O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS
TA`LIM VAZIRLIGI

TO`LAYEV BEKMUROT,
YELIN YEVGENIY ALEKSANDROVICH,
DAMINOV OYBEK OLIMOVICH,
XAKIMOV JAMSHID OKTYAMOVISH

LOYIHALASH JARAYONLARINI AVTOMATLASHTIRISH ASOSLARI

HISOBIY LOYIHALARNI MathCADda BAJARISH

500000 – «Muhandislik, ishlov berish va qurilish tarmoqlari» ta`lim sohasi yo`nalishlari talabalari uchun o`quv qo`llanma

TOSHKENT 2009

UDK 681.3

A n n o t a t s i y a

«Loyihalash jarayonlarini avtomatlashtirish asoslari: Hisobiy loyihalarni MathCADda bajarish» o`quv qo`llanmada MathCAD haqida umumiy ma`lumot; MathCADda algebraik hisoblashlar; MathCADda differensiallash; MathCADda integrallash masalalari ko`rilgan. Qo`llanmada misollar, nazorat savollari hamda tavsiya etiladigan o`quv va uslubiy adabiyotlar ro`yxati keltirilgan.

А н н о т а ц и я

В данном учебном пособии рассмотрены основные сведения о MathCAD; алгебраические вычисления на MathCAD; дифференцирование на MathCAD; интегрирование на MathCAD. В частности, приведены примеры, а также контрольные вопросы, список рекомендуемой учебной и методической литературы.

T h e   s u m m a r y

In the given manual the basic data about MathCAD are considered; algebraic calculations on MathCAD; differentiation on MathCAD; integration on MathCAD. In particular, examples, and also control questions, the list of the recommended educational and methodical literature are resulted.

Taqrizchilar: t.f.d., dots. Bazarov B.I. (TAYI);
t.f.d., prof. Mamadjanov A.M. (ToshDTU)

1 – BOB. MATHCAD HAQIDA UMUMIY MA`LUMOT

1.1. Mathcad bilan tanishuv

Mathcad matematik redaktor bo‘lib, u elementar matematikadan boshlab, to murakkab sonli-raqamli metodlargacha bo‘lgan turli ilmiy va muhandislik hisoblarini bajarish imkonini beradi. Dasturaviy ta`minot tasnifi nuqtayi-nazaridan Mathcad paketi – bu PSE-ilovalar sinfining namunaviy vakilidir. Mathcaddan foydalanuvchilar – talabalar, olimlar, muhandislar, har xil sohalardagi texnikaviy mutaxassislar va matematik hisoblarni bajaruvchilarning hammasidir. Qo‘llash osonligi, matematik amallarning ko‘rgazmaliligi hamda natijalarni tadqiqot etishning ajoyib apparati (har xil turdagi grafiklar, chop qilinadigan hujjatlarni tayyorlovchi keng imkoniyatli vositalar va Web-sahifalar) tufayli Mathcad eng keng tarqalgan matematik ilova bo‘lib qoldi.

1.1.1. Mathcad vazifasi

*Mathcad tarkibi*ga bir nechta o‘zaro integrallashgan komponent (tashkil etuvchilar) kiradi:

- *baquvvat matn redaktori*; u ham matn va ham matematik ifodalarni kiritish, muharrirlash va formallashtirish imkonini beradi;
- *hisoblovchi protsessor*; u sonli-raqamli metodlardan foydalanib kiritilgan formulalar bo‘yicha hisoblarni bajarishni biladi;
- *simvolli protsessor*; u analitik hisoblarni bajarish imkonini beradi va amalda sun`iy intellekt tizimi vazifasini bajaradi;
- interaktiv elektron kitob sifatida shakllantirilgan, ham matematik va ham muhandis ma`lumotnoma informatsiyasining saqlanadigan katta joyi (ombori)dir.

Boshqa zamonaviy matematik ilovalardan farqli ravishda Mathcadning o‘ziga xos xususiyati shundaki, u – WYSIWYG ("What You See Is What You Get" — "Nimani ko‘rayotgan bo‘lsangiz, shuni olasiz"). Shu sababli undan foydalanish juda oson, xususan, dastlab u yoki bu matematik hisoblarni amalga oshiruvchi dasturlarni yozish, so‘ngra esa bu dasturni bajarish uchun buyruq berishning hojati yo‘q. Buning o‘rniga o‘rnatilgan formulalar redaktori yordamida matematik ifodalarni umumqabul qilinganga maksimal yaqinlashtirilgan ko‘rinishda oddiy kiritishning o‘zi kifoya, shu zahoti natija olinadi. Bundan tashqari printerda hujjatning chop qilingan nusxasini tayyorlash yoki Mathcad bilan ishlaganda kompyuter ekranida hujjat qanday ko‘rinishda bo‘lsa, Internetda aynan o‘sha ko‘rinishdagi sahifa yaratish yoki hujjatni Mathcadning elektron kitobi strukturasiga kiritish mumkin.

Real hayotdagi muammolarga qarab, *matematiklarga* quyidagi *masalalarning birini yoki bir nechtasini yechishga to‘g‘ri keladi*:

- kompyuterga turli matematik ifodalarni kiritish (keyinchalik bajariladigan hisoblar yoki hujjatlarni yaratish, prezentatsiyalar, Web-sahifalar yoki elektron kitoblarni yaratish uchun);
- matematik (ham analitik va ham sonli-raqamli metodlar yordamida) hisoblarni bajarish;
- hisob natijalarini va bu natijalar bo‘yicha bilan grafiklarni tayyorlash;
- boshlang‘ich ma`lumotlarni kiritish va natijalarni matnli fayllarda yoki ma`lumotlar bazasili fayllarni boshqa formatlarda chiqarish;
- ish hisobotlarini chop etilgan hujjatlar ko‘rinishida tayyorlash;
- Web-sahifalarni tayyorlash va natijalarni Internetda e`lon qilish;
- matematika sohasidagi turli informatsiyalarni ma`lumot uchun olish.

Mathcadning qo‘shimcha imkoniyatlari:

- matematik ifodalar va matnlar Mathcad formula redaktori yordamida kiritiladi, uning imkoniyatlari va undan foydalanish osonligi Microsoft Wordda o‘rnatilgan formulalar redaktoridan kam emas;
- matematik hisoblar, kiritilgan formulalarga binoan, o‘sha zahoti bajariladi;
- formatlanish imkoniyatlari boy bo‘lgan har xil turdagi grafiklar (foydalanuvchining tanlovi bo‘yicha) bevosita hujjatlarga kiritiladi;
- ma`lumotlarni turli formatlardagi fayllarga kiritish va ulardan chiqarish mumkin;
- hujjatlar kompyuter ekranida qanday ko‘rinishda bo‘lsa, o‘sha ko‘rinishda bevosita Mathcadda chop qilinishi yoki keyinchalik ancha quvvatliroq matn redaktorlari (masalan, Microsoft Word)da tahrirlash uchun RTF formatda saqlanishi mumkin;
- Mathcad hujjatlari RTF-hujjatlar formatida, hamda HTML va (12-versiyadan boshlab) XML Web-sahifalarida to‘liq saqlanishi mumkin.

Izoh

12-versiyadan boshlab Mathcad fayllari XMCO formatga ega, ular – matn XML-razmetkasining bir turidir (va 2001-versiyada qo‘llanilgan MathML formatiga qaraganda bir qadam oldinga siljishdir). XML-formatini qo‘llash o‘zini oqlaydi; birinchidan, u qator ilovalar va har xil turdagi ma`lumotlar uchun foydalanilmoqda. Ikkinchidan XML-fayllarining qulayligi shundaki, ulardan Mathcad-hujjatlari bilan boshqa (nazarda tutilgan) ilovalarni, masalan, HTML-eksporti uchun va sh.k.larni, ko‘rib chiqish va manipulyatsiya qilishda foydalanish mumkin. Ularni istalgan matn redaktorida ko‘rib chiqish va «qo‘lda» tahrir qilish mumkin.

12-versiyadan boshlab Mathcad matn XML-razmetkasining ko‘rinishlaridan biri bo‘lgan *XMSO formatga ega*. XML formati, birinchidan, bir qator ilovalar va har xil turdagi ma`lumotlar uchun umumfoydalaniladigan bo‘lib bormoqda. Ikkinchidan, Mathcad-hujjatlari bilan boshqa ilovalarni ko‘rib chiqish va ular bilan manipulyatsiya qilish imkonini beradi. Bundagi *qo‘shimcha imkoniyatlar*:

- Siz ishlayotgan hujjatlarni elektron kitobga birlashtiruvchi opsiya mavjud, u matematik informatsiyani qulay ko‘rinishda saqlash imkonini beradi hamda hisoblarni bajarish qobiliyatiga ega bo‘lgan to‘laqonli Mathcad-dasturidir;
- simvolli hisoblar analitik o‘zgartirishlarni amalga oshirish hamda turli matematik informatsiyalarni ma`lumot uchun bir onda olish imkonini beradi;
- elektron kitoblar ko‘rinishida shakllantirilgan ma`lumotnoma tizimi (Mathcad Resurslari) zarur bo‘lgan matematik informatsiyani yoki u yoki bu hisoblar misollarini tez topishda yordam beradi.

Qisqa xulosalar

Mathcad tarkibiga bir nechta o‘zaro integrallashgan komponentlar kiradi; bu:

– matnlarni va formulalarni kiritish va tuzatish uchun baquvvat *matn redaktori*;

– kiritilgan formulalarga muvofiq hisoblarni amalga oshirish uchun *hisoblovchi protsessor*;

- mohiyati bo‘yicha sun`iy intellekt tizimi bo‘lgan – *simvolli protsessordir*;

– bu komponentlar majmui turli matematik hisoblashlar va shu vaqtning o‘zida ish natijalarini hujjatlashtirish uchun qulay hisoblash muhitini yaratadi.

1.1.2. Foydalanuvchi interfeys

Mathcad kompyuterga o‘rnatilgandan va ishga tushirilgandan keyin ilovaning asosiy darchasi ekranda paydo bo‘ladi (1.1-rasm). *Uning strukturasi Windows* *ilovalarining ko'pchiligi bilan bir xil*. Darcha sarlavhasi, menyu qatori (stroka), instrumentlar paneli (standart va formatlashtirilgan) va hujjatning ishchi varag'i yoinki ishchi jabhasi (worksheet) yuqoridan pastga qarab joylashadi. Mathcad ishga tushirilganda yangi hujjat avtomatik ravishda yaratiladi.

Shunday qilib, Mathcad foydalanuvchisining interfeysi Windowsning boshqa ilovalariga o'xshash, ya`ni Mathcad redaktori oddiy matn redaktorlariga yaqin (bundan Siz instrumentlar panelidagi ko'p knopkalar vazifasini intuitiv ravishda tushunib olasiz).

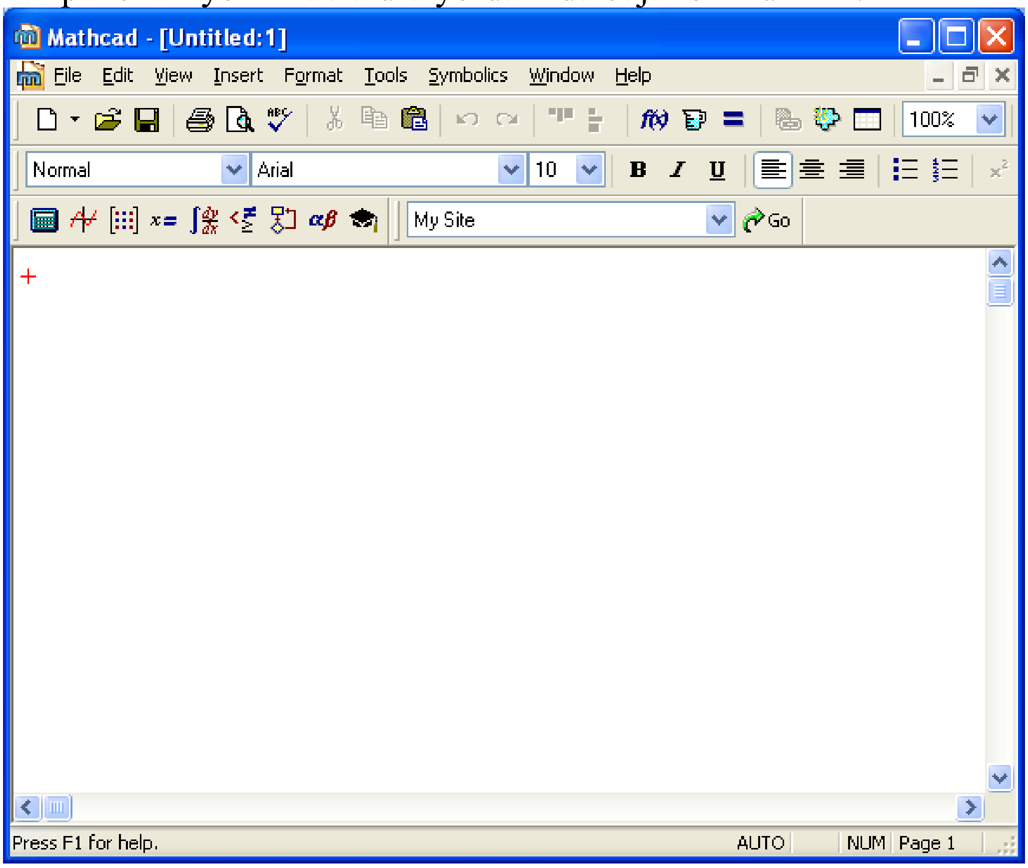
Odatdagi matn redaktori uchun xarakterli bo'lgan boshqaruv elementlaridan tashqari, *Mathcad* matematik simvollarni kiritish va tahrir qilish uchun *qo'shimcha vositalar bilan ta`minlangan*, Math (matematika) instrumentlar paneli – ulardan biridir (1.1-rasm). Ushbu va yana bir nechta yordamchi teruvchi panellar yordamida tenglamalarni kiritish qulay.

Qisqa xulosalar

Mathcaddan foydalanuvchi interfeysining tarkibiy elementlari:

- yuqorigi menyu yoki menyu qatori (menu bar);
- Standard (Standart), Formatting (Formatlash), Resources (Resurslar) va Controls (Boshqaruv elementlari) instrumentlari paneli;
- Math (Matematika) instrumentlar paneli va u orqali mumkin bo'ladigan instrumentlarning qo'shimcha matematik paneli;
- ishchi jabha (worksheet);
- suzib chiqadigan yoki kontekstli menyu (pop-up menus yoki context menus);
- dialog darchalari yoki dialoglar (dialogs);
- o'rnatilgan misollar va qo'shimcha informatsiyali Mathcad resurslari (Mathcad Resources) darchasi.

Komandalarning ko'p qismini ham (yuqorigi yoki kontekstli) menyu va ham instrumentlar panellari yoki klaviatura yordamida bajarish mumkin.



1.1-rasm. Bo'sh hujjatli Mathcad 12 ilovasining darchasi

1.1.3. Instrumentlar panellari

Instrumentlar paneli eng ko‘p ishlatiladigan komandalarni juda tez (sichqonchaning bitta shiqillashida) bajarish uchun xizmat qiladi. Instrumentlar panellari yordamida bajarish mumkin bo‘lgan amallarning hammasini yuqorigi menyu orqali ham bajarish mumkin. 1.2-rasmda Mathcad darchasi instrumentlarning asosiy panellari (ulardan uchtasi bevosita menyu qatori ostida joylashgan) hamda qo‘shimcha matematik panellar (ular haqida keyinroq to‘xtaymiz) bilan tasvirlangan.

Asosiy panellar:

- **Standard (Standart)** – fayllar bilan amallar, redaktor tuzatishi, obyektlarni kiritib qo‘yish (вставка) va ma`lumotnoma tizimlariga kirish kabi ko‘p operatsiyalarni bajarish uchun xizmat qiladi;
- **Formatting (Formatlash)** – matn va formulalarni formatlash uchun;
- *Math (Matematika)* – hujjatlarga matematik simvollar va operatsiyalarni kiritish uchun;
- **Resources (Resurslar)** – Mathcad resurslari (elektron kitoblar, misollar, darsliklar va h.k.)ni tez chaqirish uchun;
- **Controls (Boshqaruv elementlari)** – hujjatlarga foydalanuvchi interfeysini boshqaruvchi standartlashtirilgan elementlarni kiritish uchun (1.1- va 1.2-rasmlarda bu panel ko‘rsatilmagan).

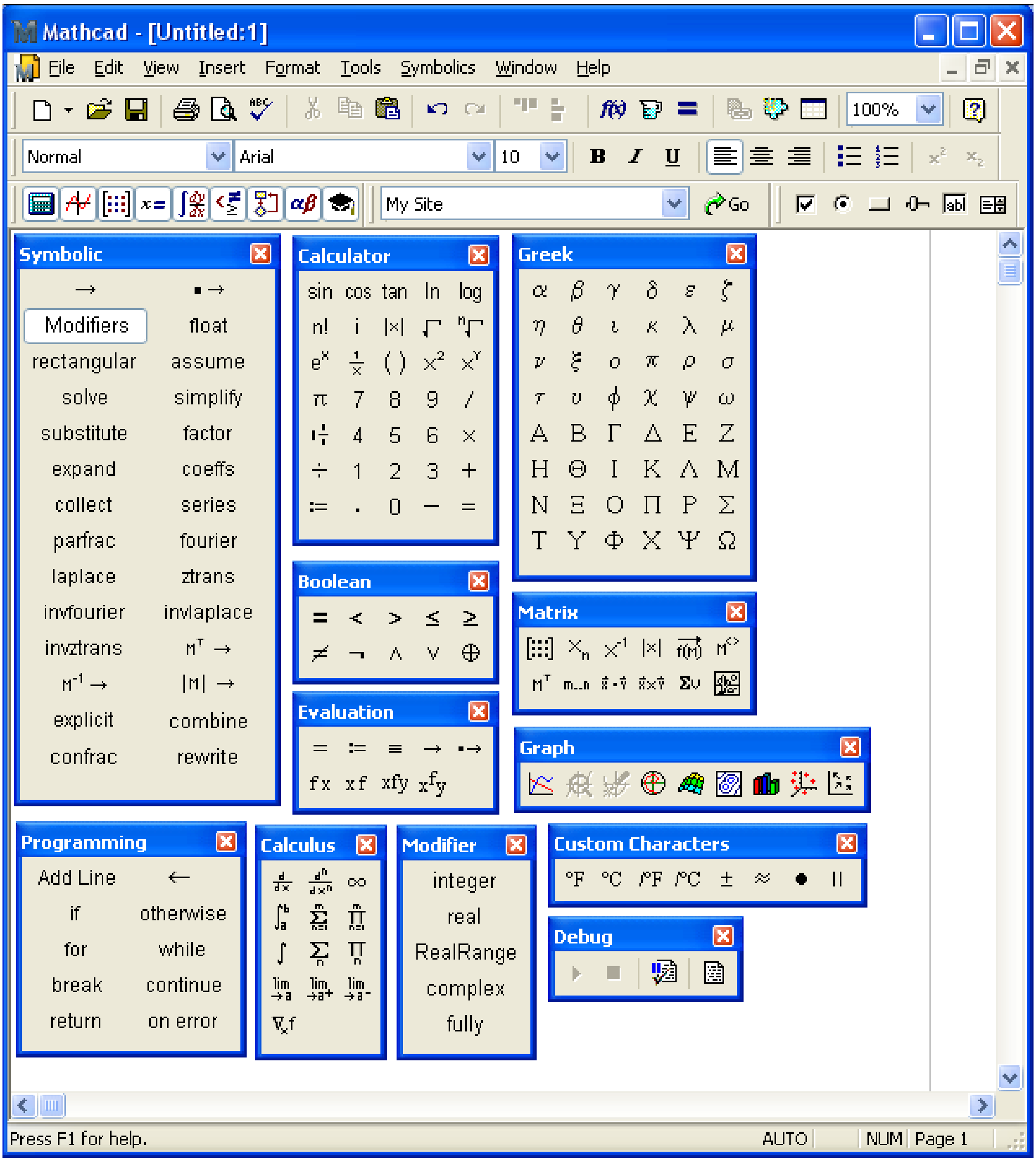
Instrumentlar panellaridagi knopkalar guruhlari ma`nosi bo‘yicha vertikal chiziqlar – ajratkichlar bilan chegaralangan. Sichqon ko‘rsatkichi istalgan knopkalardan biriga keltirilganda knopka yonida yo‘riq – knopka vazifasini tushuntiruvchi qisqacha matn suzib chiqadi. Bundan tashqari «holat qatori»da tayyorlanayotgan operatsiya bo‘yicha batafsil tushuntiruvchi ma`lumot olish mumkin.

Math (Matematika) paneli ekranga yana to‘qqizta panellarni (1.2-rasm) chaqirish uchun mo‘ljallangan; ular yordamida hujjatlarga matematik operatsiyalar kiritilishi amalga oshiriladi. Bu panellardan birini ekranga chaqirish uchun Math panelidagi mos knopka bosiladi.

Matematik panellarning vazifalari:

- **Calculator (Kalkulyator)** – asosiy matematik operatsiyalarni kiritib o‘rnatish uchun xizmat qiladi, knopkalarning majmui kalkulyator knopkalariga o‘xshashligi sababli shu nomni olgan;
- **Graph (Grafik)** – grafiklarni kiritib o‘rnatish uchun;
- **Matrix (Matritsa)** – matritsalar va matritsa operatorlarini kiritib o‘rnatish uchun;
- **Evaluation (Ifodalar)** – hisoblarni boshqaruvchi operatorlarni kiritib o‘rnatish uchun;
- **Calculus (Hisoblashlar)** – integrallash, differensiallash va summalash operatorlarini kiritish uchun;
- **Boolean (Bul operatorlari)** – mantiqiy (Bul) operatorlarini kiritish uchun;
- **Programming (Dasturlash)** – Mathcad vositalari yordamida dasturlash uchun;
- **Greek (Grek simvollari)** – grek simvollarini kiritish uchun;
- **Symbolic (Simvolika)** – simvol operatorlarini o‘rnatish uchun.

Sichqon ko‘rsatkichi matematik panellarning ko‘piga keltirilganda izohlovchi yo‘riq suzib chiqadi, unda qizigan (горячие) klavishlar to‘plami ham bo‘ladi, ulardan biri bosilganda ekvivalent amal bajariladi. Amallarni klaviatura orqali kiritish instrumentlar panellaridagi knopkalarni bosishga qaraganda qulay, lekin bunda katta tajriba talab qilinadi.



1.2-rasm. Instrumentlarning asosiy va matematik panellari

View (Tur) menyusidagi Toolbars (Instrumentlar paneli) punkti yordamida istalgan panelni ekranga chaqirish yoki ekrandan yopish mumkin, bunda ochilayotgan nimmenyuda zarur bo‘lgan panelning nomi tanlanadi. Istalgan panelni ekrandan kontekstli menyu vositasida yopish mumkin, buning uchun panelning istalgan joyida sichqonning o‘ng knopkasi bosiladi. Kontekstli menyuda Hide (Berkitish) punktini tanlash lozim. Bundan tashqari panel suzuvchi, asosiy darchaga birkitib qo‘yilgan bo‘lsa (masalan, 1.2-rasmdagi barcha panellar kabi), uni yopish knopkasi yordamida uzib qo‘yish mumkin.

Izoh

Keyinchalik menyu yordamida u yoki bu harakatni amalga oshirish haqida gap ketganda, menyu punktlarini tanlash ketma-ketligi qisqartirilib, ular bir-biridan og‘gan chiziq bilan ajratib yoziladi. Masalan, View menyusining Toolbars punkti quyidagicha belgilanadi: Toolbars / View.

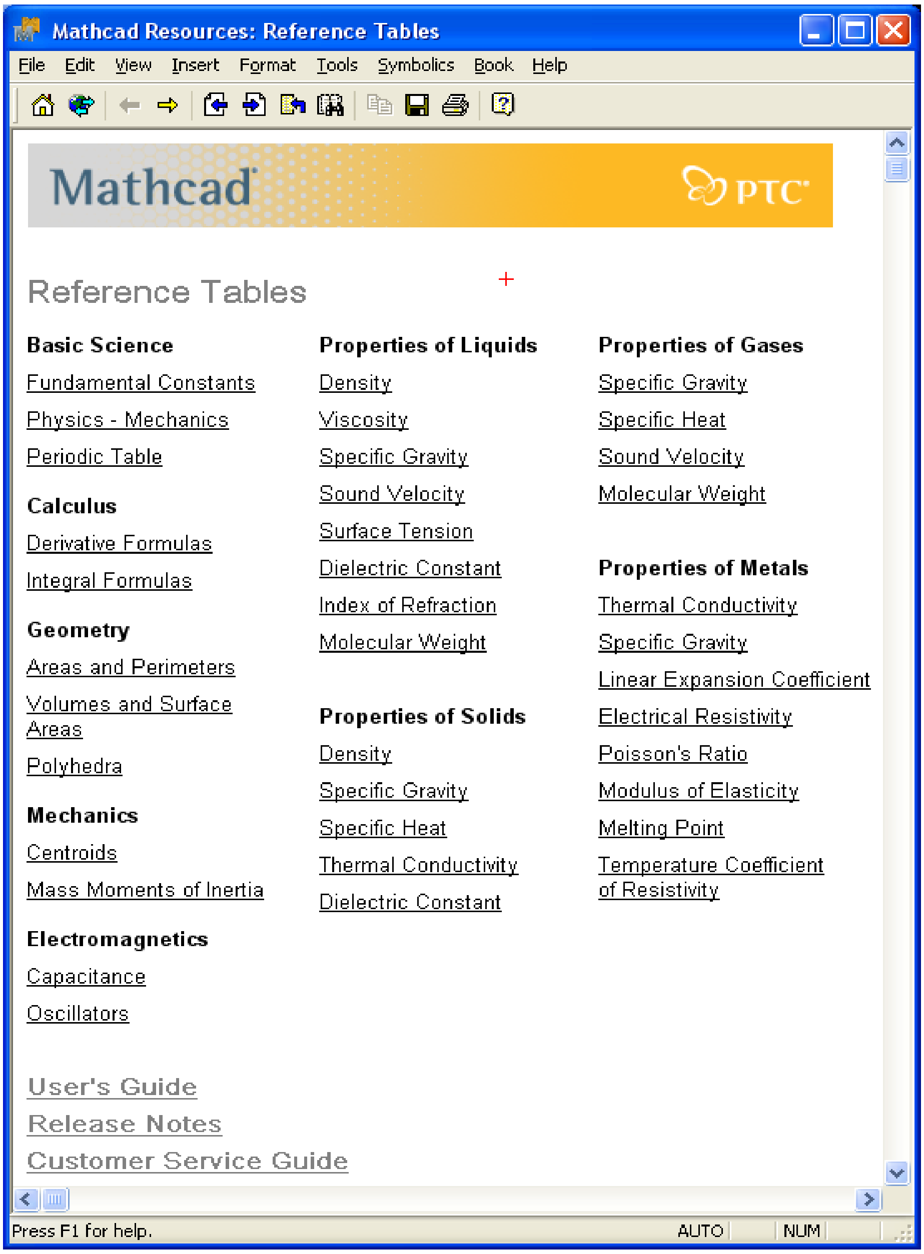
Matematik panellarni, asosiy panellardan farqli o‘laroq, Math (Matematika) panelining mos knopkasini bosib chaqirib olish yoki berkitish mumkin. Matematik panellarning mavjudligi yoki mavjud emasligi 1.2-rasmda mos knopkaning bosilgan (yoki qo‘yib yuborilgan) holatida ko‘rsatilgan.

