение передаточной функции*

$$W(p) = \frac{-0.038723(s - 2.923)(s^2 + 0.2386s + 0.04178)}{(s + 0.1553)(s^2 + 0.2452s + 0.03147)}$$

Переходные характеристики исходного объекта и его модели, полученной в результате идентификации, изображены на рис. 4.8. Следует отметить значительные погрешности идентификации рассмотренного метода, особенно при определении коэффициента передачи объекта.

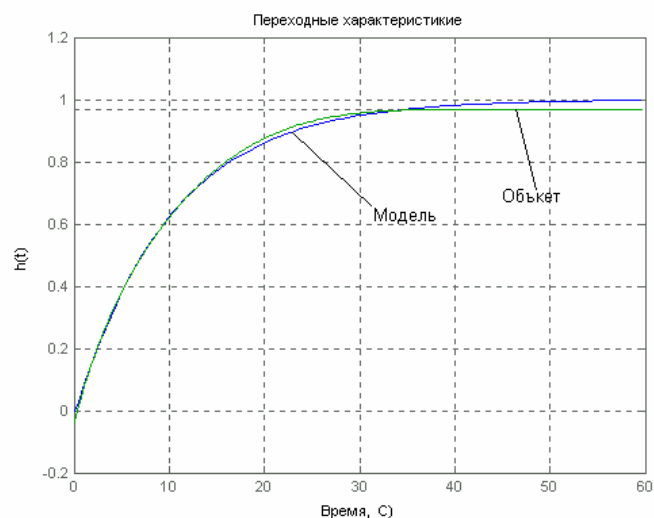


Рис.4.8.

### 4.3. Корреляционный метод идентификации

В действительности выходные переменные объекта  $y(t)$  определяются не только детерминированными управляющими входными сигналами  $u(t)$ , но и ненаблюдаемыми и неуправляемыми воздействиями (помехами)  $e(t)$ , что вызывает отклонения выходных переменных от заданных значений.

Чтобы получить уравнение связи между статистическими характеристиками входа и выхода для стационарных эргодических процессов, пользуются их статистическими характеристиками и, в частности, корреляционными функциями или спектральными плотностями/

Структурная схема исследуемого объекта в этом случае может быть представлена в виде, изображенном на рис. 4.9.

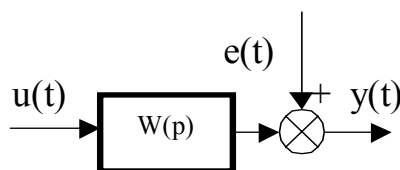


Рис. 4.9.

Все ненаблюдаемые помехи, воздействующие на различные части объекта, приведены к выходу объекта и представлены в виде аддитивного шума. Значение выходного сигнала вычисляется по формуле

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) u(t - \tau) d\tau + e(t), \quad (4.23)$$

Умножив это выражение на  $x(t + \tau)$  и проинтегрировав обе части по  $\tau$  в пределах от  $-T$  до  $T$  (при  $T \rightarrow \infty$ ), получим:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt + R_{ue}(\tau). \quad (4.24)$$

Если  $R_{ue}(\tau) = 0$  и  $\omega(t) = 0$ , при  $t < 0$  (условие физической реализуемости системы), то уравнение принимает вид:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t - \tau) dt, \quad (4.25)$$

называемое уравнением Винера-Хопфа.

Это уравнение относится к линейному интегральному уравнению первого рода. Его численное решение осуществляется методом аппроксимирующих функций, вычисление которых, в свою очередь, производится на основе метода коллокации, метода наименьших квадратов и метода Галеркина. Решение Уравнения Винера-Хопфа и дает выражение для функции веса объекта.

Рассмотрим решение этого уравнения, используя его дискретный аналог

$$R_{y,u}(m) = \sum_{k=0}^n \omega(k) R_{u,u}(m - k) \Delta \tau, \quad (4.26)$$

где  $\Delta \tau$  - интервал дискретизации корреляционных функций.

Обозначим

$$\mathbf{R}_{u,u} = \begin{pmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(n-1) \\ R_{uu}(0) & R_{uu}(0) & \dots & R_{uu}(0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{uu}(n-1) & R_{uu}(n-2) & \dots & R_{uu}(0) \end{pmatrix}; \quad (4.27)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \omega(1) \\ \omega(2) \\ \vdots \\ \omega(n) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_{y,u} = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

где  $r(i) = \frac{R_{y,u}(i)}{\Delta \tau}$ .

Тогда (4.26) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{R}_{y,u} = \mathbf{R}_{u,u} \mathbf{w}. \quad (4.29)$$

Откуда искомые значения функции веса будут равны

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}_{u,u}^{-1} \mathbf{R}_{y,u} \quad (4.30)$$

В силу плохой обусловленности матрицы  $\mathbf{R}_{u,u}$  решение уравнения (4.30) будет неустойчивым. Неустойчивое решение приводит к большим изменениям решения при малых изменениях коэффициентов матриц  $\mathbf{R}_{y,u}$  и  $\mathbf{R}_{u,u}$ .

Более точное решение может быть получено методом аппроксимирующих функций с использованием метода коллокации [35].

В соответствии с этим методом аппроксимируют функцию веса линейной комбинацией из  $m$  ортогональных функций

$$\tilde{\omega}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k(t), \quad (4.31)$$

Вычисляют  $m$  функций вида

$$f_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) R_{uu}(t-\tau) d\tau. \quad (4.32)$$

Метод коллокации дает систему из  $m$  линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов аппроксимирующей функции  $\alpha_k$

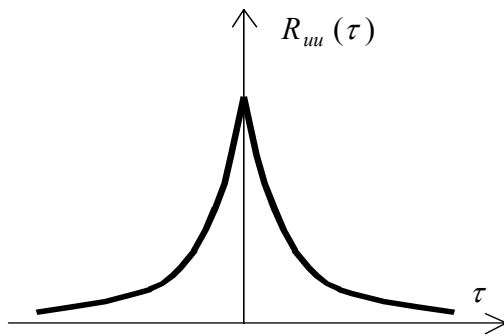
$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k(k) = R_{yy}(i) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.33)$$

В том случае если желательно получить передаточную функцию объекта в виде дробно-рациональной функции, можно по вычисленной функции веса (4.31) найти передаточную функцию используя логарифмический метод (см. п.4.1).

Так как в эксперименте получают оценки корреляционной функции, значение искомой функции веса оказывается приближенным. Структура уравнения Винера-Хопфа такова, что небольшие ошибки в определении корреляционных функций приводят к существенным ошибкам в определении импульсной переходной характеристики  $\omega(t)$  и в итоге к невысокой точности идентификации параметров системы. Более перспективным является использование корреляционного метода для определения запаздывания в объекте управления. Величина запаздывания будет равна значению аргумента взаимной корреляционной функции, при котором она достигает максимума.

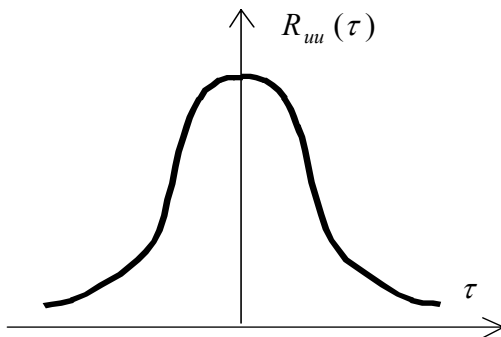


Для повышения точности оценок корреляционных функций необходимо правильно выбирать интервал наблюдения сигналов, для которых оцениваются эти корреляционные функции. Пусть в результате пассивного эксперимента получены оценки корреляционной функции входного сигнала объекта  $R_{uu}(\tau)$  и взаимной корреляционной функции между его входом и выходом  $R_{uy}(\tau)$ . В зависимости от вида графика корреляционной функции  $R_{uu}(\tau)$  (рис. 4.10), ее аппроксимируют одним из следующих выражений.



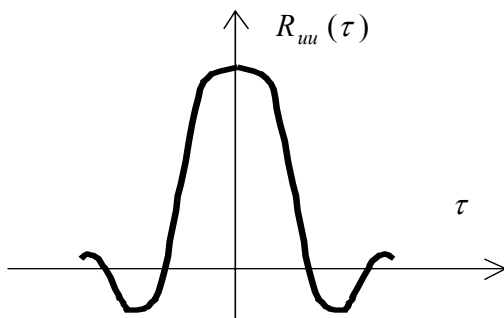
$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|}$$

a)



$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a\tau^2}$$

б)



$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|} \text{Cos}(\omega\tau)$$

в)

**Рис. 4.10.**

В первом случае (рис. 4.10, а) интервал наблюдения выбирается из условия

$$T \geq \frac{40}{\alpha}, \text{ во втором (рис.4.10, б) - } T \geq \frac{20}{\alpha} \text{ и в третьем } T \geq 20 \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Пример 4.3. Проведем идентификацию корреляционным методом объекта с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}.$$

Идентификация проводилась программой приведенной ниже.

```
k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*i;p3=-3-4*i;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
[nun,den]=tfdata(wo,'v');
wo=tf(nun,den,'td',10);% Введение запаздывания в объект
tm=700;dt=.01;
t=0:dt:tm;
n=length(t);
u=randn(n,1);% Формирование входного сигнала
y=lsim(wo,u,t); % Формирование выходного сигнала
tau=-tm:dt:tm;
ruu=xcorr(u,u,'biased');% Вычисление корреляционной функции входного сигнала
ryu=xcorr(y,u,'biased');% Вычисление взаимной корреляционной функции
w=impz(wo,t);
m=1:5000;
plot(t(m),w(m),t(m),ryu(n:n+4999)/dt),grid
```

Как следует из (4.25), взаимная корреляционная функция  $R_{uy}$  будет равна функции веса объекта, если корреляционная функция входного сигнала будет являться  $\delta$  - функцией. Такую корреляционную функцию имеет сигнал типа «белый шум». Если теперь подать на вход объекта «белый шум» (рис. 4.11), имеющий корреляционную функцию в виде  $\delta$  - импульса (рис. 4.12), то взаимная корреляционная функция будет равна функции веса (рис. 4.13).

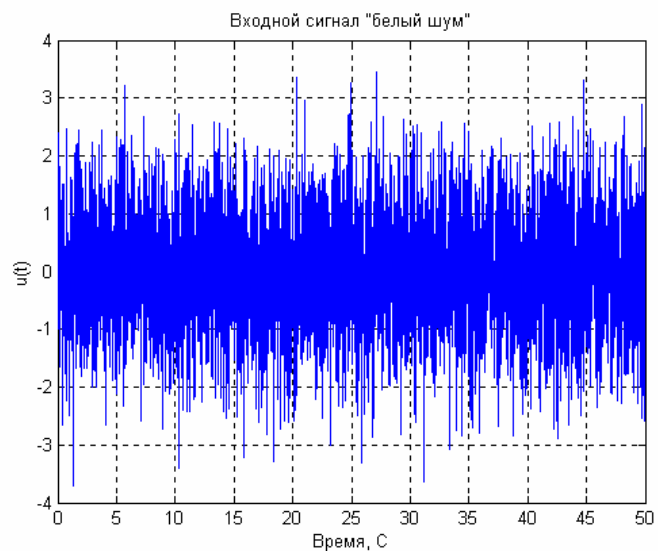


Рис. 4.11.

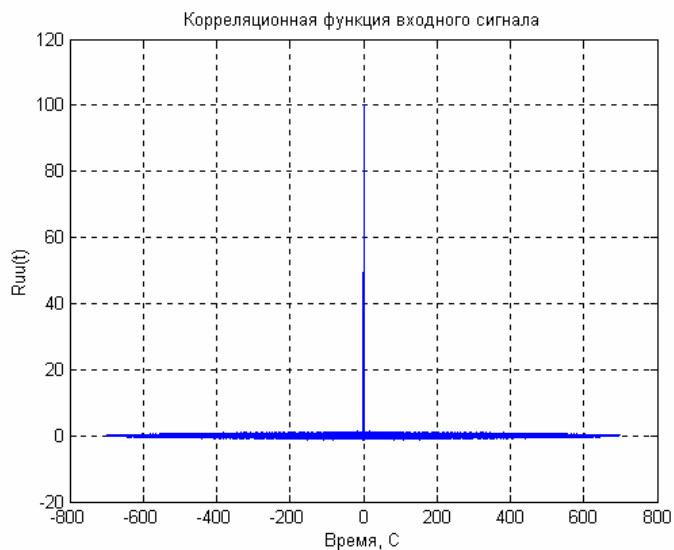


Рис. 4.12.

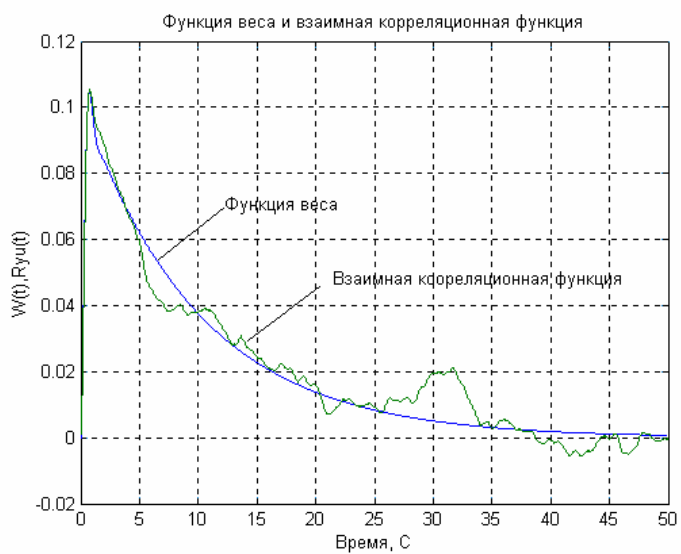


Рис. 4.13.

Расхождение кривых на рис. 4.13 обусловлено невозможностью сформировать на входе объекта идеальный “белый шум” и погрешностями вычисления корреляционных функций.

Для того чтобы убедиться в эффективности вычисления запаздывания корреляционным методом, вчислим функцию веса и взаимную корреляционную функцию объекта с запаздыванием равным 10 С.

$$W(p) = \frac{2,5e^{-10p}}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}$$

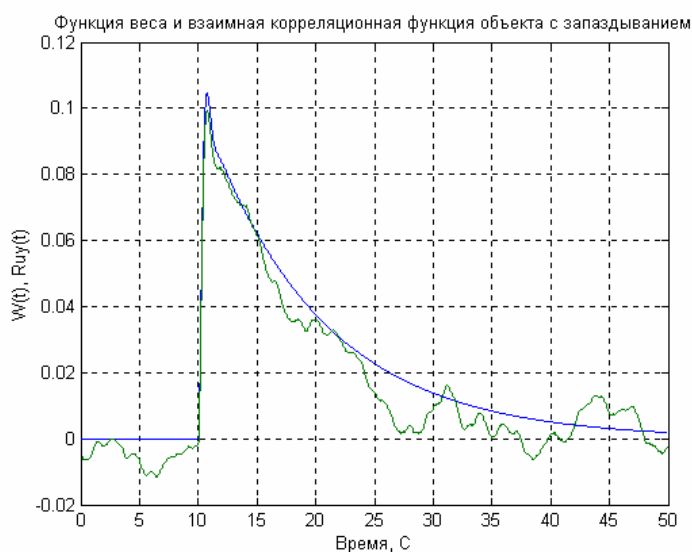


Рис. 4.14.

Как следует из рис. 4.14 величина запаздывания легко вычисляется и равна 10 С.

#### 4.4. Идентификация параметров объекта спектральным методом

Спектральные методы идентификации [74] основаны на использовании аппарата матричных операторов, основы которого рассматривались в п. 2.5. Эти методы являются дальнейшим развитием частотных методов и основываются на разложении сигналов объекта по ортонормированным функциям, не обязательно гармоническим. Результатом идентификации является определение ядра интегрального уравнения объекта (2.79), которое в простейшем случае линейных одномерных систем совпадает с функцией веса. Поэтому эти методы также можно отнести к непараметрическим методам идентификации. Спектральные методы могут применяться для идентификации нестационарных систем, параметры которых, и в частности ядро интегрального уравнения, изменяются во времени.

**Пусть стационарный объект описывается интегральным соотношением**

$$y(t) = \int_0^t \omega(t - \tau)x(\tau)d\tau. \quad (4.34)$$

где  $\omega(t)$  – функция веса объекта.

В результате проведения эксперимента в интервале времени  $[0, T]$  зарегистрированы детерминированные сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ . В соответствии с методом матричных операторов представим их в виде разложения по ортонормируемому базису некоторых ортогональных функций

$$x(t) = \Phi^T(t)C^x, \quad y(t) = \Phi^T(t)C^y, \quad \omega(\tau) = \Phi^T(\tau)\mathbf{a}. \quad (4.35)$$

Подставим (4.35) (4.34), тогда

$$\Phi^T(t)C^y = \int_0^t \Phi^T(t - \tau)\mathbf{a}\Phi^T(\tau)C^x d\tau. \quad (4.36)$$

Вынося из под знака интеграла переменные не зависящие от  $\tau$  и умножая последовательно (4.36) на  $\Phi(t)$ , а затем интегрируя обе части по  $t$ , в силу ортогональности выбранного базиса получим систему уравнений для вычисления неизвестной матрицы системы  $\mathbf{a}$

$$c_i^y = \mathbf{a}C^x \int_0^T \varphi_i(t) \left[ \int_0^t \Phi(t - \tau)\Phi(\tau)d\tau \right] dt. \quad (4.37)$$

Обозначая результат интегрирования ортонормированной системы функций в соответствии с (4.37) как

$$\mathbf{S} = \int_0^T \varphi_i(t) \left[ \int_0^t \Phi(t - \tau)\Phi(\tau)d\tau \right] dt, \quad (4.38)$$

значение которой характеризуют свойства выбранного базиса, можно найти  $\mathbf{A}$  из системы алгебраических уравнений

$$c_k^y = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_j c_i^x s_{ij}^k, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (4.39)$$

или в матричном виде

$$\mathbf{S}_c \mathbf{a} = \mathbf{c}^y \quad (4.40)$$

Зная матричный оператор  $\mathbf{a}$ , из третьего выражения (4.35) можно вычислить функцию веса системы.

Несмотря на кажущуюся простоту спектрального метода, его применение для решения задач идентификации наталкивается на определенные трудности связанные с плохой обусловленностью матрицы  $\mathbf{S}_c$  системы (4.40). Для выяснения этого обстоятельства рассмотрим влияние помех на точность идентификации. Помехи обусловлены внутренними шумами объекта, шумами измерительной аппаратуры, внешними помехами и др.

В результате воздействия помех выходная величина объекта будет иметь дополнительную составляющую  $\Delta y$ , вызываемую суммарным действием всех помех действующих на объект в процессе проведения измерений. Кроме того, входная величина объекта также определяется не точно из-за погрешности измерений. Приводя все возмущения, действующие на объект, к выходу (4.40) можно записать с учетом действия помех

$$(\mathbf{S}_c + \Delta \mathbf{S})\mathbf{a} = \mathbf{C}^y + \Delta \mathbf{C} \quad (4.41)$$

Можно показать (49), что относительная погрешность вычисления матрицы  $\mathbf{a}$ , определяется следующим неравенством

$$\frac{1}{\|\mathbf{S}_c\| \|\mathbf{S}_c^{-1}\|} \frac{\|\Delta \mathbf{C}\|}{\|\mathbf{C}^y\|} \leq \frac{\Delta \mathbf{a}}{\mathbf{a}} \leq \|\mathbf{S}_c\| \|\mathbf{S}_c^{-1}\| \frac{\|\Delta \mathbf{C}\|}{\|\mathbf{C}^y\|} \quad (4.42)$$

Число  $K(\mathbf{S})$   $K(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}_c\| \|\mathbf{S}_c^{-1}\|$  и называется числом обусловленности матрицы  $\mathbf{S}_c$ . Чем ближе число обусловленности к 1, тем меньшее влияние оказывает неточность вычисления  $\mathbf{C}^y$  на погрешность вычисления  $\Delta \mathbf{a}$ . В наиболее благоприятном случае, когда  $K(\mathbf{S})=1$ , оценка относительной погрешности решения задачи идентификации совпадает с оценкой относительной погрешности исходных данных. Так например число обусловленности матричной свертки ортонормированного базиса Уолша, которую можно использовать в качестве  $\Phi(t)$  для 8 членов разложения равно  $K(\mathbf{S}) = 72,434$ , что говорит некорректности постановки задачи идентификации в виде (4.35) (4.36). У некорректно поставленной задачи решение эквивалентного

ей алгебраического уравнения (4.40) неустойчиво, т.е. малые изменения коэффициентов уравнения могут привести к значительным изменениям его решения.

## 5. Параметрическая идентификация

### 5.1. Метод наименьших квадратов

Параметрическая идентификация моделей объектов позволяет сразу находить значения коэффициентов модели объекта по измеряемым значениям управляемого  $y$  и управляющего  $u$  сигналов объекта. При этом предполагается, что структура и порядок модели объекта уже известен. Измеряемые значения  $y$  и  $u$  представляются в виде временного ряда, поэтому в результате идентификации оцениваются параметры АРСС – модели объекта, или параметры его дискретной передаточной функции. Зная коэффициенты АРСС – модели и ее структуру можно перейти к непрерывным структурированным моделям и моделям в пространстве состояний, как это делалось в п. 2.4.

В задачах параметрической идентификации используются модели объекта с шумом измерений, задаваемые передаточными функциями (2.63) - (2.65) и структурой рис. 2.9. Считая порядки моделей заданными, задачей параметрической идентификации стохастической системы считается определение оценок коэффициентов полиномов модели  $A, B, C$  и  $D$  по результатам измерений входа  $u(t)$  и выхода  $y(t)$ . Свойства получаемых оценок (состоятельность, несмещенность и эффективность) зависят от характеристик внешних возмущений и метода идентификации, при этом существенную роль играет вид закона распределения внешних возмущений.

Важным преимуществом методов параметрической идентификации является возможность использования рекуррентных алгоритмов, позволяющих проводить текущую идентификацию в реальном времени при номинальных режимах работы объекта. Эти преимущества определили широкое

использование методов параметрической идентификации в задачах управления и автоматизации. К таким методам относятся: метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия и метод стохастической аппроксимации .

Подставим в уравнение АРСС - модели значения сигналов  $y(k)$  и  $u(k)$ , а также оценки параметров объекта, полученные после  $(k - 1)$  - го такта [32]:

$$y(k) + a_1 y(k - 1) + \dots + a_n y(k - n) - b_1 y(k - d - 1) - \dots - b_m y(k - d - m) = e(k). \quad (5.1)$$

В этом уравнении ноль, стоящий в правой части уравнения (получающийся после переноса всех слагаемых в левую часть) заменен величиной ошибки  $e(k)$ . Она отражает наличие погрешности измерений выхода и неточность оценок параметров модели  $a_i$  и  $b_j$ . Обозначим значение  $y(k)$  как значение  $y(k/k - 1)$ , предсказанное в момент  $(k - 1)$  на момент  $k$ . Тогда

$$y(k/k - 1) = -a_1 y(k - 1) - \dots - a_n y(k - n) + b_1 u(k - d - 1) + \dots + b_m u(k - d - m), \quad (5.2)$$

или

$$y(k/k - 1) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k - 1), \quad (5.3)$$

где  $\hat{\theta}(k - 1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$  - вектор оценок,

$\Psi^T(k) = [-y(k - 1), \dots - y(k - n), u(k - d - 1), \dots + u(k - d - m)]$  - вектор данных,  $d$  - величина дискретного запаздывания.

Ошибка уравнения  $e(k)$  будет иметь вид

$$e(k) = y(k) - y(k/k - 1), \quad (5.4)$$

где  $y(k)$  - новое измерение;  $y(k/k - 1)$  - предсказанное значение измерения.

Предположим, что измерения выполнены на интервале  $k = 1, 2, \dots, n + d + N$  а порядок АРСС - модели  $(n, n)$ . Тогда на основании (5.3) (5.4) получим векторно-матричное уравнение вида

$$\mathbf{y}(k) = \Psi^T(k) \hat{\theta}(k - 1) + \mathbf{e}(k), \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{y}^T(k) = [y(n + d), y(n + d + 1), \dots, y(n + d + N)]$  - вектор выхода,



$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} -y(n+d-1) & \dots & -y(d) & u(n-1) & \dots & u(0) \\ -y(n+d) & \dots & -y(d+1) & u(n) & \dots & u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(m+d+N-1) & \dots & -y(n+d) & u(n+N-1) & \dots & u(N) \end{bmatrix} \quad \text{- матрица}$$

данных,

$\mathbf{e}^T(m+d+N) = [e(n+d), e(n+d+1) \dots e(n+d+N)]$  – вектор ошибок.

Функция потерь по критерию наименьших квадратов определяется как квадрат ошибки, что в векторном представлении дает

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}^T(n+d+N) \mathbf{e}(n+d+N) = \sum_{k=n+d}^{n+d+n} e^2(k), \quad (5.6)$$

а ее минимум находится из условия

$$\left. \frac{dJ}{d\boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 0. \quad (5.7)$$

Полагая, что  $N \geq 2n$ , обозначим

$$\mathbf{P}(n+d+N) = [\Psi^T(n+d+N)\Psi(n+d+N)]^{-1}, \quad (5.8)$$

тогда оценка минимизирующая функцию потерь (5.6) будет иметь вид:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(n+d+N) = \mathbf{P}(n+d+N)\Psi^T(n+d+N)\mathbf{y}(n+d+N). \quad (5.9)$$

Алгоритм (5.9) – нерекуррентный алгоритм идентификации по методу наименьших квадратов, так как вычисление оценок параметров модели  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(n+d+N)$  производится лишь после того как сформирован весь массив входных и выходных данных объекта  $\Psi(n+d+N)$ .

Рекуррентный алгоритм МНК получается после записи новой  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1)$  и старой  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$  оценок и вычитания одной из другой:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)]. \quad (5.10)$$

Вектор коррекции определяется из соотношения:

$$\gamma(k) = \frac{\mathbf{P}(k)\Psi(k+1)}{\Psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\Psi(k+1) + 1}. \quad (5.11)$$

Вектор  $\mathbf{P}(k+1)$  на следующем шаге вычисляется как

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\Psi^T(k+1)]\mathbf{P}(k). \quad (5.12)$$

Рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов реализуется в следующей последовательности.

1. Задаются начальные значения вектора оценок параметров модели и вектора данных:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = 0; \mathbf{P}(0) = \alpha\mathbf{I},$$

где  $\alpha$  – достаточно большое число,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности.

2. Производятся измерения входного и выходного сигналов объекта, и формируется новый вектор данных  $\Psi(k+1)$ .

3. Вычисляется вектор коррекции  $\gamma(k)$  по формуле (5.11)

4. Находится новая оценка параметров  $\boldsymbol{\theta}(k+1)$  по формуле (5.10)

5. Вычисляется новый вектор  $\mathbf{P}(k+1)$  по формуле (5.11)

Обычно для промышленных объектов характерна коррелированность во времени шумов, действующих на объект. Использование обычного МНК при таком шуме, т. е. при минимизации выражения (5.6), вызывает смещение оценок параметров, увеличение дисперсии этих оценок. Ухудшение этих оценок, в свою очередь, приводит к ухудшению свойств оценок переменных состояния  $x(k)$  и в итоге к снижению качества управления.

Для получения несмещенных оценок используется обобщенный МНК (ОМНК).

При использовании ОМНК оцениваются параметры моделей объекта и шума на его выходе. Идентификации подвергается модель максимального правдоподобия (МП - модель) (2.64) для которой связь между переменными задается уравнением

$$A(z)y(z) - B(z)z^{-d}u(z) = D(z)e(z). \quad (5.13)$$

Вводя расширенные векторы данных

$$\hat{\Psi}^T(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)] \quad (5.14)$$

и параметров

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n, \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n, \hat{d}_1 \dots \hat{d}_n], \quad (5.15)$$

выходной сигнал объекта можно записать через (5.13) и (5.14)

$$y(k) = \hat{\Psi}^T(k)\hat{\theta}(k-1) + e(k). \quad (5.16)$$

Так как сигнал помехи  $e(k)$  неизвестен, то используется его оценка  $\hat{v}(k)$ , определяемая из уравнения

$$\hat{v}(k) = y(k) - \hat{\Psi}^T(k)\hat{\theta}(k-1). \quad (5.17)$$

Оценки параметров МП - модели вычисляются аналогично как в МНК по формулам (5.10) – (5.12).

## 5.2. Метод вспомогательных переменных

Метод вспомогательных переменных (МВП) используется, когда существует корреляция между сигналом шума  $e(k)$  и элементами вектора данных  $\Psi(k+1)$  и модель объекта и шума представлена в виде полной модели (2.63). Алгоритм идентификации по методу вспомогательных переменных аналогичен алгоритму МНК. Для реализации алгоритма вводят вектор вспомогательных переменных [30]

$$\Lambda^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)], \quad (5.18)$$

в качестве которых используются выходные сигналы дополнительной модели с параметрами  $\hat{\theta}_b(k)$

$$h(k) = \Lambda^T(k)\hat{\theta}_b(k). \quad (5.19)$$

Для уменьшения степени корреляции между вспомогательными переменными и ошибкой, в [30] параметры дополнительной модели

определяются как выход низкочастотного дискретного фильтра первого порядка с запаздыванием, на вход которого подается оценка параметров объекта

$$\hat{\theta}_b(k) = (1 - \beta)\hat{\theta}_b(k-1) + \beta\hat{\theta}(k-\eta), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1. \quad (5.20)$$

Вектор коррекции вычисляется как

$$\gamma(k) = \frac{\mathbf{P}(k)\mathbf{\Lambda}(k+1)}{\mathbf{\Psi}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\mathbf{\Lambda}(k+1) + 1}, \quad (5.21)$$

а новое значение вектора  $\mathbf{P}(k+1)$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\mathbf{\Lambda}^T(k+1)]\mathbf{P}(k) \quad (5.22)$$

Оценки вектора параметров вычисляются аналогично МНК по формуле (5.10).

На начальном этапе вычислений рассматриваемый метод весьма чувствителен к выбору исходных значений вектора параметров  $\hat{\theta}(0)$  и вектора данных  $\mathbf{P}(0)$ , а также коэффициента  $\beta$ . Учитывая это, для повышения устойчивости алгоритма вначале целесообразно применять МНК.

МВП позволяет вычислить только оценки параметров объекта идентификации. В том случае если требуются оценки параметров модели формирующего фильтра шума можно воспользоваться МНК. Модель шума представляется стационарным авторегрессионным процессом со скользящим средним

$$y(k) + c_1y(k-1) + \dots + c_p(y(k-p)) = v(k) + d_1v(k-1) + \dots + d_pv(k-p). \quad (5.23)$$

Вводя вектор данных

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1), \dots - y(k-p), v(k-1), \dots v(k-p)] \quad (5.23)$$

и вектор параметров

$$\mathbf{p}^T = [c_1, \dots c_p, d_1, \dots d_p], \quad (5.24)$$

можно записать (5.23) в виде векторно-матричного уравнения аналогичного МНК

$$\mathbf{y}(k) = \varphi^T(k)\mathbf{p}(k-1) + v(k). \quad (5.24)$$

Для того чтобы применить алгоритм МНК к АРСС - модели (5.23) неизвестные помехи заменяются их оценками. Из (5.24) имеем

$$v(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\varphi}^T(k)\hat{\mathbf{p}}(k-1) \quad (5.25)$$

где  $\hat{\varphi}^T(k) = [-y(k-1), \dots - y(k-p), \hat{v}(k-1), \dots \hat{v}(k-p)]$ .

(5.26)

После этого вычисляется новая оценка вектора данных

$$\varphi^T(k+1) = [-y(k), \dots - y(k-p+1), \hat{v}(k), \dots \hat{v}(k-p+1)]. \quad (5.27)$$

В качестве исходных значений берутся

$$\hat{v}(0) = y(0); \hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \mathbf{0}; \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}.$$

### 5.3. Метод максимального правдоподобия

В выражении (5.1) ошибка идентификации  $e(k)$  представляет собой дискретную случайную величину  $E$  зависящую от вектора параметров  $\boldsymbol{\theta}$  АРСС- модели. Пусть в результате проведения измерений (опыта) получена выборка случайной величины  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  объемом  $n$ . Обозначим вероятность появления какого-либо числа выборки  $P(E = e_j)$  через  $p_j(\boldsymbol{\theta})$ , а через  $f_1, f_2, \dots, f_r$  абсолютные частоты, с которыми появляются значения  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$  в выборке,

причем  $\left( \sum_{j=1}^r f_j = n \right)$ .

В этом случае функцией правдоподобия называют функцию параметров модели  $[a, b]$ , определяемую соотношением [10]

$$L(x_1, x_2, \dots, x_l; \boldsymbol{\theta}) = p_1^{f_1}(\boldsymbol{\theta}) p_2^{f_2}(\boldsymbol{\theta}) \dots p_r^{f_r}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5.28)$$

Метод максимального правдоподобия (ММП) состоит в том, что в качестве оценки параметров  $\boldsymbol{\theta}$  берутся такие их значения, при которых функция правдоподобия достигает своего максимума. Это значение  $\boldsymbol{\theta}_{\max}$  зависит от выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ .

$$(\boldsymbol{\theta}_{\max}) = \Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l). \quad (5.29)$$

Соответствующая функция выборки  $\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_l)$  называется наиболее правдоподобной оценкой  $\theta$ .

Наиболее правдоподобную оценку системы параметров  $\theta$  получают решением системы уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (5.30)$$

или

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0. \quad (5.31)$$

Наиболее правдоподобные оценки имеют некоторые замечательные свойства. При достаточно общих условиях они являются состоятельными и асимптотически нормально распределенными (однако не всегда несмещенными), и имеют среди всех асимптотически нормально распределенных оценок наибольшую эффективность.

Для того, чтобы записать выражение для функции правдоподобия  $L(x_1, x_2, \dots, x_l; \theta) = p_1^{f_1}(\theta) p_2^{f_2}(\theta) \dots p_r^{f_r}(\theta)$ , нужно знать аналитическое выражение закона распределения. Часто предполагается, что аддитивные помехи в уравнении модели распределены нормально. В этом случае оценки ММП для линейных моделей с независимым шумом совпадают с оценками МНК, для линейных моделей с зависимым шумом – с оценками ОМНК, а метод максимального правдоподобия дает то же выражение для функции потерь, что и метод наименьших квадратов:

$$L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N e^2(k). \quad (5.32)$$

Поскольку в функцию правдоподобия (функцию потерь) параметры модели входят нелинейно, то для их оценок необходимо минимизировать функцию потерь решив систему нелинейных алгебраических уравнений. Поскольку результаты полученного решения являются функцией выборки (5.28), метод максимального правдоподобия может реализовываться только в не рекуррентном виде.

Однако если провести линеаризацию функции правдоподобия в малом, а затем ее минимизировать, можно получить рекуррентный алгоритм метода максимального правдоподобия.

Для модели максимального правдоподобия (МП – модели) в [30] получены следующие выражения

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) + \boldsymbol{\gamma}(k)e(k+1), \quad (5.33)$$

где

$$\boldsymbol{\gamma}(k) = \mathbf{P}(k+1)\boldsymbol{\varphi}(k+1) = \frac{\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k+1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k+1)},$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\frac{\partial^2 L[\boldsymbol{\theta}(k-1), k]}{\partial \boldsymbol{\theta}^2}},$$

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\gamma}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k+1))\mathbf{P}(k),$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k+1) = \{-y'(k), \dots - y'(k-n+1), u'(k-d), \dots u'(k-d-n+1), e'(k), \dots e'(k-n-1)\},$$

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_n y'(k-n),$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n),$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n),$$

$$e(k) = y(k) - \boldsymbol{\Psi}^T(k+1)\boldsymbol{\theta}(k),$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}(k+1) = e(k+1).$$

Начальные значения параметров задаются следующими

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}.$$

Вектор  $\boldsymbol{\Psi}(k+1)$  аналогичен вектору (5.14) в обобщенном методе наименьших квадратов.

В отличие от обобщенного метода наименьших квадратов в рассматриваемом методе используется модифицированный вектор данных  $\varphi(k+1)$ , как в методе вспомогательной переменной. Однако в отличие от метода вспомогательных переменных в методе максимального правдоподобия вектор данных коррелирует с ошибкой идентификации.

Оценки ММП являются состоятельными, асимптотически эффективными, нормально распределенными.

#### 5.4. Метод стохастической аппроксимации

Метод стохастической аппроксимации (МСА) разработан для определения корней уравнения, когда значения функции при заданном значении аргумента наблюдаются с помехой (погрешностью) [54].

Пусть, например, в линейном разностном уравнении (5.5) нужно определить вектор параметров  $\theta$ . При каждом измерении истинное значение  $y_0(k)$  не наблюдается, а наблюдается некоторое значение  $y(k)$  подверженное действию помехи  $v(k)$ , о которой известно, что.

$$M[y(k)] = M[y_0(k)]. \quad (5.34)$$

МСА организует некоторую последовательность решений для нахождения оценки вектора параметров при каждом измерении  $\hat{\theta}(k)$ , такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\theta}(k) = \theta. \quad (5.35)$$

Члены этой последовательности образуются рекуррентной формулой

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)[y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)], \quad (5.36)$$

аналогичной формуле рекуррентного метода наименьших квадратов. Отличие заключается в использовании другого вектора коррекции  $\gamma(k)$ .

Доказывается, что, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) = \infty \text{ и } \sum_{k=1}^N \gamma^2(k) < \infty, \quad (5.37)$$



а дисперсия помех  $v(k)$  ограничена и модель объекта устойчива, то выполняется условие (5.35).

Выражение в квадратных скобках в (5.36) обозначенное, называется невязкой, коэффициент  $\gamma(k)$  – коэффициентом усиления или коррекции.

Вектору параметров  $\hat{\theta}(k)$  соответствует вектор невязок  $\mathbf{e}(k) = [y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)]$  и матрица коэффициентов усиления  $\gamma(k)$ .

Условием (5.37) отвечает большое число последовательностей, например,

$$\gamma(k) = \frac{c}{k}, \quad (5.38)$$

где  $c$  – постоянное число.

МСА легко переносится на задачи определения параметров в стохастических системах в условиях последовательного получения оценок (рекуррентная идентификация).

Пусть уравнение модели задано в виде (5.5),  $M[\mathbf{e}(k)] = 0$  и скалярный показатель качества идентификации (функция потерь) представлен в виде (5.6)

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}^T(N) \mathbf{e}(N) = \sum_{k=1}^N e^2(k), \quad (5.39)$$

тогда вектор невязок  $\mathbf{e}(k)$  может быть определен с помощью выражения

$$e(k+1) = \left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}}, \quad (5.40)$$

что приводит к алгоритму

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k+1)\Psi^T(k+1)[y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k)]. \quad (5.41)$$

Необходимо отметить, что математическое ожидание вектора невязок в точке  $\hat{\theta} = \theta$  будет на каждом шаге равно нулю.

В [30] рекомендуется использовать следующий коэффициент коррекции, аналогичный (5.38)

$$\gamma(k+1) = \frac{c}{k+1} \quad (5.41)$$

Сходимость МСА имеет место для зависимых и независимых последовательностей  $y(k)$ .

Недостаток МСА – медленная сходимость оценок  $\hat{\theta}(k)$ , даже если дисперсия  $e(k)$  существенно меньше дисперсии  $y(k)$ . Несмотря на медленную сходимость оценок, алгоритмы МСА из-за своей простоты находят применение в практических задачах идентификации линейных и нелинейных моделей объектов с независимым аддитивным шумом.

### ***5.5. Сравнительные характеристики рекуррентных методов идентификации***

Все рассмотренные выше алгоритмы рекуррентной параметрической идентификации (РМНК, РОМНК, РМВП РММП, МСА) могут быть приведены к единой-форме описания [30]:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k+1), \quad (5.42)$$

$$\gamma(k) = \mu(k+1)\mathbf{P}(k)\varphi(k+1), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{e}(k+1) = y(k+1) - \Psi^T(k+1)\hat{\theta}(k) \quad (5.44)$$

Для различных методов общее описание отличается векторами параметров  $\hat{\theta}(k)$ , векторами данных  $\Psi(k+1)$  и векторами коррекции  $\gamma(k)$ .

Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) имеет вид:

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m],$$

$$\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-m)],$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\Psi(k+1)},$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{[\Psi^T(k)\Psi(k)]},$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\Psi^T(k+1)]\mathbf{P}(k),$$

(5.45)

$$\varphi(k+1) = \Psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}.$$

Обобщенный рекуррентный метод наименьших квадратов (ОРМНК) :

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n, \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n, \hat{d}_1 \dots \hat{d}_n],$$

$$\hat{\Psi}^T(k) = [y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n), \hat{v}(k-1), \dots, \hat{v}(k-n)],$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \hat{\Psi}^T(k+1)\mathbf{P}(k)\hat{\Psi}(k+1)},$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{[\hat{\Psi}^T(k)\hat{\Psi}(k)]},$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\hat{\Psi}^T(k+1)]\mathbf{P}(k),$$

(5.46)

$$\varphi(k+1) = \Psi(k+1),$$

$$\hat{\theta}(0) = 0; \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}.$$

Рекуррентный метод вспомогательных переменных (РМВП):

$$\hat{\theta}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m],$$

$$\Psi^T(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-n), u(k-d-1), \dots, +u(k-d-m)],$$

$$\varphi^T(k) = [-h(k-1), \dots, -h(k-n), u(k-d-1), \dots, u(k-d-n)],$$

$$h(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}_b(k),$$

$$\hat{\theta}_b(k) = (1 - \beta)\hat{\theta}_b(k-1) + \beta\hat{\theta}(k-\eta), \quad 0,01 \leq \beta \leq 0,1,$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \Psi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\varphi(k+1)},$$

$$\mathbf{P}(k+1) = [\mathbf{I} - \gamma(k)\varphi^T(k+1)]\mathbf{P}(k),$$

(5.47)

$$\hat{v}(0) = y(0); \hat{\theta}(0) = 0; \mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}.$$

Рекуррентный метод максимального правдоподобия (РММП):

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n, \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n, \hat{d}_1 \dots \hat{d}_n],$$

$$\varphi^T(k+1) = \{-y'(k), \dots - y'(k-n+1), u'(k-d), \dots u'(k-d-n+1), e'(k), \dots e'(k-n-1)\}$$

,

$$y'(k) = y(k) - \hat{d}_1 y'(k-1) - \dots - \hat{d}_n y'(k-n),$$

$$u'(k) = y(k-d) - \hat{d}_1 u'(k-d-1) - \dots - \hat{d}_n u'(k-d-n),$$

$$e'(k) = e(k) - \hat{d}_1 e'(k-1) - \dots - \hat{d}_n e'(k-n),$$

$$\mu(k+1) = \frac{1}{1 + \varphi^T(k+1)\mathbf{P}(k)\varphi(k+1)},$$

$$\mathbf{P}(k+1) = (\mathbf{I} - \gamma(k)\varphi^T(k+1))\mathbf{P}(k),$$

(5.48)

$$\boldsymbol{\theta}(0) = 0, \mathbf{P}(0) = \alpha\mathbf{I}, \varphi(0) = 0.$$

Метод стохастической аппроксимации (МСА)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m],$$

$$\boldsymbol{\Psi}^T(k) = [-y(k-1), \dots - y(k-n), u(k-d-1), \dots + u(k-d-m)],$$

$$\mu(k+1) = 1,$$

$$\mathbf{P}(k+1) = \frac{c}{k+1},$$

(5.49)

$$\varphi(k+1) = \boldsymbol{\Psi}(k+1),$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = 0; \mathbf{P}(0) = \alpha\mathbf{I}.$$

Если считать, что параметры идентифицируемого объекта на интервале измерений  $k = 0 \dots N$  оставались постоянными, то измерения  $u(k)$ ,  $y(k)$  и ошибки  $e(k)$  входят во все отношения с одинаковыми весами, не зависящими от  $k$ .

В тех случаях, когда оцениваются параметры нестационарного объекта (медленно меняющиеся), новым измерениям следует придавать больше веса, нежели тем, что были ранее, следовательно, должен быть предусмотрен механизм забывания старых значений.

В МНК он может быть введен путем изменения функции потерь (метод наименьших взвешенных квадратов):

$$J = \sum_{k=n+d}^{n+d+N} w(k) e^2(k), \quad (5.50)$$

где  $w(k) = \lambda^{n+d+N-k}$   $0 < \lambda < 1$ .

В связи с этим формулы рекуррентных методов (5.42) – (5.49) необходимо изменить.

В знаменателе коэффициента  $\mu(k+1)$  единица заменяется на  $\lambda$ , а матрица  $\mathbf{P}(k+1)$  умножается на  $1/\lambda$ :

Задаваясь показателем затухания  $\lambda$ , приходится выбирать между высокой степенью подавления шума и лучшим отслеживанием меняющихся параметров. Обычно  $0,900 < \lambda < 0,995$ .

Результаты многочисленных исследований рекуррентных алгоритмов идентификации позволяют сделать выводы об условиях применения этих процедур [23, 54].

*Рекуррентный метод наименьших квадратов.* Применим при малых отношениях интенсивностей шума и полезного сигнала. В противном случае дает сильное смещение оценок параметров. Надежная сходимость оценок требует относительно небольшого объема вычислений.

*Обобщенный рекуррентный метод наименьших квадратов.* Если справедлива модель шума вида D/A, применим при более высоких отношениях шума к сигналу. Вначале оценки сходятся медленно. Иногда наблюдается расходимость оценок. Оценки фильтра шума  $\mathbf{D} = [d_1, \dots, d_m]$  сходятся медленнее оценок параметров объекта В и А. Требует большего объема вычислений, чем РМНК.

*Рекуррентный метод вспомогательных переменных.* Обеспечивает довольно точную оценку параметров. Используется при высоких интенсивностях помех и их корреляции с переменными объекта. Для ускорения сходимости оценок на начальном этапе рекомендуется использовать РМНК. Большой объем вычислений.

*Рекуррентный метод максимального правдоподобия.* Если справедлива модель шума вида D/A, обеспечивает высокую точность оценок. Вначале оценки сходятся медленно. Расходятся реже, чем ОРМНК. Оценки фильтра шума D сходятся очень медленно. Требуется большего объема вычислений, чем ОРМНК.

*Метод стохастической аппроксимации.* Приемлемая точность достигается при очень большом числе измерений. Сходимость определяется числом  $s$ . Объем вычислений мал.

При малых объемах вычислений и шуме высокой интенсивности все методы (кроме МСА) обладают одинаковым качеством оценок, следовательно, предпочтение отдают РМНК, так как он проще других и гарантирует сходимость оценок. Преимущество РММП проявляется при больших объемах измерений.

Пример 5.1. Проведем идентификацию рекуррентным методом наименьших квадратов объекта с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}. \quad (5.51)$$

Идентификация проводилась программой приведенной ниже.

```
k=2.5;p1=-.1;p2=-3+4*i;p3=-3-4*i;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
tm=5000;dt=.2;
t=0:dt:tm;
n=length(t);
u=100*randn(n,1);
y=lsim(wo,u,t);
subplot(2,1,1),grid
plot(t,u),grid
title ('Входной сигнал')
subplot(2,1,2),grid
plot(t,y),grid
title ('Выходной сигнал')
pause
subplot(1,1,1)
my=mean(y);mu=mean(u);
yc=y-my;
```

```

uc=u-mu;
m=3;% Задание размерности АРСС - модели
% Задание начальных условий в РМНК
P=1000*eye(2*m,2*m);
Q=zeros(2*m,1);
F=Q;
% Метод РМНК
for i=1:n-m
    F=[-yc(i+m-1:-1:i);uc(i+m-1:-1:i)];
    ch=P*F;
    zn=1+F'*P*F;
    gm=ch/zn;
    P=(eye(2*m)-gm*F')*P;
    Q=Q+gm*(yc(m+i)-F'*Q);
    kf(i,1:2*m)=Q'; % Коэффициенты АРСС - модели
    Tp(i)=F'*Q;
End
% Ошибка идентификации и ее характеристики
e=yc(m+1:end)-Tp';
de=std(e);
plot(t(1:n-m),kf),grid
pause
sr=[yc(m+1:end),Tp'];
plot(sr),grid
pause
plot(e),grid
% Вычисление передаточной функции объекта и его характеристик
nun=kf(end,m+1:end);
den=[1 kf(end,1:m)];
wod=tf(nun,den,dt) % Вычисление дискретной передаточной функции объекта
won=d2c(wod) % Вычисление передаточной функции объекта
sm=ss(won)% Модель объекта в пространстве состояний
impulse(won,wo),grid % Функция веса
pause
step(won,wo),grid % Переходная характеристика
pause
bode(won,wo),grid % ЛАЧХ И ФЧХ
pause
nyquist(won,wo),grid % АФЧХ
pause
wonz=zpk(won)
[z,p,k]=zpkdata(won,'v')% Нули, полюса и коэффициент передачи объекта

```

Как и в случае, идентификации корреляционным методом, подадим на вход объекта случайный сигнал типа «белый шум» (рис. 5.1). На рис. 5.2 показано изменение коэффициентов АРРС – модели второго порядка в процессе идентификации. По полученной АРРС – модели были вычислены дискретная и непрерывная передаточные функции идентифицируемой модели, хорошо совпадающие с исходной передаточной функцией.

$$W(z) = \frac{0,0003558(z + 3,181)(z + 0,2318)}{(z - 0,99)(z^2 + 1,364z + 0,5486)}; \quad (5.52)$$

$$W(p) = \frac{1,4801 \times 10^{-6}(p^2 - 34,41p + 1,69 \times 10^6)}{(p + 0,1001)(p^2 + 6,004p + 25,01)}. \quad (5.53)$$

Сравните исходную передаточную функцию (5.51) и передаточную функцию полученную в результате идентификации (5.53).

На рис 5.3 и 5.4 показаны временные и частотные характеристики исходного объекта и модели, полученной в результате идентификации. Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности РМНК для идентификации линейных систем.

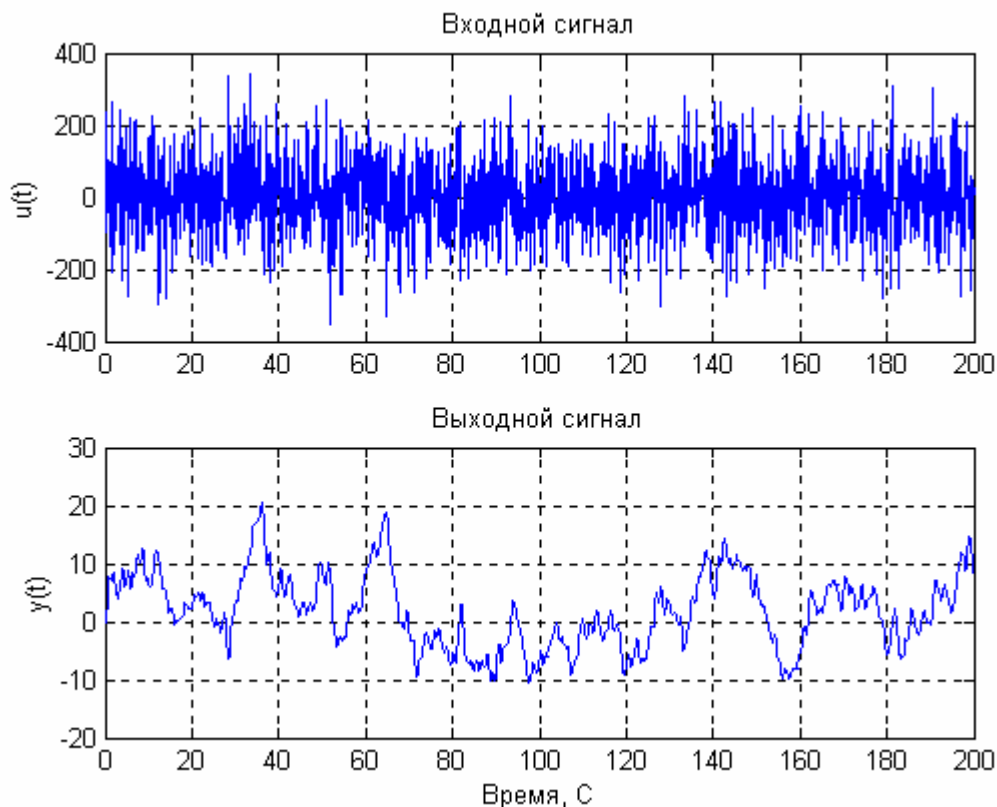


Рис.5.1.