Ushbu bobning ba`zi rasmlarida (masalan, 1.1-rasm) kiritish kursori kichik xoch (крест) shaklida ko‘rinadi. Uning yordamida hujjatdagi to‘ldirilmagan joy belgilanadi, bu joyga ushbu onda formula yoki matn kiritilishi mumkin. Kursorni silkitish uchun talab qilingan joyda sichqon ko‘rsatkichini bosish kifoya yoki u klavisha – strelkalar orqali siljitiladi. Agar formula jabhasida bosish bajarilsa yoki bo‘sh joyda ifoda kirita boshlansa, kursor o‘rniga tahrirlash chizig‘i paydo bo‘ladi, u ushbu onda tahrirlanadigan formula yoki matndagi o‘rnini belgilaydi (1.5- va 1.6-rasmlar).

1.1.4. Ma`lumot uchun informatsiya

Mathcad bilan birga *ma`lumot uchun informatsiya*ning bir nechta manba`lari yetkaziladi, ularga kirish Help (Ma`lumot) menyusi orqali amalga oshiriladi.
Mathcaddan foydalanish masalalari bo‘yicha ma`lumotnoma tizimi:

- **Mathcad Help (Ma`lumot)** – ma`lumotlar yoki texnikaviy qo‘llab-quvvatlash tizimi;



1.3-rasm. Mathcad resurslari ko‘p miqdordagi ma`lumot va o‘quv informatsiyasiga ega

- **What's This (bu nima?)** – kontekstli-bog‘liq interaktiv ma`lumot;
- **Developer's Reference (Ishlab chiqaruvchilar uchun ma`lumot)** –Mathcad tilida o‘zlarining mustaqil ilovalarini ishlovchilar uchun ma`lumotlarning qo‘shimcha boblari;
- **Author's Reference (Mualliflar uchun ma`lumotlar)** – o‘zlarining Mathcad elektron kitoblarini ishlab chiquvchi mualliflar uchun ma`lumotlarning qo‘shimcha boblari;
- **Mathcad resurslari** – ko‘p matematik misollarning yechimi keltirilgan Mathcad elektron kitobining maxsus formatida tashkil qilingan qo‘shimcha materiallar;
- **Tutorials (Darsliklar)** – Mathcad elektron kitoblari kutubxonasi, unda keltirilgan misollar o‘qitadigan kurslar (boshlang‘ich foydalanuvchilar uchun darslikdan, to professional-matematiklar uchun mo‘ljallangan kitoblargacha) shaklida tuzilgan;
- **QuickSheets (Tezkor shpargalkalar)** – elektron kitoblar ko‘rinishida tashkil qilingan ko‘p sonli Mathcad hujjatlari, ulardan foydalanuvchilar o‘zlarining hisoblari uchun shablon sifatida foydalanishlari mumkin;
- **Reference Tables (Ma`lumotnoma stoli)** – fizik va muhandislik jadvallari; ular o‘z ichiga fundamental konstantalar, kattaliklarni o‘lchash birliklari, moddalarning har xil parametrlari haqidagi ma`lumotlarni qamrab olgan;
- **E-Books (Elektron kitoblar)** – foydalanuvchining mavjud hujjatlar kutubxonasiga, misollarga, Mathcad imkoniyatlarining kengaytirilganligiga bag‘ishlangan qo‘shimcha kiritilgan elektron kitoblarga kirishi.

Qayd etilganlardan tashqari Help (Ma`lumot) menyusining quyidagi bandlari mavjud:

Mathcad Internet tarmog‘ida:

- **User Forums (Forumlar)** – MathSoft kompaniyasining maxsus internet-serveriga ulanish; u Mathcaddan foydalanuvchilarga o‘zaro muloqotda bo‘lish, dasturlar bilan almashish va (bir-biridan hamda ishlab chiquvchilardan) maslahatlar olish imkonini beradi;
- **Mathcad.com** – Mathcad ilovasining rasmiy saytiga o‘tish;
- **Mathcad Update (Mathcad yangilanishi)** – MathSoft firmasi saytini Mathcad yangiliklari mavjudligiga tekshirish;
- **About Mathcad (Dastur haqida)** – Mathcadning joriy versiyasi va uni ishlab chiquvchilar haqidagi ma`lumotlarni informatsion darchaga chiqarish;
- **Register Mathcad (Mathcadni registratsiya qilish)** – dasturni Internet orqali registratsiya qilish.

Mathcad bilan ishlayotgan qaysidir onda Sizga yordam kerak bo‘lib qolsa Help / Mathcad Helpni tanlang yoki <F1> klavishani bosing yoki instrumentlarning standart panelida savol belgisili Help knopkasini bosing. Mathcaddagi ma`lumotlar kontekstga bog‘liq, ya`ni uning mazmuni u hujjatning qaysi joyidan chaqirilganligiga bog‘liq.

Izoh

Yuqorida bayon qilingan gipermatnli ko‘rinishda tuzilgan standart ma`lumotnoma tizimidan tashqari Mathcad foydalanuvchining PDF formatdagi yanada to‘liqroq qo‘llanmasi bilan ham komplektlanadi. Foydalanuvchi qo‘llanmasining PDF-versiyasiga kirish Windows bosh menyusi, ya`ni Start (Пуск – Ishga tushirish) knopkasi, orqali amalga oshiriladi. Bosh menyuning Programs (Программы – Dasturlar) bo‘limida MathSoft kompaniyasi dasturlari guruhini qidirib topish va Mathcad User Guide punktini tanlash lozim.

Qisqa xulosalar

Mathcad ma`lumot tizimi va resurslari nafaqat uning imkoniyatlarini bayon qiluvchi maqolalar va misollardir. Ularni oliy matematikaning bir nechta kurslari bo‘yicha o‘quv qo‘llanmalari deb atash mumkin. U yerda ko‘p operatsiyalarning asosiy ta`riflari va matematik ma`nolari hamda sonli-raqamli metodlarning algoritmlari yoritilgan.

1.2. Mathcadda hisoblash asoslari

Mathcad bilan ishlashni qanday tez boshlash mumkinligini, matematik ifodalarni kiritishni va hisob natijalarini olishni tez o‘rganib olishni namoyish qilamiz.

Diqqat!

O‘quv qo‘llanma mazmunining katta qismi Mathcadning oxirgi to‘rtta versiyalari: 2001, 20011, 11 va 12 ga muvaffaqiyatli qo‘llanilishi mumkin. Agar muayyan opsiyalar faqat ba`zi versiyalargagina qo‘llaniladigan bo‘lsa, bunga mos ko‘rsatma beriladi.

1.2.1. Sonli-raqamli va simvolli chiqarish operatorlari

Formulalar bo‘yicha oddiy hisoblarni bajarish uchun quyidagilarni bajaring:

1. Hujjatda ifoda paydo bo‘ladigan joyni belgilang, ya`ni hujjatning mos nuqtasida sichqonni shiqillating.

2. Ifodaning chap qismini kiriting.

3. Sonli tenglik = (<=> klavisha bilan) yoki simvolli tenglik –> (<Ctrl> + <.> klavishalar bilan) belgisini kiriting. Birinchi holda ifodaning sonli qiymati, ikkinchi holda esa (agar mumkin bo‘lsa) – analitik qiymati hisoblanadi.

Oddiy hisoblarga misollar.

Qandaydir son, masalan, 0 ning arkkosinusini hisoblash uchun klaviaturadan acos(0)= yoki acos(0)–> ifoda kiritilishi yetarli bo‘ladi. Tenglik belgisili klavisha bosilgan (yoki simvolli hisoblashlar belgisi –> kiritilgan) zahoti ifodaning o‘ng tarafida natija paydo bo‘ladi (mos ravishda 1.1- va 1.2-listinglar).

Listing 1.1. Oddiy ifodaning sonli-raqamli hisobi

$$\mathrm{acos}(0) = 1.571$$

Listing 1.2. Oddiy ifodaning analitik hisobi

$$\mathrm{acos}(0) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$$

Misollar

1. $\mathrm{acos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.785$

$\mathrm{acos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\pi$

2. $\cos\left(\pi + \mathrm{acos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) = -0.75$

$\cos\left(\pi + \mathrm{acos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \rightarrow \frac{-3}{4}$

$$3.\ \ 2\,\mathrm{acos}(0) + 3\,\mathrm{acos}(1) = 3.142$$

$$2\,\mathrm{acos}(0) + 3\,\mathrm{acos}(1) \to \pi$$

$$4.\ \sin\left(\mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{acos}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right) = 1$$

$$\sin\left(\mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{acos}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right) \to \sin\left(\mathrm{acos}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{acos}\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

Izoh 1

Bu yerda va bundan keyin o‘quv qo‘lanmaning hammasida listinglarga Mathcad hujjati ishchi jabhasining mazmuni olingan hisoblash natijalari bilan birga chiqarilgan. Ko‘rilayotgan versiyalarning Mathcad darchasida deyarli hamma listinglar bir xil ko‘rinishga ega. Mathcadning faqat yangi imkoniyatlarga ega bo‘lgan u yoki bu versiyalarigina istisnodir (bu holda ular maxsus remarka bilan jihozlanadi).

Izoh 2

Mathcad 12 yangi versiyasining asosiy afzalliklaridan biri – bu dasturning yangi yadrosidir, u hisoblarni katta tezlikda bajarish imkonini beradi. Bu ayniqsa matritsalar va katta o‘lchamli vektorlar hamda kiritib o‘rnatilgan massiv (tenzor)lar bilan hisoblashlarda sezilarli darajada namoyon bo‘ladi. Bunday masalalar uchun Mathcadni ishlab chiquvchilar hisoblash tezligini oldingi versiyalarga nisbatan taxminan uch marta oshirishligini e`lon qilishgan. Bundan tashqari Microsoft kompaniyasining yangi NET texnologiyasi platformasida qurilgan Mathcad arxitekturasi ham dastur ishlashini tezlashtirish borasida ba`zi afzalliklarni beradi.

Indamasdan kelishilganlik bo‘yicha hujjatda hisoblashlar real vaqt rejimida, ya`ni foydalanuvchi formulaga sonli-raqamli yoki simvolli tenglik operatorini kiritgan zahoti Mathcad ushbu ifodani (va bu ifodadan keyin joylashgan formulalarning hammasini) hisoblashga kirishadi. Ba`zan, asosan murakkab va uzoq hisoblarni bajarishda, hisoblashni <Esc> klavishasini bosib to‘xtatish, so‘ngra (kerakli paytda) <F9> klavishasini bosib yoki Tools/Calculate (Сервис/Вычислить – Servis/Hisoblansin) va Tools/Calculate Worksheet (Сервис/Вычислить во всем документе – Servis/Butun hujjat bo‘ylab hisoblansin) komandasi bilan hisoblashni, qayta boshlash foydali bo‘ladi.

Izoh

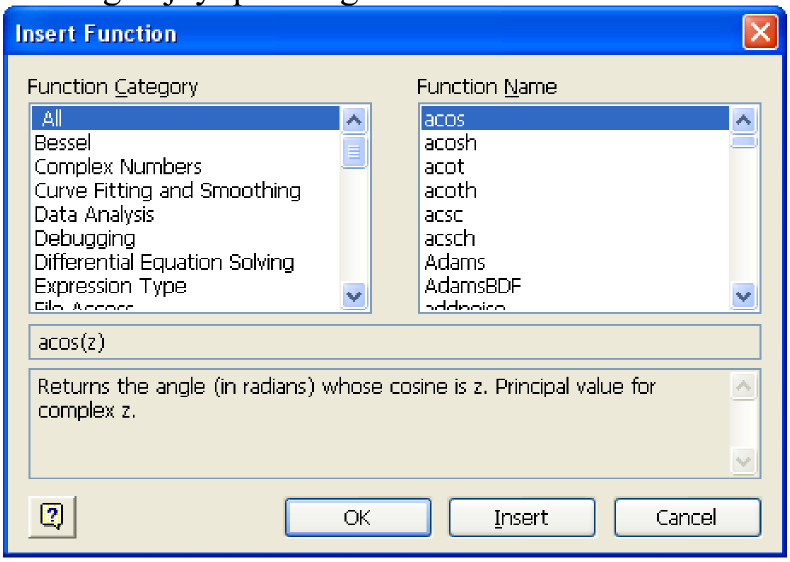
12-versiyaning ahamiyatli yangiliklaridan biri – uning ko‘p oqimliligidir, u bir vaqtning o‘zida hujjatni hisoblash va uni tahrir qilish imkonini beradi. Boshqacha aytganda, Mathcad oldingi versiyalarining noqulayligi bartaraf qilindi, ularda hisoblash rejimida, ya`ni Calculate (Вычислить – Hisoblansin) komandasi kiritilgandan keyin, hujjat ishchi jabhasining hammasini tahrir qilish uchun berkitilgan edi. Lekin Mathcad 12 da hisoblashning eski rejimiga o‘tishning iloji yo‘q va Worksheet options (Опции документа – Hujjat opsiyalari) dialog darchasida Old engine (Старый процессор – Eski protsessor) tekshirish bayroqchasi mavjud emas. Mathcadning faqat eski versiyalari quvvatlaydigan fragmentlarni qo‘llovchi foydalanuvchilarga Mathcad 12 ning yangi talablariga mos ravishda o‘zlarining hujjatlarini qo‘lda to‘g‘rilab chiqishga to‘g‘ri keladi.

1.2.2. Matematik ifodalar va kiritib o‘rnatilgan funksiyalar

Yuqorida bayon qilingan tarzda ancha murakkab va katta hajmli hisoblarni ishlab chiquvchilar tomonidan Mathcad tizimiga kiritib o‘rnatilgan funksiyalarning barcha arsenallaridan foydalanib bajarish mumkin. Eng osoni – kiritib o‘rnatilgan funksiyalar nomini, arkkosinus hisoblangan misoldagi kabi, klaviaturadan kiritishdir, lekin ularni yozishda yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lgan xatoliklarning oldini olish uchun boshqa yo‘lni tanlash ma`qul.

Ifodaga kiritib o‘rnatilgan funksiyani qo‘yish uchun:

1. Ifodada funksiya qo‘yiladigan joyni aniqlang.
2. Instrumentlarning standart panelida f(x) yozuvli knopkani bosing.
3. Paydo bo‘lgan Insert Function (Funksiyani qo‘ying) dialog darchasidagi Function Category (Funksiya kategoriyasi) ro‘yxatidan (1.4-rasm) funksiya kiradigan kategoriyani tanlang – bizning holatda – bu Trigonometric (Trigonometrik) kategoriyadir.
4. Function Name (Funksiya nomi) ro‘yxatidan kiritib Mathcadga o‘rnatilgan funksiyaning nomini tanlang: bizning misolda – bu arkkosinus (acos). Tanlashda qiyinchilik bo‘lgan holda yordamdan foydalaning, yordam (qisqacha yo‘riq) funksiya tanlanayotganda Insert Function dialog darchasining quyi matn maydonida paydo bo‘ladi.
5. OK knopkasini bosing – funksiya hujjatda paydo bo‘ladi.
6. Kiritilgan funksiyaga yetishmaydigan argumentlarni kiriting (bizning misolda bu 0 raqami), to‘ldiriladigan joy qora to‘g‘ri burchakli to‘rtburchak bilan belgilanadi).

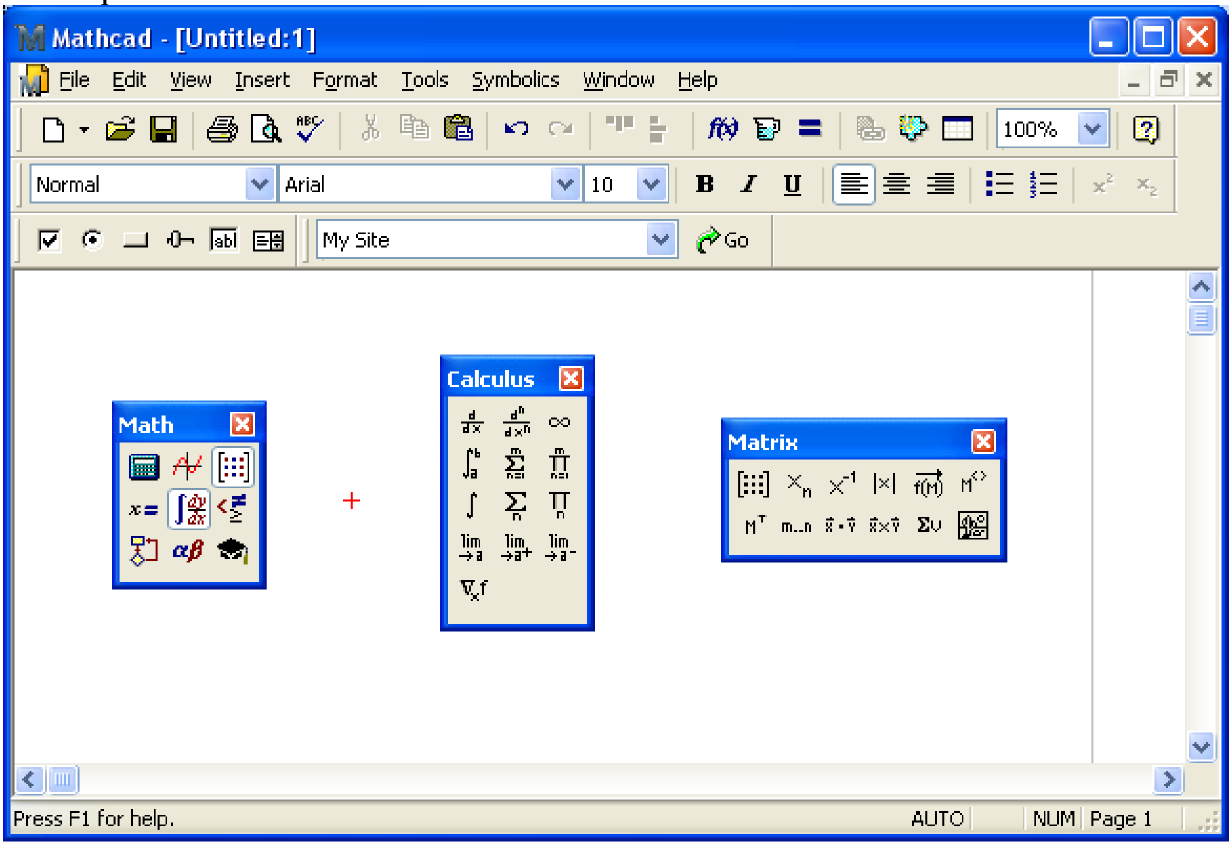


1.4-rasm. Kiritib o‘rnatilgan funksiyani qo‘yish (1.1- va 1.2-listinglarga qarang)

Izoh

Mathcadda dasturlashtirilgan sonli-raqamli metodlarning ko‘p qismi kiritib o‘rnatilgan funksiyalar ko‘rinishida realizatsiya qilingan. Insert Function (Funksiya kiritilsin) dialog darchasini ko‘rib chiqsangiz, hisoblarda qaysi maxsus funksiyalar va sonli-raqamli metodlardan foydalanish mumkinligini bilib olasiz.

Ba`zi simvollarni klaviaturadan kiritib bo‘lmaydi. Masalan, hujjatga integral yoki differensial belgilarini kiritib o‘rnatish ochiq-oydin emas. Buning uchun Mathcadda instrumentlarning maxsus panellari mavjud, ular Microsoft Word formula redaktorining vositalariga juda o‘xshash. Yuqorida qayd qilinganidek, ulardan biri – 1.1-rasmda ko‘rsatilgan Math (Matematika) instrumentlari panelidir. Unda hujjatlarga tipik matematik obyektlar (operatorlar, grafiklar, dasturlarning elementlari va sh.k.)ni kiritib o‘rnatish instrumentlari mavjud. Bu panel 1.5-rasmda tahrir qilinayotgan hujjat fonida kattaroq planda ko‘rsatilgan. Panelda to‘qqizta knopka mavjud, ulardan har birining bosilishi, o‘z navbatida, ekranda yana bitta instrumentlar panelining paydo bo‘lishiga olib keladi. Ushbu to‘qqizta qo‘shimcha panellar yordamida Mathcad hujjatlariga turli obyektlarni kiritib o‘rnatish mumkin. 1.5-rasmda Math panelida faqat bitta knopka (chapdagi, unga sichqon ko‘rsatkichi keltirilgan) siqilgan holatdadir. Shuning uchun ekranda faqat bitta – Calculator (Kalkulyator) matematik paneli mavjud. Bu paneldagi knopkalar bosilganda qanday obyektlar kiritib o‘rnatilishi mumkinligini osonlik bilan tasavvur qilish mumkin.



1.5-rasm. Math instrumentlari paneli ekranga kelgan to‘plamlar panellarini chaqirish uchun xizmat qiladi

Izoh

Bu va boshqa instrumentlarning to‘plami panellarining vazifalari haqida batafsilroq keyinchalik (1.3- va 1.4-bo‘limlarda) bayon qilamiz.

Matematik ifodalarning ko‘p qismini, klaviaturadan foydalanmasdan, faqat Calculator (Kalkulyator) paneli yordamida kiritish mumkin. Masalan, *sin(1/2)* ifodasini hisoblash uchun dastlab *sin* knopkasini (yuqorida birinchi) bosish, so‘ngra paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichdagi qavslar ichida 1/2 ifodani terish lozim. Buning uchun Calculator (Kalkulyator) panelida 1, / va 2 knopkalar ketma-ket bosiladi, keyin esa javobni olish uchun, o‘sha joyning o‘zida, = knopkasi bosiladi. Ko‘rib turibsizki, Windowsning boshqa ko‘p ilovalaridagi kabi hujjatlarga matematik simvollarni har xil yo‘l bilan kiritish mumkin. Foydalanuvchi ulardan istalganini tanlab olishi mumkin.

Maslahat

Agar Siz Mathcad redaktorini endi o‘zlashtirayotgan bo‘lsangiz, mumkin bo‘lgan joylarning hammasida formulalarni instrumentlar panellarining to‘plamlaridan va Insert Function (Вставить функцию – Funksiya kiritilsin) dialogi yordamida funksiyalarni kiritishning bayon qilingan foydalanib bajarishni tavsiya qilamiz. Bu ko‘p xatoliklarning oldini olish imkonini beradi.

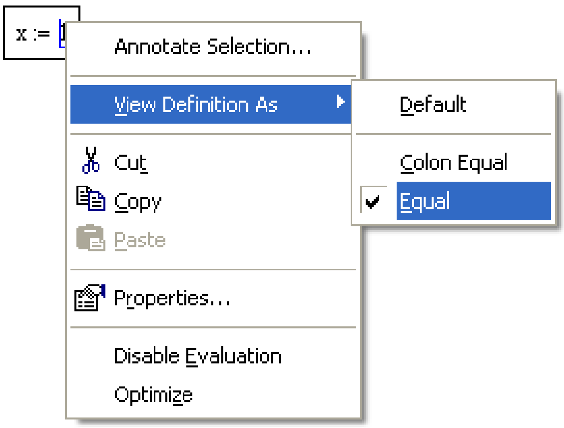
1.2.3. O‘zgaruvchilar va qiymatni berish operatori

O‘zgaruvchi – bu turli qiymatlarni oluvchi kattalikdir. Ko‘pincha ular lotin alifbosidagi x, y, z va sh.k. harflar bilan belgilanadi.

Hozircha bayon qilingan amallar Mathcaddan vazifalari to‘plami kengaytirilgan oddiy kalkulyator sifatida foydalanishni namoyish qildi. Matematiklarni esa kamida *o‘zgaruvchilarni kiritish va foydalanuvchi funksiyalari bilan bajariladigan operatsiyalar* imkoniyati qiziqtiradi. Qaysidir o‘zgaruvchi (masalan, o‘zgaruvchi *x*)ga ma`lum qiymat berish uchun *x*:=1 ifodani kiritish lozim. Bu misol 1.3-listingning birinchi qatorida keltirilgan, uning ikkinchi qatorida esa sonli-raqamli chiqarish operatori (tenglik belgisi) yordamida o‘zgaruvchi *x* qiymatining hisoblanishi bajariladi. Bunda qiymat berish tenglik belgisi bilan emas, balki maxsus simvol bilan belgilanadi, ya`ni uning sonli-raqamli chiqarish operatsiyasidan farqi urg‘ulanadi. Qiymat berish operatori ikki nuqta <:=> klavishasini bosish yoki Calculator (Kalkulyator) paneli yordamida kiritiladi. Tenglik simvoli “=” qiymat chapdan o‘ngga, “:=” – simvoli esa qiymat o‘ngdan chapga berilishini bildiradi.