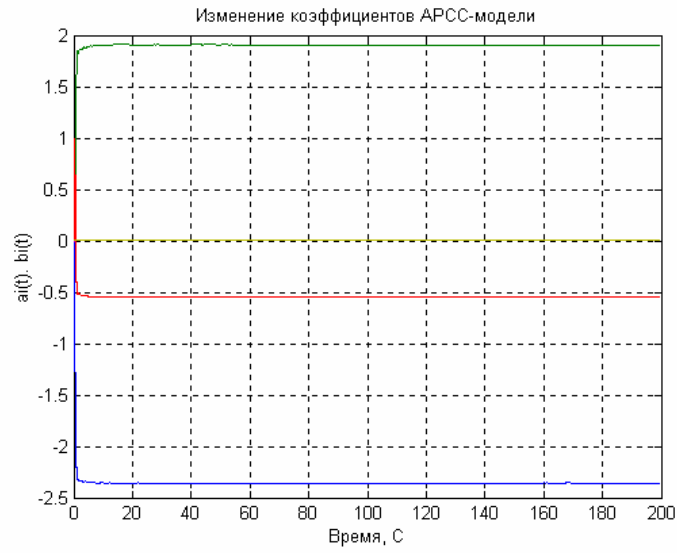


Рис. 5.2.

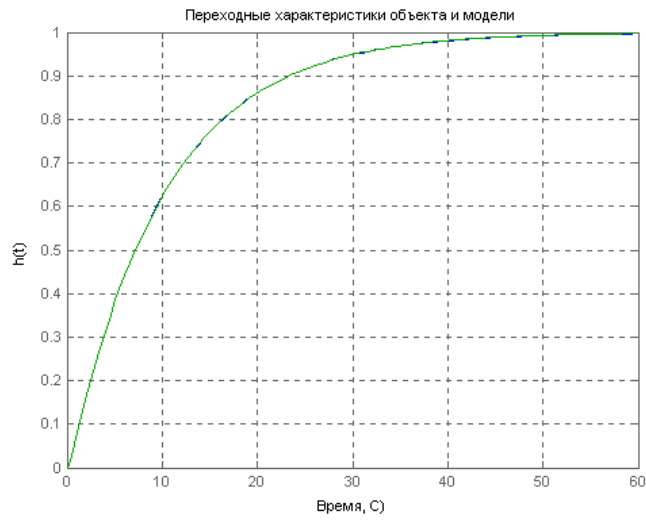


Рис. 5.3.

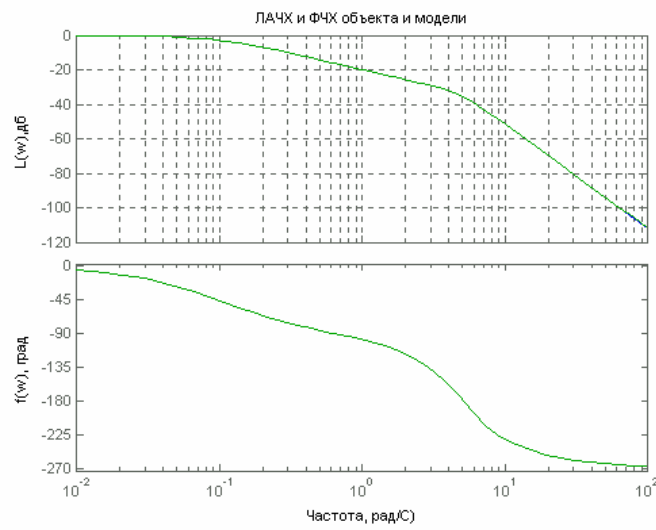


Рис. 5.4.

## 5.6. Особенности идентификации в замкнутых системах

Для систем управления характерна ситуация, когда часть входных переменных  $u$  (управляющие воздействия) изменяются в зависимости от наблюдаемых переменных на входе  $y$  (рис. 5.5), т. е. имеет место обратная связь и управление осуществляется в замкнутом контуре. В этом случае входные переменные  $u$  коррелированы с шумами на выходе системы, и оценки параметров объекта могут быть смещены [30].

Идентификации параметров объекта в замкнутых системах может проводиться при естественных шумах объекта управления и создании дополнительных широкополосных шумов, вносимых в замкнутый контур.

В первом случае через контур обратной связи возникает корреляция между входными и выходными данными объекта, что может приводить к смещению оценок его параметров. Поэтому для устранения этого смещения необходимо выполнение двух условий идентифицируемости [30].

Первое условие отвечает требованию априорной известности структуры и порядка модели объекта управления.

Второе условие задается неравенствами

$$\begin{aligned} m_R &\geq n_o - d; \\ n_R &\geq m_o, \end{aligned} \tag{5.54}$$

где  $m_R$ ,  $m_o$  и  $n_R$ ,  $n_o$  – порядки полиномов числителей и знаменателей передаточных функций регулятора и объекта соответственно,  $d$  – дискретное запаздывание в системе.

Если структура регулятора не отвечает второму условию идентифицируемости, то для получения сходящихся оценок рекомендуется [30]:

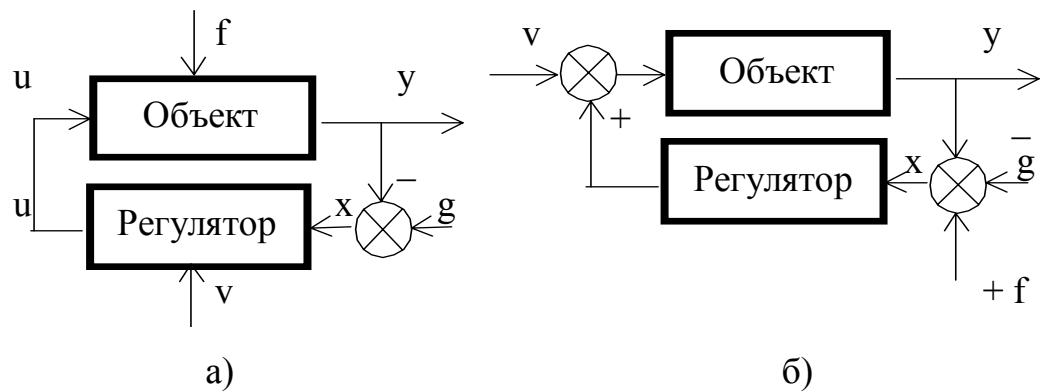
- попеременное включение двух регуляторов с различными параметрами настройки;

- введение запаздывания в контур обратной связи, где  $p$  – число кратных корней в полиномах знаменателей  $A$  и  $D$  моделей объекта и формирующего фильтра шума;
- использование нелинейных или нестационарных регуляторов.

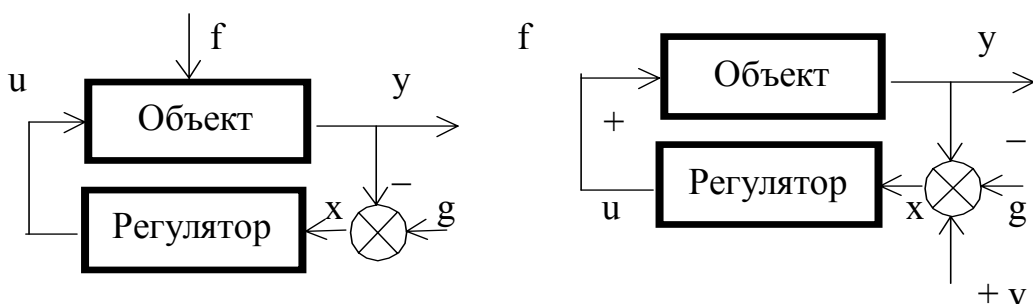
Следует отметить, что непараметрические методы идентификации в замкнутых системах при естественных шумах объекта управления неэффективны, так как в лучшем случае позволяют оценить параметры замкнутой системы управления.

Для улучшения сходимости оценок при проведении идентификации рекомендуется подача дополнительных измеряемых широкополосных шумов вносимых в замкнутый контур и некоррелированных с естественными шумами объекта управления

Для анализа замкнутых систем, находящихся под воздействием наблюдаемых, коррелированных во времени шумов, удобно разделить их на два класса. Первый – замкнутые системы с шумами в объекте и в обратной связи (рис. 5.5 а, б), второй – замкнутые системы без шума в обратной связи (рис. 5.6 а, б).



**Рис.5.5.**



а)

б)

Рис. 5.6.

Условия идентифицируемости объекта в замкнутой системе первого класса при практически совпадают с условием идентифицируемости разомкнутых систем. Но наличие ОС может повлиять на дисперсию оценок на конечной выборке.

В системах второго класса может возникнуть структурная неидентифицируемость из-за линейной зависимости регрессоров уравнения объекта. Для устранения структурной неидентифицируемости используют специальные приемы, нарушающие линейность зависимости регрессоров (введение шума в цепь ОС, введение нелинейности в контур ОС, получение реализаций при нескольких настройках регулятора).

**Пример 5.2.** Проведем идентификацию РМНК в замкнутом контуре рис. 5.6 а. Передаточные функции объекта  $W_o(p)$  и регулятора  $W_p(p)$  равны

$$W_o(p) = \frac{2,5}{(p + 0,1)(p^2 + 6p + 25)}; \quad (5.55)$$

$$W_p(p) = \frac{10p + 1}{p}.$$

Возмущение типа «белый шум» прикладывалось к входу объекта. Структурная схема замкнутой системы собранной в Simulink показана на рис. 5.7.

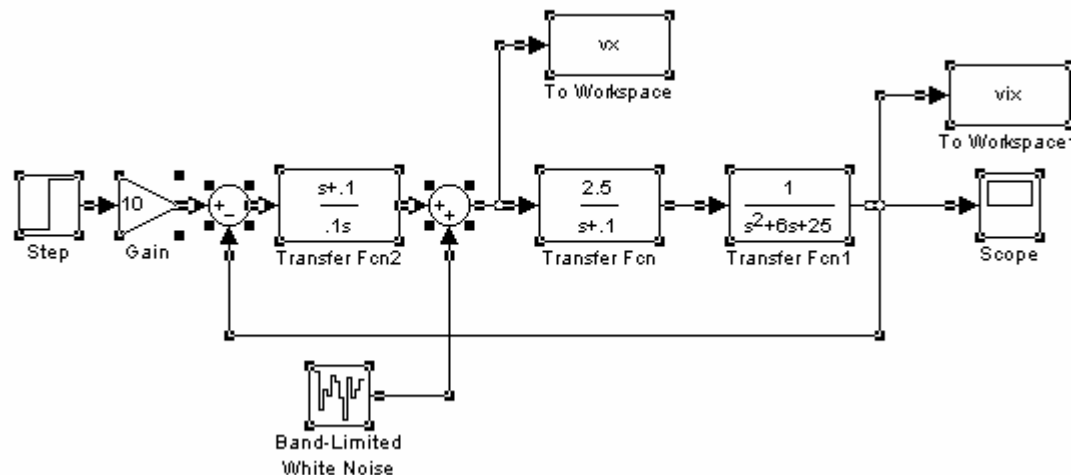


Рис. 5.7.

На рис. 5.8 приведены входной и выходной сигналы объекта, на рис. 5.9 – изменение коэффициентов АРСС – модели, на рис. 5.10 и 5.11 функция веса и частотные характеристики.

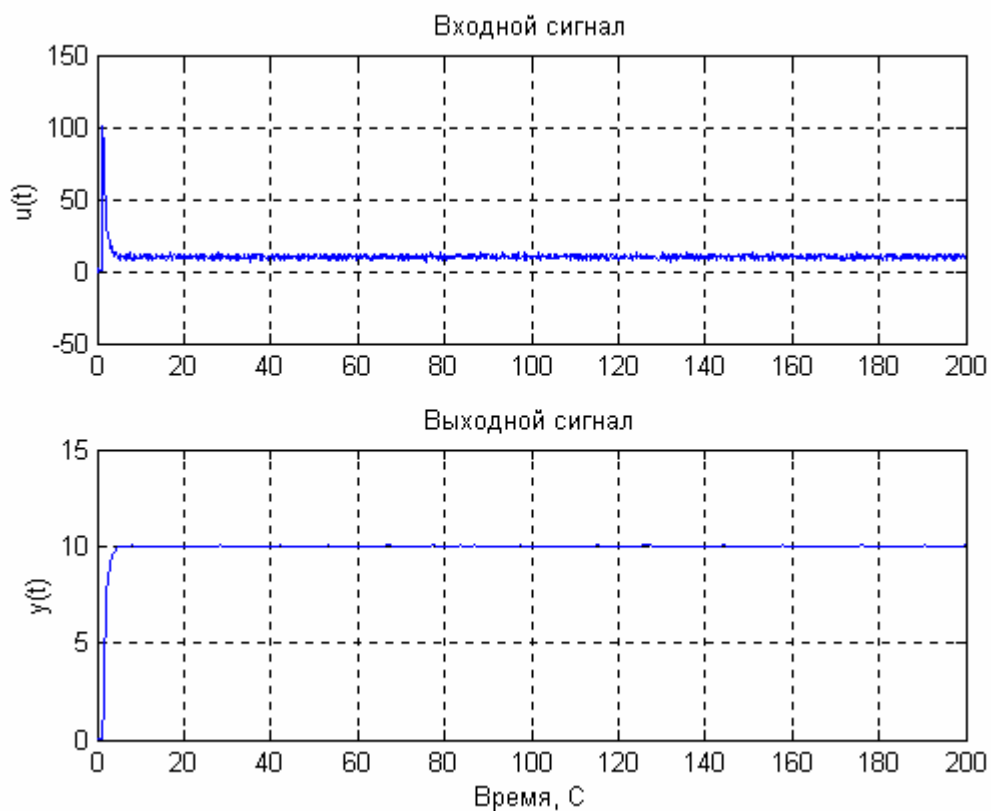


Рис. 5.8.

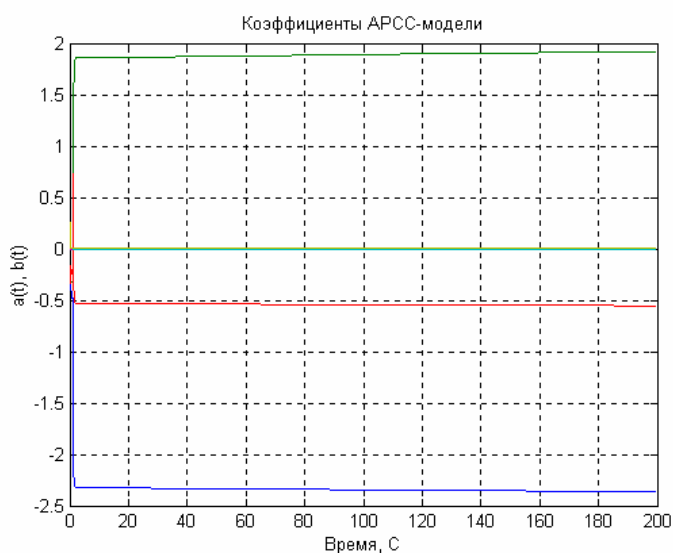


Рис. 5.9.

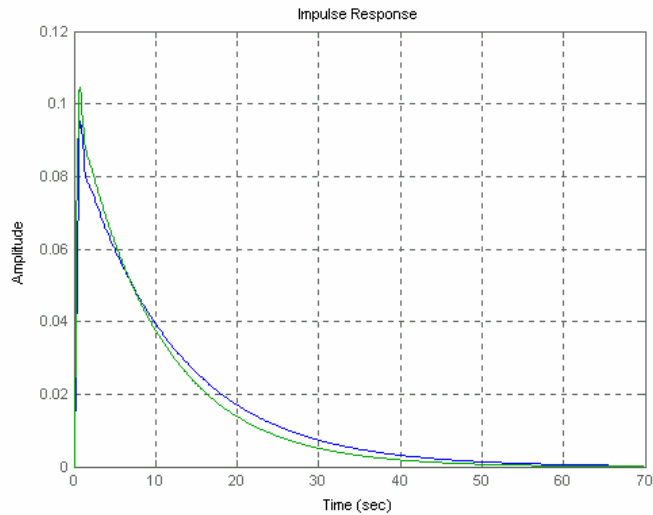


Рис. 5.10

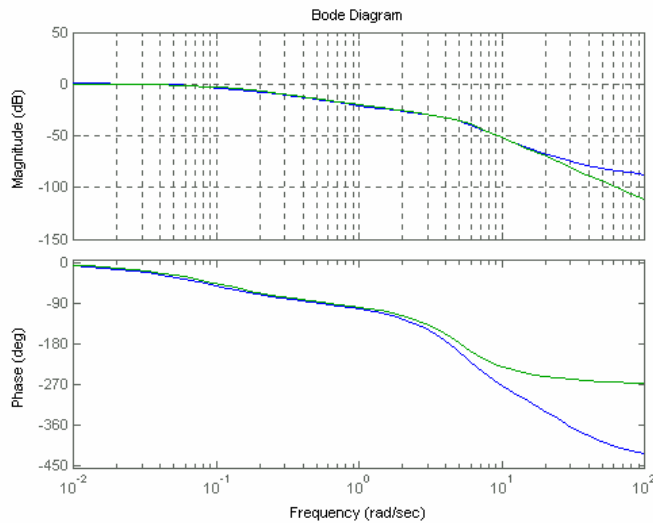


Рис. 5.11.

В результате идентификации полученв следующая передаточная функция

$$\hat{W}_o(p) = \frac{0,0038829(p^2 - 40,16p + 580,2)}{(p + 0,08395)(p^2 + 5,823p + 25,29)}. \quad (5.56)$$

Сравнивая результаты идентификации объекта в замкнутом и разомкнутом контуре можно отметить, что в последнем случае результаты получаются точнее.

## 6. Идентификация при наличии аномальных помех

### 6.1. Идентификация в условиях априорной неопределенности

При решении задачи идентификации параметров объекта в классическом варианте (п. 4 – 5) предполагается, что параметры сигнала  $y(k)$  и погрешностей измерения  $v(k)$ , вызванных действием внешних возмущений на интервале наблюдения, являются постоянными, но неизвестными величинами, считается известным характер взаимодействия сигнала и возмущений, вызывающих погрешность идентификации.

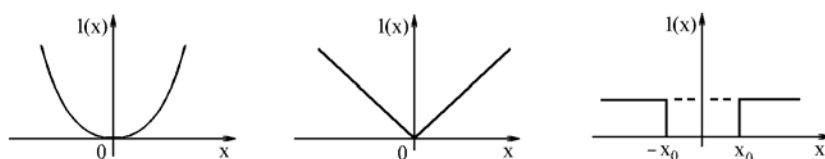
Исходя из наличия априорной информации, при этом подходе различают несколько методов получения оценок [28]:

1. Если априорная информация о параметрах объекта и шума  $e(k)$  известна полностью, т. е. заданы плотности вероятности параметров объекта  $\theta$  и вектора данных, включающего и помехи действующие на объект  $\Psi$ , то критерий оптимальности оценки формируется в виде условия минимума среднего риска:

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(\theta, \theta) f(\theta / y) d\theta = \min \quad (6.1)$$

где  $l(\theta, \theta)$  - заданная функция потерь,  $f(\theta / y)$  - апостериорная плотность вероятности параметров объекта относительно результатов измерения выхода объекта.

Наиболее распространенными функциями риска (потерь) являются функции, изображенные на рис. 6.1.



$$l(x) = x^2$$

$$l(x) = |x|$$

$$l(x) = \begin{cases} \text{const} & x \in ]-x_0, x_0[ \\ 0 & x \in [-x_0, x_0] \end{cases}$$

Рис. 6.1

2. Если отсутствуют априорные сведения о распределении параметров объекта  $\theta$ , но имеются сведения о законе распределения погрешностей  $e(k)$ , то

используется метод максимального правдоподобия. Строится функция максимального правдоподобия

$$L(\theta) = g(y / \theta), \quad (6.2)$$

которая совпадает по форме с условной плотностью совместного распределения результатов измерения при фиксировании параметра  $\theta$ .

В качестве оценки  $\theta$  берется такое значение  $\hat{\theta}$ , которое максимизирует функцию максимального правдоподобия (6.2).

Метод максимального правдоподобия является достаточно универсальным: он приводит к методу наименьших квадратов в предположении о нормальном распределении погрешности и к методу наименьших модулей – о законе распределения Лапласа.

Все перечисленные выше методы статистической обработки измерений обеспечивают при выполнении ряда априорных допущений о вероятностных характеристиках сигнала и помех оптимальность соответствующих алгоритмов оценивания в смысле неравенства Рао–Крамера [28]:

$$\sigma^2 \geq \left( \int \left[ \frac{\ln g(y / \theta)}{\theta} \right]^2 g_n(y / \theta) dy \right)^{-1}, \quad (6.3)$$

где  $g(y / \theta)$  – условная плотность распределения.

Параметрический подход к проблеме идентификации оценивания затрудняет решение многих практических задач, поскольку зачастую нельзя точно говорить об определенном виде функций распределения сигнала и погрешностей. Показано [72], что классические статистические методы не обладают устойчивостью к отклонению характеристик исходных данных от предполагаемых. Это ведет в большинстве случаев к значительному снижению эффективности процедур обработки данных, а в конечном счете, к снижению точности характеристик измерительных систем и систем управления в целом.

Рассмотрим более подробно ситуацию несовпадения системы допущений о математической модели наблюдаемого процесса с его реальными характеристиками. Одним из наиболее распространенных допущений является



предположение о нормальном характере распределения погрешностей измерений (воздействий внешней среды). Данное допущение основывается на ряде центральных предельных теорем. Кроме того, именно нормальное распределение обеспечивает максимальное значение шенноновской энтропии на множестве всех возможных распределений при условии постоянства значений дисперсии в процессе измерения [51]. Однако подобные допущения во многих случаях не являются достаточными, так как составляющие погрешности могут оказаться несоизмеримыми по величине, т. е. не выполняется условие Линдберга, гарантирующее малость каждого слагаемого в сумме случайных величин по сравнению со всей суммой. Такая ситуация характерна при воздействии на полезный сигнал внешних импульсных помех [7].

Практические исследования подтверждают факт наличия помех с негауссовой плотностью распределения в информационных каналах систем [18,100].

Таким образом, можно утверждать, что в реальных ситуациях характер распределения погрешностей будет стремиться к нормальному, однако наличие аномальных погрешностей будет искажать вид нормального закона, вызывая асимметрию  $A_s \neq 0$ , эксцесс  $E_x \neq 0$ , «утяжеление» хвостов закона распределения.

Если существует несовпадение математической модели и реальных данных, которое возникает из-за неизбежной неполноты параметров, определяющих состояние контролируемой системы и погрешностей модельных зависимостей, то ошибки  $e = \theta - \hat{\theta}$  оценок параметров всегда представляют собой суммы двух составляющих:

$$e = e_{\theta} + e_{\psi}, \quad (6.4)$$

где  $e_{\theta}$  - ошибка, вызываемая отклонением от принятой модели;  $e_{\psi}$  - соответствующая принятой модели.

В этом случае [39] при использовании алгоритмов обработки данных, сходящихся к истинному значению, ошибка  $e_{\psi}$  будет сходиться к нулю по

вероятности, а не моделируемая ошибка  $e_\theta$  будет либо сходиться к некоторому, не равному нулю пределу, либо расходиться. Это приводит к тому, что при возрастании объема данных основную роль начинают играть не моделируемые ошибки, и, практически, оценка становится несостоятельной (рис. 6.2).

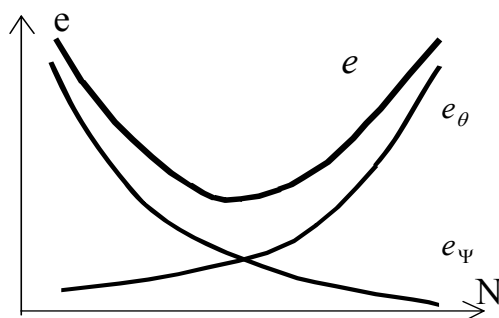


Рис. 6.2

Выходом из ситуаций, описанных выше, является применение непараметрических или устойчивых (робастных) методов получения оценок. Точность таких оценок ниже по сравнению с оптимальными параметрическими оценками, зато они, как правило, проще в реализации и надежнее, устойчивее параметрических. Это объясняется тем, что чем меньше априорной информации заложено в процедуру обработки измерений, тем слабее ухудшает качество результата ее недостоверность.

Среди основных методов получения робастных (устойчивых) оценок используются методы типа максимального правдоподобия (М-оценок) [18,81]. Пусть  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  — последовательность независимых одинакового распределения случайных величин с плотностью  $f(\mathbf{y} - M)$ , где  $M$  — параметр сдвига. Логарифм функции правдоподобия (6.2) можно записать так:

$$\ln[L(M)] = \sum_{i=1}^n \ln[f(y_i - M)] = - \sum_{i=1}^n \rho(y_i - M) \quad (6.5)$$

Согласно методу максимального правдоподобия требуется максимизировать  $\ln L(M)$ , т. е. минимизировать величину

$$J(M) = \sum_{i=1}^n \rho(y_i - M) \quad (6.6)$$

Минимум можно найти путем дифференцирования и решения уравнения

$$\frac{dJ(M)}{dM} = 0, \quad (6.7)$$

т.е. поиском соответствующего значения  $M$ , которое удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^n \psi(y_i - M) = 0, \quad (6.8)$$

где

$$\psi(z) = r'(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (6.9)$$

Следовательно, в методе М-оценок функция  $\psi(z)$  определяется так, чтобы оценка была защищена от присутствующей в результатах измерений небольшой (порядка 5–20%) доли выбросов. Кроме этого, необходимо, чтобы метод М-оценок обеспечивал высокую эффективность получаемых оценок, т. е. когда распределение почти нормально, эффективность должна быть близкой к 100%. Используя строгое определение помехоустойчивости, был получен соответствующий вид функций [81]:

$$\psi_H(z) = \begin{cases} z, & \text{если } |z| \leq cs; \\ c \operatorname{sign}(z), & \text{если } |z| > cs, \end{cases} \quad (6.10)$$

где  $s$  – оценка стандартной ошибки наблюдений  $y$ ;  $c$  – коэффициент ( $c = 1 - 3$ ).

Существует целый ряд эмпирических функций  $\psi(z)$ , наиболее распространенными из которых являются функция Эндрюса (рис. 6.3):

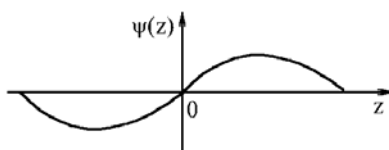


Рис. 6.3

$$\psi_A(z) = \begin{cases} \sin(z/c), & \text{если } |z| \leq \pi c; \\ 0, & \text{если } |z| > \pi c \end{cases}$$

и функция Тьюки (рис. 6.4):

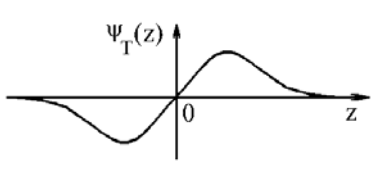


Рис. 6.4

$$\psi_T(z) = \begin{cases} z(1-z^2)^2, & \text{если } |z| \leq 1; \\ 0, & \text{если } |z| > 1. \end{cases}$$

Соответствующая М-оценка, определяемая функциями  $\rho(z)$  и  $\psi(z)$ , реализует условие минимакса выражения

$$\min_T \max_F [\sum(T)]$$

где  $F$  - семейство распределений отличных от нормального, задаваемых ИО - моделью (3.17);  $\sum(T)$  - асимптотическая дисперсия;  $T$  - класс оценок.

## 6.2. Робастные методы идентификации

Рассмотрим робастные (устойчивые к наличию априорной неопределенности) методы идентификации на примере авторегрессионных моделей (АР – моделей) и моделей авторегрессии – скользящего среднего (АРСС - моделей).

При наличии аномальных наблюдений  $y(k)$ , обусловленных, например, АО – моделью (3.18) и ИО - моделью (3.20), алгоритмы, основанные на непараметрических методах идентификации (п.5) малоэффективны, а

параметрические методы идентификации (п.6), существенно снижают точность определения параметров исследуемого процесса, так как невязка

$$e(k) = y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1) \quad (6.11)$$

может быть велика по модулю, что приводит к возрастанию вклада помехи в формирование оценки вектора параметров  $\hat{\theta}$ .

В задачах определения параметров временных рядов, получаемых при наблюдении за объектом исследования, вектор измерений  $\Psi(k)$  формируется как последовательность

$$\Psi(k) = [-y(k), -y(k-1), \dots, -y(k-d)], \quad (6.12)$$

т.е. непосредственно по отчетам процесса. Следовательно, ошибка в данных переходит в ошибку в параметрах. Введение взвешенных оценок (п. 6.6), при наличии аномальных помех приводит к смещению, или неустойчивости оценок [58].

Устойчивые по отношению к модели обновляющих выбросов алгоритмы оценивания получают при минимизации функционала [81]:

$$J(M) = \sum_{k=1}^N \rho[y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)] - \min, \quad (6.13)$$

где выражение, стоящее под знаком суммы  $\rho(z)$ , функция минимального контраста (функция Хубера).

Дифференцирование функционала (6.13) по вектору  $\theta$  и приравнивание полученной суммы к нулю дает новую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \eta[y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)]\Psi^T(k), \quad (6.14)$$

где  $\eta(z) = \rho'(z)$  - производная от функции минимального контраста.

Робастные оценки вида (6.14) имеют недостаток, заключающийся в том, что для итеративной минимизации суммы (6.14) в памяти ЭВМ необходимо хранить все данные  $y(k)$ ,  $k = 1, N$ .

Этот недостаток можно обойти за счет использования рекуррентных процедур оценивания типа стохастической аппроксимации [54].

При наличии аддитивных выбросов свойство эффективной помехоустойчивости у алгоритмов, использующих условие (6.14), не выполняется, так как, несмотря на то, что невязка  $e(k)$  ограничена, элементы вектора  $\Psi(k)$  могут содержать аномальные значения. В этом случае полученный алгоритм будет иметь конечное выборочное и асимптотическое смещение почти той же величины, что и классические алгоритмы, полученные с использованием метода наименьших квадратов [58, 63, 72].

В условиях воздействия как обновляющих, так и аддитивных выбросов, при создании устойчивых алгоритмов оценивания необходимо использовать подход [81], заключающийся во введении весовой функции  $W(\Psi)$  для вектора  $\Psi(k)$ , такой, чтобы их произведение  $W(\Psi)\Psi$  было бы ограниченным. Это аналогично преобразованию системы (6.14) в систему вида

$$\sum_{k=1}^N \eta[y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)]W(\Psi)\Psi = 0 \quad (6.15)$$

Прежде чем перейти к синтезу алгоритма робастного рекуррентного оценивания параметров процесса, рассмотрим отдельно сомножители в уравнении (6.15). Вычисление  $\eta(z)$  в (6.15) аналогично преобразованию значения процесса  $y(k)$  в значение  $y^*(k)$ , такое, что

$$y^*(k) = \Psi^T(k)\theta(k-1) + \eta[y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)] = \Psi^T(k)\theta(k-1) + \eta[e(k)], \quad (6.16)$$

при условии, что вектор  $\Psi(k)$  к этому моменту был сформирован из отсчетов процесса не содержащих аномальных измерений. Таким образом,

$$y^*(k) = \begin{cases} y(k), & \text{если } |e(k)| \leq c\sigma_e; \\ \Psi^T(k)\theta(k-1) + \eta[e(k)], & \text{если } |e(k)| > c\sigma_e, \end{cases} \quad (6.17)$$

где  $c$  – пороговое значение в функции Хубера  $\eta(z)$ ;  $\sigma_e$  – устойчивая оценка среднеквадратичного отклонения порождающего процесса  $\{e(k)\}$ .

Теперь, если циклически производить замену  $y(k)$  на  $y^*(k)$ , то вектор  $\Psi(k)$  по истечении  $d$  периодов будет состоять только из неискаженных или из скорректированных в соответствии с выражением (6.17) значений процесса. Такая операция циклической замены при построении рекуррентного алгоритма робастного оценивания аналогична использованию весовой функции  $W(\Psi)$ , ограничивающей величину вектора  $\Psi(k)$ . Следовательно, вектор  $\Psi(k)$  можно представить в виде

$$\Psi^*(k) = [-y^*(k), -y^*(k-1), \dots, -y^*(k-d)], \quad (6.18)$$

и система уравнений (2.15) переписется как

$$\sum_{k=1}^N [y^*(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)]\Psi^*(k) = 0 \quad (6.19)$$

Заметим, что вычисление  $\eta[e(k)]$  в выражении (6.19) аналогично вычислению функции  $\eta_c[y(k)]$ , но смещенной относительно начала координат на величину прогноза  $\Psi^{*T}(k)\theta(k-1)$ :

$$\eta_c[y(k)] = \begin{cases} y(k), \\ \text{если } y(k) \in [\Psi^T(k)\theta(k-1) - c\sigma_e, \Psi^T(k)\theta(k-1) + c\sigma_e], \\ \Psi^T(k)\theta(k-1) + c\sigma_e \operatorname{sign}[y(k) - \Psi^T(k)\theta(k-1)], \\ \text{если } y(k) \notin [\Psi^T(k)\theta(k-1) - c\sigma_e, \Psi^T(k)\theta(k-1) + c\sigma_e]. \end{cases} \quad (6.20)$$

Таким образом, из выражения (6.20) следует, что систему (6.19) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^N \eta_c[y(k)]\Psi^{*T}(k) = \sum_{k=1}^N \theta^T(k-1)\Psi^*(k)\Psi^{*T}(k) \quad (6.21)$$

Задавая матрицу

$$P_N^{-1} = \sum_{k=1}^N \Psi^*(k)\Psi^{*T}(k), \quad (6.22)$$

и используя подход [58], определим выражение для рекуррентного оценивания вектора параметров  $\boldsymbol{\theta}(k-1)$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_N^{-1} \boldsymbol{\theta}(N) &= \sum_{k=1}^{N-1} \eta_c [y(k)] \boldsymbol{\Psi}^*(k) + \eta_c [y(N)] \boldsymbol{\Psi}^*(N) = \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(k) \boldsymbol{\Psi}^{*T}(k) \right] \boldsymbol{\theta}(N-1) + \eta_c [y(N)] \boldsymbol{\Psi}^*(N) = \\
&= \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(k) \boldsymbol{\Psi}^{*T}(k) \right] \boldsymbol{\theta}(N-1) - \boldsymbol{\Psi}^*(N) \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \boldsymbol{\theta}(N-1) + \eta_c [y(N)] \boldsymbol{\Psi}^*(N) = \\
&= \mathbf{P}_N^{-1} \boldsymbol{\theta}(N-1) + \boldsymbol{\Psi}^*(N) [\eta_c [y(N)] - \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \boldsymbol{\theta}(N-1)]. \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Умножая уравнение (6.23) слева на  $\mathbf{P}(N)$  и вновь центрируя  $\eta_c(z)$ , получим:

$$\boldsymbol{\theta}(N) = \boldsymbol{\theta}(N-1) + \mathbf{P}_N \boldsymbol{\Psi}^*(N) \eta [y(N) - \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \boldsymbol{\theta}(N-1)]. \tag{6.24}$$

Далее, используя выражение (6.22), запишем:

$$\mathbf{P}_N^{-1} = \mathbf{P}_{N-1}^{-1} + \boldsymbol{\Psi}^*(N) \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N), \tag{6.25}$$

умножая (6.25) справа на  $\mathbf{P}_{N-1}$  и слева на  $\mathbf{P}_N$  получим:

$$\mathbf{P}_{N-1} = \mathbf{P}_N + \mathbf{P}_N \boldsymbol{\Psi}^*(N) \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \mathbf{P}_{N-1}. \tag{6.26}$$

Откуда

$$\mathbf{P}_N \boldsymbol{\Psi}^*(N) = \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(N) [\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(N)]^{-1}. \tag{6.27}$$

Подставляя в формулу (6.26) значение (6.27), получим выражение для рекуррентного определения матрицы  $\mathbf{P}_N$ :

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{P}_{N-1} - \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(N) [\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \mathbf{P}_{N-1} \boldsymbol{\Psi}^*(N)]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{*T}(N) \mathbf{P}_{N-1}. \tag{6.28}$$

Таким образом, общая рекуррентная формула для робастного определения параметров авторегрессии стационарного процесса имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}(k) = \boldsymbol{\theta}(k-1) + \mathbf{P}_k \boldsymbol{\Psi}^*(k) \eta [y(k) - \boldsymbol{\Psi}^{*T}(k) \boldsymbol{\theta}(k-1)]; \tag{6.29}$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\Psi}^*(k) [\mathbf{I} + \boldsymbol{\Psi}^{*T}(k) \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\Psi}^*(k)]^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{*T}(k) \mathbf{P}_{k-1}.$$



Алгоритм (6.29) аналогичен РМВП (5.47). При формировании нового значения оценки вектора параметров  $\theta(k+1)$  используются не сами значения  $e(k)$ , а их преобразованные значения  $e^*(k) = \eta[e(k)]$ , вектор данных также  $\Psi(k)$  формируется не по отсчетам процесса  $y(k)$ , а по преобразованным в соответствии с выражением (6.20) значениям  $y^*(k)$ .

Поскольку строгий синтез адаптивных алгоритмов является сложной проблемой, в большинстве случаев используется эвристический подход с последующим анализом оценки качества синтезируемого алгоритма [18].

Робастный алгоритм (6.29) может быть использован для оценивания параметров линейной АРСС-модели, измеряемой на фоне аномальных выбросов. Статистические испытания алгоритма (6.29) показали, что он эффективно работает только в случае одиночных импульсных помех. В реальных ситуациях, когда кратность сбоев превышает единицу ( $K > 1$ ), наблюдается расхожимость алгоритма, выражающаяся в постоянно возрастающей разности между прогнозируемыми и реальными значениями процесса. Рассмотрим несколько модификаций робастного алгоритма (6.29), которые не имеют срыва слежения:

1. Алгоритм с заменой искаженного значения на предыдущее значение процесса, т. е. с функцией  $\eta_c(y)$  вида:

$$\eta_c(y_k) = \begin{cases} y(k), & \text{если } |e(k)| \leq c\sigma_e; \\ y(k-1), & \text{если } |e(k)| > c\sigma_e, \end{cases} \quad (6.29)$$

где  $e(k)$  – ошибка одношагового предсказания (6.11).

2. Алгоритм с заменой первых  $k-1$  искаженных отсчетов на прогноз  $\theta^T(k)\Psi(k-1)$  и рестартом RS после  $k$  подряд идущих сбоев с сохранением информации о векторе измерений и матрице ковариаций, т. е. с функцией  $\eta_c(y)$ :

$$\eta_c[y(k)] = \begin{cases} y(k), & \text{если } |e(k)| \leq c\sigma_e, \\ \mathbf{\theta}^T(k-1)\Psi(k) & \text{если } |e(k)| > c\sigma_e \text{ и } k=2, \\ RS, & \text{если } |e(k)| > c\sigma_e \text{ и } k \geq 2. \end{cases} \quad (6.30)$$

Моделирование работы алгоритмов этой группы для случайных стационарных процессов, задаваемых авторегрессионной моделью показало, что алгоритм (6.30) имеет преимущество перед всеми рассмотренными ранее алгоритмами идентификации. Так при нормальном законе распределения помех он имеет эффективность такую же, как и не робастные алгоритмы, а при наличии аномальных помех позволяет получить сходящиеся и более точные оценки процесса, в то время как оценки не робастных алгоритмов расходятся.

## 7. Идентификация переменных состояния объекта управления.

### 7.1. Идентификация переменных состояния с использованием наблюдателей состояния

**Очень часто в задачах управления возникает ситуация когда не все переменные состояния объекта могут быть непосредственно определены с использованием прямых или косвенных методов измерения. В этом случае для полностью наблюдаемого объекта с известными параметрами задаваемого уравнением**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) \quad (7.1)$$

и измеряемыми переменными

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (7.2)$$

можно вычислить (оценить) его переменные состояния, непосредственно, используя математическую модель объекта

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(0). \quad (7.3)$$

Очевидно, что если  $\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)$ , то решение уравнения (7.1) точно совпадает с решением уравнения (7.3).

Если  $\hat{\mathbf{x}}(0) \neq \mathbf{x}(0)$ , или имеет место ошибки идентификации параметров объекта, то возникает ошибка восстановления переменных состояния, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{e}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0). \quad (7.4)$$

Если объект управления асимптотически устойчив, то ошибка восстановления будет с течением времени уменьшаться, в пределе приближаясь к нулю.

Этого ограничения свойств объекта можно избежать и улучшить сходимость оценки восстановления, если использовать измеряемые переменные  $y$ . Для этого в уравнение ошибки (7.4) вводится взвешенная невязка фактически измеренных  $y$  и смоделированных  $\hat{y}$  переменных. С учетом (7.2) это приводит к следующему уравнению

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}]\mathbf{e}; \quad \mathbf{e}(t_0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0), \quad (7.5)$$

где  $\mathbf{K}$  – некоторая прямоугольная весовая матрица, называемая матрицей коэффициентов усиления наблюдателя. Матрица  $\mathbf{K}$  должна удовлетворять условиям асимптотической устойчивости уравнения (7.5).

Для полностью наблюдаемого объекта удовлетворяющего условию

$$\text{Rang} \left\| \mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, \mathbf{A}^{T(n-1)} \mathbf{C}^T \right\| = n, \quad (7.6)$$

где  $n$  – порядок объекта, такая матрица всегда существует[2].

Уравнение наблюдателя, оценивающего переменные состояния объекта можно получить путем подстановки в уравнение объекта (7.1) вместо истинных переменных их оценки  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} + \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (7.7)$$

Подставляя сюда вместо производной от ошибки ее выражение (7.5) приходим к уравнению наблюдателя

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(0) \quad (7.8)$$

Поскольку размерность вектора состояния наблюдателя равна размерности вектора состояния объекта, то такие наблюдатели называются наблюдателями полного порядка.

На рис. 7.1 показана структурная схема наблюдателя

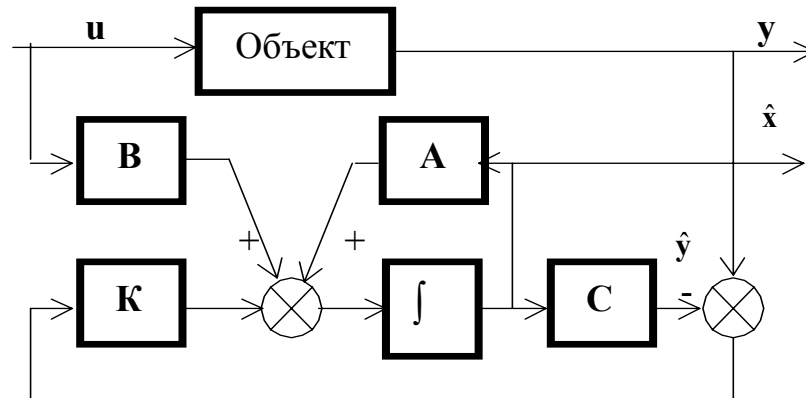


Рис. 7.1

Данную структуру можно реализовать программными или техническими средствами и оценить тем самым неизмеряемые компоненты вектора переменных состояния.

Замыкая обратную связь в системе с наблюдателем по оцениваемым переменным состояния, как показано на рис. 7.2, в соответствии с теоремой разделения можно реализовать оптимальное стохастическое управление, для которого расчет коэффициентов матрицы обратной связи проводится методом АКОР при полностью измеряемом векторе переменных состояния.

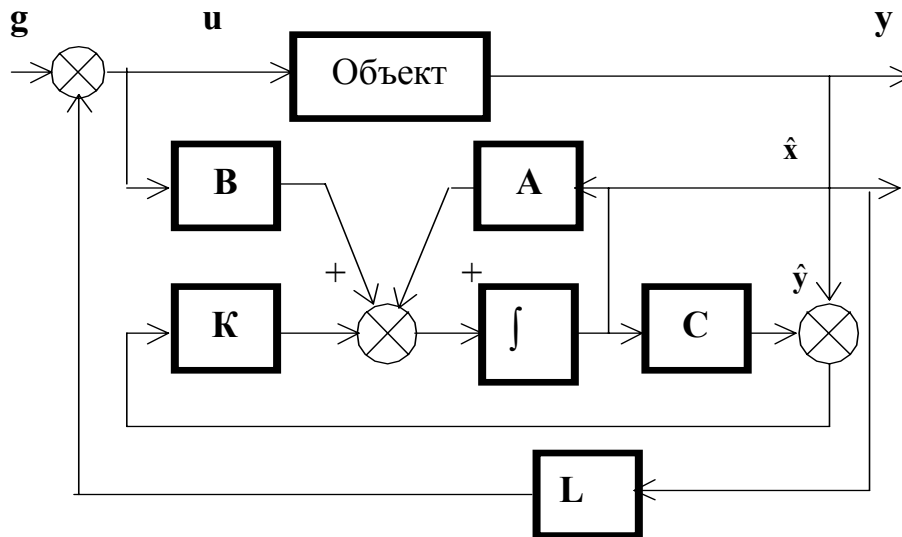


Рис. 7.2.

Покажем справедливость применения теоремы разделения для построения закона управления и наблюдателя. Характеристический полином такой системы будет выглядеть

$$D(p) = \begin{vmatrix} Ip - A + KD & 0 \\ BL^T & Ip - A - BL^T \end{vmatrix} = |p - A + KD| |Ip - A - BL^T|. \quad (7.9)$$

Из этого выражения следует, что корни характеристического уравнения оптимальной системы с наблюдателем состоят из корней характеристического уравнения наблюдателя и корней характеристического уравнения оптимальной системы, у которой все переменные состояния доступны непосредственному измерению. Следовательно, можно проводить раздельное построение закона управления и наблюдателя.

## 7.2. Наблюдатель пониженного порядка

У наблюдателей пониженного порядка размерность его вектора состояния уменьшается на число компонент измеряемого вектора. Такой наблюдатель называется еще редуцированным наблюдателем [2]. Для него вводят новые переменные состояния, задаваемые следующими условиями

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}, \quad (7.10)$$

причем

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{y} + \Phi\mathbf{v}. \quad (7.11)$$

Подставить в (7.11)  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{v}$  из (7.2) и (7.10) получим

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{x} + \Phi\hat{\mathbf{x}}. \quad (7.12)$$

Если  $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$ , то равенство (7.12) должно являться тождеством, откуда следует уравнение для вычисления матриц  $\mathbf{S}$  и  $\Phi$

$$\mathbf{S}\mathbf{C} + \Phi\mathbf{T} = \mathbf{I}. \quad (7.13)$$

Уравнение наблюдателя пониженного порядка можно получить, дифференцируя (7.10), с последующей подстановкой производной по  $\hat{\mathbf{x}}$  из уравнения наблюдателя полного порядка (7.8)

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = \mathbf{T}[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] + \mathbf{B}\mathbf{u}]. \quad (7.14)$$

Подставляя сюда  $\hat{\mathbf{x}}$  из (7.10) будем иметь

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} + \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (7.15)$$

где  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{T}(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{K}$ .

Исключая  $\mathbf{T}$  из выражений для матриц  $\mathbf{\Gamma}$  и  $\mathbf{K}$ , получим уравнение для их вычисления

$$\mathbf{T}\mathbf{A} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{T} - \mathbf{F}\mathbf{C}. \quad (7.16)$$

Непосредственно из уравнения (7.15) следует, что для устойчивости устройства восстановления необходимо и достаточно, чтобы собственные числа произвольной матрицы  $\mathbf{\Gamma}$  имели отрицательные вещественные числа. Матрица  $\mathbf{T}$ , входящая в уравнение (7.15), является решением матричного алгебраического уравнения (7.16), которое единственно, если матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  не имеют общих собственных чисел. Матрица  $\mathbf{F}$ , входящая в уравнение (7.15) произвольна.

Впервые уравнения наблюдателя пониженного (7.10), (7.11), (7.13), (7.15) и (7.16) порядка были получены Люенбергером, поэтому такой наблюдатель часто называют наблюдателем Люенбергера.

**Пример 7.1.** Рассмотрим в качестве объекта управления исполнительный механизм с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}. \quad (7.17)$$

Пусть непосредственному измерению доступно перемещение исполнительного органа  $l$ .

Требуется построить наблюдатель пониженного порядка для восстановления частоты вращения исполнительного механизма  $\omega$ .

Уравнения состояния рассматриваемого объекта примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + bu; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1; \\ y &= x_2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

где  $a_{11} = -\frac{1}{T}$ ,  $b = \frac{k}{T}$ ,  $a_{21} = 1$ .

В соответствии с (7.11) и (7.15) искомый наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= S_{11}y + \varphi_{11}v; \\ \hat{x}_2 &= S_{21}y + \varphi_{21}v; \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = \gamma_{11}v + f_{11}y + t_{11}bu, \quad (7.20)$$

параметры которых находятся из матричных уравнений (7.13), (7.16) и которые в рассматриваемом случае примут вид:

$$\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (7.21)$$

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} - \gamma_{11} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \end{pmatrix} = f_{11} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

В развернутой форме уравнения (7.21) преобразуются к виду:

$$\varphi_{11}t_{11} = 1; \quad s_{11} + \varphi_{11}t_{12} = 0; \quad \varphi_{21}t_{12} = 0; \quad s_{21} + \varphi_{21}t_{12} = 1. \quad (7.23)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$\varphi_{11} = \frac{1}{t_{11}}; \quad s_{11} = -\frac{t_{12}}{t_{11}}; \quad \varphi_{21} = 0; \quad s_{21} = 1. \quad (7.24)$$

Уравнение (7.22) запишется как:

$$t_{11}a_{11} + t_{12}a_{21} - \gamma_{11}t_{11} = 0; \quad -\gamma_{11}t_{12} = f_{11}, \quad (7.25)$$

отсюда

$$t_{11} = -\frac{f_{11}a_{21}}{\gamma_{11}(a_{11} - \gamma_{11})}; \quad t_{12} = -\frac{f_{11}}{\gamma_{11}}. \quad (7.26)$$

С учетом (7.24) и (7.26) уравнения наблюдателя (7.19), (7.20) примут вид:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{a_{11} - \gamma_{11}}{a_{21}} y - \frac{\gamma_{11}(a_{11} - \gamma_{11})}{f_{11}a_{21}} v; \\ x_2 &= y; \\ \frac{dv}{dt} &= \gamma_{11}y + f_{11}y - \frac{f_{11}a_{21}}{\gamma_{11}(a_{11} - \gamma_{11})} bu. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Из условия устойчивости наблюдателя полагаем  $\gamma_{11} < 0$ , а  $f_{11} = 1$ , выбирается произвольно.