Izoh 1

Lekin foydalanuvchiga operatorning tashqi ko‘rinishini matematiklar uchun oddiy bo‘lgan oddiy tenglik simvoliga almashtirishga ruxsat etiladi (bu qat`iyan tavsiya etilmaydi, chunki bunda Mathcad-dasturning qabul qilishi keskin yomonlashadi). Buning uchun (1.6-rasm) sichqonning o‘ng knopkasini bosib qiymatni berish operatori jabhasidan kontekstli menyuni chaqirib olish va unda Equal (Teng) punktini tanlash lozim. Binobarin, shunday yo‘l bilan har xil simvollar bilan belgilanishga ruxsat etadigan boshqa ba`zi operatorlarning ham yozilishini tanlash mumkin.



1.6-rasm. Qiymatni berish operatorining turini tanlash (Listing 1.3 ga qarang)

Izoh 2

Agar o‘zgaruvchi uchun hujjatda birinchi marta uchrayotgan sonli-raqamli chiqarish belgisi (odatda tenglik)ni kiritishga harakat qilinsa, u avtomatik ravishda qiymatni berish simvoli bilan almashtiriladi.

Listing 1.3. O‘zgaruvchiga qiymatni berish va undan hisoblarda foydalanish.

$$x := 1$$

$$x = 1$$

$$(x+5)^2 = 36$$

Misollar

$$x := 2$$

$$x = 2$$

1. $3 \cdot x - 1 = 5$
2. $2 \cdot x \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-2) = 4$
3. $x^6 - x^2 = 60$
4. $x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 6 = -6$

Tarkibida qandaydir o‘zgaruvchi bo‘lgan ifodaning qiymatini hisoblash uchun, uni oddiy kiritish lozim, so‘ngra sonli-raqamli operatorni qo‘llash lozim (Listing 1.3, oxirgi qator). Bunda ushbu o‘zgaruvchiga hujjatda oldindan qandaydir qiymat berilgan bo‘lishi kerak.

Izoh

Mathcadda qiymat beruvchi operator (=) mavjud. Agar uni o‘zgaruvchiga qiymat berish uchun hujjatning istalgan qismida (masalan, eng pastda) kiritishsa, bu o‘zgaruvchi hujjatning istalgan qismida avtomatik ravishda aniqlanadi.

Sonli-raqamli hisoblardan farqli o‘laroq, *simvolli hisoblashlarda hamma o‘zgaruvchilar uchun qiymatlarning berilishi shart emas* (1.4-listing). Agar ba`zi o‘zgaruvchilarga qiymatlar berilgan bo‘lsa (Listing 1.4 dagi *a* o‘zgaruvchi kabi), natijani olish uchun ushbu sonli qiymatdan foydalanishadi. Agar o‘zgaruvchiga hech qanday qiymat berilmagan bo‘lsa (o‘zgaruvchi *x* kabi), u analitik, go‘yo bir ismdek, qabul qilinadi.

Ko‘p masalalarni analitik yechish imkonini beruvchi simvolli hisoblashlar – Mathcadning ajobiy imkoniyatlaridan biridir. Amalda Mathcad matematikani olim darajasida biladi. Mathcadning simvolli protsessoridan ustalik bilan foydalanish Sizni katta miqdordagi zerikarli hisoblashlardan, masalan, integrallar va hosilalardan xalos etadi. Ifodalar yozilishining an`anaviy shakliga e`tibor bering (Listing 1.4), yagona xususiyat – bu tenglik belgisi o‘rniga simvolli hisoblashlar belgisi → qo‘llanilishining zaruratidir. Uni Mathcad redaktorida Evaluation (Ifodalar) yoki Symbolic (Simvolika) panellarining istalgan biridan, integrallash va differensiallash simvollarini esa – Calculus (Hisoblashlar) panelidan kiritish mumkin.

Listing 1.4. Analitik hisoblarda o‘zgaruvchilar

$$a := 3$$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{k\cdot x}{a^2}\right) \to \frac{1}{9}\cdot\cos\left(\frac{1}{9}\cdot k\cdot x\right)\cdot k$$

Misollar

$$a := 3$$

1. $$\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{k\cdot x}{6a}\right) \to \frac{-1}{18}\cdot\sin\left(\frac{1}{18}\cdot k\cdot x\right)\cdot k$$

2. $$\frac{d^2}{dx^2}\operatorname{acos}\left(\cos\left(\frac{2\cdot k}{a^3}\right)\right) \to 0$$

3. $$\frac{\sin(5\cdot k - a) - \sin(3\cdot k - a)}{2\cos(4\cdot k - a)} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(5\cdot k - 3) - \sin(3\cdot k - 3)}{\cos(4\cdot k - 3)}$$

4. $$3\cdot\cos(2\cdot a - k) - \sin(2\cdot a - k)^2 - \cos(2\cdot a - k)^2 \to 3\cdot\cos[(-6) + k] - \sin[(-6) + k]^2$$

1.2.4. Foydalanuvchi funksiyalari

O‘zgaruvchilarga son qiymatlarini berishga o‘xshash ravishda bir yoki bir necha argumentlarning foydalanuvchi funksiyalarini aniqlash mumkin (Listinglar 1.5 va 1.6). 1.5-listingda *f(x)* funksiyasi, 1.6-listingda esa – uchta o‘zgaruvchi funksiyasi *g(a,u,f)* aniqlanadi.

Funksiya – bu o‘zgaruvchi y ning x ga bog‘liqligidir, bunda x ning har bir qiymatiga uning faqat bitta qiymati to‘g‘ri keladi. Belgilanishi: y=f(x). O‘zgaruvchi x mustaqil o‘zgaruvchi yoki argument deyiladi, o‘zgaruvchi y esa bog‘liq o‘zgaruvchi deyiladi. Mustaqil o‘zgaruvchi qabul qiladigan hamma qiymatlar funksiya aniqlanishi jabhasi deyiladi. Bog‘liq funksiya qabul qiladigan hamma qiymatlar funksiya qiymatlarining ko‘pligi yoki funksiya qiymatlari jabhasi deyiladi.

Listing 1.5. Foydalanuvchi funksiyasini aniqlash va uning qiymatlarini nuqtada hisoblash

$$f(x) := x^2 - 3\cdot x - 2$$
$$f(0) = -2$$
$$f(10) = 68$$

Misollar

1. $f(x) := 2\cdot x^2 + 4\cdot x - 3$

   $f(6) = 93$

   $f(12) = 333$

2. $f(x, a) := 3\cdot x^2 - 4\cdot a^2\cdot x + 4\cdot a^3 + 3$

   $f(2, 6) = 591$

3. $f(a, x) := 6\cdot a^2\cdot x - 9\cdot a^3 - a\cdot x^2 + a - 1$

   $f(3, 7) = 814$

   $f(1, 9) = 2.598 \times 10^3$

4. $f(x) := 5\cdot x^2 + 9\cdot x - 14$

   $f(5) = 156$

Listing 1.6. Uchta argumentlarning foydalanuvchi funksiyasi va uni nuqtada hisoblash

$$g(a, y, \phi) := a\cdot \sin(y + \phi)$$
$$g(1, 0, \pi) = 0$$

Misollar

1. $f(a, y, f) := \cos(a - 2\pi\cdot y) - 3\cdot f$

   $f(0, \pi, 10) = -29.37$

2. $f(a, y, f) := \cos\left(\pi - \frac{1}{y - f}\right) + 6a$

   $f(1, 3\pi, 2) = 5.009$

3. $f(a, y, f) := 7y\cdot\cos\left(4\cdot a + \frac{1}{4f - 1}\right)$

   $f(2, 6, \pi) = -9.676$

4. $f(a, y, f) := \sin(a^2 - 2\cdot y)\cdot f\cdot \pi$

   $f(3, 2, 4) = -12.05$

1.7-rasmda *f(x)* funksiyasining grafigi ko‘rsatilgan. Uni qurish uchun Graph (Grafik) panelida zarur bo‘lgan grafik turi knopkasini bosish lozim (unga rasmda sichqon ko‘rsatkichi keltirilgan) va paydo bo‘lgan grafik xomakisida o‘qlar bo‘yicha qo‘yilishi lozim bo‘lgan qiymatlar aniqlanadi. Bizning holda o‘rinto‘ldirgichga *x* o‘qi yoniga *x* va *y* o‘qi yoniga *f(x)* kiritilishi talab qilindi.

Izoh 1

1.5-listing va 1.7-rasm mazmunlarini solishtiring. Material bunday berilishining stili kitob oxirigacha saqlab qolinadi. Listinglar hujjat ishchi jabhalarining fragmentlari bo‘lib, ular qo‘shimcha kodlarsiz ishlaydi. Istalgan listingning mazmunini yangi (bo‘sh) hujjatga kiritish mumkin, u yuqorida bayon qilinganidek ishlaydi. Listinglarni to‘ldirib yubormaslik uchun grafiklar alohida rasmlarga ajratilgan. 1.6-rasmdan farqli ravishda, keyingi rasmlarda listing kodi dublyaj qilinmaydi, rasm ostidagi yozuvda listingga murojaat qilingan bo‘lsa, bu ushbu grafik hujjatga yodga olingan listingdan keyin kiritib qo‘yilishi mumkinligini nazarda tutadi.

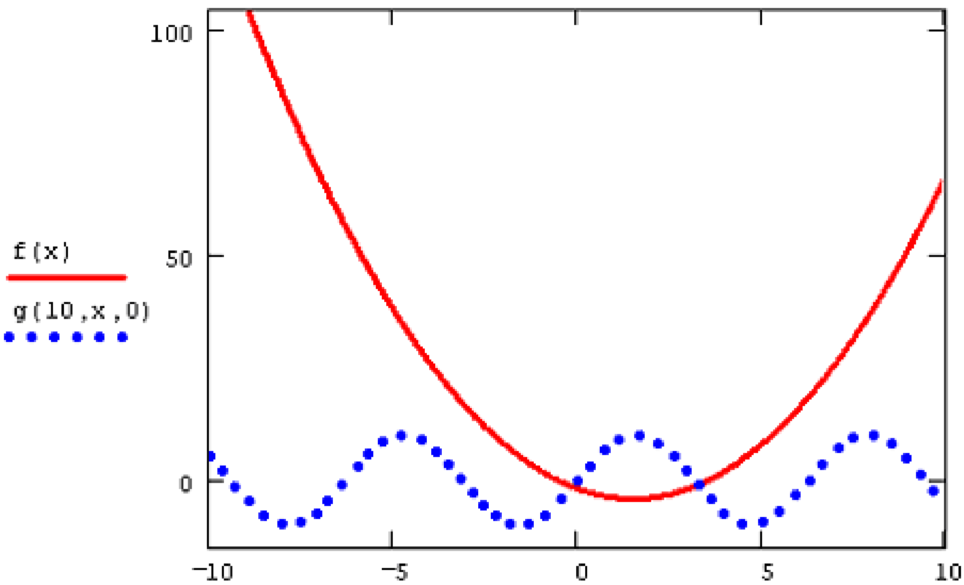
$$f(x) := x^2 - 3\cdot x - 2$$

$$f(0) = -2$$

$$f(10) = 68$$

$$g(a, y, \phi) := a\cdot \sin(y + \phi)$$

$$g(1, 0, \pi) = 0$$



1.7-rasm. Funksiyaning grafigini qurish (1.5-listing davomi)

Izoh 2

1.7-rasmdagi o‘sha grafikda ikkinchi egri chiziq ham tasvirlangan, *g(10,x,0)* funksiyasining ikki o‘lchamli grafigidir. Bu grafik chizilishi uchun *g(10,x,0)* funksiyasining nomi *y* o‘qi yonida *f(x)*dan keyin vergul berilib kiritildi.

Izoh 3

Mathcad 12 da foydalanuvchi funksiyasini rekurrentli ifodalar, masalan *f(x)=f(x)+1*, vositasida aniqlash ma`n qilingan. *f(x)*ni hisoblashga intilganda, oldingi versiyalardagi kabi, unga yangi (rekurrentli) qiymat berilishi (присваивания) o‘rniga, cheksiz sikl tashkil qilinadi, u ma`lum bir qadamda to‘yish (переполнения) operatsiyasiga olib keladi. Rekurrentli hisoblarni tashkil qilish uchun funksiyaning yangi nomidan, masalan, $f_1(f,x)=f(x)+1$, yoki maxsus ismli operatordan (keyingi izohga qarang) foydalaning.

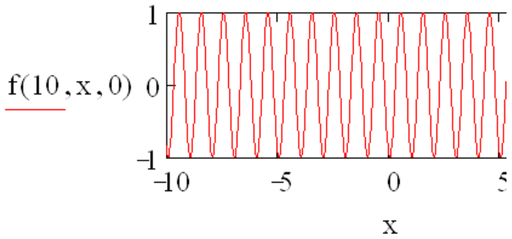
Izoh 4

Mathcad 12 da ham foydalanuvchilarning va ham tizimiy o‘zgaruvchilar, o‘lchamlar va funksiyalarni qayta aniqlashning yangi imkoniyati kiritilgan. Bu maxsus ismli operator (namespace operator) yordamida amalga oshiriladi. Kiritib o‘rnatilgan funksiyaning – sinus *sin*$_{[mc]}$*(x):=sin(x*pi/180)* yoki foydalanuvchi funksiyasining – *f*$_{[this]}$*(x)=f(x)+1* qayta aniqlanishi bunga misol bo‘la oladi. Identifikator [ms] Mathcad tizimiy ismining o‘zgartirilishini, [this] esa – mos funksiyaning rekurrentli qayta aniqlanishini ko‘rsatadi.

Misollar

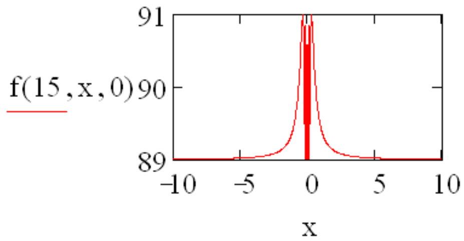
1. $f(a,y,f) := \cos(a - 2\pi\cdot y) - 3\cdot f$

$f(0,\pi,10) = -29.37$



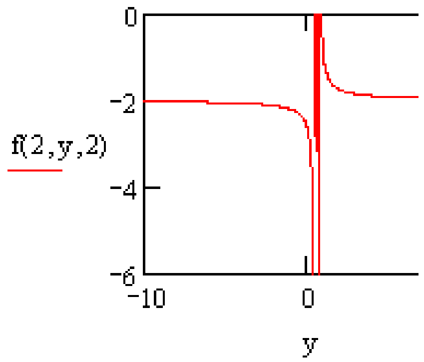
2. $f(a,y,f) := \cos\left(\pi - \frac{1}{y-f}\right) + 6a$

$f(1,3\pi,2) = 5.009$



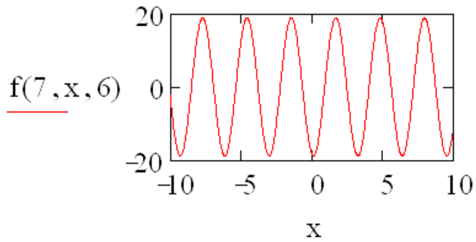
3. $f(x,y,f) := \tan\left(\pi + \frac{1}{3\cdot y - f}\right) - f$

$f(1,\pi,2) = -1.864$



4. $f(a,y,f) := \sin\left(a^2 - 2\cdot y\right)\cdot f\cdot\pi$

$f(3,2,4) = -12.05$



1.2.5. Sonlarning turlari

Mathcadda foydalaniladigan o‘zgaruvchilarning asosiy turlarini ko‘rib chiqamiz.

Haqiqiy sonlar

Haqiqiy sonlar ko‘pligi – bu ratsional sonlar ko‘pligi va irratsional sonlar ko‘pligidir. Haqiqiy sonlar aksiomalarining uch guruhi mavjud. Istalgan haqiqiy sonni koordinata to‘g‘ri chizig‘ida shunday ifodalash mumkinki, har bir haqiqiy songa bir nuqta mos keladi va koordinata to‘g‘ri chizig‘idagi har bir nuqtaga haqiqiy son mos keladi. Haqiqiy sonlar boshqachasiga moddiy sonlar deb ataladi.

Raqamdan boshlanadigan istalgan ifodani Mathcad son sifatida interpretatsiya qiladi. Shu sababli sonni kiritish uchun uni klaviaturada terish lozim (1.7-listing).

Izoh 1

Agar Siz listing 1.7 ni davom ettirib, hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarini ketma-ket chiqarsangiz, ba`zi raqamlar boshqacha ko‘rinishda ekanligidan (masalan, α=0) hayratda qolasiz. Bu sonli-raqamli chiqarish formatining mos sozlanishi (настройка)ga bog‘liq, Format / Result (Format / Natija) komandasidan foydalanib, uni almashtirish mumkin.

Izoh 2

Sonlar kiritilishini hisoblashning boshqa tizimlarida: ikkilik (binary), sakkizlik (octal) yoki o‘n oltilik (hexadecimal) tashkil qilish mumkin (listing 1.8).

Listing 1.7. Haqiqiy sonlarni kiritish

$$a := 1000$$

$$b := 1.3474$$

$$c := 3124.1$$

$$d := 45.21 \cdot 10^{-5}$$

Listing 1.8. Sonlarni hisoblashning boshqa tizimlarida kiritish

$a := 100010b$ $\quad a = 34$

$b := 13o$ $\quad b = 11$

$c := 0f3h$ $\quad c = 243$

Misollar

$$a := 6.2225$$

$$b := 3.0008$$

$$c := 5.689$$

$$d := 10.698$$

$a := 6.2225 \cdot 6 \cdot b$ $\quad c := 5.689 - 8a$

$a = 112.035$ $\quad c = -890.59$

$b := 3.008 \cdot 3 \cdot c$ $\quad d := 10.689 + \frac{7}{b}$

$b = -8.037 \times 10^3$ $\quad d = 10.688$

Kompleks sonlar

Komleks son – bu z=a+bi ko‘rinishidagi sondir, bu erda a va b haqiqiy sonlar; i – mavhum son bo‘lib, u $i^2=-1$ sharti bo‘yicha aniqlanadi.

Komleks sonning z=a+bi yozuvi kompleks son yozuvining algebraik shakli deyiladi, bunda a soni kompleks son z ning haqiqiy qismi, bi esa – uning mavhum qismi deyiladi.

Mathcad muhitida operatsiyalarning ko‘p qismi o‘zgarmas kompleks sonlar ustida bajariladi.

Kompleks son – bu haqiqiy va istalgan haqiqiy soni mavhum birlikka (imaginary unit) ko‘paytirish yo‘li bilan hosil bo‘ladigan mavhum sonlarning summasidir. Ta`rif bo‘yicha $i^2=-1$.

Mavhum son, masalan 3*i* ni kiriting.

1. Haqiqiy ko‘paytiruvchi 3*i* ni kiriting.
2. Bevosita bundan keyin "*i*" yoki "*j*" simvolini kiriting.

Izoh

Mavhum birni kiritish uchun <1>, <*i*> klavishlarni bosish kerak. Agar "*i*" simvolining faqat o‘zi kiritilsa, Mathcad uni o‘zgaruvchi *i* sifatida interpretatsiya qiladi. Bundan tashqari, mavhum bir faqat mos formula ajratilgandan keyingina 1*i* ko‘rinishga ega bo‘ladi. Aks holda mavhum bir oddiy *i* sifatida aks ettiriladi (1.8-rasm).

$$a := i + 10$$

$$\boxed{x := 1i}$$

$$x := i$$

1.8-rasm. Mavhum birni kiritish

Kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismlarning oddiy summasi ko‘rinishida yoki tarkibida mavhum son bo‘lgan istalgan ifoda ko‘rinishida kiritish mumkin. Kompleks sonlarni kiritish va chiqarish misollari 1.9-listingda illyustratsiya qilingan. Kompleks sonlar bilan ishlash uchun bir nechta oddiy funksiyalar va operatorlar mavjud, ularning amali 1.10-listingda ko‘rsatilgan.

Izoh

Hisoblar natijalarida mavhum birni *i* emas, balki *j* ko‘rinishida chiqarish mumkin. Taqdim etishni o‘zgartirish uchun Format / Result / Display Options (Format / Natija / Aks opsiyalari) komandasi bo‘yicha kirish mumkin bo‘lgan Result Format (Natija formati) dialog darchasining Imaginary Value (Mavhum qiymat) ro‘yxatidan keragini tanlab oling.

Listing 1.9. Kompleks sonlarni kiritish va chiqarish

$a := 2i + 0.5 \qquad a = 0.5 + 2i$

$b := 1.77 \cdot e^{2i} \qquad b = -0.737 + 1.609i$

$c := 25j + 12 \qquad c = 12 + 25i$

Misollar

$a := 3 + 4 \cdot i \qquad a = 3 + 4i$

$b := 12 + 0 \cdot i \qquad b = 12$

$c := 0 + 10 \cdot i \qquad c = 10i$

$d := -12 + 3 \cdot i \qquad d = -12 + 3i$

Listing 1.10. Kompleks sonlar bilan oddiy hisoblashlarga misollar (1.9-listing davomi)

$\mathrm{Im}(a) = 2 \qquad \mathrm{Re}(a) = 0.5$

$|a| = 2.062 \qquad \arg(a) = 1.326$

$|b| = 1.77 \qquad \arg(b) = 2$

Kiritib o‘rnatilgan konstantalar

Mathcadda ba`zi ismlar *tizimiy o‘zgaruvchilar* uchun rezervlangan, *ular kiritib o‘rnatilgan konstantalar* (built-in constants) deb ataladi.

Kiritib o‘rnatilgan konstantalar ikki turga bo‘linadi:

−matematik (math constants); ular ba`zi keng qo‘llaniladigan maxsus matematik simvollarni saqlaydi;

–tizimiylar (system variables); ular Mathcadda realizatsiya qilingan sonli-raqamli algoritmlar ko‘pchiligining ishini aniqlaydi.

Izoh

Zarurat bo‘lganda yuqorida qayd etilgan istalgan konstantaning qiymatini o‘zgartirish yoki hisoblarda ulardan o‘zgaruvchilar sifatida foydalanish mumkin. Tabiiyki, konstantaga yangi qiymat berilgach, eskisidan foydalanib bo‘lmaydi.

Matematik konstantalar sonli-raqamli va simvolli hisoblashlarda har xil interpretatsiya qilinadi. Hisoblash protsessori ularni qandaydir son sifatida qabul qiladi, simvolli esa matematik kontekstdan kelib chiqib, ularning har birini aniqlashi va matematik konstantalarni natija sifatida chiqarishi mumkin.

Matematik konstantalar:

- ∞ – cheksizlik simvoli (<Ctrl>+<Shift>+<z> klavishalari orqali kiritiladi);
- *e* – natural logarifm asosi (<*e*> klavishasi);
- *pi* –"Pi" soni (<Ctrl>+<Shift>+<p> klavishalari orqali kiritiladi);
- *i, j* – mavhum birlik (<1>, <*i*> yoki <1>, <*j*> klavishalari orqali kiritiladi);
- % – protsent (foiz) simvoli, <%>, 0,01 ekvivalent.

Listing 1.11. Matematik konstantalarning qiymatlari

$$\infty = 1 \times 10^{307}$$

$$e = 2.718$$

$$\pi = 3.142$$

$$i = i$$
$$j = i$$

$$\% = 0.01 \qquad 10 \cdot 25 \cdot \% = 2.5$$

Tizimli o‘zgaruvchilar kiritib o‘rnatilgan funksiyalarda o‘rnatilgan sonli-raqamli metodlarning ishlashini belgilaydi. Ularning oldindan belgilangan qiymatlari 1.12-listingda sanab chiqilgan (ularni hujjatning istalgan qismida o‘zgartirish ruxsat etiladi).

Tizimli o‘zgaruvchilar:

- **TOL** – sonli-raqamli metodlarning aniqligi;
- **CTOL** – ifodalar bajarilishi aniqligi, ba`zi sonli-raqamli metodlarda foydalaniladi;
- **ORIGIN** – massivlarda va qatorli o‘zgaruvchilarda boshlang‘ich indeks nomeri;
- **PRNPRECISION** – faylga chiqarilganda ma`lumotlar formatini o‘rnatish;
- **PRNCOLWIDTH** – faylga chiqarilganda ustun formatini o‘rnatish;
- **CWD** – joriy ishchi papkaga yo‘lni qatorli taqdim etish.

Listing 1.12. Tizimiy o‘zgaruvchilarning oldindan o‘rnatilgan qiymatlari

$$\mathrm{TOL} = 1 \times 10^{-3}$$

$$\mathrm{ORIGIN} = 0$$

$$\mathrm{CTOL} = 1 \times 10^{-3}$$

Qatorli o‘zgaruvchilar

O‘zgaruvchi yoki funksiyaning qiymati nafaqat son, balki simvollarning istalgan ketma-ketligidan tarkib topgan; qo‘shtirnoq ichiga olingan qator ham bo‘lishi mumkin (listing 1.13). Qatorlar bilan ishlash uchun Mathcadda bir nechta kiritib oʻrnatilgan funksiyalar mavjud (izoh 3 ga qarang).

Izoh 1

1.5- va 1.6-listinglardagi kabi (1.2.4-boʻlimga qarang) qator tipidagi foydalanuvchi funksiyalarini aniqlash mumkin.

Izoh 2

Tizimiy konstanta ORIGIN endi nafaqat massivlar boshlangʻich indeksi nomerini, balki qatorli (matnli) argumentning mos kiritib oʻrnatilgan funksiyalari uchun hisob boshini ham oʻrnatishi mumkin. Agar Siz bu opsiya ishlashini istasangiz dialog darchasi Worksheet options (Hujjat opsiyalari) qistirmasi Calculations (Hisoblashlar)da tekshiruvchi bayroq Use ORIGIN for string indexing (qatorli oʻzgaruvchilarni indeksasiya qilish uchun ORIGINdan foydalaning)ni oʻrnating.

Izoh 3

Mathcad 12 versiyasidan boshlab qatorli oʻzgaruvchilari konvertasiyalanishi funksiyalarining argumentiga boʻlgan talablar oʻzgargan. Endi str2num funksiyasi sonning ikkilik, sakkizlik yoki oʻn oltilik yozuvlarini ifodalovchi matnli qatorlarni sonlarga oʻgirishni “biladi”. Qator simvollari kodirovkasi asosida qatorni chiqarib beruvchi vec2str funksiyasining argumenti endi faqat 32-255 diapazonidagi sonlardan tarkib topgan vektor boʻlishi mumkin.