### 7.3. Построение наблюдателя полного порядка методом модального управления

Рассмотренный в п.7.2 метод построения наблюдателя пониженного порядка сводится к введению вспомогательных переменных  $v$  системы управления. Уравнение наблюдателя для новых переменных (7.15) не содержат в явном виде матрицы коэффициентов усиления наблюдателя  $\mathbf{K}$ , причем часть коэффициентов этого уравнения выбирается произвольно (коэффициенты матрицы  $\mathbf{F}$ ) и на основе выполнения условий отрицательности коэффициентов (коэффициенты матрицы  $\mathbf{G}$ ).

Можно преодолеть эту неопределенность в выборе коэффициентов, воспользовавшись двойственностью (дуальностью) задач управления и наблюдения. Для пояснения этого свойства систем управления введем в рассмотрение вспомогательную систему управления, задаваемую уравнениями [41]



$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \mathbf{A}^T \mathbf{z} + \mathbf{C}^T \mathbf{u}; \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}^T \mathbf{z}.\end{aligned}\tag{7.28}$$

Нетрудно убедиться, что если исходная система, задаваемая уравнениями (7.1), (7.2), полностью наблюдаема, то вспомогательная система (7.28), полностью управляема, так как условия наблюдаемости у управляемости для них полностью совпадают. Следовательно, для полностью управляемой вспомогательной системы может быть найдена единственная матрица  $\mathbf{K}$  обеспечивающая заданные показатели качества вспомогательной системы.

Вместе с тем характеристические полиномы вспомогательной системы (7.28) и наблюдателя полного порядка (7.8) полностью совпадают, значит, будут идентичными и динамические характеристик этих систем.

Таким образом, свойство двойственности систем управления позволяет свести задачу нахождения матрицы коэффициентов усиления наблюдателя, к задаче синтеза закона управления вспомогательной системы, полученной из исходной.

Для многомерных систем нахождение матрицы коэффициентов усиления наблюдателя может быть осуществлено на основе модального или линейно-квадратичного управления, реализуемого методом аналитического конструирования регуляторов.

Рассмотрим нахождение матрицы коэффициентов усиления наблюдателя методом модального управления.

Пусть для объекта управления заданного уравнениями (7.1), (7.2) требуется построить наблюдатель полного порядка (7.8).

На основании свойства двойственности вводится в рассмотрение вспомогательная система, задаваемая уравнениями (7.28). После этого она приводится к канонической управляемой форме.

$$\begin{aligned}\frac{d\check{\mathbf{z}}}{dt} &= \check{\mathbf{A}}^T \check{\mathbf{z}} + \check{\mathbf{C}}^T \mathbf{u}; \\ \mathbf{u} &= -\check{\mathbf{K}}^T \check{\mathbf{z}},\end{aligned}\tag{7.29}$$

где

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}; \check{\mathbf{C}}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Переход от уравнения (7.28) к (7.29) осуществляется с помощью линейного преобразования

$$\check{\mathbf{z}} = \mathbf{\Psi} \mathbf{z}, \quad (7.31)$$

где

$$\mathbf{\Psi} = \left( \check{\mathbf{C}}^T, \check{\mathbf{A}}^T \check{\mathbf{C}}^T, \dots, (\check{\mathbf{A}}^T)^{n-1} \check{\mathbf{C}}^T \right) \left( \mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \right)^{-1}. \quad (7.32)$$

Задаваясь желаемыми корнями характеристического уравнения  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  вычисляют желаемые коэффициенты характеристического полинома системы  $d_i^*$

$$\prod_{i=1}^n (p - p_i) = p^n + d_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + d_1^* p + d_0^*, \quad (7.33)$$

находят значения коэффициентов матрицы  $\check{\mathbf{K}}$

$$\check{k}_{i+1} = d_i^* - d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.34)$$

и переходят к исходным переменным

$$\mathbf{K}^T = \check{\mathbf{K}}^T \mathbf{\Psi}. \quad (7.35)$$

**Пример 7.2.** Определим матрицу  $\mathbf{K}$  наблюдателя полного порядка для переменных состояния исполнительного механизма рассмотренного в п.7.2.

Уравнения наблюдателя полного порядка для переменных состояния исполнительного механизма, описываемого уравнениями (7.18), имеют в соответствии с (7.8) вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= a_{11}\hat{x}_1 + k_{11}(y - \hat{x}_2) + bu; \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= a_{21}\hat{x}_1 + k_{21}(y - \hat{x}_2). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Неизвестные коэффициенты  $k_{11}$ ,  $k_{21}$  определим так, чтобы корни характеристического уравнения наблюдателя имели наперед заданные значения  $p_1, p_2$ .

Введем вспомогательную систему, задаваемую уравнениями (7.28)

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= a_{11}z_1 + a_{21}z_2; \\ \frac{dz_2}{dt} &= u.\end{aligned}\tag{7.37}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$p^2 - a_{11}p = 0.\tag{7.38}$$

Коэффициенты характеристического уравнения соответственно равны  $d_0 = 0$ ;  $d_1 = -a_{11}$

Приведем эти уравнения к канонической управляемой форме (7.29)

$$\begin{aligned}\frac{d\check{z}_1}{dt} &= \check{z}_2; \\ \frac{d\check{z}_2}{dt} &= -a_{11}\check{z}_2 + u.\end{aligned}\tag{7.39}$$

Вычислим матрицу перехода  $\Psi$  по формуле (7.32)

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{a_{21}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{21}} & 0 \\ -\frac{a_{11}}{a_{21}} & 1 \end{pmatrix}.\tag{7.40}$$

Коэффициенты матрицы  $\check{\mathbf{K}}$  в соответствии с (7.34) будут равны  $\check{k}_{11} = p_1 p_2$ ;  $\check{k}_{21} = p_1 + p_2 + a_{11}$ .

Тогда по формуле (7.35) найдем коэффициенты матрицы  $\mathbf{K}$

$$\begin{aligned}k_{11} &= \frac{p_1 p_2}{a_{21}} - \frac{a_{11}}{a_{21}} (p_1 + p_2); \\ k_{22} &= \check{k}_{21} = p_1 + p_2 + a_{11}.\end{aligned}\tag{7.41}$$

#### 7.4. Оптимальный наблюдатель

Впервые уравнение оптимального наблюдателя было получено в работе Р. Калмана и Бьюси [8], которая явилась дальнейшим развитием результатов А.Н. Колмогорова и Н. Винера по оптимальной фильтрации.

Исходная постановка задачи оптимального наблюдения формулируется следующим образом [2]. Пусть не все переменные состояния объекта доступны непосредственному измерению и пусть, кроме того, измерения осуществляются с помехами. В этом случае объект управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Gf}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{v}; \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}(0),\end{aligned}\tag{7.42}$$

где в уравнение дополнительно вводятся, вектор внешних возмущений  $\mathbf{f}$  размерность которого не превышает размерность объекта и вектор шумов измерения  $\mathbf{v}$  размерность которого равна размерности вектора измеряемых переменных  $\mathbf{y}$ . Предполагается, что эти векторы являются независимыми (некоррелированными) случайными гауссовскими процессами типа «белый шум» с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами  $\mathbf{R}_f(t)$ ,  $\mathbf{R}_v(t)$ . Предполагается также, что начальные условия не зависят от возмущений и помех, а математическое ожидание и дисперсия вектора начальных условий известны.

$$M[\mathbf{x}(0)] = \bar{\mathbf{x}}(0); \quad R(0) = M\{[\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)][\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}(0)]^T\}.\tag{7.43}$$

Требуется построить наблюдатель состояния полного порядка

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}] + \mathbf{Bu}, \quad \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \hat{\mathbf{x}}(0),\tag{7.44}$$

в котором матрица  $\mathbf{K}$  определяется из условия минимума среднего квадрата ошибки восстановления  $\mathbf{e}$

$$J = M\{\mathbf{e}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}\},\tag{7.45}$$

$\mathbf{\Lambda}$  - заданная положительно определенная матрица весовых коэффициентов.

На основании свойства двойственности решение этой задачи аналогично решению задачи линейно-квадратичного управления методом аналитического конструирования регулятора для вспомогательной системы (7.28).

Матрица коэффициентов усиления наблюдателя полного порядка  $\mathbf{K}$  (7.44) для объекта (7.42), при которой функционал (7.45) достигает минимального значения, определяется выражением

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1}, \quad (7.46)$$

где  $\mathbf{P}$  – матрица чисел (размером  $n \times n$ ) определяется путем решения алгебраического уравнения Риккати

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T \mathbf{R}_v^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{G}\mathbf{R}_f \mathbf{G}^T = 0. \quad (7.47)$$

Построения оптимального наблюдателя в силу двойственности этой задачи является в общем случае решением задачи оптимального стохастического управления при неполной информации о векторе переменных состояния. Нахождение матрицы коэффициентов обратной связи линейно-квадратичного регулятора по наблюдаемым параметрам реализуется процедурой аналитического конструирования для исходного уравнения объекта (7.42), а вычисление матрицы коэффициентов усиления наблюдателя полного порядка также реализуется процедурой аналитического конструирования, но для вспомогательного (двойственного) объекта (7.28).

**Пример 7.3.** Определим матрицу  $\mathbf{K}$  оптимального наблюдателя для переменных состояния исполнительного механизма рассмотренного в п.7.2, возбуждаемого случайными внешними возмущениями, при неточных измерениях. Уравнения объекта в этом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + bu + gf; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1; \\ y &= x_2 + v, \end{aligned} \quad (7.48)$$

где  $f(t)$ ,  $v(t)$  – центрированные случайные процессы типа «белый шум» с интенсивностями (дисперсиями)  $r_f = 1$ ,  $r_u = 1$  соответственно.

Оптимальный наблюдатель минимизирующий функционал

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} M \left[ (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 \right] \quad (7.49)$$

запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= a_{11}\hat{x}_1 + k_{11}(y - \hat{x}_2) + bu; \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= a_{21}\hat{x}_1 + k_{21}(y - \hat{x}_2). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Неизвестные коэффициенты наблюдателя находятся из соотношений  
(7.46)

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

Коэффициенты матрицы **P** являются решением матричного уравнения Риккати  
(7.47)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} r_1 (g \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

В развернутом виде эти уравнения запишутся так

$$\begin{aligned} a_{11}p_{11} + a_{11}p_{11} - p_{21}^2 + r_1g^2 &= 0; \\ a_{11}p_{12} + a_{21}p_{11} - p_{12}p_{22} &= 0; \\ a_{21}p_{11} + a_{11}p_{21} - p_{21}p_{22} &= 0; \\ a_{21}p_{12} + a_{21}p_{21} - p_{22}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Если положить, что  $-a_{11}=a_{21}=1$ ,  $g=2,25$  и  $r_1=1$ , то решением уравнения  
(7.53) будет

$$p_{11}=p_{22}=1; p_{21}=p_{12}=0,5.$$

Откуда в соответствии с (7.51) искомые коэффициенты матрицы **K** будут  
равны

$$k_{11}=0,5; k_{21}=1.$$

На рис. 7.3 и 7.4 показаны результаты моделирования наблюдателя.  
Программа моделирующая расчет и работу наблюдателя приведена ниже.

```
clear
a11=-1;a21=1;b=1;c=1;d=0;f1=1;f2=0;
A=[a11 0;a21 0];
B=[b;0];
C=[0 c];
D=d;
G=[0;0];
so=ss(A,B,C,D);
sys=ss(A,[B B],C,[D D]);
[nab,L,P]=kalman(sys,2.25,1);
t=0:.01:50;
u=2.25*randn(size(t))+sin(t);
v=.1*randn(size(t));
y=lsim(so,u,t)+v';
un=[u' y];
yn=lsim(nab,un,t);
subplot(3,1,1)
plot(t,u),grid
subplot(3,1,2)
plot(t,y),grid
subplot(3,1,3)
plot(t,y+.2,t,yn(:,1),t,yn(:,2)),grid
```

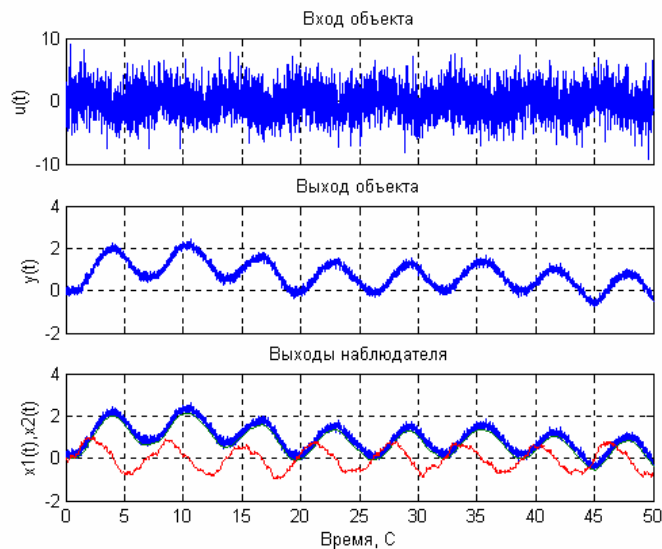


Рис. 7.3

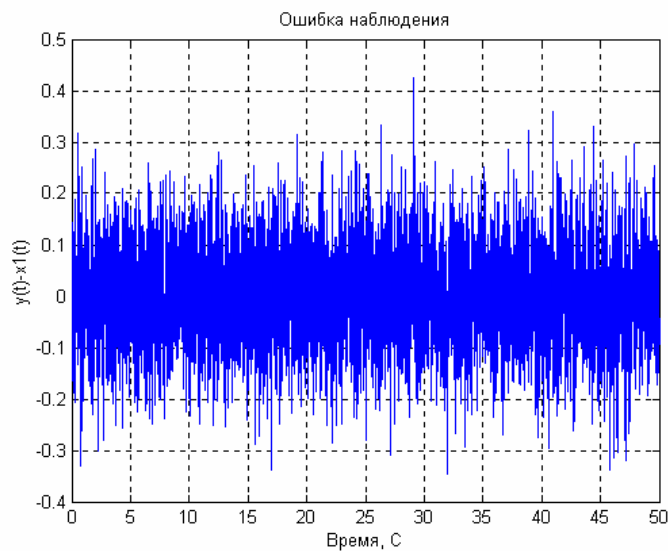


Рис.7.4

## 8. Идентификация нелинейных систем

### 8.1. Построение и исследование оценок ядер Винера в частотной области

С позиции теории функций, моделирование нелинейной системы можно рассматривать как аппроксимацию оператора, характеризующего систему, в классе функциональных полиномов заданной степени. Решение данной задачи существенно упрощается при условии ортогональности используемых полиномов. Для аппроксимации статических нелинейных систем (без памяти)



могут применяться обычные полиномы: Чебышева, Эрмита, Лагерра и др. Для построения математических моделей динамических систем (с памятью) можно использовать метод матричных операторов, на базе которого можно осуществить построение функциональных полиномов, ортогональных для заданного класса входных сигналов. В частности, известные функционалы Винера ортогональны для белого гауссова шума [19]. Таким образом, моделью системы в данном случае является ортогональный функциональный ряд Винера, ядра которого определяются в процессе идентификации на основе статистической обработки экспериментальных данных.

Представление ортогональных функциональных рядов в частотной области позволяет найти оптимальное решение в явном виде, оценив их ядра через спектры реализаций конечной длины. Для вычисления этих оценок в частотной области предлагается использовать принципы сегментации данных и алгоритм БПФ, позволяющие получать эффективные оценки, обладающие свойствами несмещенности и состоятельности. В случае активной идентификации объем вычислительных затрат можно сократить за счет соответствующего выбора тестового сигнала [48, 85]. В качестве такого сигнала рассматривается псевдослучайный процесс в виде суммы гармоник со случайными фазами, для генерирования которого используется БПФ. Функциональные полиномы, ортогональные для данного класса процессов, отличаются простотой, а алгоритм вычисления ядер в частотной области может быть построен таким образом, что операции комплексного умножения заменяются простым сложением по модулю целых чисел.

В соответствии с результатами п. 2.5 – 2.7 ядра Винера теоретически определяются усреднением по неограниченному множеству реализаций случайного процесса бесконечной длины. В действительности количество используемых реализаций и их длительность всегда конечны. В связи с этим существенный интерес представляют вопросы построения и исследования статистических свойств оценок ядер Винера в частотной области, пригодных при моделировании и идентификации нелинейных систем.

По аналогии с выражением (2.136) оценку ядра  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  Винера  $m$ -го порядка можно определить в виде

$$\hat{H}_m(\omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{\mathfrak{S}_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{m! S_x(\omega_1) \cdot \dots \cdot S_x(\omega_m)}, \quad (8.1)$$

где  $\mathfrak{S}_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  – оценка многомерного взаимного спектра. Так как спектр  $S_x(\omega)$  входного сигнала  $x(n)$ , как правило, известен заранее, точность оценки (8.1) будет полностью определяться статистическими характеристиками оценки взаимного спектра.

Для вычисления данной оценки воспользуемся методом модифицированных периодограмм, обобщенным на многомерный случай в [89]. Разобьем реализации случайных процессов  $x(n)$  и  $y_m(n)$  на непересекающиеся отрезки  $x_l(n)$  и  $y_{ml}(n)$  длительностью  $N$  и определим многомерную периодограмму  $I_{y_m x \dots x}^l(\omega_1, \dots, \omega_m)$ , модифицированную временным окном  $w_m(n)$

$$I_{y_m x \dots x}^l(\omega_1, \dots, \omega_m) = Y_{ml}(\omega_1 + \dots + \omega_m) \prod_{i=1}^m X_i^*(\omega_i), \quad (8.2)$$

где  $X_i(\omega)$  и  $Y_{ml}(\omega)$  – преобразования Фурье модифицированных отрезков, равные

$$X_i(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w_m(n) x_i(n) \exp(-j\omega n), \quad Y_{ml}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w_m(n) y_{ml}(n) \exp(-j\omega n).$$

В качестве оценки взаимного спектра (2.138) возьмем среднее арифметическое  $L$  многомерных периодограмм

$$\mathfrak{S}_{y_m x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) = \frac{1}{L \Theta_m} \sum_{l=1}^L I_{y_m x \dots x}^l(\omega_1, \dots, \omega_m), \quad (8.3)$$

где  $\Theta_m$  – нормирующий множитель, который будет определен ниже. Исследуем данную оценку на несмещенность и состоятельность. Математическое ожидание оценки

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \mathcal{S}_{y_m^{x \dots x}}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} &= \frac{1}{\Theta_m} \mathbb{M} \left\{ I'_{y_m^{x \dots x}}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Theta_m} \sum_{n, n_1, \dots, n_m} R_{y_m^{x \dots x}}(n_1, \dots, n_m) w_m(n) \prod_{i=1}^m w_m(n - n_i) \times \\ &\quad \times \exp[-j(\omega_1 n_1 + \dots + \omega_m n_m)]. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Введем в рассмотрение функцию  $\mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ , связанную с преобразованием  $\mathcal{W}_m(\lambda)$  Фурье временного окна  $w_m(n)$  соотношением

$$\mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathcal{W}_m(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \prod_{i=1}^m \mathcal{W}_m(\lambda_i). \quad (8.5)$$

Тогда, используя свойства многомерного преобразования Фурье, из соотношения (8.4) получим:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \mathcal{S}_{y_m^{x \dots x}}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} &= \frac{1}{\Theta_m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \times \\ &\quad \times \mathcal{S}_{y_m^{x \dots x}}(\omega_1 - \lambda_1, \dots, \omega_m - \lambda_m) d\lambda_1 \dots d\lambda_m. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Таким образом, математическое ожидание оценки многомерного спектра равно свертке истинного спектра  $\mathcal{S}_{y_m^{x \dots x}}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  с функцией вида (8.5). При  $N \rightarrow \infty$  функция  $\mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  концентрируется в окрестности нуля, приближаясь к дельта-функции. Поэтому для достаточно больших  $N$  можно записать

$$M \left\{ \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} \cong \frac{\mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{\Theta_m} \int_{\mathbb{K}_0}^{2\pi} \int \mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) d\lambda_1 \dots d\lambda_m$$

Из данного соотношения следует, что при выборе коэффициента  $\Theta_m$  нормировки в (8.3), равным

$$\Theta_m = \int_{\mathbb{K}_0}^{2\pi} \int \mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) d\lambda_1 \dots d\lambda_m = \sum_{n=0}^{N-1} w_m^{m+1}(n),$$

оценка взаимного спектра, а следовательно, и оценка (8.1) ядра  $H_m(\omega_1, \dots, \omega_m)$  являются асимптотически несмещенными, т. е. выполняется предельное соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \left\{ \mathcal{H}_m(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} = H_m(\omega_1, \dots, \omega_m).$$

Для нахождения величины смещения при конечном значении  $N$  воспользуемся разложением многомерного спектра в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\omega_1, \dots, \omega_m)$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1 - \lambda_1, \dots, \omega_m - \lambda_m) &= \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) - \\ &- \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m)}{\partial \omega_i} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \frac{\partial \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_i = \omega_i - \varphi_i(\lambda_i)\lambda_i$  и  $|\varphi_i(\lambda_i)| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Подставляя данное разложение в (8.6) и вычисляя смещение оценки, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) &= M \left\{ \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} - \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\omega_1, \dots, \omega_m) = \\ &= \frac{1}{2\Theta_m} \int_{\mathbb{K}_0}^{2\pi} \int \mathcal{W}_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j \frac{\partial \mathcal{S}_{y_m^x \dots x}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} d\lambda_1 \dots d\lambda_m. \end{aligned}$$

Пусть модули частных производных второго порядка взаимного спектра ограничены величиной

$$S''_{\max} = \max_{\substack{0 \leq \gamma_i \leq 2\pi, \\ 0 \leq \gamma_j \leq 2\pi, \\ i, j=1, \dots, m}} \left\{ \frac{\partial S_{y_m x \dots x}(\gamma_1, \dots, \gamma_m)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right\}.$$

Тогда для модуля ошибки смещения оценки (4.24) ядра Винера можно получить неравенство

$$|\Delta H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m)| \leq \frac{S''_{\max} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (\lambda_1 + \dots + \lambda_m)^2 W_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) d\lambda_1 \dots d\lambda_m}{2m! \Theta_m S_x(\omega_1) \cdot K \cdot S_x(\omega_m)}. \quad (8.7)$$

Данное неравенство дает возможность определить оптимальное окно  $w_m(n)$ , минимизирующее ошибку смещения оценки  $H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m)$ . При этом в соответствии с (8.5) и (8.7) задача сводится к нахождению такой функции  $W_m(\lambda)$  (частотного окна), которая минимизировала бы положительный функционал вида

$$F[W_m(\lambda)] = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (\lambda_1 + \dots + \lambda_m)^2 W_m(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \prod_{i=1}^m W_m(\lambda_i) d\lambda_i. \quad (8.8)$$

Для решения данной задачи перепишем (8.8) следующим образом:

$$F[R(\lambda)] = \int_0^{2\pi} \lambda^2 R(\lambda) d\lambda, \quad (8.9)$$

где функция  $R(\lambda)$  связана с окном  $W_m(\lambda)$  выражением

$$R(\lambda) = W_m(\lambda) \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \delta(\lambda - \lambda_1 - \dots - \lambda_m) \prod_{i=1}^m W_m(\lambda_i) d\lambda_i. \quad (8.10)$$

Функция  $R(\lambda)$ , минимизирующая функционал (8.9), найдена в [125] и является преобразованием Фурье временного окна  $r(n)$ , определяемого соотношением

$$r(n) = \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{2\pi n}{N} \right| - 2 \left( 1 - \frac{|2n - N|}{N} \right) \sin^2 \frac{\pi n}{N}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Таким образом, для нахождения оптимального окна  $W_m(\lambda)$  в частотной области необходимо решить интегральное уравнение (8.10), в левой части которого стоит известная функция  $R(\lambda)$ , а затем с помощью обратного преобразования Фурье определить оптимальное окно  $w_m(n)$  во временной области. Интегральное уравнение (8.10) может быть решено численными методами, например, с помощью итерационного алгоритма

$$W_m^{[n+1]}(\lambda) = R(\lambda) / \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} W_m^{[n]} \left( \lambda - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \right) \prod_{i=1}^{m-1} W_m^{[n]}(\lambda_i) d\lambda_i, \quad (8.11)$$

где  $W_m^{[n]}(\lambda)$  – приближение к  $W_m(\lambda)$  на  $n$ -й итерации. Заметим, что кратный интеграл в знаменателе выражения (8.11) легко может быть вычислен с помощью алгоритма БПФ. Для этого необходимо определить обратное преобразование Фурье функции  $W_m^{[n]}$ , возвести полученный оригинал в  $m$ -ю степень и вновь вычислить преобразование Фурье.

Исследование состоятельности оценки  $H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  начнем с определения ковариаций многомерных периодограмм (8.2). На основании кумулянтных свойств конечного преобразования Фурье можно показать что:

$$\begin{aligned} & \text{cov} \left\{ I_{y_m x \dots x}^l(\omega_1, \dots, \omega_m), I_{y_m x \dots x}^{l*}(\omega_{m+1}, \dots, \omega_{2m}) \right\} = \\ & = \begin{cases} \overline{W}_1^2(\omega_1 - \omega_2) S_{y_1}(\omega_1) S_x(\omega_2) + \overline{W}_1^2(\omega_1 + \omega_2) S_{y_1 x}(\omega_1) S_{y_1 x}^*(\omega_2), & m = 1; \\ \overline{W}_m \left( \sum_{i=1}^m (\omega_i - \omega_{m+i}) \right) S_{y_m} \left( \sum_{i=1}^m \omega_i \right) \sum \prod \overline{W}_m(\omega_i + \omega_j) S_x(\omega_j), & m \geq 2, \end{cases} \quad (8.12) \end{aligned}$$

где  $\overline{W}_m(\omega)$  – преобразование Фурье квадрата  $w_m^2(n)$  временного окна. Суммирование в (8.12) выполняется по различным разбиениям совокупности

$\{1, \dots, m, -(m+1), \dots, -2m\}$  на пары, а произведение – по всем парам в каждом разбиении, причем полагается, что  $\omega_{-k} = -\omega_k$ .

Полученная статистика периодограмм позволяет определить дисперсию оценок  $H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m)$ , характеризующую случайную составляющую погрешности вычисления ядер Винера. Периодограммы, вычисленные по различным отрезкам временных рядов, являются асимптотически независимыми случайными величинами, т. е.

$$\text{cov}_{N \rightarrow \infty} \left\{ I_{y_m^{x \dots x}}^l(\omega_1, \dots, \omega_m), I_{y_m^{x \dots x}}^{l*}(\omega_{m+1}, \dots, \omega_{2m}) \right\} = 0, \quad l_1 \neq l_2.$$

Поэтому для достаточно больших  $N$  на основании (8.3) можно записать

$$D \left\{ H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\} = \frac{D \left\{ I_{y_m^{x \dots x}}^l(\omega_1, \dots, \omega_m) \right\}}{L(m! \Theta_m)^2 S_x^2(\omega_1) \cdot K \cdot S_x^2(\omega_m)}, \quad (8.13)$$

где  $D\{\bullet\}$  означает дисперсию случайной величины.

Для вычисления дисперсии периодограммы  $I_{y_m^{x \dots x}}^l(\omega_1, \dots, \omega_m)$  положим аргументы  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_{2m}$  в (8.12) равными соответственно  $\omega_1, \dots, \omega_m$ . Подставляя результат в (8.13), получаем:

$$D \left\{ H_m^{\$}(\omega_1, K, \omega_m) \right\} = \begin{cases} \frac{1}{L} \left( \frac{E_1^2 S_{y_1}(\omega_1)}{\Theta_1^2 S_x(\omega_1)} + \overline{W}_1^2(2\omega_1) |H_1(\omega_1)|^2 \right), & m = 1; \\ \frac{E_m S_{y_m}(\omega_1 + K + \omega_m) \sum \prod \overline{W}_m(\omega_i + \omega_j)}{L(m! \Theta_m)^2 S_x(\omega_1) \cdot K \cdot S_x(\omega_m)}, & m \geq 2, \end{cases} \quad (8.14)$$

где  $E_m$  – энергия окна  $w_m(n)$ , равная  $\sum w_m^2(n)$ . Суммирование в (8.14) выполняется по различным разбиениям совокупности  $\{1, \dots, m, -1, \dots, -m\}$  на пары, а произведение – по всем парам в каждом разбиении.

Практический интерес представляет определение дисперсии оценок  $H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)$ , вычисленных на сетке частот с шагом  $\Delta\omega$ . Поскольку функция

$\overline{W}_m(\omega)$  при  $N \rightarrow \infty$  приближается к дельта-функции  $\delta(\omega)$ , величину  $N$  всегда можно выбрать таким образом, чтобы значениями  $\overline{W}_m(\omega)$  за пределами частотного диапазона  $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$  можно было пренебречь. Тогда сумма в (8.14) будет включать в себя лишь такие произведения, которым соответствуют разбиения на пары  $(k_i, -k_i)$ , содержащие аргументы, равные по абсолютному значению и противоположные по знаку. Если среди совокупности  $\{k_1, \dots, k_m\}$  нет равных по модулю аргументов, то сумма в (8.14) содержит лишь один отличный от нуля член, соответствующий разбиению  $(1, -1), \dots, (m, -m)$ , и равна  $E_m^m$ . Допустим теперь, что совокупность аргументов  $\{k_1, \dots, k_m\}$  ядра состоит из  $n$  групп, содержащих по  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  равных по модулю аргументов. Тогда нетрудно заметить, что сумма будет состоять из  $(r_1! \cdot \dots \cdot r_n!)$  слагаемых

$$\sum \prod \overline{W}_m((k_i + k_j)\Delta\omega) = E_m^m r_1! \cdot \dots \cdot r_n! .$$

Используя данное равенство и учитывая, что при сделанных предположениях  $\overline{W}_m(k\Delta\omega) = E_m \delta(k)$ , выражение (8.14) для дисперсии оценки ядра можно записать в виде:

$$D\{H_m(k_1, K, k_m)\} = \begin{cases} \frac{E_1^2}{L} \left( \frac{S_{y_1}(k_1)}{\Theta_1^2 S_x(k_1)} + \delta(k_1) |H_1(k_1)|^2 \right), & m = 1; \\ \frac{E_m^{m+1} S_{y_m}(k_1 + K + k_m)}{L (m! \Theta_m)^2 r_1! \cdot \dots \cdot r_n! S_x(k_1) \cdot \dots \cdot S_x(k_m)}, & m \geq 2. \end{cases} \quad (8.15)$$

Из анализа данного выражения следует, что дисперсия оценки ядра пропорциональна значению спектра составляющей  $y_m(n)$  реакции на частоте, равной сумме аргументов вычисляемого ядра, и стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ . Следовательно, данная оценка является состоятельной в среднеквадратичном, т. е. выполняется предельное соотношение



$$\lim_{N, L \rightarrow \infty} \left| H_m^{\$}(k_1, K, k_m) - H_m(k_1, K, k_m) \right|^2 = 0.$$

## 8.2. Статистическая идентификация нелинейных систем при случайных воздействиях

Моделирование нелинейной системы с помощью ортогональных фильтров предполагает решение задачи идентификации, состоящей в определении совокупности ядер  $h_m(n_1, \dots, n_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  по экспериментальным данным вход-выход. Как показано в [34, 58, 62], количество вычислений, выполняемых в процессе идентификации, может быть существенно уменьшено, если оценку ядер производить в частотной области с использованием алгоритмов быстрых спектральных преобразований.

В данном разделе рассматривается алгоритм идентификации нелинейных систем при случайных гауссовых воздействиях, в процессе которой на основе полученных в ходе эксперимента реализаций входного  $x(n)$  и выходного  $y(n)$  сигналов системы вычисляются оценки (4.24) ядер  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  на сетке частот с шагом  $\Delta\omega$ . В соответствии с результатами п. 2.7 вычисление оценок ядер Винера должно осуществляться последовательно, начиная с ядер низших порядков. При этом для вычисления оценки ядра  $m$ -го порядка используется реализация  $y_m(n)$ , определяемая выражением (2.135) и равная разности выходных сигналов системы  $y(n)$  и ортогонального фильтра  $(m - 1)$ -го порядка, построенного на основе ранее полученных оценок ядер.

Прежде чем перейти непосредственно к рассмотрению алгоритма вычисления ядер, сделаем некоторые допущения. Предположим, что исследуемая система обладает конечной памятью, т. е. ее реакция на единичный импульс по истечении некоторого конечного промежутка времени становится пренебрежительно мала. Тогда ядра  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  можно считать финитными функциями, удовлетворяющими условию  $h_m(n_1, \dots, n_m) = 0$  при  $\max\{n_1, \dots, n_m\} \geq \mu_h$ , где  $\mu_h$  означает память системы. Полагая в выражении

(4.12), определяющем ортогональные функционалы Винера, множество  $T = \{0, 1, \dots, \mu_h - 1\}$ , можно записать:

$$G_m[h_m, x(n)] = \sum_{n_1=0}^{\mu_h-1} K \sum_{n_m=0}^{\mu_h-1} h_m(n_1, \dots, n_m) H e_m[x(n - n_1), \dots, x(n - n_m)]. \quad (8.16)$$

Предположим, что корреляционная функция  $R_x(n)$  сигнала  $x(n)$ , используемого для тестирования системы в процессе идентификации, также имеет конечную длительность  $\mu_R$ . Обозначим  $N_\mu = \max(\mu_h, \mu_R)$ . Положим  $M\{x(n)\} = M\{y(n)\} = 0$ , что всегда можно обеспечить центрированием процессов  $x(n)$  и  $y(n)$ .

Согласно выражениям (8.1) и (8.3) оценки  $H_m^{\$}(\omega_1, \dots, \omega_m)$  ядер Винера определяются путем усреднения многомерных периодограмм, вычисленных по конечным интервалам временных рядов  $x(n)$  и  $y_m(n)$ . Такое разбиение реализаций на отрезки позволяет наиболее эффективно построить процедуру вычисления функционалов (8.16) на основе использования алгоритма БПФ и принципов сегментации данных.

Итак, представим реализацию  $x(n)$  в виде непересекающихся отрезков  $x_l(n)$ , содержащих по  $N > N_\mu$  отсчетов каждый, и вычислим ортогональный функционал  $G_m[h_m, x_l(n)]$ , предполагая известным ядро  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  Винера в частотной области. Возможны два различных подхода при организации такого вычислительного процесса.

Первый подход, состоящий в непосредственном расчете по формуле (8.16), довольно неэффективен, так как требует выполнения трудоемкой операции многомерного преобразования Фурье для определения ядра  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  во временной области по его изображению  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  в частотной. Поэтому воспользуемся вторым подходом [93], непосредственно использующим ядро в частотной области. Для этого дополним многомерный

массив  $h_m(n_1, \dots, n_m)$  нулями для значений аргументов, лежащих в интервале  $[N_\mu, N - 1]$ , и рассмотрим циклическую свертку вида

$$f_l(n_1, \dots, n_m) = \sum_{i_1=0}^{N-1} \dots \sum_{i_m=0}^{N-1} h_m(i_1, \dots, i_m) He_m[x(n_1 - i_1), \dots, x(n_m - i_m)]. \quad (8.17)$$

Результатом циклической свертки является периодическая функция  $f_l(n_1, \dots, n_m)$ , преобразование  $F_l(k_1, \dots, k_m)$  Фурье которой связано с частотным ядром  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  следующим простым соотношением:

$$F_l(k_1, \dots, k_m) = H_m(k_1, \dots, k_m) He_m[X_l(k_1), \dots, X_l(k_m)].$$

Здесь  $He_m[X_l(k_1), \dots, X_l(k_m)]$  представляет собой  $m$ -мерное ДПФ полинома Эрмита. На основании сделанного допущения о финитности корреляционной функции  $R_x(n)$  из выражения (2.130) получим

$$He_m[X_l(k_1), \dots, X_l(k_m)] = \sum_{r=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^r \sum \left\{ \prod_{(r)} S_x(k_i) \delta(k_i + k_j) \prod_{(m-2r)} X_l(k_s) \right\},$$

где суммирование производится по всевозможным разбиениям совокупности  $\{k_1, \dots, k_m\}$  на  $r$  пар  $\{k_i, k_j\}$  и  $(m - 2r)$  элементов  $k_s$ .

Циклическая свертка (4.40) и функционал  $G_m[h_m, x_l(n)]$  связаны следующим очевидным тождеством:

$$G_m[h_m, x_l(n)] = f_l(n_1, \dots, n_m) \Big|_{n_1=\dots=n_m=n} = f_l(n), \quad lN_\mu \leq n \leq l(N - 1). \quad (8.18)$$

Таким образом, выполняя операцию циклической свертки для всех непересекающихся отрезков  $x_l(n)$  входной реализации  $x(n)$ , ортогональный функционал можно вычислить лишь на интервалах  $lN_\mu \leq n \leq l(N - 1)$ ,  $l = 1, \dots, L$ . Из соотношения (8.18) также следует, что для определения значений функционала во всем диапазоне изменения  $n$  достаточно, чтобы реализации перекрывались друг с другом на интервалах  $N_\eta \geq N_\mu$ .

На рис. 8.1 показана такая организация сегментации данных с перекрытием  $N_\eta = N/2$ . При этом для формирования правой половины  $f_l^1(n)$  отрезков  $f_l(n)$ , определяющих выходной сигнал фильтра на отдельных интервалах, используются отрезки  $x_l^1(n)$ , а для формирования левой половины  $f_l^2(n)$  – отрезки  $x_l^2(n)$ , сдвинутые относительно  $x_l^1(n)$  на  $N/2$ . Заметим, что выбор интервала перекрытия, равным  $N/2$ , позволяет формировать отрезки  $f_l(n)$  из минимального количества составных частей.

При реализации рассмотренной выше процедуры необходимо вычислять лишь диагональные элементы получаемых в результате циклической свертки многомерных массивов  $f_l(n_1, \dots, n_m)$ . Это можно сделать, например, определив сначала многомерное обратное ДПФ массива  $F_l(k_1, \dots, k_m)$  и выбрав затем диагональные элементы результата. Более эффективный метод [50] использует модифицированный алгоритм многомерного БПФ, ориентированный на вычисление только диагональных элементов массива.

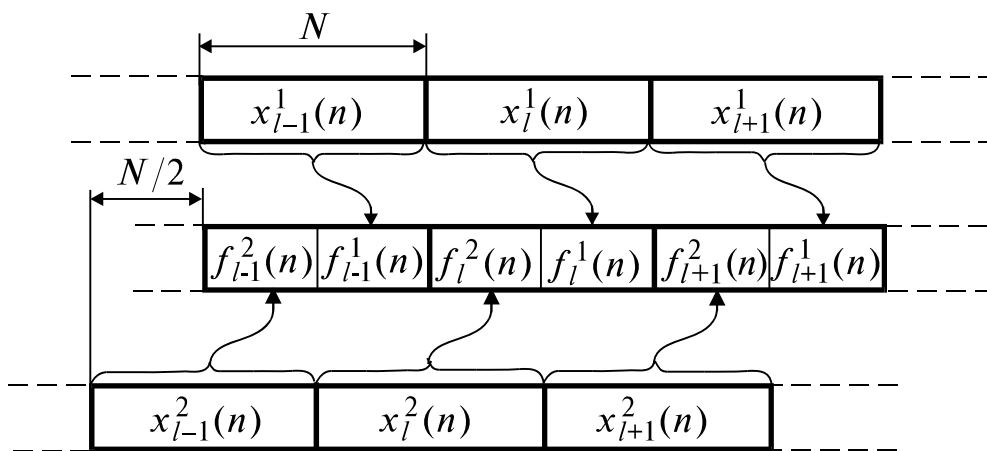


Рис. 8.1. Сегментация данных при вычислении ортогональных функционалов

Однако наибольшей экономии в вычислениях можно достигнуть, если операцию перехода к одной переменной выполнять не во временной, а в частотной области с помощью выражения

$$F_l(k) = \frac{1}{N^{m-1}} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_m=0}^{N-1} F_l(k_1, \dots, k_m) \delta(k - k_1 - \dots - k_m), \quad (8.19)$$

определяя затем искомое значение  $f_l(n)$  путем выполнения обратного ДПФ (уже одномерного) над полученным результатом  $F_l(k)$ . Таким образом, в данном случае вместо трудоемкой операции многомерного ДПФ выполняется более простая операция (8.19), не требующая умножения комплексных чисел.

В соответствии с рассмотренными выше принципами сегментации данных и выражениями (8.1) – (8.3) алгоритм вычисления оценки  $\hat{H}_m(k_1, \dots, k_m)$  ядра Винера в частотной области можно представить состоящим из следующей последовательности действий:

1. Разбиение реализации входного процесса  $x(n)$  на две группы отрезков  $x_l^1(n)$  и  $x_l^2(n)$ ,  $l = 1, \dots, L$ , перекрывающихся на интервалах  $N/2$  (см. рис. 8.1), а реализации выходного процесса  $y(n)$  – на отрезки  $y_{1,l}(n)$ , совпадающие по времени с отрезками  $x_l^1(n)$ .

2. Вычисление с помощью алгоритма БПФ коэффициентов Фурье

$$X_l^i(k) = \text{БПФ}\{x_l^i(n)\}, i = 1, 2.$$

3. Вычисление по ранее полученной оценке  $\hat{H}_{m-1}(\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$  ядра меньшего порядка многомерных функций

$$F_l^i(k_1, \dots, k_{m-1}) = \hat{H}_{m-1}^{\$}(k_1, \dots, k_{m-1}) \text{He}_{m-1}[X_l^i(k_1), \dots, X_l^i(k_{m-1})], i = 1, 2$$

и определение  $F_l^i(k)$  путем выполнения операции (4.42) перехода к одной переменной в частотной области.

4. Определение с помощью обратного БПФ циклических сверток

$$f_l^i(n) = \text{ОБПФ}\{F_l^i(k)\}, i = 1, 2.$$

5. Формирование  $l$ -го отрезка составляющей выходного сигнала фильтра, обусловленной ортогональным функционалом  $(m-1)$ -го порядка

$$f_l(n) = \begin{cases} f_l^1(n), & N/2 \leq n \leq N-1; \\ f_l^2(n+N/2), & 0 \leq n \leq N/2-1. \end{cases}$$

6. Определение отрезка  $y_{m,l}(n)$  реализации  $y_m(n)$  путем вычитания из соответствующего отрезка ранее полученной реализации  $y_{m-1}(n)$  отрезка  $f_l(n)$ , т. е.  $y_{m,l}(n) = y_{m-1,l}(n) - f_l(n)$ .

7. Умножение массивов  $x_l^1(n)$  и  $y_{m,l}(n)$  на временное окно  $w_m(n)$  и вычисление ДПФ

$$X_l(k) = \text{БПФ} \{w_m(n)x_l^1(n)\},$$

$$Y_{m,l}(k) = \text{БПФ} \{w_m(n)y_{m,l}(n)\}.$$

8. Вычисление многомерных периодограмм  $I_{y_m x \dots x}^l(k_1, \dots, k_m)$  по формуле (8.2) для всех отрезков  $l = 1, \dots, L$  временных рядов и оценки  $H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)$  ядра  $m$ -го порядка согласно выражениям (8.1) и (8.3).

Заметим, что ДПФ пары действительных массивов, вычисляемые на шагах 2 и 7 алгоритма, можно получить за один проход алгоритма БПФ, если предварительно объединить данные массивы в один комплексный [65]. Тогда для вычисления оценки ядра  $m$ -го порядка ( $m \geq 2$ ) в общей сложности необходимо выполнить  $3L$  ДПФ, что составит  $1.5M \log_2 N$  операций комплексного умножения [6].

Выполнение этапов 3 и 8 алгоритма осуществляется на множестве  $D_m$  точек  $(k_1, \dots, k_m)$ , принадлежащих области задания ядер, которое согласно (2.140) может быть определено в виде

$$D_m = \left\{ (k_1, \dots, k_m): \begin{cases} |k_1 + \dots + k_m| \leq N_y \leq N/2, \\ |k_i| \leq N_x \leq N/2, i = 1, \dots, m \end{cases} \right\}, \quad (8.20)$$

где  $N_x = \Omega_x/\Delta\omega$  и  $N_y = \Omega_y/\Delta\omega$ . Дополнительного сокращения вычислительных затрат на данных этапах алгоритма можно достигнуть за счет использования свойств симметрии ядер и результатов промежуточных вычислений.

Действительно, процесс вычислений можно организовать таким образом, чтобы частичные произведения и суммы, полученные на предыдущих этапах алгоритма, полностью использовались для последующих вычислений. Так, например, результаты вида

$$P_m = X_l^*(k_1) \cdot \dots \cdot X_l^*(k_m), \quad \Sigma_m = k_1 + K + k_m,$$

полученные при формировании периодограммы  $m$ -го порядка, могут быть использованы далее для вычисления соответствующих произведений и сумм

$$P_{m+1} = P_m \cdot X_l^*(k_{m+1}), \quad \Sigma_{m+1} = \Sigma_m + k_{m+1},$$

определяющих периодограмму  $(m+1)$ -го порядка, которая в этом случае формируется согласно выражению

$$I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_{m+1}) = Y_{m+1,l}(\Sigma_{m+1}) P_{m+1}.$$

Такая организация процесса вычислений возможна при соответствующем методе сканирования опорных множеств  $D_m$ ,  $m = 1, \dots, M$  вида (8.10), учитывающем взаимосвязь между ними и свойства симметрии ядер в частотной области.

С учетом сделанных замечаний общее количество комплексных умножений, необходимых для вычисления оценки ядра Винера  $m$ -го порядка в предлагаемом алгоритме, составит  $L(1.5M \log_2 N + K_{m-1} + K_m)$ , где  $K_m$  обозначает количество точек  $(k_1, \dots, k_m) \in D_m$ .

### 8.3. Быстрый алгоритм идентификации при псевдослучайных воздействиях

Методика эксперимента, проводимого в процессе активной идентификации, состоит в возбуждении системы тестовым сигналом специального вида. Выбор тестового сигнала должен определяться таким образом, чтобы, с одной стороны, получить в ходе эксперимента максимум

информации о системе, а с другой – упростить вид ортогональных функционалов и процедуру идентификации в целом [87, 98].

Учитывая данные обстоятельства, воспользуемся в качестве тестового сигнала псевдослучайным процессом  $x(n)$ , определяемым дискретным аналогом известного разложения Райса – Пирсона [46] вида:

$$x(n) = \sum_{k=-N_x}^{N_x} X(k) \exp(j \frac{2\pi}{N} kn). \quad (8.21)$$

Здесь коэффициенты  $X(k)$  Фурье принимаются равными  $A(k)\exp[j\varphi(k)]$ , где амплитуды  $A(k)$  отдельных гармоник определяют спектральную плотность мощности воздействия, а случайные фазы  $\varphi(k)$  статистически независимы и равномерно распределены в интервале  $[0, 2\pi]$ . Наложим на  $X(k)$  дополнительные ограничения  $X(-k) = X^*(k)$  и  $X(0) = 0$ , гарантирующие действительность процесса  $x(n)$  и равенство нулю его математического ожидания. При каждом фиксированном наборе  $\varphi_l(k)$  случайных фаз соотношение (4.44) определяет периодическую реализацию  $x_l(n)$  псевдослучайного процесса  $x(n)$ , коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ) которой равны  $A(k)\exp[j\varphi_l(k)]$ . Для формирования реализаций процесса  $x(n)$  целесообразно использовать алгоритм БПФ.

В соответствии с выбранным методом генерирования тестового сигнала  $l$ -я реализация  $x_l(n)$  псевдослучайного процесса  $x(n)$  однозначно определяется набором  $N_x$  коэффициентов  $X_l(n)$  ДПФ. Аналогично установившуюся реакцию  $y_l(n)$  системы на периодическое воздействие  $x_l(n)$  будем характеризовать набором  $N_y$  коэффициентов  $Y_l(n)$  ДПФ реакции. Тогда ортогональный фильтр (4.3), моделирующий частотный отклик  $Y(k)$  нелинейной системы на воздействие  $X(k)$ , можно представить в виде функционального полинома  $M$ -го порядка

$$Y_M(k) = \sum_{m=0}^M G_m[H_m, X(k)]. \quad (8.22)$$



С помощью процедуры ортогонализации Грама – Шмидта в приложении Б показано, что система функционалов  $G_m[H_m, X(k)]$  в частотной области, ортогональных при псевдослучайных воздействиях вида (8.21), определяется следующим выражением:

$$G_m[H_m, X(k)] = \sum_{D_m} H_m(k_1, K, k_m) \delta(k - k_1 - K - k_m) \prod_{i=1}^m X(k_i), \quad (8.23)$$

где суммирование проводится по всем элементам опорной области  $D_m$ , образованной всевозможными сочетаниями  $(k_1, \dots, k_m)$  из совокупности чисел  $\{-N_x, \dots, -1, 1, \dots, N_x\}$ , такими, что  $k_i \neq -k_j$ .

Ядра  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  ортогонального фильтра определим из условия минимума квадрата нормы вектора ошибки между ДПФ реакции  $Y(k)$  системы и  $Y_M(k)$  фильтра

$$\|Y(k) - Y_M(k)\|^2 \rightarrow \min.$$

Выражение, определяющее оптимальные ядра Винера в частотной области, также получено в п. 2.8 и имеет вид

$$H_m(k_1, K, k_m) = \frac{M \left\{ Y(k_1 + K + k_m) X^*(k_1) \cdot K \cdot X^*(k_m) \right\}}{A^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)}. \quad (8.24)$$

Для построения оценки ядра  $H_m(k_1, \dots, k_m)$ , пригодной для практической идентификации, введем периодограмму [97]

$$I_{yx \dots x}^l(k_1, \dots, k_m) = Y_l(k_1 + \dots + k_m) \exp \left[ -j \sum_{i=1}^m \phi_l(k_i) \right]. \quad (8.25)$$

Тогда на основании теоретического выражения (8.24) оценку ядра  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  можно определить следующим образом:

$$H_m^{\$}(k_1, K, k_m) = \frac{\sum_{l=1}^L I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_m)}{LA(k_1) \cdot K \cdot A(k_m)}. \quad (8.26)$$

Отложим исследование статистических свойств данной оценки до следующего раздела, а сейчас, следуя [87, 97], рассмотрим алгоритм идентификации, позволяющий существенно снизить объем вычислительных затрат, связанных с определением ядер ортогональных фильтров.

В процессе идентификации система возбуждается различными реализациями  $x_l(n)$ ,  $l = 1, \dots, L$  псевдослучайного процесса, получаемыми из (8.21) при различных наборах  $\varphi_l(k)$  случайных фаз коэффициентов  $X_l(n)$  ДПФ. По истечении переходного процесса в системе для каждого воздействия  $x_l(n)$  регистрируется реакция  $y_l(n)$  и вычисляется ее ДПФ  $Y_l(n)$ , которое используется для определения периодограмм  $I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_m)$ , различных порядков  $m = 1, \dots, M$ . Для вычисления оценок  $H_m^{\$}(k_1, K, k_m)$  ядер полученные периодограммы усредняются по всем реализациям  $x_l(n)$ ,  $l = 1, \dots, L$  в соответствии с выражением (8.26). Заметим, что в данном случае не ставится условие последовательного определения оценок ядер, так как необходимости в моделировании отдельных составляющих реакции системы здесь не возникает.