Listing 1.13. Qatorlarni kiritish va chiqarish

```
s := "Hello,"      s = "Hello,"

concat (s, " wold! " ) = "Hello, wold!"
```

Raqam emas

Mathcad 12 versiyasida NaN – NotANumber [NeChislo (Raqam emas)] nomli ma`lumotlarning yangi turi kiritilgan. U, asosan, (u yoki bu sabablarga koʻra) oʻtkazib yuborilgan (пропущенные) ma`lumotlarga ega boʻlgan massivlar elementlarini identifikatsiyalash uchun moʻljallangan. Xususan, tashqi fayldan ma`lumotlar matritsasi import qilinganda, mos oʻtkazmalarga (fayldagi boʻsh joylarga), avtomatik ravishda NaN qiymati beriladi. Agar NaN turiga ega boʻlgan vektor yoki matritsaning qandaydir elementlari grafikka qoʻyiladigan boʻlsa, egrilik qurilayotganda ular hisobga olinmaydi.

Bunda:

- fayllardan ma`lumotlarni import qilish ishonchliligi ortadi;
- oʻtkazma (пропуск)lar boʻlganda ma`lumotlar qatorlari grafiklarini qurish sifati yaxshilanadi;
- foydalanuvchiga hisoblashlarni boshqarish boʻyicha qoʻshimcha vositalar beriladi, chunki istalgan oʻzgaruvchiga Raqam emas qiymati berilishi mumkin, masalan x:=NaN.

Shuni yodda tutish kerak-ki, tarkibida NaN turidagi raqam boʻlgan matematik ifodaning oʻzi ham NaN turiga mansub boʻladi. Yangi xizmat funksiyasi is NaN yordamida oʻzgaruvchi yoki ifodaning qiymatini Raqam emas sifatida identifikatsiya qilish mumkin:

- agar x=NaN boʻlsa, isNaN(x) – 1 ni qaytaradi, aks holda:
- x – argument boʻladi.

1.2.6. Ranjirlangan oʻzgaruvchilar va matritsalar

Ranjirlangan oʻzgaruvchilar MathCADda vektorlarning bir turi boʻlib, ular asosan sikllarni yoki iteratsion hisoblashlarni bajarish uchun moʻljallangan.

Ranjirlangan o'zgaruvchiga oddiy misol – bu qaysidir diapazonda muayyan qadam bilan joylashgan raqamlar massividir.

Masalan, 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementli ranjirlangan o'zgaruvchi S ni yaratish uchun:

1. Kiritish kursorini hujjatning kerakli joyiga o'rnating.

2. O'zgaruvchi (3) na va unvon berish operatori «:» ni kiriting.

3. 1.9-rasmda ko'rsatilgan ***Matrix*** *(Matritsa) panelida* ***Range Variable*** *(Ранжированная переменная – Ranjirlangan o'zgaruvchi) knopkasini bosing yoki klaviaturadan nuqta-vergul simvolini kiriting.*

4. Paydo bo'lgan o'rinto'ldirgichlarga (1.9-rasm) ranjirlangan o'zgaruvchi o'zgarishi diapazonining chap va o'ng chegaralari 0 va 5 ni kiriting.

m×n o'lchamli qaysidir S makonidagi elementlar ***matritsa****si – bu* $S^{m\times n}$ *makonidagi obyekt bo'lib, uning koordinatalari qatorlar va ustunlar bo'ylab tartibga solingan bo'ladi. Keyinchalik biz moddiy matritsalarni ko'rib chiqamiz, ularni raqamlarning to'g'riburchakli jadvali deb hisoblash mumkin.*

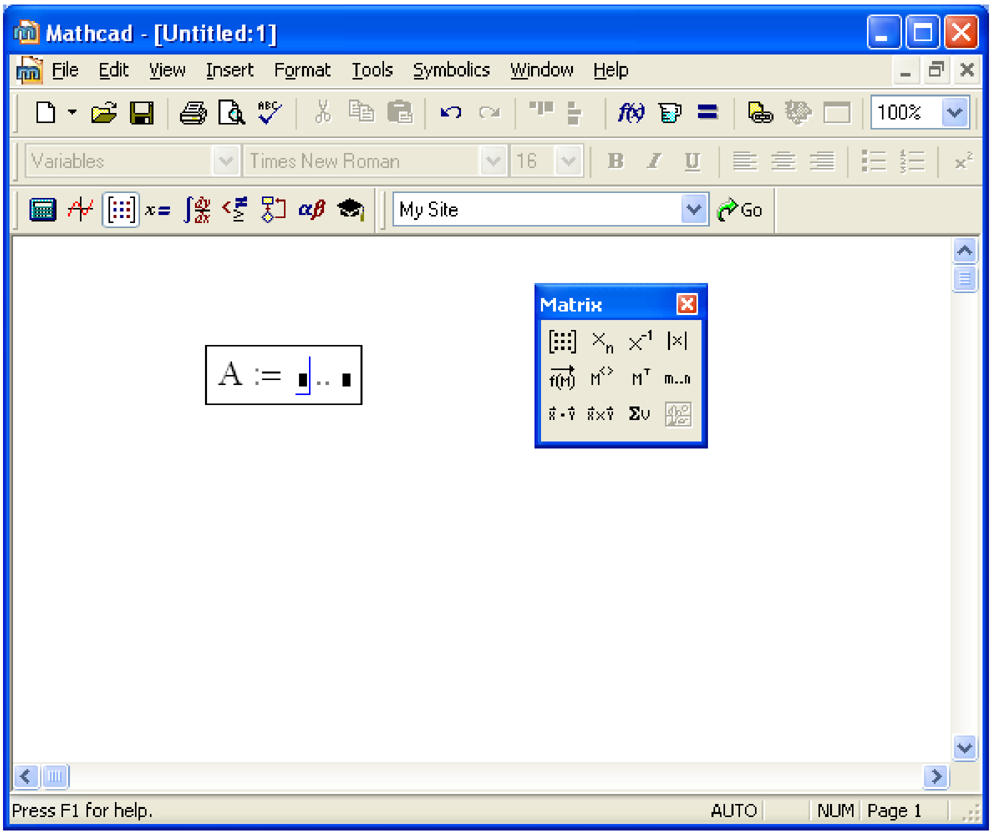
A matritsa ***transportirovka*** *qilinganida uning qatorlari ustunga aylanadi va aksincha. A ni transportirovka qilish natijasida olinadigan matritsa* A^T *deb belgilanadi, masalan*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

ni olamiz.



1.9-rasm. Ranjirlangan o'zgaruvchini yaratish

Raqamlarning tartibga solingan ketma-ketligi *massiv*lar (arrays) deb ataladi. Massivning istalgan elementiga uning indeksi, ya`ni raqamlar ketma-ketligidagi nomeri bo‘yicha kirish mumkin (listing 1.11 da a – massiv, a_i – uning elementi). Matematik hisoblarda massivlarni qo‘llash yaxshi samara beradi.

*Raqamlarning bir o‘lchamli massivi **vektor** deb ataladi. Masalan,*

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

*uch elementli vektordir. **Vektor-ustun**, ya`ni n×1 matritsa vektorning standart shakli hisoblanadi; u transportirovka qilinganida*

$$x^T = (2\ 3\ 5).$$

***vektor-qator** hosil bo‘ladi.*

*i- elementi 1 ga teng, qolgan hamma elementlari 0 ga teng bo‘lgan vektor **birlik vektor** hisoblanadi va e_i ko‘rinishida belgilanadi. Birlik vektor elementlarining miqdori odatda kontekstdan aniqlanadi.*

Listing 1.14. Bir o‘lchamli massiv (vektor)

$$a := \begin{pmatrix} 14 \\ 1.4 \\ 4.7 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 14$$
$$a_1 = 1.4$$
$$a_2 = 4.7$$

Misollar

1. $a := \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2. $b := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$a_0 = 7$ $b_0 = 8$
$a_1 = 3$ $b_1 = 6$
$a_2 = 5$ $b_2 = 9$

3. $c := \begin{pmatrix} 32 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}$ 4. $d := \begin{pmatrix} 312 \\ 1156 \\ 1120 \end{pmatrix}$

$c_0 = 32$ $d_0 = 312$
$c_1 = 15$ $d_1 = 1.156 \times 10^3$
$c_2 = 12$ $d_2 = 1.12 \times 10^3$

Mathcadda shartli ravishda massivlarning ikki turi ajratiladi:

- vektorlar (bir indeksli massivlar, listing 1.14), matritsalar (ikki indeksli massivlar, listing 1.15) va tenzorlar (ko‘pindeksli massivlar);

• ranjirlangan o‘zgaruvchilar (range variables) – vektorlar (bu vektorlarning elementlari ularning indeksiga ma`lum tarzda bog‘liq bo‘ladi).

Listing 1.15. Ikki o‘lchamli massiv (matritsa)

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A_{0,0} = 0.1$$

$$A_{2,0} = 7$$

Misollar

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{0,0} = 3 \quad B_{0,0} = 0 \quad D_{0,0} = 0 \quad C_{0,0} = 9$$

$$A_{1,1} = 4 \quad B_{1,1} = 4 \quad D_{1,1} = 0 \quad C_{1,1} = 5$$

$$A_{2,0} = 0 \quad B_{2,0} = 6 \quad D_{2,0} = 2 \quad C_{2,0} = 3$$

Massivning hammasiga kirish vektorli o‘zgaruvchini oddiy nomlash bilan amalga oshiriladi. Massiv elementlari ustida oddiy sonlar ustidagi kabi amallarni bajarish mumkin. Faqat massivning mos indeksi yoki indekslar birikmasini to‘g‘ri berish lozim. Masalan, listing 1.14 da vektorning nolinchi elementiga kirish uchun:

1. Massiv (*a*) o‘zgaruvchisining nomini kiriting.

2. Matrix (Matritsa) panelida *x*, belgili Subscript (Pastki indeks) knopkasini bosing yoki [kiriting.

3. Massiv nomidan o‘ngda pastda paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichga zarur bo‘lgan indeks (0)ni kiriting.

Agar bundan keyin sonli-raqamli chiqarish belgisi kiritilsa, listing 1.14 ning ikkinchi qatorida ko‘rsatilganidek, vektor nolinchi elementining qiymati undan o‘ng tomonda paydo bo‘ladi.

Ko‘p indeksli massiv elementiga (masalan, listing 1.15 dagi matritsaning $a_{1,0}$ elementiga) kirish uchun:

1. Massiv (*a*) o‘zgaruvchisining nomini kiriting.

2. [ni kiritib, pastki indeksni kiritishga o‘ting.

3. Indeks o‘rinto‘ldirgichiga birinchi indeks (2)ni, vergul (,)ni va verguldan keyin paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichga ikkinchi indeks (0)ni kiriting.

Natijada, listing 1.15 ning oxirgi qatorida ko‘rsatilganidek, elementga kirishga erishildi.

Izoh 1

Ko‘rilgan listinglarda massivlar indekslarining numeratsiyasi noldan boshlangan, ya`ni massiv birinchi elementining indeksi 0. massivning boshlang‘ich (start) indeksini tizimiy o‘zgaruvchi ORIGIN beradi, u nolga teng. Agar Siz vektorlar va matritsalar elementlarini birdan boshlab belgilashga ko‘nikib qolgan bo‘lsangiz, bu o‘zgaruvchiga 1 qiymatini bering. Bu holda vektor nolinchi elementining qiymatini aniqlashga intilish xatolikka olib keladi, chunki uning qiymati aniqlanmagan.

Izoh 2

Massivning alohida elementlariga kirishdan tashqari, uning nimmassivlari (masalan, matritsani hosil qiluvchi vektorlar-ustunlar ustida amallarni bajarish imkoniyati mavjud). Bu Matrix (Matritsa) panelidagi $x^{<>}$ belgili operator yordamida bajariladi (listing 1.16). Listing 1.16 ning ikkinchi qatoridagi "T" simvoli matritsani transponirovka qilish operatsiyasini belgilaydi.

Listing 1.16. Nimmassivga kirish (listing 1.15 ning davomi)

$$A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{T}\right)^{\langle 2\rangle T} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

Misollar

1.

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{T}\right)^{\langle 2\rangle T} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

2.

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{T}\right)^{\langle 1\rangle T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3.

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{T}\right)^{\langle 0\rangle T} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

4.

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{T}\right)^{\langle 0\rangle T} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

1.2.7. O‘lchamli o‘zgaruvchilar

Mathcadda sonli-raqamli o‘zgaruvchilar va funksiyalar o‘lchamga ega bo‘lishi mumkin. Bu muhandislik va fizikaviy hisoblarni soddalashtirish uchun qilingan. Mathcadga ko‘p miqdorda o‘lchov birliklari o‘rnatib kiritilgan, ular yordamida o‘lchovli o‘zgaruvchilar hosil qilinadi.

O‘lchamga ega bo‘lgan o‘zgaruvchini, masalan, 10 A li tok kuchini hosil qilish uchun, o‘zgaruvchi *i* ga qiymatni beruvchi 10: *i*:=10 ifodani, so‘ngra ko‘paytirish simvoli <*> ni, keyin esa "*A*" harfini kiriting. O‘lchov birliklarini belgilovchi hamma simvollar oldindan kiritib o‘rnatilganligi va ular o‘lchami bilan bog‘liq bo‘lgan qiymatlarga ega bo‘lganligi sababli, *A* literini Mathcad Amper sifatida taniydi (listing 1.17, birinchi qator). Agar Siz o‘zgaruvchi *A* ga oldindan qandaydir qiymat bergan bo‘lsangiz, bu holda u tok kuchi birligi sifatida qabul qilinmaydi.

Listing 1.17. O‘lchamli o‘zgaruvchilar bilan hisoblar

$$I := 10 \cdot A$$

$$U := 110 \cdot V$$

$$R := \frac{U}{I} \qquad R = 11\,\Omega$$

Misol

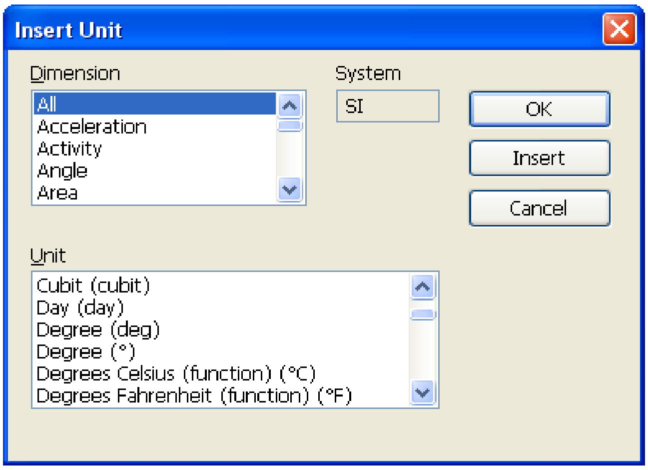
$$I := 20 \cdot A$$

$$U := 210 \cdot V$$

$$R := \frac{U}{I}$$

$$R = 10.5\ \Omega$$

O‘lcham birligini boshqacha, qo‘lda emas, balki Mathcad vositalari yordamida ham kiritish mumkin. Buning uchun Insert / Unit (Qo‘yish / Birlik) komandasini tanlang yoki instrumentlarning standart panelida o‘lchov stakani aks ettirilgan knopkani yoki <Ctrl>+<U> klavishalarni bosing. So‘ngra ochilgan dialog darchasi Insert Unit (O‘lchov birliklarini qo‘yish)ning Unit (O‘lchov birligi) ro‘yxatidan kerak bo‘lgan o‘lchov birligi Ampere (A)ni tanlang va OK knopkasini bosing. Agar Siz muayyan o‘lchov birligini tanlashda qiynalsangiz, lekin o‘zgaruvchining o‘lchov birligi qanday ekanligini bilsangiz (bizning holda bu elektr toki), uni dialog darchasi Insert Unit (O‘lchov birliklarini qo‘yish)ning Dimension (O‘lcham) ro‘yxatidan tanlashga harakat qilib ko‘ring. Bunda Unit (O‘lchov birligi) ro‘yxatida bu kattalik uchun ruxsat etiladigan o‘lchov birliklari paydo bo‘ladi, ulardan birini tanlab olish osonroq bo‘ladi (1.10-rasm).



1.10-rasm. O‘lchamli kattaliklarning o‘lchov birliklarini qo‘yish

Dialog darchasi Insert Unit dan chiqmasdan turib, OK knopkasining o‘rniga Insert (Qo‘yish) knopkasini bosib ham o‘lchov birliklari ro‘yxatini ko‘rish mumkin. Bu holda Siz o‘lchov birligi hujjatning zarur joyida paydo bo‘lganligini ko‘rasiz va uni Insert Unit dialogidan chiqmasdan turib, almashtirishingiz mumkin.

Izoh

O‘lchov birliklarining ko‘pini turli simvollar ko‘rinishida taqdim etish mumkin. Masalan, amper – *A* yoki *amp*, Om – *ohm* ko‘rinishlarida va h.k.

O‘lchovli o‘zgaruvchilar ustida fizik nuqtayi-nazardan oqil bo‘lgan istalgan hisoblarni bajarish mumkin. Qarshilikni kuchlanishning tokka nisbati orqali hisoblash misoli listing 1.17 da keltirilgan.

O‘lchovli o‘zgaruvchilar bilan ishlayotganingizda Mathcad hisoblar korrektliligini uzluksiz nazorat qilib boradi. Masalan, o‘lchov birliklari bir xil bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni qo‘shib bo‘lmaydi, aks holda xatolik to‘g‘risida "The units in this expression do not match" (Bu ifodada o‘lchov birliklari mos emas) degan xabar olinadi. Lekin amperlarni kiloamperlar bilan va o‘lchamlari har xil o‘lchov birliklari tizimlarida ifodalangan o‘zgaruvchilarni qo‘shimcha ruxsat etiladi.

Izoh 1

Mathcad 12 da har xil o‘lchovli o‘zgaruvchilarni birgalikda qo‘llashning to‘g‘riligini nazorat qilish kuchaytirildi, bu xatoliklarga yo‘l qo‘yilishining oldini oladi. Xususan, o‘lchamni statik tekshirishda qo‘llanilgan texnika argument qiymatiga qarab har xil o‘lchamli natija berishi mumkin bo‘lgan funksiyalarni hisoblashni ma`n etadi, masalan, $f(x=0)=1*m^2$ va $f(x=l)=l*m^3$ va h.k. Bundan tashqari o‘lchamli o‘zgaruvchilarni butun bo‘lmagan son darajasiga oshirish, masalan $(l*s)^{2.31}$ va yana ba`zi boshqa operatsiyalarni bajarish ma`n qilingan.

Izoh 2

Listing 1.17 da ko‘rsatilganidek, o‘lchov birliklarini ancha soddaroq birliklarga avtomatik tarzda o‘tkazilishini ulash mumkin (javob avtomatik ravishda “om”ga o‘tkaziladi). Buning uchun Format / Result / Unit Display (Format / Natija / O‘lcham aks ettirilishi) komandasi yordamida o‘lchamlarga bag‘ishlangan Result Format (Natija formati) dialog darchasi vkladkasiga o‘ting. Unda Simplify units when possible (Mumkin bo‘lganda birliklarni soddalashtiring) bayroqchasini o‘rnating.

SI tizimida istalgan o‘lchamli o‘zgaruvchining o‘lchov birligini kiritib o‘rnatilgan funksiya siunitsof yordamida chiqarish mumkin:

- siunitsof (*a*) – (SI tizimida) o‘zgaruvchining o‘lchov birligini qaytaradi;
- *a* – o‘zgaruvchi.

Diqqat!

Mathcadning oldingi versiyalarida bu funksiyaning nomi – UnitsOf edi (listing 1.18).

Listing 1.18. SI tizimida Mathcad 2001-11 da o‘lchamli kattalikning o‘lchov birligini chiqarish

$$v := 40 \cdot \frac{km}{hr}$$

$$v = 11.111 \frac{m}{s}$$

$$UnitsOf(v) = 1 \frac{m}{s}$$

Misollar

1. $v := 85 \cdot \frac{km}{hr}$ 2. $a := 68 \cdot \frac{km^2}{hr}$

$v = 23.611 \frac{m}{s}$ $a = 1.889 \times 10^4 \frac{m^2}{s}$

$UnitsOf(v) = 1 \frac{m}{s}$ $UnitsOf(a) = 1 \frac{m^2}{s}$

1.3. Formulalarni kiritish va tahrirlash

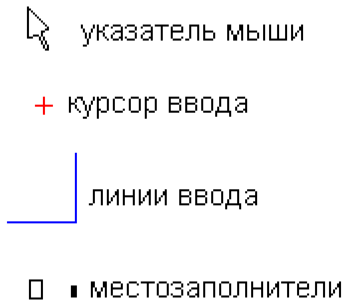
Mathcadning formula redaktori matematik ifodalarni tez va samarali kiritish va o‘zgartirish imkonini beradi. Lekin uni qo‘llashning ba`zi aspektlari intuitiv emas, bu – ushbu formulalar, bo‘yicha hisoblashlarda xatoliklarning oldini olish zarurati bilan bog‘liqdir. Shuning uchun formula redaktorining xususiyatlari bilan tanishishga biroz vaqtingizni ayamang, keyinchalik real ishlaganda ancha vaqtingizni tejaysiz.

1.3.1. Mathcad redaktori interfeysining elementlari

Mathcad redaktori interfeysi elemenlarini sanab o‘tamiz:

- sichqon ko‘rsatkichi (mouse pointer) – sichqon harakati bo‘yicha siljib, Windows ilovalaridagi kabi vazifani bajaradi;
- kursor – uch turdagi hujjatlardan birining ichida bo‘ladi:
  - kiritish kursori (crosshair) – qizil rangli xoch (крест), u hujjatdagi bo‘sh joyni belgilaydi, u joyga matn yoki formula kiritish mumkin;
  - kiritish chizig‘i (editing lines) – matnda yoki formulada ma`lum qismni ajratib turuvchi ko‘k rangli gorizontal (underline) va vertikal (insertion line) chiziqlar;
  - matnni kiritish chizig‘i (text insertion point) – qizil vertikal chiziq, matn jabhalari uchun kiritish chiziqlari analogi;
- o‘rinto‘ldirgichlar (placeholders) – tugallanmagan formulalar ichida paydo bo‘ladi; bu joylar simvol yoki operator bilan to‘ldirilishi kerak:
- simvol o‘rinto‘ldirgichi – qora to‘rtburchak;
- operator o‘rinto‘ldirgichi – qora to‘rtburchakli ramka.

Formulalarni tahrirlashga taalluqli bo‘lgan kursorlar va o‘rinto‘ldirgichlar 1.11-rasmda keltirilgan.



– sichqon ko‘rsatkichi

– kiritish kursori

– kiritish chizig‘i

– o‘rinto‘ldirgichlar

1.11-rasm. Tahrirlash interfeysi

1.3.2. Formulalarni kiritish

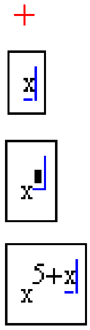
Mathcad darchasining katta qismini Mathcad hujjatining ishchi jabhasi egallaydi, unga foydalanuvchi matematik ifodalar, matn maydonlari va dasturlash elementlari kiritiladi. Matematik ifodalarni Mathcad hujjatining istalgan bo‘sh joyiga kiritish mumkin. Buning uchun kiritish kursorini hujjatning Siz istagan joyiga sichqonni shiqillatib joylashtiring va klaviaturadagi klavishalarni bosib formulani kirita boshlang. Bunda hujjatda matematika jabhasi (math region) yaratiladi, u Mathcad protsessori interpretatsiya qiladigan formulalarni saqlash uchun mo‘ljallangan.

x^5+x ifodani kiritish misolida amallar ketma-ketligini namoyish qilamiz (1.12-rasm):

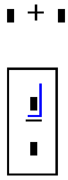
1. Sichqonni shiqillatib kiritish joyini belgilang.
2. <*x*> klavishasini bosing – bu joyda kursor o‘rniga bitta simvol *x* dan tarkib topgan formulali jabha paydo bo‘ladi, bunda u kiritish chiziqlari bilan ajralib turadi.
3. Darajaga oshirish operatorini kiriting, buning uchun <^> klavishasini bosing yoki Calculator (Kalkulyator) instrumentlari panelida darajaga oshirish knopkasini tanlang – formulada daraja qiymatini kiritish uchun o‘rinto‘ldirgich paydo bo‘ladi, kiritish chizig‘i esa bu o‘rinto‘ldirgichni ajratib turadi.
4. Ketma-ket qolgan simvollar <5>, <+>, <*x*> ni kiriting.

Qisqacha xulosalar

Simvollar, raqamlar yoki operatorlarni (masalan, + yoki /) kirita boshlab formulani hujjatga joylashtirish mumkin. Bu hollarning hammasida kiritish kursorining oʻrnida matematika jabhasi (regioni) formula va kiritish chiziqlari bilan birga hosil boʻladi. Bu holda agar foydalanuvchi formulani operatordan kiritishni boshlasa, uning turiga qarab oʻrintoʻldirgichlar avtomatik tarzda paydo boʻladi, bu joylar toʻldirilmasa Mathcad protsessori formulani qabul qilmaydi (1.13-rasm).



1.12-rasm. Formulani kiritishga misol



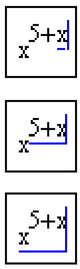
1.13-rasm. Operatorlarni kirita boshlashga misol

1.3.3. Formulalar ichida kiritish chizigʻini siljitish

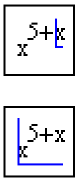
Formulani oʻzgartirish uchun Siz sichqonni shiqillating, bunda formula jabhasiga kiritish chizigʻi joylashtiriladi va tuzatmoqchi boʻlgan joyga oʻting. Formula doirasida kiritish chizigʻini quyidagi ikki usulning biri boʻyicha siljitiladi:

- zarur boʻlgan joyda sichqonni shiqillatiladi;
- klaviaturada strelkalar, probellar va <Ins> klavishalarini bosiladi:
  - strelkani klavishalarning vazifasi tabiiy – kiritish chizigʻini yuqoriga, pastga, chapga yoki oʻngga siljitadi;
  - probel formulaning turli qismlarini ajratish uchun moʻljallangan;
  - <Ins> klavishasi vertikal kiritish chizigʻini gorizontal chiziqning bir boshidan ikkinchi boshiga oʻtkazadi.