Вычисление периодограмм (8.25) и оценок (8.26) осуществляется на множествах  $D_m$  точек  $(k_1, \dots, k_m)$ , составляющих область задания ядер  $H_m(k_1, \dots, k_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Множество  $D_m$  определяется аналогично множеству (8.20) и отличается лишь тем, что из него исключаются совокупности  $(k_1, \dots, k_m)$ , содержащие нулевые индексы или индексы, равные по абсолютному значению и противоположные по знаку, так как в этих точках ядра вида (8.24) тождественно равны нулю.

Процедуру вычисления оценок  $H_m^{\$}(k_1, K, k_m)$  ядер можно построить наиболее эффективно [97], если генерирование случайных фаз  $\varphi(k)$  комплексных коэффициентов  $X(k)$  в (8.21) осуществлять путем случайной выборки значений фаз в  $R$  равноотстоящих точках, принадлежащих интервалу

$[0, 2\pi]$ , положив  $\varphi(k) = 2\pi s_k/R$ , где  $s_k$  – случайные целые числа, равновероятно принимающие значения из ряда  $0, \dots, R-1$ . Тогда, учитывая периодичность функции  $\exp jx$ , выражение (8.25) для периодограммы можно представить в виде:

$$I_{y_{x\dots x}}^l(k_1, \dots, k_m) = Y_l(k_1 + \dots + k_m) \exp\left[-j \frac{2\pi}{R} \left\{ s_{k_1}^l + K + s_{k_m}^l \right\} \bmod R\right], \quad (8.27)$$

где  $s_k^l$  – значения случайных фаз, определяющих  $l$ -й набор  $\varphi(k)$  случайных фаз, а  $\{\bullet\} \bmod R$  означает суммирование по модулю  $R$ .

Так как число допустимых значений фаз ограничено величиной  $R$ , периодограмма (8.27) также может принимать значения лишь из конечного ряда, образованного различными произведениями  $Y_l(k)\exp(-j2\pi i/R)$ ,  $k = 0, K, N_y$ ,  $i = 0, \dots, R-1$ , что позволяет заранее формировать массив возможных значений периодограмм после каждого вычисления ДПФ  $Y_l(k)$  реакции системы. С учетом сделанного замечания алгоритм идентификации можно представить состоящим из следующих основных шагов:

1. Генерирование  $N_x$  целых случайных чисел  $s_i^l$ ,  $i = 1, \dots, N_x$ , равновероятно принимающих значения из ряда  $0, \dots, R-1$ , и формирование коэффициентов  $X_l(k)$  ДПФ воздействия, равных

$$X_l(k) = \begin{cases} A(k) \exp(j 2\pi s_k^l / R), & k = 1, K, N_x; \\ 0, & k = 0, N_x + 1, K, N - N_x - 1; \\ A(N - k) \exp(-j 2\pi s_{N-k}^l / R), & k = N - N_x, K, N - 1. \end{cases}$$

2. Вычисление с помощью алгоритма обратного БПФ реализации  $x_l(n)$  псевдослучайного процесса

$$x_l(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_l(k) \exp(j 2\pi kn/N), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

3. Возбуждение системы циклически повторяющейся реализацией  $x_l(n)$  и регистрация одного периода установившейся реакции  $y_l(n)$ .

4. Вычисление с помощью алгоритма БПФ коэффициентов  $Y_l(k)$  ДПФ реакции  $y_l(n)$  системы

$$Y_l(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_l(n) \exp(-j 2\pi kn/N), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

5. Определение массива  $Z_l[k, i]$  возможных значений периодограмм  $I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_m)$  по формуле

$$Z_l[k, i] = Y_l(k) \exp(j 2\pi i/R), \quad k = 0, \dots, N_y, \quad i = 0, \dots, R-1.$$

6. Формирование из массива  $Z_l(k, i)$  периодограмм в соответствии с равенством

$$I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_m) = Z_l \left[ k_1 + K + k_m, \left\{ s_{k_1}^l + K + s_{k_m}^l \right\} \bmod R \right].$$

7. Вычисление оценок  $H_m^{\$}(k_1, K, k_m)$ ,  $m = 1, \dots, M$  ядер согласно выражению (8.26).

Алгоритмическую основу данной процедуры составляет алгоритм БПФ, который используется как для генерирования воздействия, так и для анализа реакции системы. В общей сложности на протяжении всей процедуры операцию БПФ необходимо выполнить  $2L$  раз, что вдвое меньше, чем в алгоритме, рассмотренном в предыдущем разделе.

Результаты промежуточных вычислений на этапах 6 и 7 алгоритма могут быть использованы для последующих вычислений. Так например, частичные суммы

$$\Sigma_m^1 = k_1 + \dots + k_m, \quad \Sigma_m^2 = \left( s_{k_1}^l + K + s_{k_m}^l \right) \bmod R,$$

полученные при формировании периодограммы  $m$ -го порядка, модифицируются далее для нахождения сумм

$$\Sigma_{m+1}^1 = \Sigma_m^1 + k_{m+1}, \quad \Sigma_{m+1}^2 = \left( \Sigma_m^2 + s_{k_{m+1}}^l \right) \bmod R,$$

определяющих расположение значений периодограммы  $(m + 1)$ -го порядка в двумерном массиве  $Z_l[k, i]$  данных согласно формуле

$$I_{yx\dots x}^l(k_1, \dots, k_{m+1}) = Z_l[\Sigma_{m+1}^1, \Sigma_{m+1}^2].$$

Для оценки эффективности алгоритма прежде всего отметим, что количество  $K_m$  сочетаний  $(k_1, \dots, k_m)$ , входящих в опорную область  $D_m$ , быстро возрастает с увеличением порядка  $m$  ядра. Поскольку число операций умножения, необходимых для вычисления массива  $Z_l[k, i]$  возможных значений периодограмм, не зависит от  $m$ , рассмотренный алгоритм по сравнению с известными [48, 108, 117] дает значительную экономию в вычислениях, причем тем большую, чем выше порядок ядра. Действительно, для вычисления оценок ядер до  $M$ -го порядка включительно в известных алгоритмах требуется порядка  $L(K_1 + \dots + K_m)$  операций комплексного умножения, тогда как в предложенном алгоритме достаточно выполнить лишь  $LRN_y/2$  таких операций. Таким образом, сокращение вычислительных затрат можно оценить отношением

$$Ef(M) = \frac{2(K_1 + \dots + K_M)}{RN_y}.$$

#### 8.4. Влияние ошибок вычисления ядер ортогональных функциональных рядов на точность моделирования

Вычисляя математическое ожидание оценки (8.26), нетрудно показать, что  $M\{\hat{H}_m(k_1, K, k_m)\} = H_m(k_1, K, k_m)$ . Следовательно, данная оценка является несмещенной и систематическая составляющая погрешности равна нулю. Случайная составляющая погрешности может быть охарактеризована дисперсией оценки ядра

$$D\{H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)\} = \frac{\sum_{l_1=1}^L \sum_{l_2=1}^L \text{cov}\{I_{yxKx}^{l_1}(k_1, \dots, k_m) I_{yxKx}^{l_2^*}(k_1, \dots, k_m)\}}{L^2 A^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)}.$$

(8.28)

Ввиду независимости случайных фаз для различных значений  $l$  имеем

$$\text{cov}\{I_{yxKx}^{l_1}(k_1, \dots, k_m) I_{yxKx}^{l_2^*}(k_1, \dots, k_m)\} = 0, \quad l_1 \neq l_2.$$

При  $l_1 = l_2 = l$  ковариация периодограммы равна

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_{yxKx}^l(k_1, \dots, k_m) I_{yxKx}^{l^*}(k_1, \dots, k_m)\} &= M\left\{|I_{yxKx}^l(k_1, \dots, k_m)|^2\right\} - \\ &- \left|M\left\{I_{yxKx}^l(k_1, \dots, k_m)\right\}\right|^2 = M\left\{|Y_l(k_1 + \dots + k_m)|^2\right\} - |H_m(k_1, \dots, k_m)|^2 \prod_{i=1}^m A^2(k_i). \end{aligned}$$

Подставляя данное выражение в (8.28), получим:

$$D\{H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)\} = \frac{1}{L} \left( \frac{S_y(k_1 + \dots + k_m)}{N A^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)} - |H_m(k_1, \dots, k_m)|^2 \right), \quad (8.29)$$

где  $S_y(k)$  – спектральная плотность мощности выходного сигнала системы, равная  $NM\{|Y(k)|^2\}$ . Из полученного выражения следует, что дисперсия стремится к нулю при  $L \rightarrow \infty$ , доказывая тем самым состоятельность оценки  $H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)$ .

Физический смысл соотношения (8.29) становится более понятным, если рассмотреть структуру выражения для спектра  $S_y(k)$  процесса на выходе нелинейной системы. Из ортогональности функционалов следует

$$S_y(k) = N \sum_{m=0}^{\infty} M\left\{|G_m[H_m, X(k)]|^2\right\}. \quad (8.30)$$

Можно показать [85], что для ортогональных функционалов вида (8.23) выражение (8.30) принимает вид

$$S_y(k) = N \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{D_m} |H_m(k_1, \dots, k_m)|^2 \delta(k - k_1 - K - k_m) \prod_{i=1}^m A^2(k_i). \quad (8.31)$$

На основании полученного выражения спектр  $S_y(k_1 + K + k_m)$ , входящий в (8.31), можно представить состоящим из двух слагаемых

$$S_y(k_1 + \dots + k_m) = N |H_m(k_1, \dots, k_m)|^2 \prod_{i=1}^m A^2(k_i) + S_y^{\Delta}(k_1 + \dots + k_m), \quad (8.32)$$

первое из которых обусловлено значением ядра  $H_m(k_1, \dots, k_m)$ , а второе характеризует вклад от остальных значений ядер. Подставляя (2.32) в выражение (8.29), получим:

$$D \{ H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m) \} = \frac{S_y^{\Delta}(k_1 + \dots + k_m)}{L N A^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)}. \quad (8.33)$$

Таким образом, дисперсия оценки ядра  $H_m(k_1, \dots, k_m)$  Винера в точке  $(k_1, \dots, k_m)$  прямо пропорциональна значению спектра выходного сигнала системы за вычетом той составляющей спектра, которая обусловлена значением вычисляемого ядра. Чем меньший вклад в общий спектр дает подлежащее оценке значение ядра, тем менее точно его можно вычислить. С увеличением степени нелинейности системы оценки ядер имеют тенденцию ухудшаться, так как спектр выходного сигнала системы обогащается дополнительными составляющими. Если система линейна, то выходной спектр  $S_y(k)$  полностью определяется значением ядра  $H_1(k)$  и, следовательно, дисперсия оценки  $H_1^{\$}(k)$  равна нулю. Этот факт подтверждается выражением (8.33) при  $m = 1$ .

При моделировании энергетических преобразований сигналов в нелинейных системах в соответствии с выражением (8.31) требуется знание

квадратов модулей  $|H_m(k_1, \dots, k_m)|^2$  ядер Винера в частотной области. Следует заметить, что использование для этой цели квадрата модуля оценки ядра  $|H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)|^2$  может привести к существенной погрешности, так как свойство несмещенности оценки ядра при ее возведении в квадрат утрачивается. Подобной ошибки смещения можно избежать, если для оценки квадрата модуля ядра воспользоваться выражением

$$|H_m(k_1, \dots, k_m)|_{\text{est}}^2 = |H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)|^2 - D\{H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)\}. \quad (8.34)$$

Подставляя в (8.34) выражение (8.29) для дисперсии и полагая, что  $|H_m(k_1, \dots, k_m)|_{\text{est}}^2 \cong |H_m(k_1, \dots, k_m)|^2$  и  $S_y(k_1 + \dots + k_m) \cong \mathcal{S}_y(k_1 + \dots + k_m)$ , получим следующую оценку:

$$|H_m(k_1, \dots, k_m)|_{\text{est}}^2 = \frac{1}{L-1} \left( L |H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)|^2 - \frac{\mathcal{S}_y(k_1 + \dots + k_m)}{NA^2(k_1) \cdot K \cdot A^2(k_m)} \right), \quad (8.35)$$

где  $\mathcal{S}_y(k)$  – оценка спектра выходного сигнала системы, которая может быть вычислена по формуле

$$\mathcal{S}_y(k) = \frac{N}{L} \sum_{l=1}^L |Y_l(k)|^2. \quad (8.36)$$

Вычисляя математическое ожидание оценки (8.35), нетрудно убедиться, что она обладает свойством несмещенности и, следовательно, более приемлема на практике при моделировании нелинейных спектральных преобразований сигналов.

**Пример 8.1.** Для идентификации была выбрана система, показанная на рис. 8.2 и состоящая из двух линейных звеньев второго порядка, разделенных статической нелинейностью аппроксимированной многочленом третьего порядка. Значения параметров полагались равными:  $a_{11} = -1.5681$ ,  $a_{12} = 0.6400$ ,  $b_{11} = -1$ ,  $a_{21} = -1.2895$ ,  $a_{22} = 0.4900$ ,  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 0.003$ ,  $c_3 = 0.001$ . В качестве



тестового воздействия использовался псевдослучайный процесс вида (8.21) с длительностью периода  $N = 128$ , генерируемый с помощью алгоритма БПФ. Амплитуды  $A(k)$  коэффициентов  $X(k)$  воздействия полагались равными единице, а случайные фазы равновероятно выбирались из  $R = 16$  значений в интервале  $[0, 2\pi]$ . Количество спектральных дискрет на входе и выходе фильтра составляло соответственно  $N_x = 20$ ,  $N_y = 40$ .

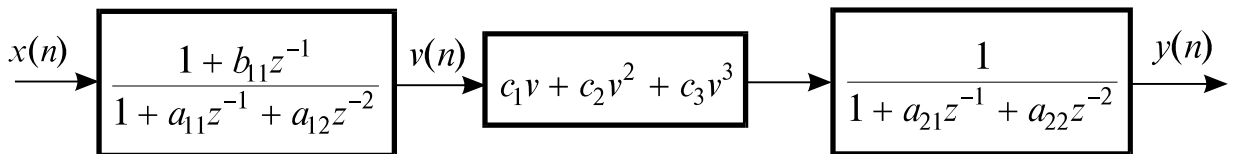


Рис. 8.2. Моделируемая нелинейная система третьего порядка

Так как степень нелинейности системы характеризуется полиномом третьей степени, для ее моделирования вычислялись оценки ядер до третьего порядка включительно. На рис. 8.3 и 8.4 изображены модули истинных значений ядер в частотной области и их оценки, полученные усреднением по  $L = 500$  реализациям случайных процессов. На рис. 8.5 приведены результаты моделирования системы ортогональными фильтрами различного порядка, построенными на основе полученных оценок ядер. Для сравнения выходных сигналов системы и моделирующих ее фильтров были вычислены среднеквадратические ошибки, которые для линейного (рис. 8.5, б), квадратичного (рис. 8.5, в) и кубического (рис. 8.5, г) фильтров составили соответственно  $\varepsilon_1 = 30.6$ ,  $\varepsilon_2 = 17.5$  и  $\varepsilon_3 = 15.4$ .

Следует заметить, что было бы неверно судить о точности моделирования по результатам лишь одного эксперимента. Поэтому с целью получения более достоверных результатов было проведено усреднение среднеквадратических ошибок по результатам 100 аналогичных опытов. При этом усредненные ошибки моделирования составили  $\bar{\varepsilon}_1 = 27.2$ ,  $\bar{\varepsilon}_2 = 16.1$ ,  $\bar{\varepsilon}_3 = 16.3$ . Таким образом, введение квадратичной составляющей фильтра позволяет уменьшить ошибку моделирования приблизительно на 40%, повышая точность моделирования, в то время как добавление кубического члена в среднем даже

несколько снижает точность моделирования. Эта казалась бы парадоксальная ситуация объясняется статистическими ошибками, присущими оценкам ядер для конечного числа  $L$  усреднений.

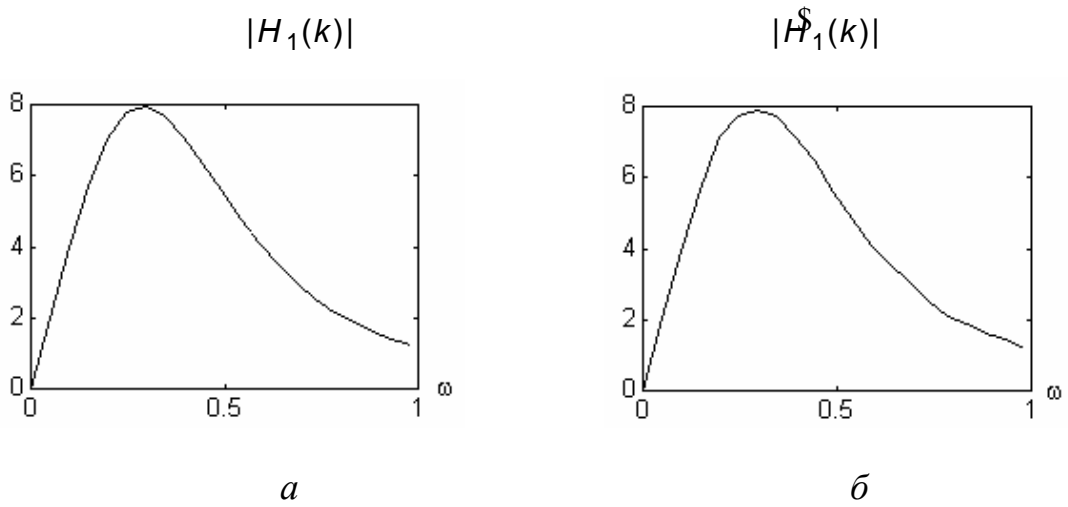


Рис. 8.3. Ядро первого порядка:

*a* – истинное значение; *б* – оценка

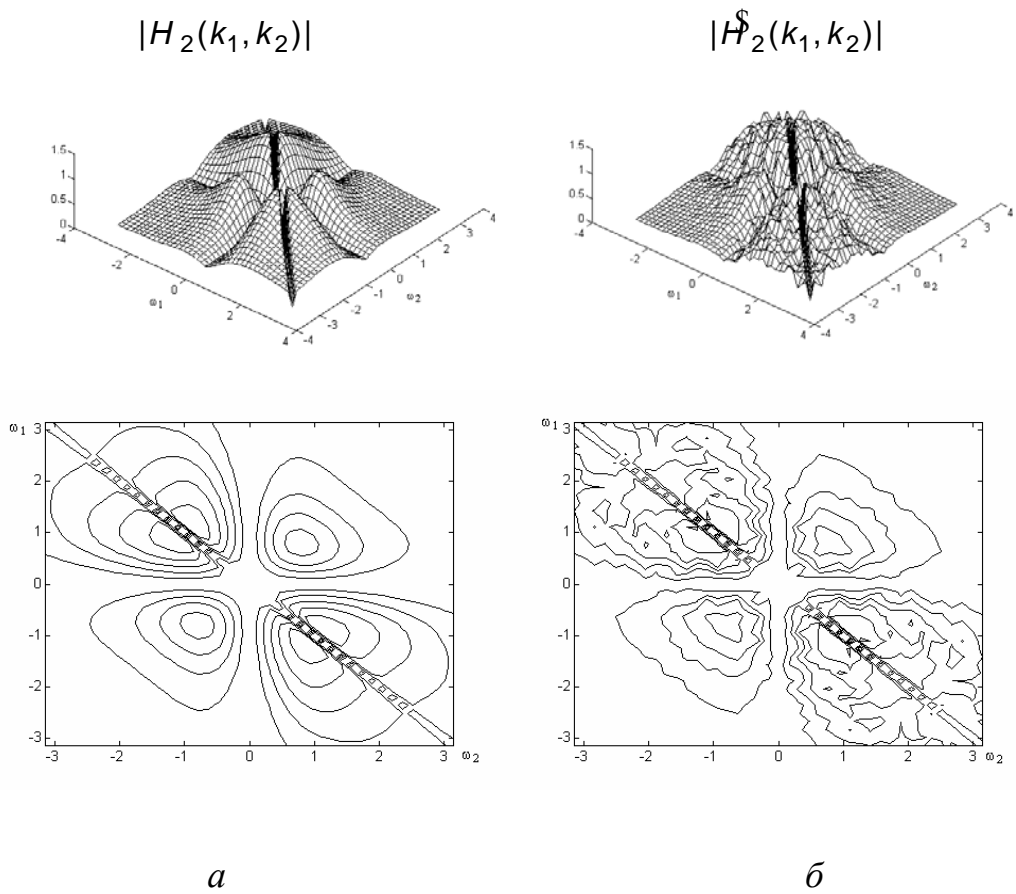


Рис. 8.4. Ядро второго порядка:

*a* – истинное значение; *б* – оценка

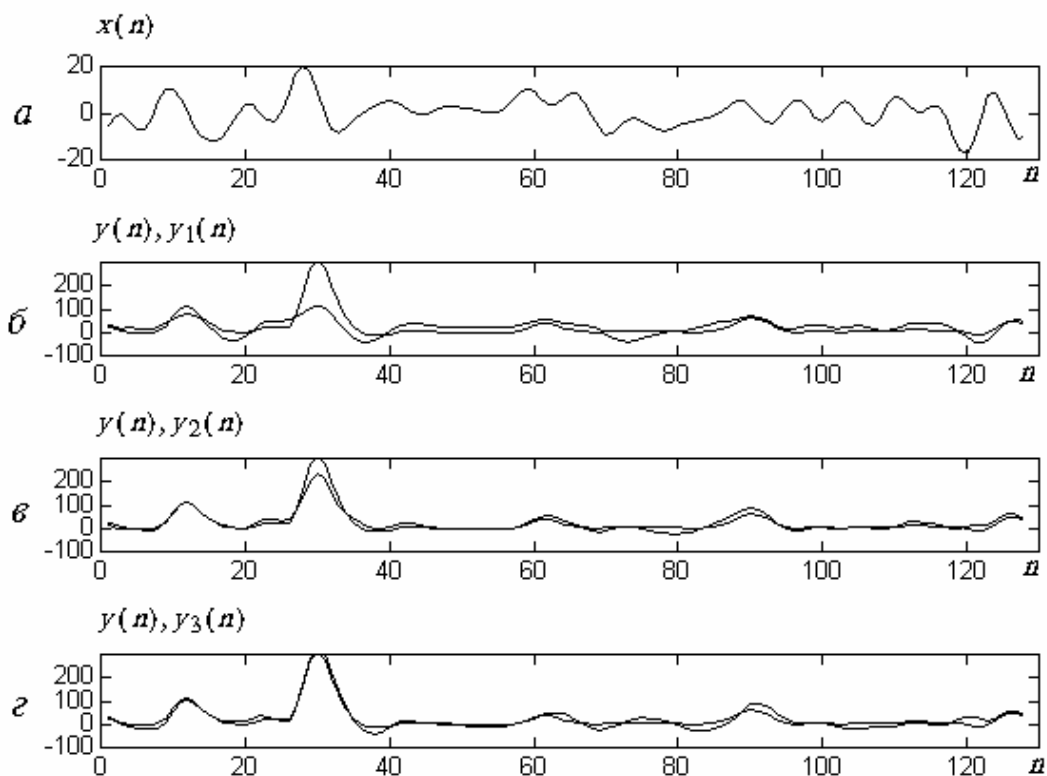


Рис. 8.5. Результаты моделирования нелинейной системы:

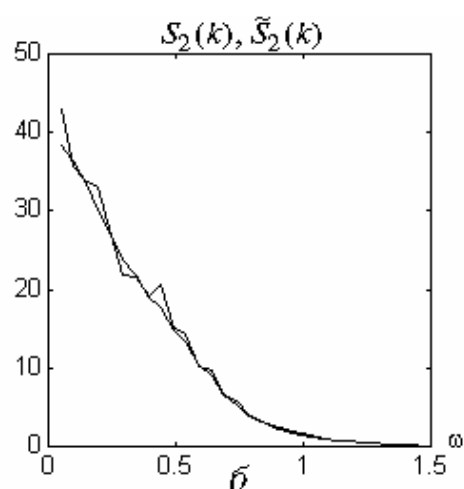
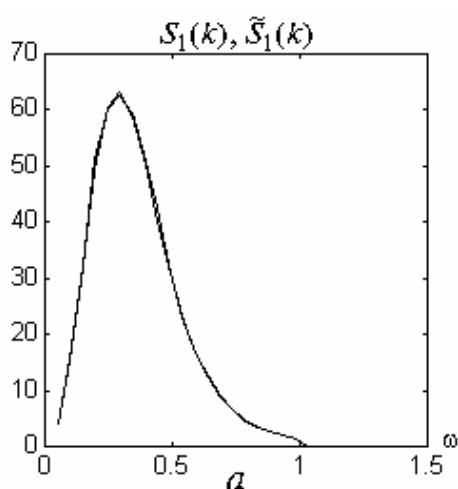
*a* – входной сигнал; *б, в, г* – истинная реакция  $y(n)$  системы и реакции  $y_1(n)$ ,  $y_2(n)$ ,  $y_3(n)$  ортогональных фильтров различного порядка  $M$

Кроме того, с использованием выражения (8.35) были вычислены также оценки квадратов модулей ядер. На основе полученных оценок согласно (8.31) моделировались составляющие спектра реакции системы

$$\mathbf{S}_m(k) = N \sum_{D_m} |H_m(k_1, \dots, k_m)|_{\text{est}}^2 \delta(k - k_1 - \dots - k_m) \prod_{i=1}^m A^2(k_i), \quad m = 1, 2, 3,$$

обусловленные ядрами различных порядков. Данные спектральные составляющие вместе с их истинными значениями, полученными аналитическим путем, показаны на рис. 8.6 *a–в*. Суммарный спектр  $\mathbf{S}_y(k) = \mathbf{S}_1(k) + \mathbf{S}_2(k) + \dots + \mathbf{S}_3(k)$  на выходе ортогонального фильтра, как видно из рис. 8.6, *г*, достаточно хорошо совпадает с оценкой спектра  $\hat{\mathbf{S}}_y(k)$ , определяемой согласно (8.36) непосредственно по выходному сигналу системы. Для сравнения на рис. 8.6 *д, е* показаны соответственно истинные спектры

$S_y(k)$ ,  $S_1(k)$ ,  $S_2(k)$ ,  $S_3(k)$  системы и их оценки  $\mathfrak{S}_y(k)$ ,  $\mathfrak{S}_1(k)$ ,  $\mathfrak{S}_2(k)$ ,  $\mathfrak{S}_3(k)$ , вычисленные по модели. Как видно из рис. 8.6, д, основной вклад в спектр реакции системы вносит линейная составляющая  $S_1(k)$ . Поэтому, как и следовало ожидать, оценка ядра первого порядка хорошо приближает истинное значение ядра (см. рис. 8.3). Так как основная мощность квадратичной составляющей  $S_2(k)$  сконцентрирована в области низких частот, погрешности в оценке ядра второго порядка возрастают в области частот, для которой сумма аргументов  $k_1 + k_2$  ядра приближается к верхним границам частотного диапазона (см. рис. 8.4). Отсутствие смещения при моделировании спектральных составляющих на рис. 8.6, а–в и хорошее совпадение спектра  $\mathfrak{S}_y(k)$  модели с традиционной оценкой  $\mathfrak{S}_y^{\$}(k)$ , вычисленной по формуле (8.36), подтверждают эффективность использования выражения (8.35) для вычисления квадратов модулей ядер в частотной области.