Agar formulada probel klavishasi ketma-ket bosilsa (bunga misol 1.12-rasmda keltirilgan), kiritish chizigʻi oʻz holatini, 1.14-rasmda koʻrsatilganidek, siklik oʻzgartirib boradi. Agar bu rasmdagi yuqori vaziyatda <<—> strelkasi bosilsa, kiritish chizigʻi chapga siljiydi (1.15-rasm). Endi probel klavishasi bosilsa, kiritish chizigʻi formulaning ikkita qismidan birini galma-gal ajratib turadi.



1.14-rasm. Probel yordamida kiritish chizigʻi holatini oʻzgartirish (kollaj)



1.15-rasm. <«—> strelkasi bilan surilgandan so‘ng kiritish chiziqlari holatini probel bilan o‘zgartirish (kollaj)

Maslahat

Formulalar ichida siljitish uchun bo‘sh joy (пробел)dan foydalanishga o‘zingizni ko‘niktirib, Mathcadda ishlashni ancha osonlashtirishingiz mumkin.

Qisqa xulosalar

Strelkali va probel klavishalarining kombinatsiyasi formula ichida osonlik bilan siljish imkonini beradi. Biroz tajriba to‘plaganingizdan so‘ng Siz bu texnikani osonlik bilan egallaysiz. Ba`zi hollarda sichqon ko‘rsatkichi yordamida kiritish chizig‘ini formulaning kerakli joyiga o‘rnatish qiyin bo‘ladi. Shu sababli Mathcadda buning uchun klaviaturadan foydalanish yaxshiroq.

1.3.4. Formulalarni o‘zgartirish

Mathcadda formulalarni tuzatish operatsiyalarining ko‘p qismi tabiiy tarzda realizatsiya qilingan, lekin ularning ba`zilari umumqabul qilingandan biroz farqlanadi, bu Mathcad – hisoblash tizimi ekanligiga bog‘liq.

*Formulalarni o‘zgartirish bo‘yicha asosiy amallar*ni ko‘rib chiqamiz.

Operatorni kiritib o‘rnatish

Operatorlar *unar* (bitta operandga ta`sir qiluvchi, masalan, matritsani transportirovka qiluvchi yoki raqam ishorasini o‘zgartiruvchi) yoki *binar* (ikki operandga ta`sir qiluvchi, masalan, + yoki /) bo‘lishi mumkin. Hujjatga yangi operator kiritib o‘rnatilganda Mathcad unga nechta operandlar talab qilinishini aniqlaydi. Agar operator kiritib o‘rnatiladigan nuqtada bitta yoki ikkita operand yo‘q bo‘lsa, Mathcad avtomatik tarzda operator yoniga bitta yoki ikkita o‘rinto‘ldirgichni joylashtiradi.

Diqqat!

Operator kiritilayotgan paytda formuladagi kiritish chiziqlari bilan ajratilgan ifoda uning birinchi operandi bo‘lib qoladi.

Operator kiritib o‘rnatilayotgan onda formulada kiritish chiziqlari ajratib ko‘rsatgan ifoda – uning birinchi operandi bo‘lib qoladi.

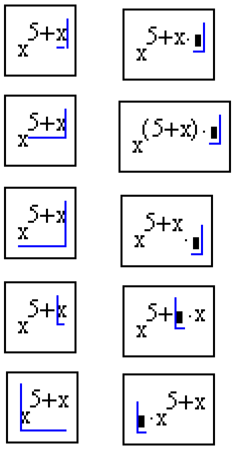
Formulaga operatorni kiritib o‘rnatish ketma-ketligi:

1. Kiritish chiziqlarini formulaning birinchi operandi bo‘lib qolishi kerak bo‘lgan qismiga o‘rnating.
2. Instrumentlar panelidagi knopkani yoki klavishalar majmuasini bosib operatorni kiriting.

Izoh

Operatorni formulaning kiritish chiziqlari bilan ajratilgan qismidan keyin emas, balki oldin qo‘yish uchun, uni kiritishdan oldin <Ins> klavishasini bosing, bunda kiritishning vertikal chizig‘i oldinga siljiydi. Bu, xususan, inkor qilish (отрицание) operatorini kiritib o‘rnatish uchun ahamiyatli.

1.16-rasmda qo‘shish operatorini formulaning turli qismlariga kiritib o‘rnatishga bir nechta misollar keltirilgan. 1.16-rasmdagi chapdagi ustunda formulada kiritish chiziqlarining mumkin bo‘lgan joylashishlari, o‘ngdagi ustunda esa – qo‘shish operatorini kiritib o‘rnatish (ya`ni <+> klavishasini bosish) natijasi keltirilgan. Rasmdan ko‘rinadiki, formulaning kiritish chiziqlari bilan belgilangan qismi birinchi qo‘shiluvchi bo‘lishi uchun, zarur bo‘lganda, qavslarni Mathcadning o‘zi qo‘yadi.



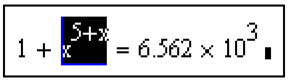
1.16-rasm. Operatorni formulaning turli qismlariga kiritib o‘rnatish (kollaj)

Ba`zi operatorlarni Mathcad kiritish chiziqlari holatidan qat`iy nazar, to‘g‘ri joyga o‘zi qo‘yadi. Sonli-raqamli chiqarish operatori “=” bunga misol bo‘ladi, u ma`nosi bo‘yicha butun formulaning qiymatini sonli-raqamli ko‘rinishda chiqaradi.

Formulaning bir qismini ajratib ko‘rsatish

Qandaydir matematik jabhada formulaning bir qismini ajratib ko‘rsatish uchun:

1. Uni kiritish chiziqlari orasiga joylashtiring, bunda, zarurat bo‘lganda, klavishalar – strelkalar va probellardan foydalaning.
2. Sichqon ko‘rsatkichini kiritishning vertikal chizig‘iga joylashtiring, sichqonning chap knopkasini bosing va shu holda ushlab turing.
3. Sichqon knopkasi bosilgan holda sichqon ko‘rsatkichini kiritishning gorizontal chizig‘i bo‘ylab siljiting, bunda formula bir qismining rangi o‘zgaradi.
4. Formula zarur qismining rangi o‘zgarganda, sichqon knopkasini qo‘yib yuboring.



1.17-rasm. Formula bir qismini ajratib ko‘rsatish

Izoh

Formulaning bir qismini sichqon yordamisiz, <Shift> klavishasini bosib turgan holda strelkali klavishalarni bosib, ajratish mumkin. Bu holda kiritish chiziqlarini siljitish o‘rniga formulaning mos qismi ajratiladi.

Formulaning bir qismini o‘chirish (yo‘qotish)

1. Uni ajratib ko‘rsating.

2. <Del> klavishasini bosing.

3. Bundan tashqari formulaning bir qismini quyidagicha o‘chirish mumkin: bu qism kiritishning vertikal chizig‘i oldiga joylashtiriladi va <BackSpace> klavishasi bosiladi. Ba`zi hollarda, masalan murakkab formulalar bilan ishlaganda, istalayotgan samaraga erishish uchun <BackSpace> klavishasini qaytadan bosish talab etilishi mumkin.

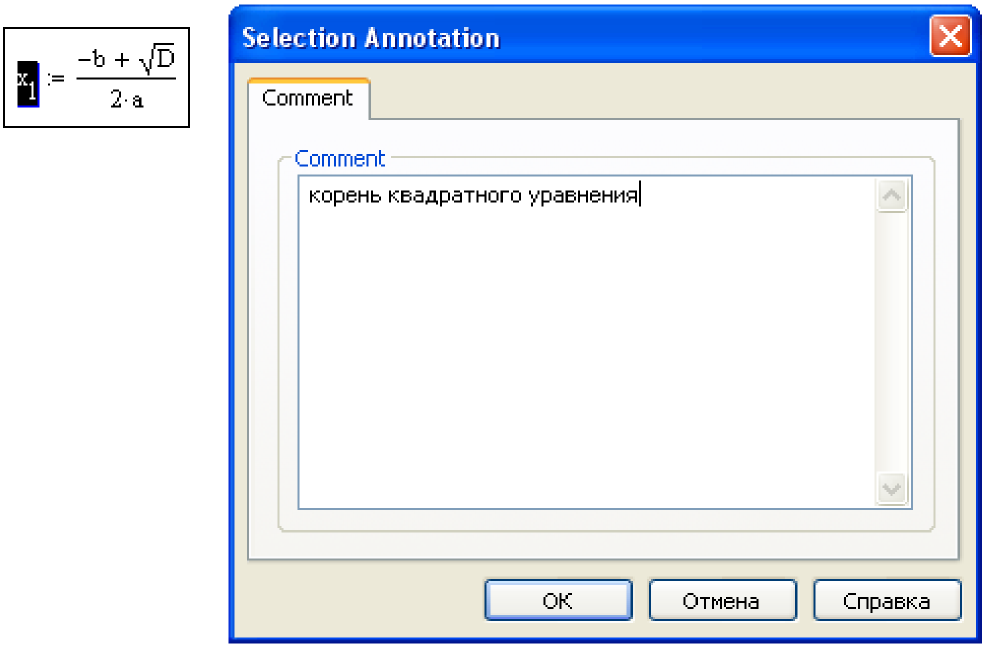
Izoh

Formulaning bir qismini yo‘qotishning yana bir usuli: zarur bo‘lgan qismni ajrating, so‘ngra <Ctrl>+<X> klavishalar kombinatsiyasini bosing, bunda bu qism kesib olinadi va almashtirish buferiga joylashtiriladi. Bu usul, formulaning fragmentidan keyinchalik foydalaniladigan bo‘lsa, qulay bo‘ladi.

Matn bloklari

Mathcad hujjatlarida matnli obyektlar hamda turli kommentariylar va izohlar bo‘lishi mumkin.

Matnni bevosita Mathcad hujjatining ishchi jabhasiga kiritish uchun bevosita matnni kiritishni boshlashdan avval <"> klavishasini bosish kifoya. Natijada, kursor joylashgan joyda xarakterli ajratilgan jabha paydo bo‘ladi – bu uning mazmuni Mathcad protsessori tomonidan formula sifatida emas, balki oddiy matnli blok sifatida qabul qilinishini bildiradi (1.18-rasm, yuqoridagi). Matn atributlarini bloklar chegaralarida Formatting (Formatlash) panelidagi matn redaktorlari uchun standart vositalar bilan tahrirlash mumkin.



1.18-rasm. Hujjatning ishchi jabhasida matn va formula fragmentiga kommentariy

Kommentariylar

Interfeys bilan bog‘liq bo‘lgan bir nechta yangiliklar Sizga Mathcad hujjatlarini katta komfort bilan ishlashingizga yordam beradi. Ular – turli kommentariylar hujjatlariga kiritib o‘rnatilgan qo‘shimcha opsiyalardir.

Izohlar (annotation) va *metadanniylar* (metadata) deb nomlanuvchi kommentariylarning bir necha turlari ishlab chiqilgan:

• Hujjat fayliga yagona butunlik sifatida kommentariylar; ular ham Mathcadda ishlaganda va ham Windows OS vositalari bilan fayllarni qidirish va tanlashda uni identifikatsiyalashni osonlashtiradi. Butun hujjatga kommentariylarni qo‘shish va tahrir qilish uchun File / Properties (Fayl / Xossalar) komandasini bajaring va ochilgan dialog darchasida berilgan fayl uchun standart xossalarni (sarlavha, muallif, kommentariylar, tayanch so‘zlar) o‘rnating.

• Alohida ifodalar uchun izohlar; ular – ixcham o‘lchamli oddiy matnlardir. Ularni qo‘shish (ilova qilish) uchun ifodani ajratib ko‘rsating, kontekstli menyuni chaqiring va unda Annotate Selection (Ajratilgan fragmentga izohni qo‘shing) bandni tanlang. Ochilgan dialogda endi izoh matnini kiritish mumkin; unga keyinchalik kontekstli menyuning View / Edit Annotation (Ko‘rib chiqish / Izohni tuzatish) komandasi bilan kirish mumkin. Formulalarning izoh bilan ta`minlangan qismlari (ifoda doirasida kiritish chiziqlari o‘rnatilganda) yashil rangli qo‘shimcha qavslar bilan (ajratilgan o‘zgaruvchi uchun 1.18-rasmda ko‘rsatilganidek) ajratib ko‘rsatiladi.

• Formulalarning alohida elementlariga (o‘zgaruvchilarga, funksiyalarga, ifodalarga) kommentariylar (metadanniylar); ular bir necha parametrlarni berish imkonini beradi. Ularni yaratish uchun formulaning zarur bo‘lgan qismini ajratib ko‘rsating, kontekstli menyuni chaqiring, unda Properties (Xossalar) bandini tanlang va ochilgan dialogda Custom (Qo‘shimcha) qistirmaga o‘ting. Ochilayotgan ro‘yxatlar guruhi yordamida turli ko‘rinishdagi parametrlarni qo‘shib qo‘yish va ular uchun u yoki bu turdagi muayyan qiymatni (matn, son, sana, ha/yo‘q) o‘rnatish mumkin.

• Hujjatda tayanch so‘zlar (glossariy uchun); ularni belgilash qistirmadagi o‘sha Properties (Xossalar) dialogida amalga oshiriladi.

1.3.5. Dasturlash

Mathcadda ishlaganda asosiy instrumentlar – matematik ifodalar, o‘zgaruvchilar va funksiyalardir. Ko‘p hollarda u yoki bu ichki mantiqdan foydalanuvchi formulani (masalan, sharoitlarga qarab turli qiymatlarning qaytib kelishi) bir qatorga yozishning iloji bo‘lmaydi. Dasturaviy modullarning vazifasi – ana shu muammoni yechishdadir; u ifodalar, o‘zgaruvchilar va funksiyalarni bir necha qatorda ifodalaydi, bunda ko‘pincha maxsus dasturaviy operatorlardan foydalaniladi.

Mathcadda dasturlash prinsipi

Dasturlash elementlari yordamida (listing 1.19 da ko‘rsatilganidek) o‘zgaruvchilar va funksiyalarni aniqlash mumkin.

Listing 1.19. Dastur yordamida aniqlangan shart funksiyasi

$$f(x) := \left| \begin{array}{ll} \text{"negative"} & \text{if } x < 0 \\ \text{"positive"} & \text{if } x > 0 \\ \text{"zero"} & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$f(1) = \text{"positive"}$$

$$f(-1) = \text{"negative"}$$

$$f(0) = \text{"zero"}$$

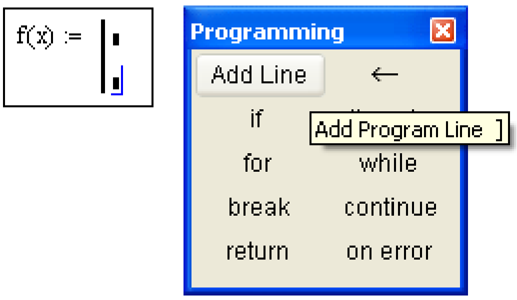
Mathcadda an`anaviy dasturlashning soddalashtirilgan varianti qo‘llanilgan, u Programming (Dasturlash) instrumentlar panelida amalga oshiriladi va qator afzalliklarga ega.

Bu afzalliklar qator hollarda hujjatni oddiyroq va oson o‘qiladigan qiladi:

• sikllar va shartli operatorlarni qo‘llash imkoniyati;

• bir necha oddiy qadamlarni talab qiluvchi funksiyalar va o‘zgaruvchilarni yaratishning soddaligi;

• tarkibida qolgan (boshqa) hujjat uchun berk bo‘lgan funksiyalarni, lokal o‘zgaruvchilardan foydalanish va istisno (исключительный) vaziyatlarga ishlov berish afzalliklaridan foydalanilgan holda, yaratish imkoniyati mavjud.



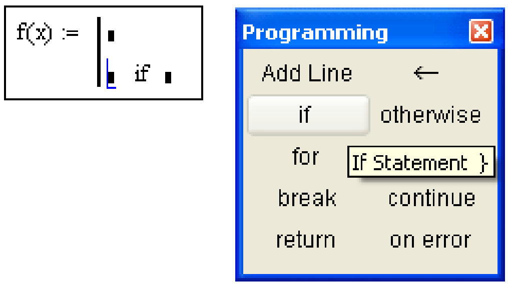
1.19-rasm. Dasturaviy modul yaratilishining boshi

Listing 1.19 da ko‘rsatilganidek dasturaviy modul Mathcadda vertikal chiziq bilan belgilanadi, undan o‘ng tarafda dasturlash tili operatorlari ketma-ket yoziladi. Dasturaviy modulni yaratishni boshlash uchun Programming (Dasturlash) panelida Add One (Chiziq qo‘shilsin) knopkasini (listing 1.19 misolida nom berish simvolidan keyin) bosish lozim. So‘ngra, dasturda kod qatori nechta bo‘lishi taxminan ma`lum bo‘lsa, chiziqlarning zarur bo‘lganicha qatorini Add Line (Chiziq qo‘shilsin) knopkasini ketma-ket bosib hosil qilish mumkin (1.19-rasm).

Paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichlarga, dasturaviy operatorlardan foydalanib, istalgan dasturaviy kodni kiriting. Ko‘rilayotgan misolda har bir o‘rinto‘ldirgichga qator kiritiladi, masalan, o‘rtadagiga – "positive" (1.20-rasm). So‘ngra Programming (Dasturlash) panelidagi If (Agar) knopkasi bosiladi va paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichga x>0 ifoda kiritiladi. Dasturaviy modul to‘liq aniqlangan va birorta o‘rinto‘ldirgich bo‘sh qolmagandan so‘ng, funksiyadan ham sonli-raqamli hisoblarda va ham simvolli hisoblarda va ham simvolli hisoblarda oddiy tarzda foydalanish mumkin.

Diqqat!

Dasturaviy operatorlar nomlarini klaviaturadan kiritmang. Ularni kiritib o‘rnatish uchun faqat suzib chiqadigan yordamchi yo‘riq matnida keltirilgan klavishalar birikmasinigina bosish mumkin (1.19- va 1.20-rasmlar).



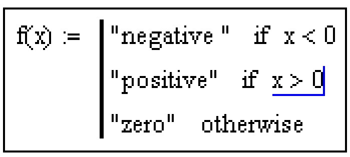
1.20-rasm. Dasturaviy operatorni kiritib o‘rnatish

Dasturaviy kod qatorlarini qo‘shish

Yaratilib bo‘lingan dasturga dasturaviy kod qatorlarini istalgan onda o‘sha Add Line (Chiziq qo‘shilsin) knopkasi yordamida kiritish mumkin. Buning uchun dasturaviy modulning ichida kerakli joyga oldindan kiritish chizig‘ini joylashtirish lozim. Masalan, qatorda kiritish chizig‘ining joylashtirilishi (1.19-rasmda ko‘rsatilgan), ushbu qator oldida yangi qatorning o‘rinto‘ldirgich bilan birga paydo bo‘lishiga olib keladi. Agar vertikal kiritish chizig‘i qator boshidan uning oxiriga surilsa (1.21-rasmda ko‘rsatilganidek), yangi chiziq qatordan keyin paydo bo‘ladi. Agar qator butunicha emas, balki uning faqat bir qismigina ajratib ko‘rsatilsa (1.21-rasm), bu kod yangi qatorning dasturdagi holatiga ta`sir qiladi (Add Line knopkasini bosin natijasi 1.22-rasmda ko‘rsatilgan).

Maslahat

Kiritish chizig‘ini formula ichida joylashtirish uchun nafaqat sichqon va strelkali klavishalardan, balki «probel»dan ham foydalanish mumkin. Probelni ketma-ket bosishlar yordamida kiritish chizig‘i formulaning turli qismlarini «egallab oladi».



1.21-rasm. Kiritish chizig‘ini holati yaratilayotgan dastur qatorining holatiga ta`sir qiladi

Yangi chiziqni 1.22-rasmda ko‘rsatilgan holatga kiritib o‘rnatish nima uchun kerak bo‘lishi mumkin? Ikkita chiziqli yangi vertikal cherta dasturning x>0 (uning sarlavhasida joylashgan) shartiga taalluqli bo‘lgan fragmentini ajratib ko‘rsatadi.

```
f(x) := | "negative "  if  x < 0
        | "positive"  if  | x > 0
        |                 | ▪
        | "zero"   otherwise
```

1.22-rasm. Dasturga yangi qator qo‘yish natijasi (1.21-rasmdagi holatdan)

Listing 1.20. Dasturlashni davom ettirish variantiga misol

```
f(x) := | "negative "   if  x < 0
        | if  x > 0
        |    | "positive"
        |    | "big positive"   if  x > 100
        | "zero"   otherwise

f(1) = "positive"

f(10^5) = "big positive"
```

Dasturni bajarish rejimida, bu esa *f(x)*ni hisoblashda sodir bo‘ladi, kodning har bir qatori ketma-ket bajariladi. Masalan, listing 1.20 ning oxiridan bitta oldindagi qatorida *f(1)* hisoblanadi.

Bu listing kodining har bir qatori ishini ko‘rib chiqamiz.

1. x=1 bo‘lganligi uchun, x<0 sharti bajarilmadi, natijada birinchi qatorda hech narsa sodir bo‘lmaydi.

2. Ikkinchi qatorning sharti x>o bajarilgan, shu sababli kalta vertikal chiziq bilan umumiy fragmentga birlashtirilgan ikkala keyingi qator bajariladi.

3. *f(x)* funksiyasiga *f(x)*="positive" qiymati beriladi.

4. x>1000 sharti bajarilmadi, shu sababli *f(x)*ga "big positive" qiymati berilmaydi, u "positive" qatoriga tengligicha qoladi.

5. Oxirgi qator bajarilmaydi, chunki shartlardan biri (x>0) haqiqiy bo‘lib chiqdi, natijada otherwise ("aks holda") operatoriga zarurat tug‘ilmadi.

Qisqa xulosa

Dasturaviy modullarni yaratishning asosiy prinsipi – kod qatorlarining to‘g‘ri joylashishidadir. Ularning amalini kuzatib borish qiyin emas, chunki bir darajadagi kod fragmentlari dasturda vertikal chertalar yordamida guruhlangan.

Lokal nom berishlar (<—)

Agar Mathcad datsrulash tili u dasturaviy modullar ichida tashqaridan, hujjatning boshqa qismlaridan, «ko‘rinmaydigan» lokal o‘zgaruvchilarni yaratish imkonini bermaganida, u yetarli darajada samarali bo‘lmas edi. Dastur doirasida nom berish, Mathcad hujjatlaridan farqli ravishda, Local Definition (Lokal nom berish) operatori yordamida amalga oshiriladi, Programming (Dasturlash) panelida (<–) strelka ifodali knopkani bosish bilan kiritib o‘rnatiladi.

Diqqat!

Nom berish operatori := ni va chiqarish operatori = ni dasturlar doirasida qo‘llash ruxsat etilmaydi.

Mathcad 12 da dasturaviy modullarda endi paydo bo‘layotgan 12 ta o‘zgaruvchiga o‘zidan-o‘zi (o‘zgarmas) 0 qiymati beriladi. Dasturning oldingi versiyalarida o‘zgaruvchilardan, ularga oldindan qiymat bermasdan, foydalanish xatolar operatsiyasiga olib kelar edi.

Lokal nom berish listing 1.21 da namoyish qilingan. O‘zgaruvchi *z* dasturning faqat vertikal chiziq bilan ajratilgan ichki qismida mavjud bo‘ladi. Hujjatning boshqa joylaridan uning qiymatini olish imkoniyati yo‘q. Shu listingning o‘zida sikl operatori *for* ni qo‘llashga misol keltirilgan.

Listing 1.21. Dasturda lokal nom berish

```
x := | z ← 0
     | for i ∈ 0,1,...5
     |   z ← z + i

x = 6
```

Misollar

```
1. x := | z ← 0
        | for i ∈ 0,1,...5
        |   z ← z + i

   x = 6
```

```
2. y := | c ← 0
        | for k ∈ 0,1,2,3,4,5
        |   c ← c + k

   y = 15
```

```
3. x := | z ← 0
        | for i ∈ 0,1,2
        |   z ← i

   x = 2
```

```
4. y := | c ← 10
        | for k ∈ 0,1..5
        |   c ← c + k

   y = 25
```

1.4. Grafiklar

Grafiklarni qurishning rivojlangan imkoniyati – Mathcadning asosiy afzalliklaridan biridir.

1.4.1. Grafiklarning turlari

Mathcadga bir nechta har xil turdagi grafiklar kiritib o‘rnatilgan, ularni ikki yirik guruhga ajratish mumkin:

- *ikki o‘lchamli grafiklar:*
    - X-Y (dekart) grafigi (X-Y Plot);
    - qutbiy grafik (Polar Plot);
- *uch o‘lchamli grafiklar:*
    - uch o‘lchamli sirt grafigi (Surface Plot);
    - sath (контур) chiziqlari (Contour Plot);
    - uch o‘lchamli gistogramma (3D Bar Plot);
    - nuqtalarning uch o‘lchamli ko‘pchiligi (3D Scatter Plot);
    - vektor maydoni (Vector Field Plot).

Grafiklarni turlarga bo‘lish birmuncha shartlidir, chunki ko‘p sonli parametrlarning o‘rnatilishini boshqarib, grafiklar turlarining kombinatsiyalarini hamda yangi turlarini (masalan, taqsimlanishning ikki o‘lchamli gistogrammasi – oddiy X-Y grafikning bir turidir) yaratish mumkin.

1.4.2. Grafikni yaratish

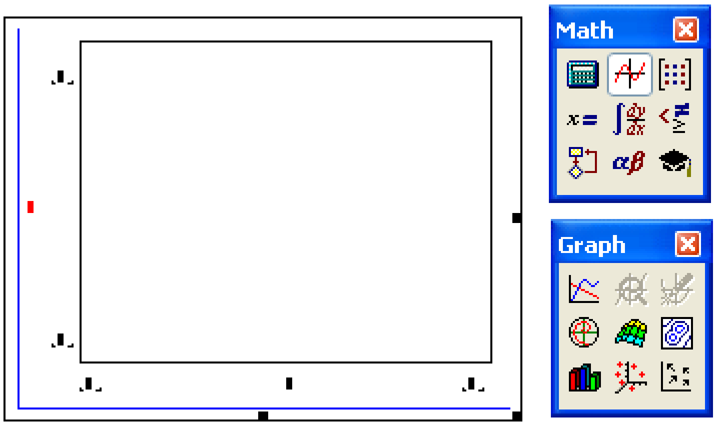
Hamma grafiklar bir xil – Graph (Grafik) instrumentlari paneli yordamida yaratiladi, ular orasidagi farq aks ettiriladigan ma`lumotlar bilan belgilanadi.

Grafikni, masalan ikki o‘lchamli Dekart grafigini, yaratish uchun:

1. Hujjatning qaysi joyiga grafikni kiritib o‘rnatish lozim bo‘lsa, kiritish kursorini o‘sha joyga joylashtiring.

2. Agar ekranda Graph (Grafik) paneli bo‘lmasa, uni Math (Matematika) panelida grafiklar aks ettirilgan knopkani bosib chaqiring.

3. Dekart grafigini yaratish uchun Graph (Grafik) panelida X-Y Plot knopkasini (1.23-rasm) yoki boshqa turdagi grafikni yaratish uchun esa boshqa mos knopkani bosing.



1.23-rasm. Graph paneli yordamida Dekart grafigini yaratish

4. Natijada hujjatning belgilangan joyida grafikning bo‘sh jabhasi bitta yoki bir nechta o‘rinto‘ldirgichlar bilan birga paydo bo‘ladi (1.23-rasm, chapda). O‘rinto‘ldirgichlarga grafikda aks ettirilishi lozim bo‘lgan o‘zgaruvchilar yoki funksiyalar nomlarini kiriting. Dekart grafigida bu – X va Y o‘qlari bo‘ylab qo‘yiladigan ma`lumotlarning ikkita o‘rinto‘ldirgichlaridir.

Agar ma`lumotlar nomi to‘g‘ri kiritilgan bo‘lsa, ekranda zarur bo‘lgan grafik paydo bo‘ladi. Ma`lumotlarni o‘zgartirib, uning tashqi ko‘rinishini formatlab yoki shakllantirishning qo‘shimcha elementlarini kiritib yaratilgan grafikni o‘zgartirish mumkin.

Diqqat!

Ma`lumotlarni noto‘g‘ri aniqlash, grafikni qurishning o‘rniga, xatolik haqida ma`lumotni chiqarishga olib keladi.

Grafikni yo‘qotish uchun uning zonasida sichqonni shiqillating va yuqoridagi menyu Edit (Sozlash)da Cut (Qirqib olish) yoki Delete (Yo‘qotish) punktlaridan birini tanlab olib bosing.

1.4.3. Ikki vektorlarning X-Y grafigi

Dekart grafigini olishning eng oson va ko‘rgazmali usuli – ma`lumotlarning ikki vektorini shakllantirishdir, ular X va Y o‘qlari bo‘ylab qo‘yiladi. Ikkita vektorlar X va Y grafigini qurish ketma-ketligi 1.24-rasmda ko‘rsatilgan.

Bu holda o‘qlar yonidagi o‘rinto‘ldirgichlarga vektorlarning nomi kiritiladi. O‘qlar bo‘ylab vektorlar elementlari qo‘yilishiga ham ruxsat etiladi, ya`ni o‘qlar yonidagi o‘rinto‘ldirgichlarga mos ravishda $x_i$ va $y_i$ nomlari kiritiladi. Natijada grafik hosil bo‘ladi, unda vektorlarning juft elementlariga mos nuqtalar qo‘yiladi, bu nuqtalar o‘zaro to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtiriladi. Ular hosil qilgan siniq chiziqlar ma`lumotlar qatori yoki egri (trace) chiziq deb nomlanadi.

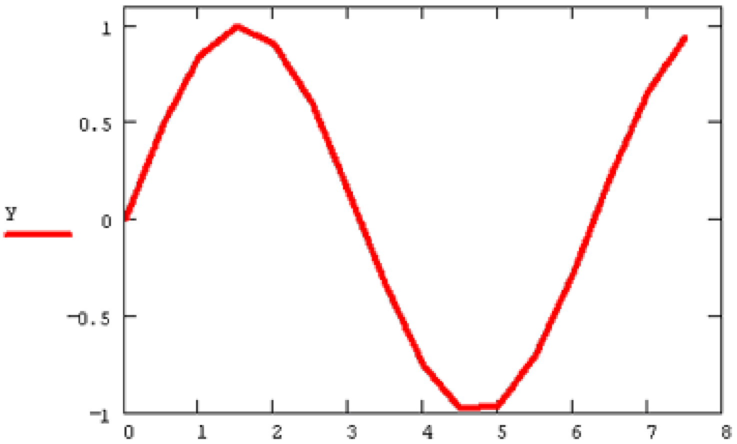
Izoh

Shunga e`tibor beringki, Mathcad vektorlar elementlarining qiymatlari diapazonidan kelib chiqqan holda grafik chegaralarini avtomatik ravishda aniqlaydi.

Shunga o‘xshab, ustunni ajratish operatorini qo‘llab va mos ifodalarni grafik o‘qlari bo‘ylab qo‘yib, ustunlar va qatorlar matritsasining X-Y grafigini osonlik bilan yaratish mumkin.

$i := 0..15$

$x_i := i \cdot 0.5$ $\qquad$ $y_i := \sin(x_i)$



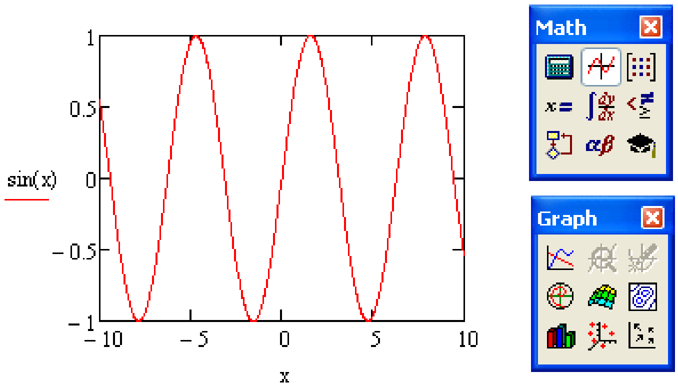
x =, y =

	x (0)	y (0)
0	0	0
1	0.5	0.479
2	1	0.841
3	1.5	0.997
4	2	0.909
5	2.5	0.598
6	3	0.141
7	3.5	-0.351
8	4	-0.757
9	4.5	-0.978
10	5	-0.959
11	5.5	-0.706
12	6	-0.279
13	6.5	0.215
14	7	0.657
15	7.5	0.938

1.24-rasm. Ikkita vektorlarning X-Y grafigi

1.4.4.Funksiyaning X-Y grafigi

Istalgan skalyar funksiya *f(x)*ning grafigini ikki usulda qurish mumkin. Birinchi usulda funksiya qiymatlari diskretlashtiriladi, bu qiymatlar vektorga beriladi va vektor grafigi quriladi. 1.24-rasmdagi sinus grafigi shu usulda olingan. Ikkinchi, grafikni tez qurish deb nomlanadigan osonroq usulda, funksiya o‘rinto‘ldirgichlarning biriga (masalan, *y* – Y o‘qiga), argument nomlari esa – boshqa o‘q yonidagi o‘rinto‘ldirgichga kiritiladi (1.25-rasm).



1.25-rasm. Funksiya grafigining tez qurilishi

Natijada Mathcadning o‘zi argument qiymatlari doirasida (indamaslik bo‘yicha o‘zgarmas -10 dan 10 gacha oraliqqa teng deb qabul qilingan) funksiya grafigini yaratadi. Tabiiyki, keyinchalik argument qiymatlari diapazonini o‘zgartirish mumkin, bunda grafik avtomatik tarzda yangi diapazonga moslashadi.

Agar funksiya argumenti o‘zgaruvchisiga hujjatda grafik qurilgunicha qandaydir qiymat berilgan bo‘lsa, grafik tez qurilishi o‘rniga ushbu qiymat hisobga olingan holda funksiya bog‘lanishi chiziladi.

1.4.5. Ma`lumotlarning bir nechta qatorini qurish

Bitta grafikda 16 tagacha turli bog‘lanishlar chizilishi mumkin.

Grafikda yana bitta egri chiziqni qurish uchun quyidagi amallar bajarilishi lozim:

1. Kiritish chiziqlarini shunday joylashtiringki, ular Y koordinata o‘qi yozuvida joylashgan ifodani butunlay qamrab olsin (1.26-rasm).

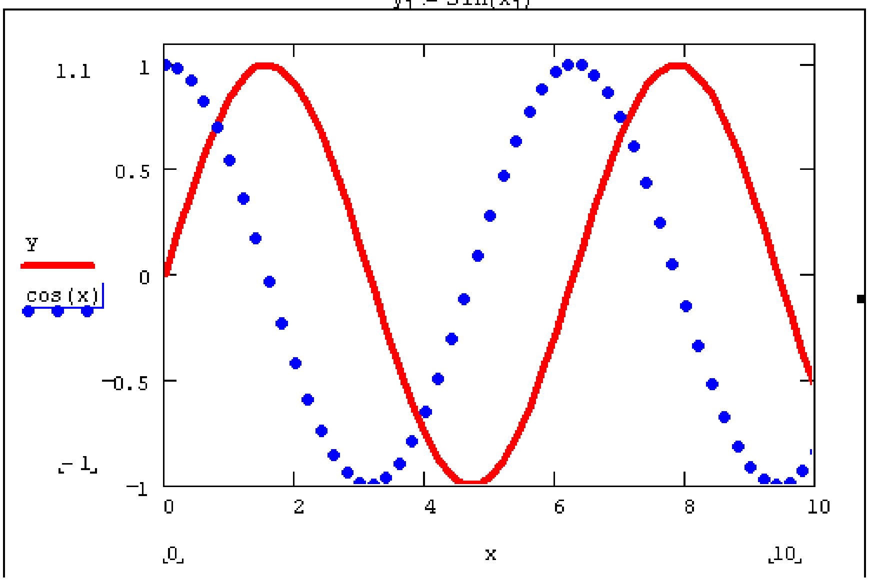
2. <,> klavishasini bosing.

3. Natijada o‘rinto‘ldirgich paydo bo‘ladi, unga ikkinchi egrilik uchun ifodani kiritish lozim.

4. Bu ifodadan tashqarida (grafikda yoki undan tashqarida)gi istalgan joyda sichqonni shiqillating.

$i := 0..50$

$x_i := i \cdot 0.2$ $\quad y_i := \sin(x_i)$

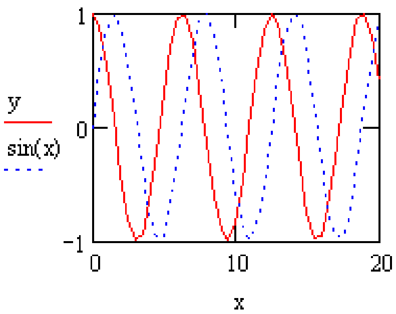


1.26-rasm. Bitta grafikda bir nechta bog‘lanishlarni chizishi

Misol

$i := 0..40$

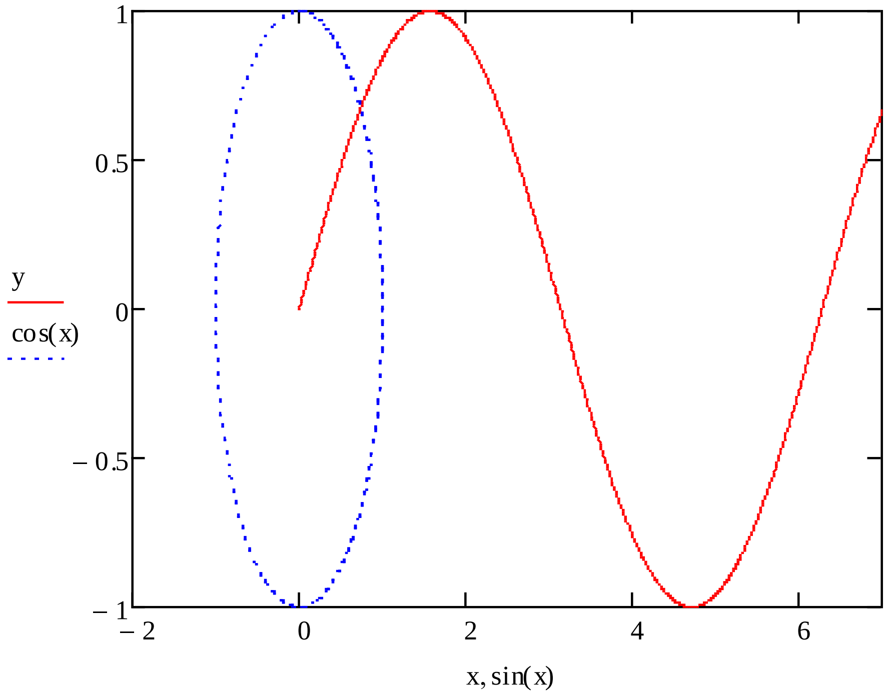
$x_i := i \cdot 0.5$ $\quad y_i := \cos(x_i)$



Bundan keyin grafikda ikkinchi egrilik aks ettiriladi. 1.26-rasmda ma`lumotlarning ikkita qatori chizib bo‘lingan, vergulli <,> klavishaning bosilishi uchinchi o‘rinto‘ldirgich paydo bo‘lishiga olib keladi, uning yordamida esa ma`lumotlarning uchinchi qatorini aniqlash mumkin.

Izoh

Grafikdan ma`lumotlar qatorlarining bitta yoki bir nechtasini yo‘qotish uchun <BackSpace> yoki <Del> klavishalari yordamida koordinata o‘qlari yonidagi ularga mos yozuvlarni yo‘qoting.



1.27-rasm. Har xil argumentdan bir nechta bog‘lanishlarni qurish

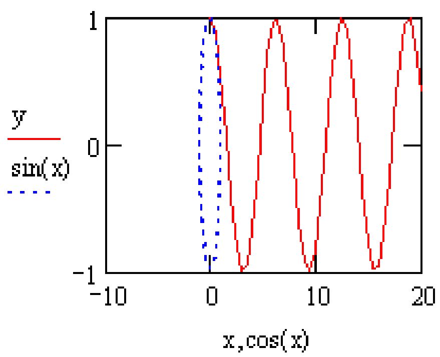
Bayon qilingan usul bilan bir argumentga taalluqli bo‘lgan bir nechta bog‘lanishlar yaratiladi.

Bitta grafikda har xil argumentlarning funksiyalariga, chizish uchun *x* o‘qi yonida vergul orqali, bu argumentlarning nomlarini kiritish lozim (1.27-rasm).

Misollar

1. $i := 0..40$

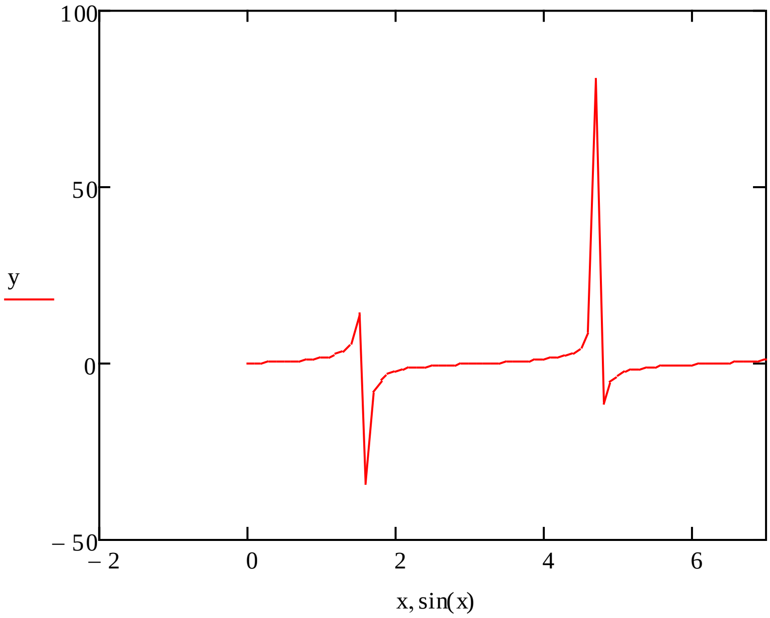
$x_i := i \cdot 0.5$ $\qquad y_i := \cos(x_i)$



2. $i := 0..100$

$x_i := i \cdot 0.1$

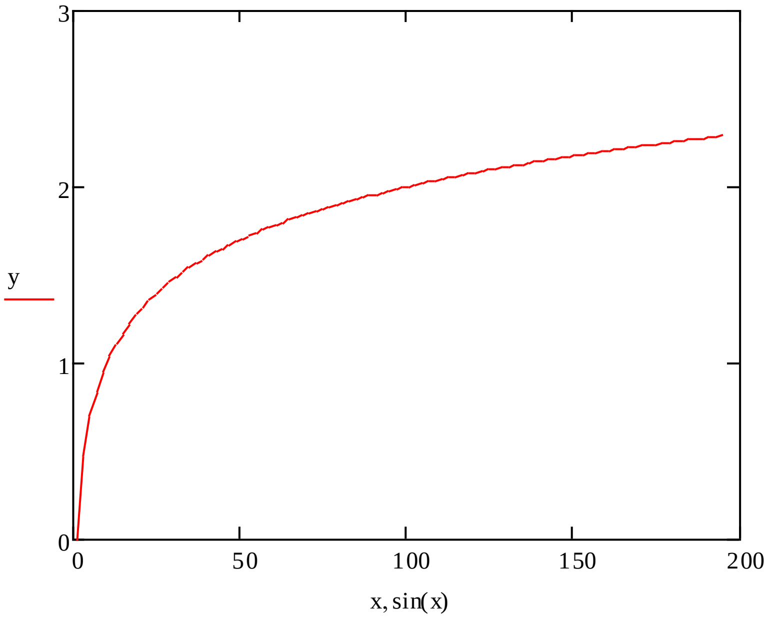
$y_i := \tan(x_i)$



3. $\mathbf{i := 1..100}$

$x_i := 2 \cdot i - 5$

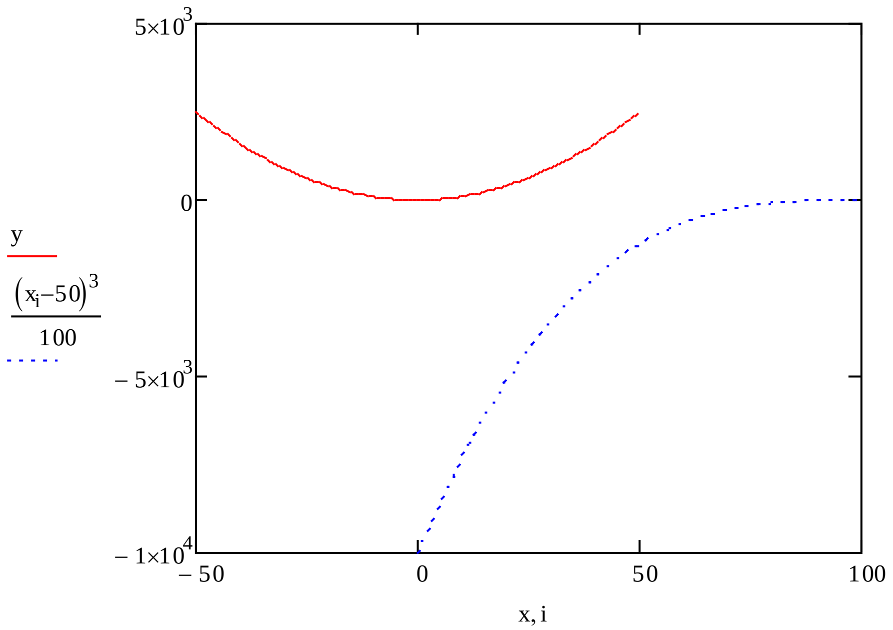
$y_i := \log(x_i)$



4. $\mathbf{i := 0..100}$

$x_i := i - 50$

$y_i := (x_i)^2$



1.4.6. Grafiklarni formatlash

Grafiklar koordinata o‘qlarini formatlash imkoniyatlari – bu ularning tashqi ko‘rinishini/diapazonini, shkalani, numeratsiyani va markerlar yordamida o‘qlarda ba`zi qiymatlarning aks ettirilishini boshqarishdir.

O‘qlar masshtabi

Grafik birinchi marta qurilayotganda Mathcad ikkala koordinata o‘qlari uchun taqdim etilgan diapazonni avtomatik tarzda tanlaydi.

Bu diapazonni o‘zgartirish uchun:

1. Grafik doirasida sichqonni shiqillatib, grafikni tahrirlashga o‘ting.
2. Grafik ajratib ko‘rsatiladi, uning har bir o‘qi yonida raqamli ikkita maydon paydo bo‘ladi; bu raqamlar diapazon chegaralarini bildiradi. O‘qning mos chegarasini tahrirlash uchun maydonlar birining jabhasida sichqonni shiqillating.
3. Kursorni boshqaruvchi klavishalar va <BackSpace> va <Del> klavishalardan foydalanib, maydondagi narsalarni o‘chiring.
4. Diapazonning yangi qiymatini kiriting.
5. Maydon tashqarisida shiqillating, grafik yangi chegaralarda avtomatik ravishda qaytadan chiziladi.

Qaysidir diapazonning avtomatik tanlanganligini qaytarish uchun mos maydondan raqamni o‘chiring va undan tashqarida shiqillating. Shkala chegarasini Mathcad grafikda taqdim etilayotgan ma`lumotlar qiymatlariga qarab tanlaydi.

O‘qlarning xossalari

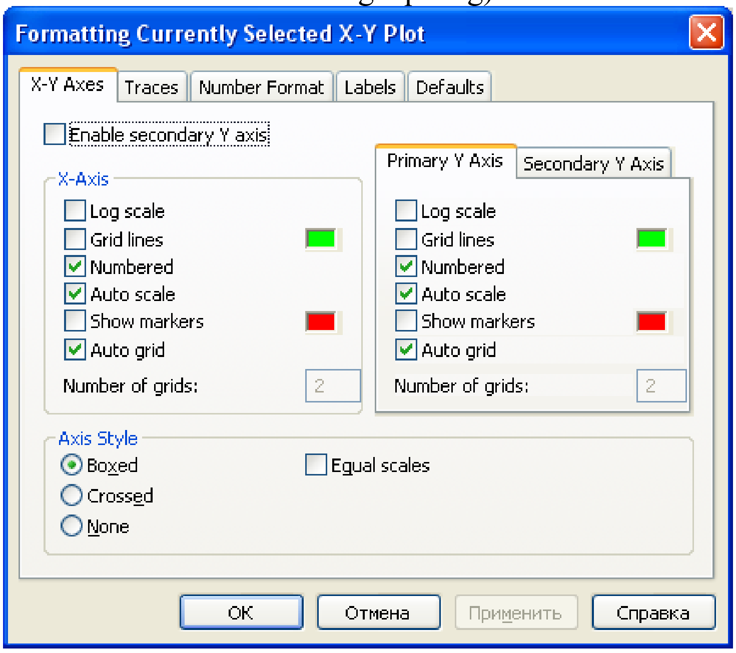
Koordinata o‘qiga chizilgan shkalaning tashqi ko‘rinishining o‘zgarishi dialog darchasi Formatting Currently Selected X-Y Plot (Tanlab olingan grafikni formatlash) yordamida amalga oshiriladi, bunda X-YAxes (X-Y o‘qlari) qistirmasiga o‘tish lozim (1.28-rasm). Sichqonni grafik zonasida ikki marta shiqillatib yoki Format / Graph / X-Y Plot (Format / Grafik / X-Y Grafik) komandasini bajarib yoki kontekstli menyuda Format (Format) komandasini tanlab dialogni chaqirish mumkin.

Bayroqchalar va uzgich-ulagich (переключатель)lar yordamida har bir o‘qning tashqi ko‘rinishini osonlik bilan o‘zgartirish mumkin. Bu amalni bajaruvchi opsiyalar va ularning amallari:

- **Log scale (Logarifmik masshtab)** – ushbu o‘q bo‘yicha grafik logarifmik masshtabda chiziladi; agar ma`lumotlar bir necha tartibda farqlansa, bu amal foydali bo‘ladi;

Izoh

Mathcad 12 da grafiklarni logarifmik masshtabda qurishning yangi imkoniyatlari paydo bo‘ldi (quyida "Grafiklar logarifmik masshtabda" bo‘limiga qarang).