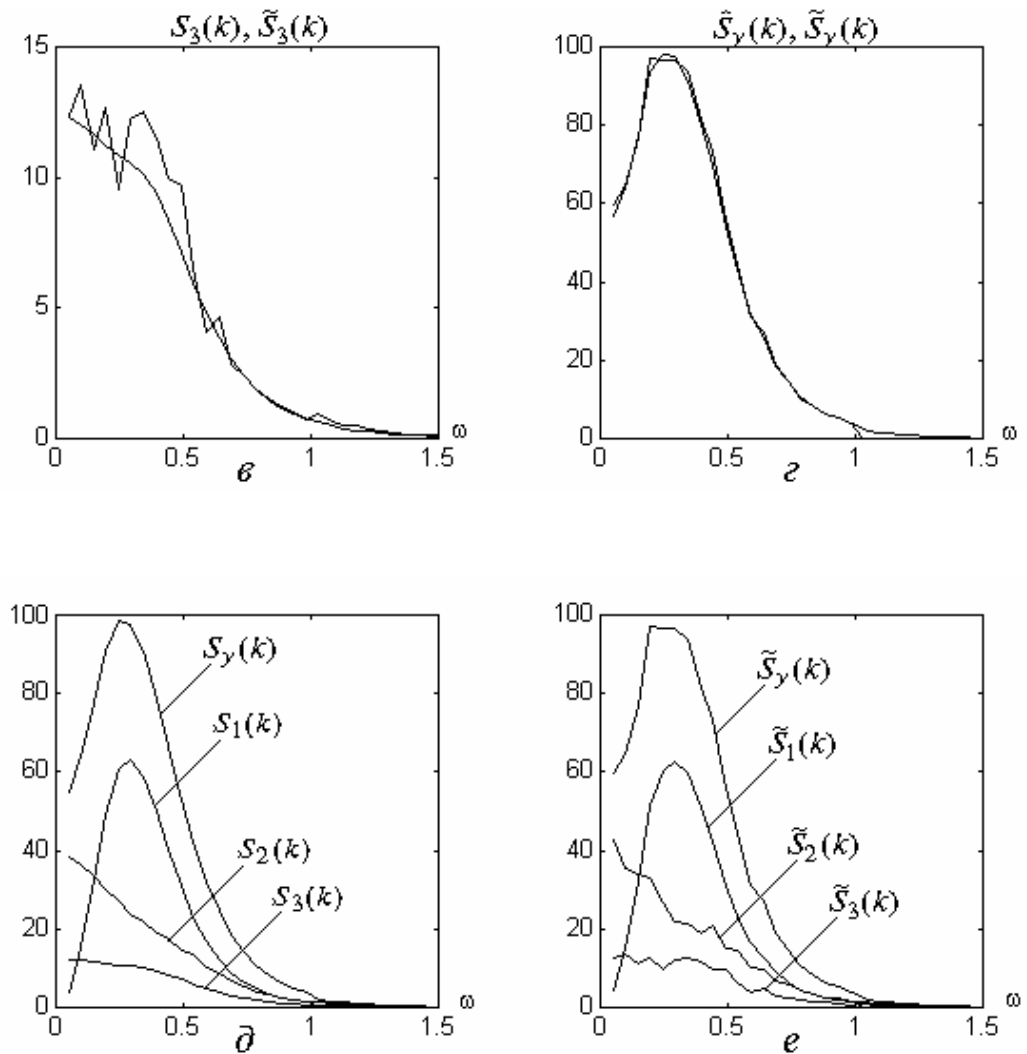


Рис. 8.6. Моделирование выходного спектра нелинейной системы:

*a–в* – истинные и вычисленные составляющие спектра от линейного, квадратичного и кубического членов; *г* – оценки спектра по выходному сигналу и по модели; *д, е* – истинный и вычисленный спектры и их составляющие

Таким образом, на приведенных рисунках явно наблюдается увеличение погрешности вычислений в оценках ядер высших порядков, что связано с обогащением спектра реакции системы по мере увеличения степени нелинейности. Это объясняет также возрастание ошибки вычисления составляющих спектра реакции высших порядков на рис. 8.6 б, в, причем чем меньший вклад вносит составляющая в суммарный спектр, тем значительней случайные ошибки, присутствующие в ее оценке.

Следует также заметить, что в отличие от линейного случая погрешность вычисления ядер зависит также от количества дискрет  $N_x$  и  $N_y$ , определяющих

размер области его определения. Это связано с тем, что увеличение числа дискрет в области частот при сохранении общей мощности входного сигнала приводит к уменьшению относительного вклада отдельных значений ядер в спектр выходного сигнала. В результате возрастает числитель выражения (8.33), определяющего дисперсию оценки, что приводит к ее ухудшению. Проведенные численные эксперименты подтвердили данный вывод.

Одним из возможных путей уменьшения случайных погрешностей при оценке ядра Винера  $m$ -го порядка является предварительное вычитание из коэффициентов  $Y(k)$  ДПФ реакции системы составляющих фильтра, определяемых по ранее вычисленным ядрам более низкого порядка. Хотя с теоретической точки зрения, вследствие ортогональности функционалов, данная операция не является необходимой, дисперсия оценки  $H_m^{\$}(k_1, \dots, k_m)$  ядра в этом случае уменьшится, так как будет пропорциональна лишь той части выходного спектра, которая обусловлена ядрами порядков.

## Заключение

Учебное пособие охватывает основные методы построения линейных динамических математических моделей и их параметрической идентификации.

Используя материалы пособия, посвященные динамическим моделям систем управления, появляется возможность получения любой формы представления математической модели, начиная от дифференциального или разностного уравнения, передаточной функции, АРСС – модели или модели в пространстве и заканчивая математической моделью на базе матричных операторов. Переход от одной формы представления математической модели к другой сопровождается многочисленными примерами с использованием системы инженерных и научных расчетов MATLAB.

Излагаемые в учебном пособии материалы по параметрической идентификации динамических систем ориентированы на получение имитационных математических моделей на основе использования экспериментально – аналитического метода с проведением активных и пассивных физических экспериментов с исследуемым объектом. Активные эксперименты направлены на получение экспериментальных временных и частотных характеристик, пассивные на регистрацию временных рядов входа и выхода системы, получаемых в результате ее нормальной эксплуатации.

По результатам активных экспериментов, с использованием методов идентификации по временным и частотным характеристикам в среде MATLAB создаются линейные динамические модели идентифицируемого объекта. Пассивные эксперименты, оформленные в виде временных рядов входа и выхода объекта, служат основой для получения динамических моделей с использованием корреляционного и рекуррентных методов идентификации.

В учебном пособии затронуты вопросы построения и идентификации математических моделей с использованием аппарата матричных операторов или спектральных методов в ортогональных базисах различных функций.

Краткость изложения материала и многочисленные примеры, иллюстрирующие применение того или иного метода моделирования и

идентификации представляются полезными для изучения не только для студентами, но и специалистами в области систем управления.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Адаптивные фильтры / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа . 1986. - 262 с.
3. Альтшуллер С. В. Методы оценки параметров процессов АРСС // Автоматика и телемеханика. – 1982. – N8. – С. 5–18.
4. Ахизер Н.И., Глазман И.Н. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.- М.: Наука, 1966.-544 с.
5. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
6. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
7. Богданович В. М. Нелинейные искажения в приемно-усилительных устройствах. – М.: Связь, 1980. – 279 с.
8. Бреммер К., Зиферлинг Г. Фильтр Калмана–Бьюси. – М.: Наука, 1982. – 199 с.
9. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
10. Бронштейн И. М., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1980. – 576 с.
11. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг, Дж-О. Эклунд, Г. Дж. Нуссбаумер и др.; Под ред. Т. С. Хуанга: – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
12. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1980. – 624 с.
13. Вариченко Л. В., Лабунец В. Г., Раков М. А. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 248 с.

14. Васильев В. Г., Козаков А. М. Быстрый алгоритм для нелинейной цифровой фильтрации // Автоматизация обработки первичной информации: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1988. – Вып. 13. – С. 8–13.
15. Величкин А. И. Теория дискретной передачи непрерывных сообщений. – М.: Сов. радио, 1970. – 296 с.
16. Верешкин А. Е., Катковник В. Я. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. – М.: Сов. радио, 1973. – 152 с.
17. Власов В. П. Алгоритмы робастной фильтрации // Известия ЛЭТИ. – 1987. – № 36 – С. 17–19.
18. Власов В. П., Мариненко М. А., Рахманкулов А. А. Робастные алгоритмы экстраполяционного восстановления сигналов по зашумленным выборкам // Приборостроение. – 1990. – № 11 – С. 8–14.
19. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 158 с.
20. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
21. Вольterra В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
22. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
23. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
24. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
25. Дьяконов В. Н., Раскоснов М. А. Синтез нелинейных цифровых фильтров Винера для одного класса сигналов и помех // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т. 28. – № 8. – С. 63–69.
26. Закс Ш. Теория статистических выводов – М.: Мир, 1975. – 570 с.
27. Иванов А. И. Быстрая идентификация нелинейных динамических объектов // CD-ROM “Бизнес-игры”. – М.: CD-ROM изд-во “Compact Book Publishing”, 1996. – 226 с.

28. Ивахненко А. Г., Юрачковский Ю. Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. – М.: Радио и связь, 1987. – 120 с.
29. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем / Ю.С. Попков, О.Н. Киселев, Н.П. Петров и др. – М.: Энергия, 1976. – 440 с.
30. Изерман Р. Цифровые системы управления / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
31. Каппелини В., Константиnidис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
32. Кашьян Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. – М.: Мир, 1983. 384 с.
33. Кендал М. Временные ряды. – М.: Радио и связь, 1981. – 198 с.
34. Кини Р., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.
35. Корн Г., Корн М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1982. – 831 с.
36. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.
37. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры: Учебник для вузов. – М.: Физматлит, 1994. – 320 с.
38. Кравченко В. Ф., Рвачев В. А. “Wavelet”-системы и их применение в обработке сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. – 1996. – № 4. – С. 3–20.
39. Крамер Г. Математические методы статистики – М.: Мир, 1975. – 648 с
40. Крот А. М. Дискретные модели динамических систем на основе полиномиальной алгебры. – Минск: Наука и техника, 1990. – 312 с.
41. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства.- М.: Наука. – 1976. 184 с.

42. Кухарев Г. А. Основные теоремы сдвига, свертки и корреляции для задач цифровой обработки сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т. 28. – № 8. – С. 26–31.
43. Лабунец В. Г. Алгебраическая теория сигналов и систем (цифровая обработка сигналов). – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1984. – 244 с.
44. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. – 280 с.
45. Ланнэ А. А. Синтез систем нелинейной цифровой обработки сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1985. – Т. 28. – № 8. – С. 7–17.
46. Лычак М. М., Бровдий Н. К. О воспроизведении случайных процессов с помощью ЦВМ // Кибернетика и вычислительная техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1977. – Вып. 38. – С. 99–103.
47. Макклеллан Дж.Г., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов / Под ред. Ю.И. Манина. – М.: Радио и связь, 1983. – 264 с.
48. Мармарелис П., Мармарелис В. Анализ физиологических систем. Метод белого шума. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
49. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т1: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / под ред Н.Д. Егупова. - М.: Изд-во МГТУ им Баумана, 2000. – 736 с.
50. Мизин И. А, Матвеев А. А. Цифровые фильтры (анализ, синтез, реализация с использованием ЭВМ). – М: Связь, 1979. – 240 с.
51. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. – М.: Радио и связь. – 1983. – 304 с.
52. Музыкин С. Н., Родионова Ю. М. Моделирование динамических систем. – Ярославль: Верх.-Волж. кн. изд-во, 1984. – 304 с.
53. Нараян С. Ш., Питерсон А. М. Алгоритм наименьшего среднего квадрата ошибки в частотной области // ТИИЭР. – 1981.–Т. 69. – № 1. – С. 142–143.

54. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
55. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
56. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1979. – 416 с.
57. Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. – М.: Машиностроение, 1965. – 360 с.
58. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1983. – 322 с.
59. Петровский А. А. Методы и микропроцессорные средства обработки широкополосных и быстропротекающих процессов в реальном масштабе времени / Под ред. Г.В. Римского. – Минск: Наука и техника, 1988. – 272 с.
60. Пойда В. Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. – Минск: Наука и техника, 1978. – 136 с.
61. Применение цифровой обработки сигналов / Под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980. – 552 с.
62. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. В 2 кн. – М.: Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с. Кн. 2. – 480 с.
63. Пузырев В. А. Самонастраивающиеся микропроцессорные регуляторы – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 216 с.
64. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
65. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
66. Рампони Дж. Расчет изотропных характеристик квадратичных фильтров методом двухимпульсной характеристики // ТИИЭР. – 1990. – Т. 78. – № 4. – С. 96–108.

67. Саридис Дж. Самоорганизующиеся стохастические системы управления. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 400 с.
68. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
69. Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1989. – 472 с.
70. Сергеев Н. П., Щербаков М. А. Оценка эффективности алгоритмов реализации цифровых нелинейных фильтров // Вычислительная техника в автоматизированных системах контроля и управления: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1981. – Вып. 11. – С. 40–45.
71. Систолические структуры / Под. ред. У. Мура, Э. Маккейба, Р. Уркхарта. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
72. Смоляк С. А., Титаренко Б. П. Устойчивые методы оценивания. – М.: Статистика, 1980. – 208 с.
73. Современные методы идентификации систем / Под ред. П. М. Эйкхоффа. М. Мир, 1983. – 400 с.
74. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егунов Н. Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 440 с.
75. Спици К., Браун Р., Гудвин Дж. Теория управления (идентификация и оптимальное управление). – М: Мир, 1973. – 248 с.
76. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
77. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
78. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
79. Форсайт Дж., Мальколм М., Моулер Х. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1968. – 230 с.

80. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. – М.: Сов. радио, 1980. – 224 с.
81. Хубер Дж. П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
82. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984. – 320 с.
83. Шетсен М. Моделирование нелинейных систем на основе теории Винера // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69. – № 12. – С. 44–62.
84. Щербаков М. А. Винеровский анализ нелинейных систем с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье // Автоматизация процессов обработки первичной информации: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1980. – Вып. 6. – С. 86 – 90.
85. Щербаков М. А. Идентификация дискретных нелинейных систем при псевдослучайных воздействиях // Автоматика. – 1983. – № 4. – С. 18–27.
86. Щербаков М. А. Алгоритм вычисления ядер Винера нелинейных систем в частотной области // Кибернетика и вычислительная техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1988. – Вып. 79. – С. 51–58.
87. Щербаков М. А. Идентификация нелинейных систем по дискретным данным с применением рядов Вольтерра – Винера // Кибернетика и вычислительная техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – Вып. 83. – С. 49–53.
88. Щербаков М. А. Полиномиальные алгоритмы адаптивной нелинейной фильтрации // Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов. Тез. докл. Всесоюз. конф. СИАР-89. – Рига, 1989. – Т. 1. – С. 294–296.
89. Щербаков М. А. Исследование статистических оценок ядер Винера в частотной области // Кибернетика и вычислительная техника: Респ. межвед. сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1991. – Вып. 89. – С. 19–26.
90. Щербаков М. А. Нейронная сеть для обнаружения перепадов в зашумленных изображениях // Тр. Междунар. науч.-техн. конф.

“Непрерывнологические и нейронные сети и модели”. Т. 1. Нейронные сети и модели. – Ульяновск, 1995. – С. 69.

91. Щербаков М. А. Многокритериальный синтез цифровых фильтров Вольтерра // Тез. докл. XI Междунар. конф. по проблемам теоретической кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского. – Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. – С. 210.

92. Щербаков М. А. Искусственные нейронные сети: Конспект лекций. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1996. – 44 с.

93. Щербаков М. А. Параллельная реализация цифровых фильтров Вольтерра в частотной области // Автоматика и вычислительная техника. – 1996. – № 6. – С. 35–44.

94. Щербаков М. А. Синтез оптимальных полиномиальных фильтров по нескольким критериям // Автоматика и вычислительная техника. – 1997. – № 2. – С. 41–52.

95. Shcherbakov M. A. A Parallel Architecture for Adaptive Frequency-Domain Volterra Filtering // Proc. 1996 IEEE Digital Signal Processing Workshop. – Loen, Norway, Sept. 1996. – P. 203–206.

96. Shcherbakov M. A. Pareto Optimal Nonlinear Filters for Image Enhancement // Proc. 1996 IEEE International Conference on Image Processing. – Lausanne, Switzerland, Sept. 1996. – P. 769–772.

97. Shcherbakov M. A. Fast estimation of Wiener kernels of nonlinear systems in the frequency domain // Proc. of the 1997 IEEE Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics. – Banff, Canada, July 1997. – P. 117–121.

98. Shcherbakov M. A. Statistical identification of kernels of discrete nonlinear systems // Radioengineering, Proc. of Czech and Slovak Technical Universities and URSI Committee. – 1997. – 1. – P. 16–19.

99. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 683 с.



100. Юсупов П. М. Элементы теории идентификации технических объектов. – М.: Изд-во МО СССР, 1974. – 202 с.
101. Ярославский Л. П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: введение в цифровую оптику. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
102. Agazzi O., Messerschmitt D. G., Hodges D. A. Nonlinear echo cancellation of data signal // IEEE Trans. on Communications. – 1982. – V. 30. – <sup>1</sup> 11. – P. 2421–2433.
103. Alper P. A consideration of the discrete Volterra series // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1965. – V. 10. – P. 322–327.
104. Barret J. F. The use of functionals in the analysis of nonlinear physical systems // Journal of Electronics and Control. – 1963. – V. 15. – P. 567–615.
105. Bigliery E. Theory of Volterra processors and some applications. // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing. – Paris, 1982. – P. 294–297.
106. Biglieri E., Gersho A., Gitlin R. D., Lim T. L. Adaptive cancellation of nonlinear intersymbol interference for voiceband transmission // IEEE Journal on Select. Areas in Communication. – 1984. – V.2. – <sup>1</sup> 5. – P. 765 –777.
107. Frank W. A. An efficient approximation to the quadratic Volterra filter and its application in real-time loudspeaker linearization // Signal Processing. – 1995. – V. 45. – <sup>1</sup> 1. – P. 97–113.
108. French A. S., Butz E. G. Measuring the Wiener kernels of nonlinear system using fast Fourier algorithm // Int. Journal of Control. – 1973. – <sup>1</sup> 3. – P. 529–539.
109. Gabor D., Wilby W. P. L., Woodcock. A universal nonlinear filter, simulator and predictor which optimizes itself by learning process // IEE Proc. – 1961. – V. 108. – Part B. – P. 422–433.
110. Glavina R., Cucchi S., Sicuranza G. L. Nonlinear interpolation of TV image sequences // Electron. Lett. – 1987. – V. 23. – <sup>1</sup> 15. – P. 778–780.

111. Heredia E. A., Arce G. R. Piecewise Volterra filters based on the threshold decomposition operator // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Atlanta, 1996.

112. Kadyrov A., Tkacheva O., Shcherbakov M. A. A novel approach for recognition of images and their orientation // Fourth IMA International Conference on Mathematics in Signal Processing: Conference Digest, University of Warwick, UK, 1996. – Part 2. – P. 9–12.

113. Êaiser J. F. On a simple algorithm to calculate the ‘energy’ of a signal // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Albuquerque, April, 1991. – P. 381–384.

114. Kroeker J. P. Wiener analysis of nonlinear systems using Poisson-Charlier crosscorrelation // Biol. Cybernetics. – 1977. – V. 27. – <sup>1</sup> 4. – P. 221–227.

115. Larsen J. Design of neural network filters. Ph.D thesis. Technical University of Denmark, 1996. – 427 p.

116. Lasenby J., Fitzgerald W. J. Entropic Volterra classifier (EVC) for use in data classification // Electron. Lett. – 1994. – V. 30. – <sup>1</sup> 1. – P. 53–54.

117. Lee Y. W., Schetzen M. Measurement of the Wiener kernels of nonlinear system by crosscorrelation // Int. Journal of Control. – 1965. – V. 2. – P. 237–254.

118. Mansour D., Gray A. H. Frequency domain non-linear adaptive filter // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Atlanta, 1981. – P. 550–553.

119. Mertzios B. G. Parallel modeling and structure of nonlinear Volterra discrete systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems. – 1994.– V. 41.– <sup>1</sup> 5.– P. 359–371.

120. Mitra S. K., Li H., Lin I. S., Yu T.-H. A new class of nonlinear filters for image enhancement // Proc. IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing, Toronto, Canada, 1991. – P. 2525 –2528.

121. Nissinen A. S., Koivisto H. Identification of multivariate Volterra series using genetic algorithms // Proc. Second Nordic Workshop on Genetic Algorithms and their Applications. –Vaasa, Finland, Aug. 1996. – P. 151–162.
122. Nowak R. D. Wavelet-based transformations for nonlinear signal processing // IEEE Trans. on Signal Processing. – 1997. – <sup>1</sup> 2.
123. Nussbaumer H. J. Fast polynomial transform algorithms for digital convolution // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing. – 1980. – V. 28. – <sup>1</sup> 2. – P. 205–215.
124. Palmieri F., Boucelet C. G. Frequency analysis and synthesis of a class of nonlinear filters // IEEE Trans. on Acoust., Speech and Signal Processing. – 1990. – V. 38. – <sup>1</sup> 8. – P. 1363–1372.
125. Papoulis A. Minimum bias window for high-resolution spectral estimates // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1973. – V. 19. – <sup>1</sup> 1. – P. 9–12.
126. Peyton-Jones J. C., Billings S. A. Describing functions, Volterra series, and the analysis of non-linear systems in the frequency domain // Int. Journal of Control. –1991. – V. 53. – <sup>1</sup> 4. – P. 871–887.
127. Picinbono B., Duvaut P. Geometric properties of optimal Volterra filters for signal detection // IEEE Trans. on Information Theory. – 1990. – V. 36. – <sup>1</sup> 5. – P. 1061–1068.
128. Pitas I., Venetsanopoulos A. N. Nonlinear digital filters: principles and applications. – Kluwer Academic Publishers, 1990. – 391 p.
129. Pottmann M., Unbehauen H., Seborg D. E. Application of general multi-model approach for identification of highly nonlinear processes – a case study // Int. Journal of Control. – 1993. – V. 57. – <sup>1</sup> 1. – P. 97–120.
130. Ramponi G. F. Edge extraction by class of second-order nonlinear filters // Electron. Lett. – 1986. – V. 22. – <sup>1</sup> 8. – P. 482–484.
131. Ramponi G. F., Sicuranza G. L., Ukovich W. A computational method for the design of 2-D nonlinear Volterra filters // IEEE Trans. on Circuits and Systems. – 1988. – V. 35. – <sup>1</sup> 9. – P. 1095–1102.

132. Ramponi G. F., Fontanot P. Enhancing document images with a quadratic filter // *Signal Processing*. – 1993. – V. 33. – <sup>1</sup> 1. – P. 23–34.
133. Rugh W. J. *Nonlinear System Theory. The Volterra/Wiener Approach*. – Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press, 1981. – 325 p.
134. Schetzen M. *The Volterra and Wiener theory of nonlinear systems*. – New York: John Wiley, 1980. – 527 p.
135. Schulz-Mirbach H. *The Volterra theory of nonlinear systems and algorithms for construction of invariant image features*. Tech. report. Technical University of Hamburg-Harburg, October 1996. – 12 p.
136. Sicuranza G. L., Ramponi G. Theory and realization of M-D nonlinear digital filters // *Proc. of the IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Processing*, Tokyo, Japan, Apr. 1986. – P. 1061–1064.
137. Stapleton J. C., Bass S. C. Adaptive noise cancellation for a class of nonlinear, dynamic reference channels // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. – 1985. – V. 35. – <sup>1</sup> 2. – P. 143–150.
138. Uppala S. V., Sahr J. D. On the design of the quadratic filters with application to image processing // *IEEE Trans. on Image Processing*. – 1997. – V. 6. – <sup>1</sup> 4. – P. 608–616.
139. Yasui S. Stochastic functional Fourier series, Volterra series, and nonlinear systems analysis // *IEEE Trans. on Automatic Control*. – 1979. – V. 24. – <sup>1</sup> 2. – P. 230–242.
140. Yin L., Astola J., Neuvo Y. A new class of nonlinear filters-neural filters // *IEEE Trans. on Signal Processing*. – 1993. – V. 41. – <sup>1</sup> 3. – P. 1201–1222.
141. Zaknich A., Attikiouzel Y. Application of artificial neural networks to nonlinear signal processing, *Computational Intelligence: A dynamic System Perspective* // IEEE Press, November, 1995. – P. 292–311.