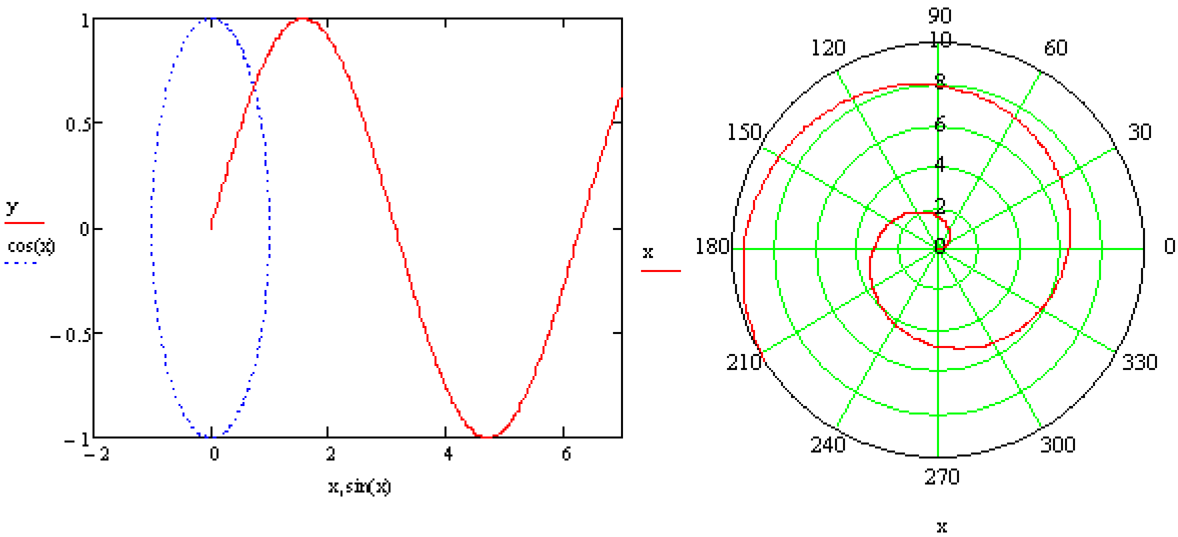
1.28-rasm. Formatting Currently Selected X-Y Plot dialog darchasi

- **Grid lines (Setka chiziqlari)** – setka chiziqlarini ko‘rsatish (setka misoli 1.29-rasmda);
- **Numbered (Numerlash)** – shkala numeratsiyasini ko‘rsatish; agar bu bayroqcha olib tashlansa, shkalani belgilaydigan raqamlar yo‘qolib ketadi;
- **Autoscale (Avtomatik masshtab)** – Mathcad protsessori o‘q diapazonini avtomatik ravishda tanlaydi;
- **Show markers (Markerlarni ko‘rsatish)** – o‘qlarda qiymatlarni ajratib ko‘rsatish (выделение) (quyida "Markerlar" bo‘limiga qarang);

$$i := 0..1000$$

$$x_i := i \cdot 0.01$$

$$y_i := \sin(x_i)$$

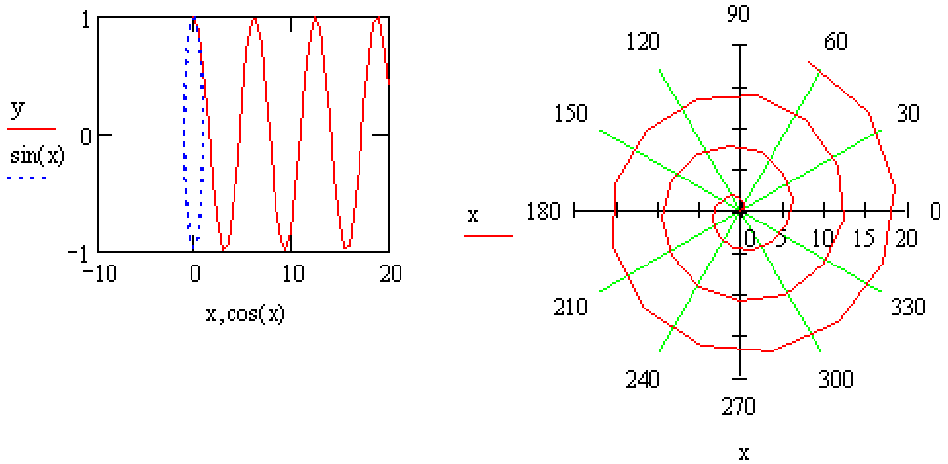


1.29-rasm. Dekart va qutbiy grafiklarda setka chiziqlari, o‘qlar turi – Crossed

Misol

$i := 0..40$

$x_i := i \cdot 0.5$ $\qquad y_i := \cos(x_i)$



• **AutoGrid (Avtomatik shkala)** – shkalani bo‘lish Mathcad protsessori tomonidan avtomatik tarzda bajariladi; agar bu bayroq o‘chirilgan bo‘lsa, kiritish maydonida uning yonida shkalada beriladigan belgilar sonini ko‘rsatish lozim;

• **Equal scales (Bir xil masshtab)** – *x* va *y* o‘qlari majburan bir xil masshtabda chiziladi;

• **Axes Style (O‘q ko‘rinishi)** – koordinata tizimlarining uch turidan birini tanlab olish mumkin:

- **Boxed (To‘g‘ri to‘rtburchak)** – 1.26- va 1.27-rasmlarda ko‘rsatilganidek;
- **Crossed (Kesishish)** – koordinata o‘qlari ikki o‘zaro kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ko‘rinishida (1.29-rasm);
- **None (Yo‘q)** – koordinata o‘qlari grafikda ko‘rsatilmaydi.

Izoh

Bayon qilingan parametrlarni Axis Format (O‘q formati) dialog darchasida ham o‘zgartirish mumkin, u o‘qda ikki marta shiqillatilganda paydo bo‘ladi.

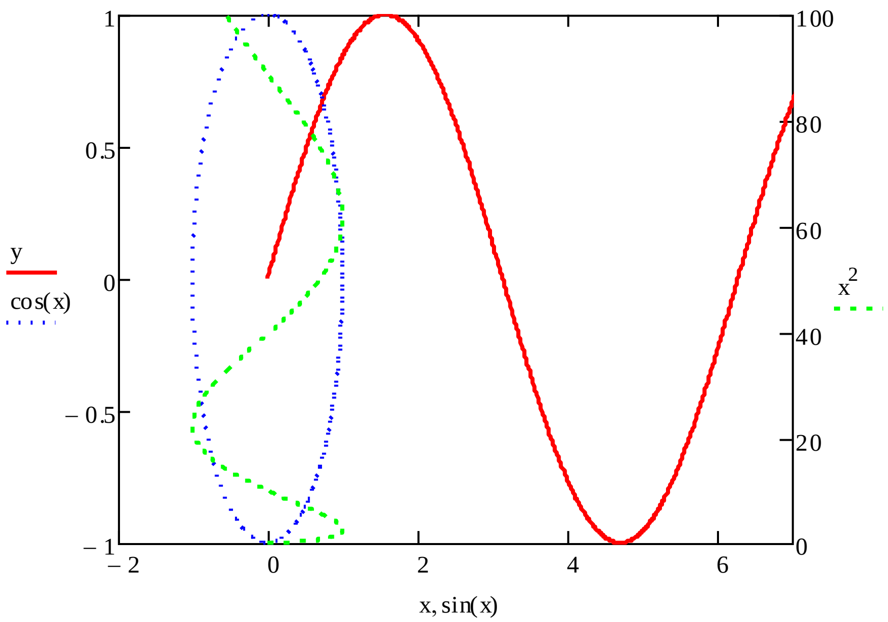
Ikkinchi o‘q Y

Mathcad 12 da o‘z shkalasiga ega bo‘lgan ikkinchi o‘q Y ni qo‘shishning qo‘shimcha imkoniyati paydo bo‘ldi (1.30-rasm). Agar bitta grafikda qiymatlari bo‘yicha mos kelmaydigan har xil ma`lumotlar (masalan, o‘lchamlari har xil bo‘lgan yoki bir nechta tartibga farqlanuvchi va sh.k. ma`lumotlar) taqdim etilsa, u holda ordinatalarning ikkita o‘qidan foydalanish qulay bo‘ladi.

$i := 0..100($

$x_i := i \cdot 0.0$

$y_i := \sin(x_i)$



1.30-rasm. Ikkita ordinata o‘qili Dekart grafigi

Ordinatalar ikkinchi o‘qi chizilishiga opsiyani berish uchun:

1. Ikki marta shiqillatish bilan dialog darchasi Formatting Currently Selected X-Y Plot (Tanlangan grafikni formatlash)ni chaqiring va uning X-Y Axes (X-Y o‘qlari) qistirmasini oching (1.28-rasmga qarang).

2. Tekshirish bayroqchasi Enable secondary Y axis (Ikkinchi o‘q Y ulansin)ni o‘rnating.

3. Secondary Y axis (Ikkinchi o‘q Y) qistirmasini oching va unda, xuddi birinchi o‘q uchun qilganingizdek, ikkinchi o‘qning istalayotgan parametrlarini sozlang.

4. OK ni bosing.

5. Ikkinchi ordinata o‘qi yonida paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichlarga ushbu o‘q bo‘yicha qo‘yilishi lozim bo‘lgan (Siz istagan) o‘zgaruvchilar va ifodalarning nomlarini kiriting.

6. Lozim topsangiz ikkinchi o‘q Y ning qolgan parametrlari (chegaralar, markerlar va sh.k.)ni sozlang.

Logarifmik masshtabda grafiklar

Yuqorida qayd qilinganidek, logarifmik masshtabda grafiklarni qurish uchun Formatting Currently Selected X-Y Plot (Tanlangan grafikni formatlash) dialogda Log scale (Logarifmik masshtab) opsiyasini o‘rnatish lozim. Bunday grafiklarni tayyorlashda foydalanuvchi mehnatini yengillashtirish maqsadida Mathcad 12 da kiritib o‘rnatilgan funksiyalar logspace va logpts qo‘shilgan.

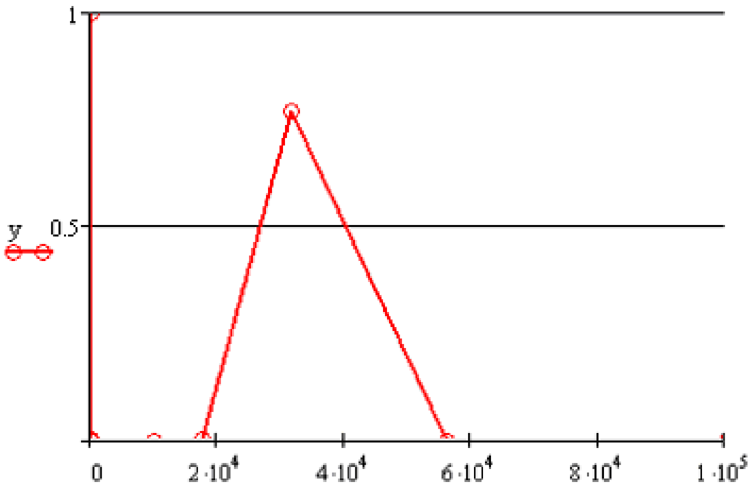
Logspace funksiyasi bir-biridan teng masofada (logarifmik masshtabda) joylashgan nuqtalar vektorini yaratish imkonini beradi, undan argument sifatida foydalaniladi. Masalan, *f(x)* funksiyani ko‘ramiz, u *x* ning ma`lum bir oralig‘ida tez, boshqa oralig‘ida esa sekin o‘zgaradi. Bunday funksiyaning grafigini «chiroyli» va informativ qurish uchun ilgari *x* vektorini qo‘lda yaratishga to‘g‘ri kelar edi, endi esa logspace funksiyasi tufayli, bu jarayonni avtomatlashtirish oson (1.31-rasm).

Logpts funksiyasi nuqtalarning bir necha seriyalaridan tarkib topgan vektorni generatsiya qilish uchun mo‘ljallangan, bunda nuqtalar har bir seriya doirasi (chegarasi)da chiziqli-tekis joylashadi (1.32-rasm).

$N := 5$

$x := \mathrm{stack}\left(\mathrm{logspace}(5,20,N),\mathrm{logspace}\left(10^4,10^5,N\right)\right)$

$$y := \exp\left[-(x-10)^2\right] + \exp\left[\frac{-\left(x-3\cdot 10^4\right)^2}{10^7}\right]$$



x =

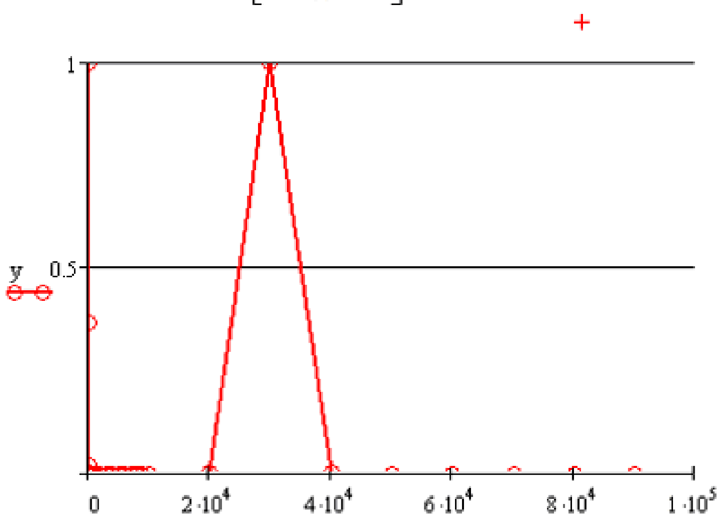
	0
0	5
1	7.071
2	10
3	14.142
4	20
5	$1\cdot10^4$
6	$1.778\cdot10^4$
7	$3.162\cdot10^4$
8	$5.623\cdot10^4$
9	$1\cdot10^5$

1.31-rasm. Logspace funksiyasi logarifmik-tekis (равномерно) joylashgan nuqtalarning vektorini beradi

$N := 5$

$x := \mathrm{logpts}(0,5,9)$

$$y := \exp\left[-(x-10)^2\right] + \exp\left[\frac{-\left(x-3\cdot 10^4\right)^2}{10^7}\right]$$



x =

	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	20
11	30
12	40
13	50
14	60
15	70

1.32-rasm. Logpts funksiya dekadalar bo‘yicha tekis joylashgan nuqtalar vektorini chiqaradi

Bu funksiyalar va ular argumentlarining bayoni:

• logspace (min,max,N) – (min,max) intervalida (logarifmik masshtabda) tekis joylashgan raqamlardan tuzilgan vektorni qaytaradi:

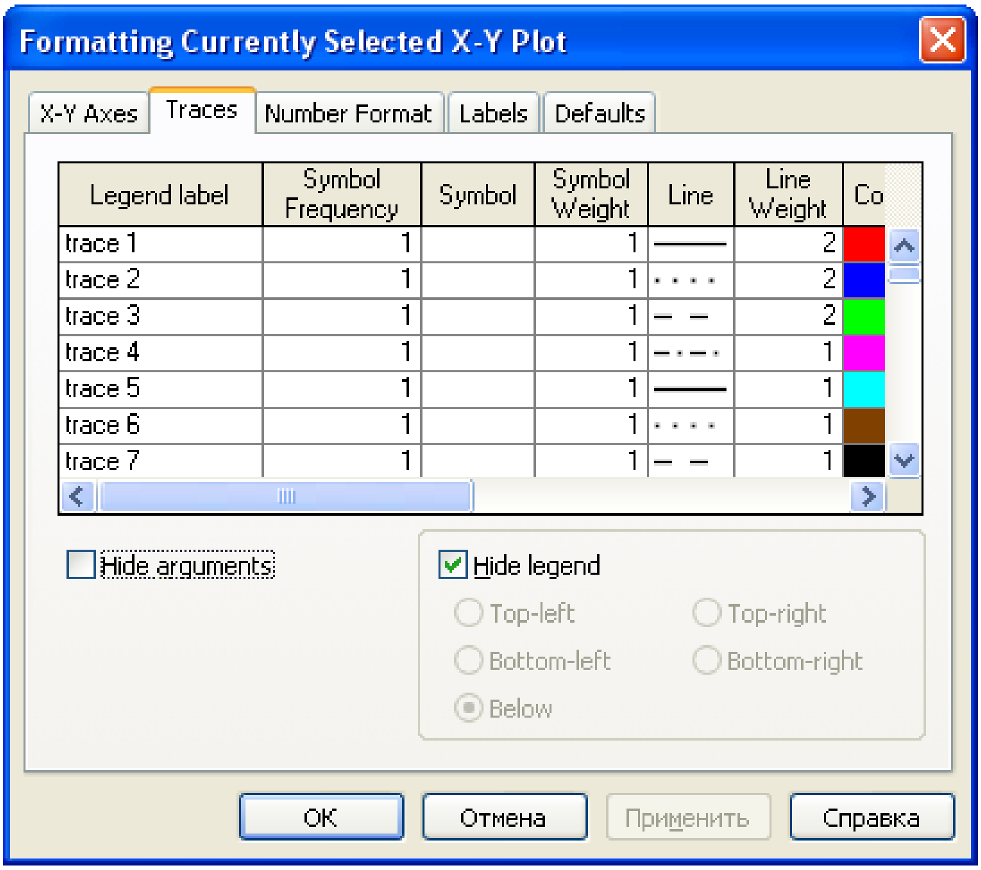
- min, max – interval chegaralari;
- N – generatsiya qilinayotgan nuqtalar miqdori;

• logpts (min, dec, N) – 10^{min} dan boshlab har bir logarifmik dekada chegarasida, ya`ni 0.1-10, 10-100 va sh.k. intervallarda, chiziqli-tekis joylashgan raqamlardan tuzilgan vektorni qaytaradi:

- min – interval boshlang‘ich chegarasining ko‘satkichi;
- dec – seriyalar (dekadalar) soni;
- N – har bir seriya (dekada) chegarasida generatsiya qilinayotgan nuqtalar miqdori.

Ma`lumotlar qatorlari

Ma`lumotlar qatorini taqdim etuvchi egri chiziqlarni qurish stilini formatlash uchun Formatting Currently Selected X-Y Plot (Tanlangan grafikni formatlash) dialog darchasining Trace (Egri chiziqlar) qistirmasiga o‘tish lozim. Bu qistirmada egrilik turi (nuqtalar va/yoki chiziqlar)ni, nuqtalar markerlari shakli va o‘lchamini, chiziqlar turi va qalinligini tanlash hamda har bir egri chiziqning rangini tanlash mumkin.



1.33-rasm. Grafikda egri chiziqlarni formatlash

Markerlar

Marker bilan koordinata o‘qlarida ba`zi qiymatlarning belgilari belgilanadi. *Marker* – bu raqam yoki o‘zgaruvchi bilan ta`minlangan o‘qqa perpendikulyar bo‘lgan chiziqdir.

1. Grafikda ikki marta shiqillating.

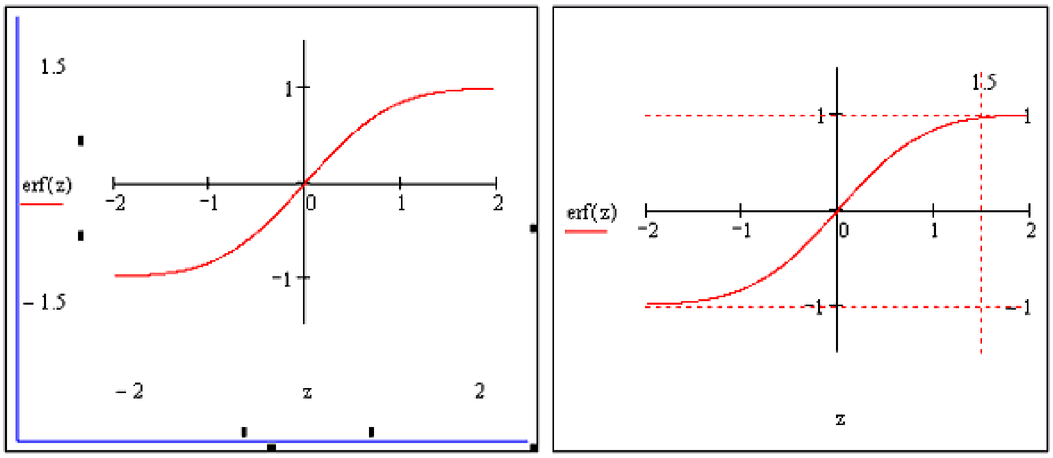
2. Formatting Currently Selected X-Y Plot (Tanlangan grafikni formatlash) dialogining X-Y Axes (X-Y o‘qlari) qistirmasida Show markers (Markerlarni ko‘rsating) bayroqchasini o‘rnating (1.28-rasmga qarang).

3. OK knopkasini bosing.

4. Paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichga raqam yoki qiymatini o‘qda marker bilan Siz aks ettirmoqchi bo‘lgan o‘zgaruvchining nomini kiriting (1.34-rasm, chap tarafda).

5. Markerdan tashqarida shiqillating.

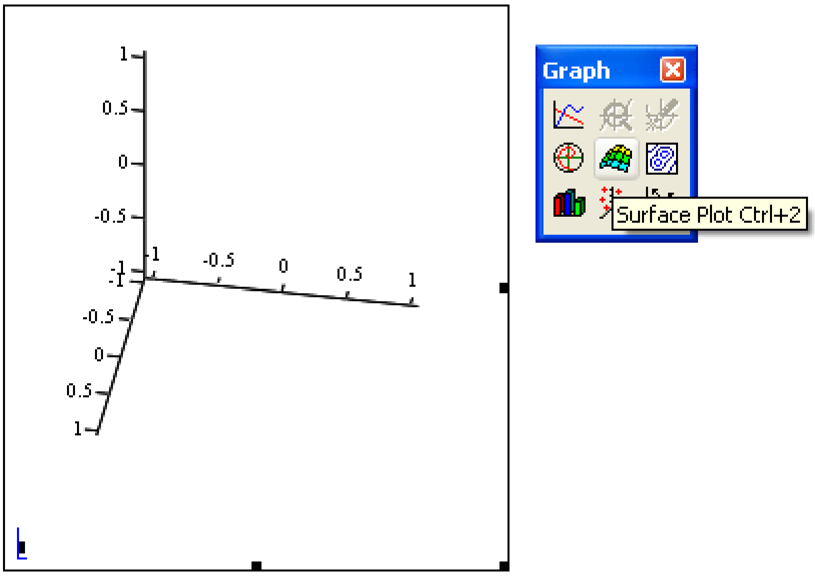
Tayyor markerlar 1.34-rasmda o‘ngda ko‘rsatilgan. Har bir o‘qda ikkitadan marker o‘rnatishga ruxsat beriladi. Agar ulardan faqat bittasi aniqlangan bo‘lsa, ikkinchisi ko‘rinmaydi.



1.34-rasm. Markerlarni yaratish (chapda) va tayyor markerlar (o‘ngda)

1.4.7. Uch o‘lchamli grafiklar

Uch o‘lchamli grafiklar kolleksiyasi – foydalanuvchilarga Mathcad hadya qilayotgan haqiqiy mo‘jizadir. Sanoqli sekundlarda Siz o‘z hisoblaringiz natijalaridan ajoyib prezentatsiya tayyorlashingiz mumkin. *z(x,y)* funksiyasi va *z* matritsasi (ular mos ravishda 1.22- va 1.23-listinglarda berilgan) misolida har xil turdagi uch o‘lchamli grafiklarni qurish texnikasini ko‘rib chiqamiz.



1.35-rasm. Uch o‘lchamli grafikni hosil qilish

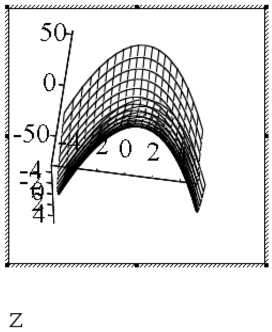
Uch o‘lchamli grafikni yaratish uchun instrumentlar paneli Graph (Grafik)da uch o‘lchamli grafiklardan istalgan turi aks ettirilgan grafikning bo‘sh jabhasi paydo bo‘ladi, pastki chap tomondagi burchakda yagona o‘rinto‘ldirgich bo‘ladi. Bu o‘rinto‘ldirgichga uch o‘lchamli grafikni tez qurish uchun ikki o‘zgaruvchi funksiyasi *z(x,y)*ning nomi *z* (1.36-rasm) yoki matritsali o‘zgaruvchi *z* ning nomi kiritilishi lozim, u *zx,Y* ma`lumotlarning *XY* tekisligida taqsimlanishini belgilab beradi (1.37-rasm). Grafiklarni hosil qilish uchun mos listing va o‘rinto‘ldirgichga mos funksiya yoki matritsa nomi kiritilishidan tashqari hech qanday matn talab qilinmaydi.

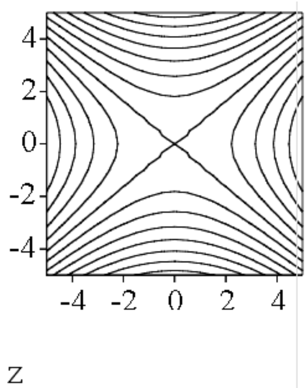
Listing 1.22. Uch o‘lchamli grafiklarni tez qurish uchun funksiya

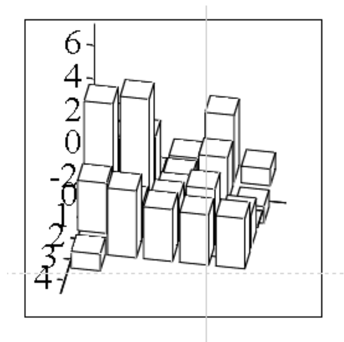
$$z(x,y) := x^2 + y^2$$

Misol

$z(x,y) := 2 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2$





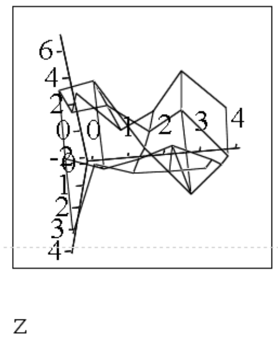


Listing 1.23. Uch o‘lchamli grafiklarda aks ettirish uchun matritsa

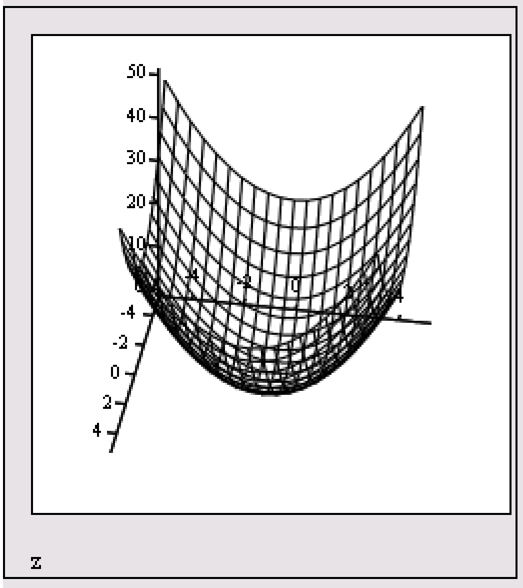
$$z := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 2 & 3 & 2.1 & 1.5 \\ 1.3 & 3.3 & 5 & 3.7 & 2 \\ 1.3 & 3 & 5.7 & 4.1 & 2.9 \\ 1.5 & 2 & 6.5 & 4.8 & 4 \end{pmatrix}$$

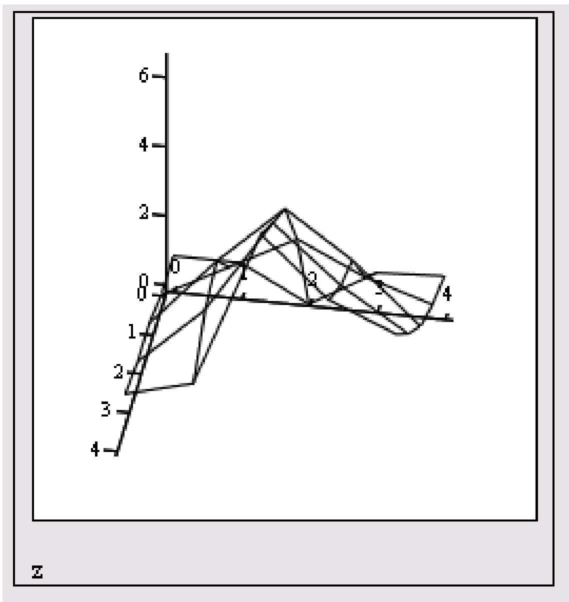
Misol

$$z := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1.2 & 4 & 1 \\ 3.2 & 3.5 & 1.3 & 2.7 & -1 \\ 6.5 & 7 & 1.7 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2.5 & 3.3 & 2 \\ -1 & 4 & 3.1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$



Sirtlarning uch o‘lchamli grafiklaridan tashqari Graph (Grafik) panelidagi mos knopkalarni bosish sath chiziqlari grafigini (1.38-rasm), uch o‘lchamli gistogrammani (1.39-rasm), nuqtalarning uch o‘lchamli taqsimlanishini (1.40-rasm) yoki vektor maydonini (1.41-rasm) yaratishga olib keladi. Bu grafiklarning hammasi 1.22- va 1.23-listinglarda tuzilgan ma`lumotlarni taqdim etadi.

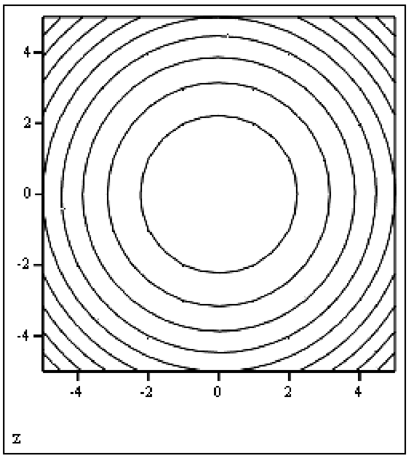




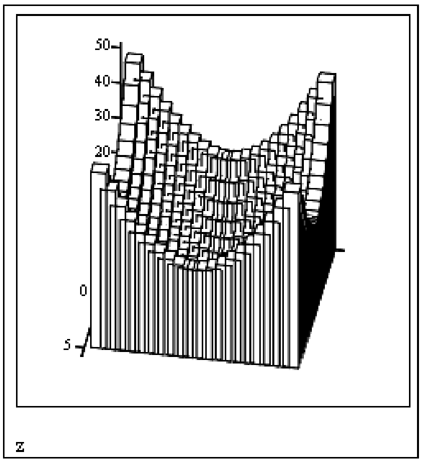
1.36-rasm. Funksiya sirti grafigini tez qurish (1.22-listing davomi)

1.37-rasm. Matritsa bilan berilgan sirt grafigi (1.23-listing davomi)

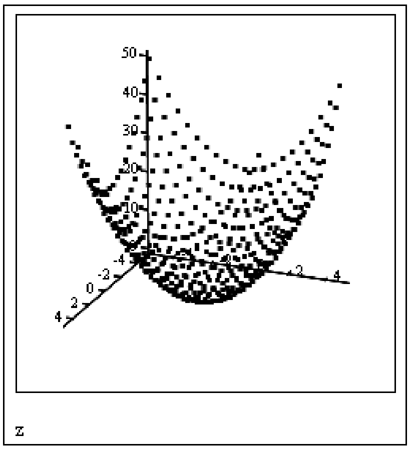
Uch o‘lchamli grafiklarni formatlash dialogli darcha 3-D Plot Format (3-D grafikni formatlash) yordamida bajariladi, u sichqonni ikki marta shiqillatish yordamida chaqiriladi.



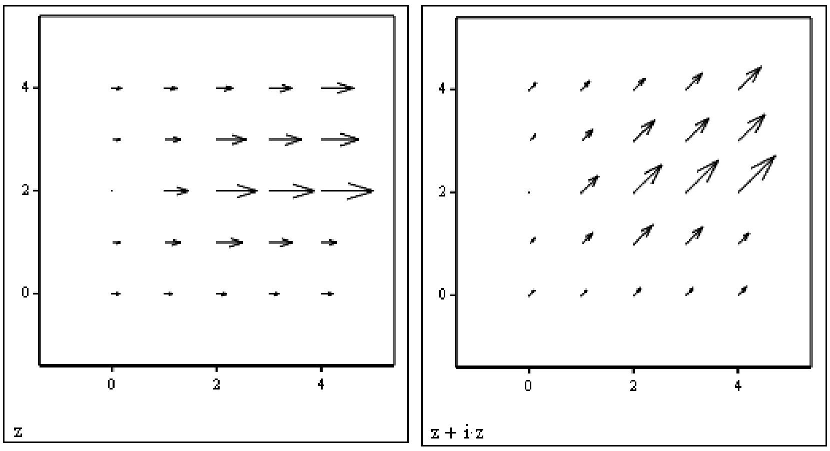
1.38-rasm. Sath chiziqlari grafigini tez qurish (1.22-listing davomi)



1.39-rasm. Uch o‘lchamli gistogrammani tez qurish (1.22-listing davomi)



1.40-rasm. Nuqtalar uch o‘lchamli taqsimlanishi grafigini tez qurish (1.22-listing davomi)



1.41-rasm. Matritsalar bilan berilgan vektor maydonlarining ikkita grafigi (1.23-listing davomi)

2 – BOB. ALGEBRAIK HISOBLASHLAR

Algebraik hisoblashlar

Ushbu bobda Mathcadda bajariladigan oddiy algebraik hisoblashlar ko‘rib chiqiladi. Birinchidan, mavjud kiritib o‘rnatilgan operatorlar hamda ularning yordamida algebraik ifodalarning qiymatlarini hisoblash, grafiklarni ko‘rish va sh.k. mumkin bo‘lgan funksiyalar bayoni keltirilgan. Ikkinchidan, namunaviy algebraik masalalarni yechish uchun Mathcadda analitik o‘zgartishlarni amalga oshiruvchi eng oddiy simvolli operatsiyalarning obzori tuzilgan. Ular sonli-raqamli metodlarni qo‘llamasdan va mos ravishda hisoblash xatoliklarisiz amalga oshiriladi.

2.1. Operatorlar

Mathcadda har bir *operator* qaysidir matematik amalni simvol ko‘rinishida belgilaydi. Matematikada qabul qilingan atamalarga batamom mos holda qator amallar (masalan, qo‘shish, bo‘lish, matritsalarni transponirovka qilish va sh.k.) Mathcadda kiritib o‘rnatilgan operatorlar ko‘rinishida, boshqa amallar esa (masalan, *sin, erf* va sh.k.) – kiritib o‘rnatilgan funksiyalar ko‘rinishida realizatsiya qilingan.

Har bir operator bitta yoki ikkita raqamga (o‘zgaruvchi yoki funksiyaga) ta`sir qiladi, ular *operandlar* deb nomlanadi. Agar operator kiritib o‘rnatilayotgan onda operandlardan bittasi yoki ikkala operandlar yetishmasa, yetishmaydigan operandlar o‘rinto‘ldirgichlar ko‘rinishida aks ettiriladi.

Istalgan operatorning simvoli hujjatning zarur joyiga ikki asosiy usulning biri bilan:

- klaviaturada mos klavishani (yoki klavishalar majmuasini) bosish yo‘li bilan;
- instrumentlarning matematik panellarining birida mos knopkani sichqon ko‘rsatkichi orqali bosish yo‘li bilan kiritiladi.

Matematik panellarning ko‘p qismi ma`nosi bo‘yicha guruhlarga jamlangan matematik operatorlarga ega, bu panellarni ekranga Math (Matematika) panelidagi mos knopkani bosib chaqirish mumkin.

Izoh

Biz faqat operatorni kiritib o‘rnatishning ikkinchi usulini ko‘rib chiqamiz.

Yuqorida uch: nom berish, sonli-raqamli va simvolli chiqarish operatorlarini qo‘llashning xususiyatlari ko‘rib chiqilgan. Endi bu va Mathcadning boshqa operatorlarining amallarini batafsilroq ko‘rib chiqamiz.

2.1.1. Arifmetik operatorlar

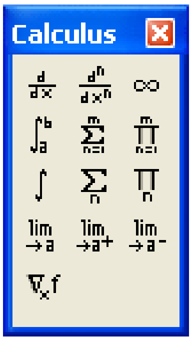
Asosiy arifmetik amallarni belgilovchi operatorlar Calculator (Kalkulyator) panelidan kiritiladi (2.1-rasm):

- qo‘shish va ayirish: + / – ;
- ko‘paytirish va bo‘lish: × / ÷ ;
- faktorial: ! ;
- raqam moduli: |x| ;
- kvadrat ildiz √ ;
- *n*-darajali ildiz $\sqrt[n]{\ }$;
- *x*-ni *y*-nchi darajaga ko‘tarish: x^y ;
- prioritetni o‘zgartirish: qavslar ( ) ;
- sonli-raqamli chiqarish: = (hamma listinglar).

2.1-rasm. Calculator paneli

2.1.2. Hisoblash operatorlari

Hisoblash operatorlari hujjatga Calculus (Hisoblashlar) instrumentlar paneli yordamida kiritib o‘rnatiladi (2.2-rasm). Knopkalardan istalgani bosilganda hujjatda bir nechta o‘rinto‘ldirgichlar bilan ta`minlangan mos matematik amalning simvoli paydo bo‘ladi. O‘rinto‘ldirgichlar soni va ularning joylashishi operator turi bilan aniqlanadi va ularning qabul qilingan matematik yozuviga to‘liq mos keladi. Masalan, summa operatorini kiritib o‘rnatishda (2.2-rasm) to‘rtta kattalik: o‘zgaruvchi (summalash *y* bo‘yicha amalga oshiriladi), quyi va yuqorigi chegaralar hamda summa belgisi ostida turadigan ifodaning o‘zi – berilishi lozim. Noaniq integralni hisoblash uchun ikkita o‘rinto‘ldirgichni: integralosti ifodalarni va integrallash o‘zgaruvchisini to‘ldirish lozim.



2.2-rasm. Summalash operatorini kiritib o‘rnatish

Qaysidir hisoblash operatori kiritilganidan keyin uning qiymatini <=> klavishani bosib sonli-raqamli yoki simvolli chiqarish operatori yordamida analitik hisoblash imkoniyati mavjud.

Izoh

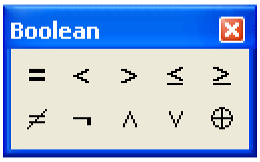
Differensiallash va integrallash murakkab operatsiyalar bo‘lganligi sababli, ularga alohida boblar bag‘ishlangan (mos ravishda 3- va 4-boblarga qaralsin). Summalash va chegarani hisoblash ushbu bobda ko‘riladi (mos ravishda 2.3.8- va 2.3.11-bo‘limlarga qaralsin).

2.1.3. Mantiqiy operatorlar

Mantiqiy yoki *Bul operatorlari* amali natijasining – faqat 1 (agar ular yordamida yozilgan mantiqiy ifoda haqiqiy bo‘lsa) yoki 0 (agar mantiqiy ifoda haqiqiy bo‘lmasa) raqamlari bo‘ladi.

Mantiqiy ifoda, masalan 1=1, qiymatini hisoblash uchun (2.3-rasm):

1. Boolean (Bul operatori) panelidan mos operator = ni qo‘ying.
2. Paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichlarga operandlarni (ikkita birlik) kiritib o‘rnating.
3. Javobni olish uchun <=> klavishasini bosing.



2.3-rasm. Mantiqiy operatorni kiritib o‘rnatish

Birinchi qarashda absurd ifoda 1=1 hosil bo‘ladi. Lekin amalda hammasi to‘g‘ri. Chiqarish operatoridan chap tarafda mantiqiy ifoda 1=1 yozilgan (e`tibor bering, tenglikning mantiqiy belgisi oddiy belgiga qaraganda boshqacha ko‘rinadi), u – haqiqiydir. Shuning uchun ushbu ifodaning qiymati 1 ga teng, bu – tenglik belgisidan o‘ng tarafda ko‘rsatilgan.

Mantiqiy operatorlar:

- katta (Greater Than) x>y;
- kichik (Less Than) x<y;
- katta yoki teng (Greater Than or Equal) x>_y;
- kichik yoki teng (Less Than or Equal) x_<y;
- teng (Equal) x=y;
- teng emas (Not Equal to);
- va (And) x^u;
- yoki (Or) xvy;
- istisno qiluvchi (исключающий) yoki (Exclusive or) x®y;
- inkor qilish (Not).

Izoh

Operandlar mantiqiy ifodalarda istalgan son bo‘lishi mumkin. Lekin operator ma`nosi bo‘yicha faqat 0 yoki 1 ga qo‘llanila olsa, u holda nulga teng bo‘lmagan istalgan son indamaslik bo‘yicha 1 ga teng deb qabul qilinadi. Lekin natijada baribir 0 yoki 1 hosil bo‘ladi. Masalan, –,(–0.33)=0.

Mantiqiy operatsiyalar amaliga misollar 2.1- va 2.2-listinglarda keltirilgan.

Listing 2.1. Qiyoslash operatorlari

$2 = 3 = 0 \qquad 5 > 1 = 1 \qquad 3 \geq 3 = 1$

$7 = 7 = 1 \qquad 3 < \infty = 1 \qquad 3 > 3 = 0$

$0 \neq 0 = 0$

Misollar

1. $7 = 7 = 1 \qquad 5 \geq 5 = 1 \qquad 2 > 1 = 1$

   $9 = 9 = 1 \qquad 5 > 5 = 0 \qquad 2 < \infty = 1$

   $0 \neq 0 = 0$

2. $4 = 4 = 1 \qquad 1 \leq 2 = 1 \qquad 7 > 9 = 0$

   $8 = 8 = 1 \qquad 1 \geq 4 = 0 \qquad 7 < \infty = 1$

   $0 \neq 0 = 0$

3. $1 \neq 2 = 1 \qquad 8 \geq 9 = 0 \qquad 4 \geq 4 = 1$

   $10 \neq 5 = 1 \qquad 5 < \infty = 1 \qquad 7 < 7 = 0$

   $9 = 9 = 1$

4. $4 \neq 2 = 1 \qquad 8 \geq 5 = 1 \qquad 4 < \infty = 1$

   $9 < 10 = 1 \qquad 5 \geq 8 = 0 \qquad 4 > \infty = 0$

   $1 = 1 = 1$

Listing 2.2. Bul operatorlari

$1 \vee 1 = 1$	$1 \wedge 1 = 1$	$1 \oplus 1 = 0$	$\neg 1 = 0$
$0 \vee 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \oplus 0 = 0$	$\neg 0 = 1$
$1 \vee 0 = 1$	$1 \wedge 0 = 0$	$1 \oplus 0 = 1$	

2.1.4. Matritsa operatorlari

Matritsa operatorlari vektorlar va matritsalar ustida turli amallar bajarish uchun mo‘ljallangan. Ularning ko‘pchiligi sonli-raqamli algoritmlarni realizatsiya qilganligi uchun, ular chiziqli algebrada batafsil ko‘rib chiqiladi. Hozir esa Mathcad hujjatlariga matritsalarni kiritib o‘rnatish masalasini ko‘ramiz.

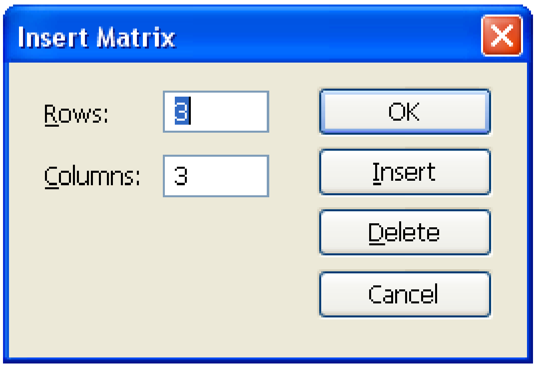
Vektor yoki matritsani yaratishning eng sodda va ko‘rgazmali usuli:

1. Matrix (Matritsa) panelida Matrix or Vector (Matritsa yoki vektor) knopkasini yoki <Ctrl>+<M> klavishasini bosing yoki Insert / Matrix (Kiritib o‘rnatish / Matritsa) menyu punktini tanlang.

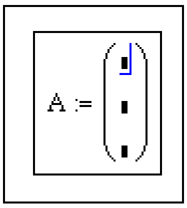
2. Insert Matrix (Matritsani kiritib o‘rnatish) dialog darchasida (2.4-rasm) Siz yaratmoqchi bo‘lgan matritsa ustunlari va qatorlarining butun sonini bering. Masalan, 3xi vektorni yaratish uchun 2.4-rasmda ko‘rsatilgan qiymatlarni kiriting.

3. OK yoki Insert (Kiritib o‘rnatish) knopkasini bosing – natijada hujjatga ustunlari va qatorlari muayyan sonli matritsaning xomakisi kiritib o‘rnatiladi (2.5-rasm).

4. Matritsa elementlari o‘rinto‘ldirgichlariga qiymatlarni kiriting. Matritsaning bir elementidan boshqasiga sichqon ko‘rsatkichi yoki strelkali klavishalar yordamida o‘tish mumkin.



2.4-rasm. Matritsani yaratish



2.5-rasm. Matritsani yaratish natijasi

Yaratilib bo‘lingan matritsaga qatorlar va ustunlarni qo‘shish xuddi shunday amalga oshiriladi:

1. Kiritish chiziqlari bilan matritsa elementini ajratib ko‘rsating, undan o‘ngroq va pastroqda ustunlar va (yoki) qatorlar kiritib o‘rnatiladi.

2. Unga, yuqorida bayon qilinganidek, matritsani kiritib o‘rnating. Bunda ustunlar yoki qatorlar soni nulga teng berilishi ruxsat etiladi.

3. Matritsa yetishmayotgan elementlari o‘rinto‘ldirgichlarini to‘ldiring.

Izoh

Yangi matritsani boshqacha, masalan (hujjatda birinchi marta), uning qaysidir elementiga muayyan qiymatni, masalan, $A_{3,3}$:=1 ni, berib yoki matritsaga ma`lumotlarni tashqi fayldan import qilib, aniqlash mumkin.

2.1.5. Ifoda operatorlari

Hisoblash operatorlari Evaluation (Hisoblashlar) panelida guruhlangan (1.21-bo‘limga qarang).

Ularni yana bir marta (qo‘shimcha izohlarsiz) sanab chiqamiz:

- Sonli-raqamli chiqarish (Evaluate Numerically) = ;
- Simvolli (analitik) chiqarish (Evaluate Symbolically) -> ;
- Nom berish (Definition) := ;
- Global nom berish (Global Definition).

2.2. Funksiyalar

Mathcad juda ko‘p sonli kiritib o‘rnatilgan funksiyalarni o‘zida saqlaydi. Ulardan ba`zilari muayyan qiymatni hisoblaydi, ba`zilari esa murakkab sonli-raqamli algoritmlarni realizatsiya qiladi.

Mathcad standart algebraik funksiyalarining ko‘pchiligi umumqabul qilingan matematik shaklga ega ekanligini hisobga olib, kiritib o‘rnatilgan funksiyalarning hammasini keltirib o‘tirmaymiz, faqat ularning asosiy turlarini sanab chiqamiz va minimal kommentariylar bilan cheklanib, bir nechta xarakterli misollar keltiramiz.

Izoh

Hujjatga unchalik tanish bo‘lmagan funksiyani kiritib o‘rnatishning eng oson yo‘li – Insert Function (Funksiya kiritib o‘rnatilsin) dialog darchasidan foydalanishdir, u instrumentlarning standart panelida *f(x)* yozuvli knopkani bosish bilan chaqiriladi. Bu dialogda funksiyalar bir necha guruhlarga bo‘lingan, shuning uchun ularning orasidan keragini tanlab olish qiyin emas. Bu dialogning chapdagi ro‘yxatida qaysidir guruh ajratib olinganda, o‘ng tomonda ushbu guruhga mansub bo‘lgan funksiyalarning ro‘yxati paydo bo‘ladi. Insert Function dialog darchasining chap ro‘yxatida paydo bo‘ladigan funksiyalar guruhlarining nomlari ushbu bob har bo‘limining nomidan keyin qavs ichida keltiriladi.

2.2.1. Elementar funksiyalar

Standart funksiyalarning keng ma`lum bo‘lgan guruhlari (ba`zilariga misollar 2.6- va 2.8-rasmlarda keltirilgan):

- Exponential and logarithmic functions (Eksponenta va logarifmik funksiyalar) (2.6-rasm);
- Complex (Kompleks funksiyalar) (listing 2.3);
- Trigonometric (Trigonometrik funksiyalar) (listinglar 2.4 va 2.5);
- Inverse trig (Teskari trigonometrik funksiyalar) (listinglar 2.4 va 2.5);
- Hyperbolic (Giperbolik funksiyalar) (listing 2.6 va 2.7-rasm);
- Inverse hyperbolic (Teskari giperbolik funksiyalar);
- Sine (Sine-funksiya) (2.8-rasm).

Izoh

Sine-funksiya Mathcad 11 versiyada paydo bo‘ldi.

Listing 2.3. Kompleks sonlar bilan ishlovchi ba`zi funksiyalar

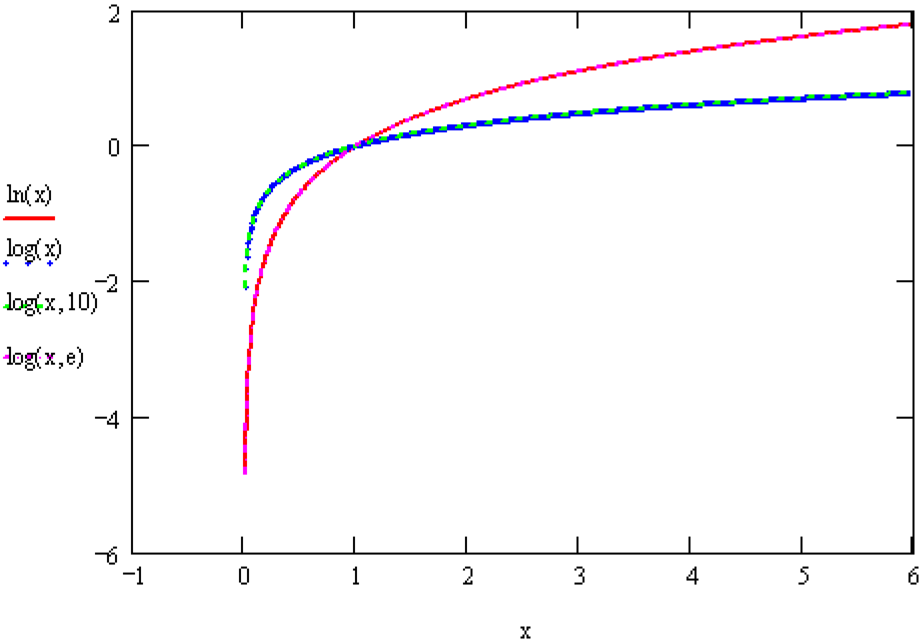
$Re(3.9 + 2.4i) = 3.9$ $\qquad$ $Im(3.9 + 2.4i) = 2.4$

$\left|1.7 \cdot e^{0.1i}\right| = 1.7$ $\qquad$ $arg\left(1.7 \cdot e^{0.1i}\right) = 0.1$

Misol

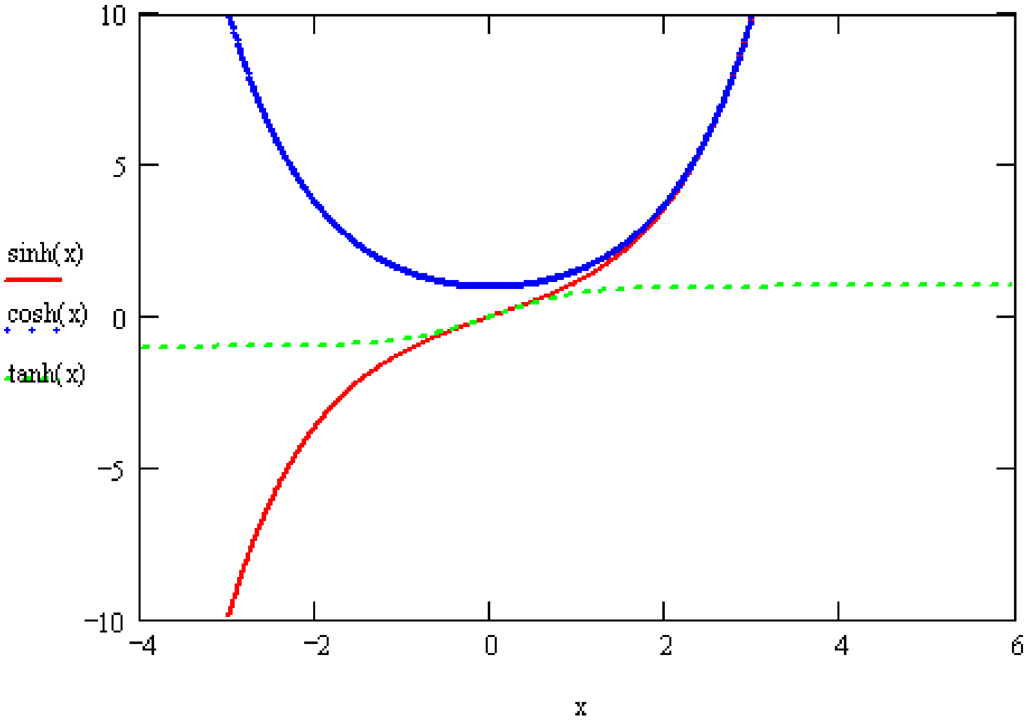
$Re(5.2 + 3.4i) = 5.2$ $\qquad$ $Im(5.2 + 3.4i) = 3.4$

$\left|2.87 \cdot e^{0.3i}\right| = 2.87$ $\qquad$ $arg\left(2.87 \cdot e^{0.3i}\right) = 0.3$

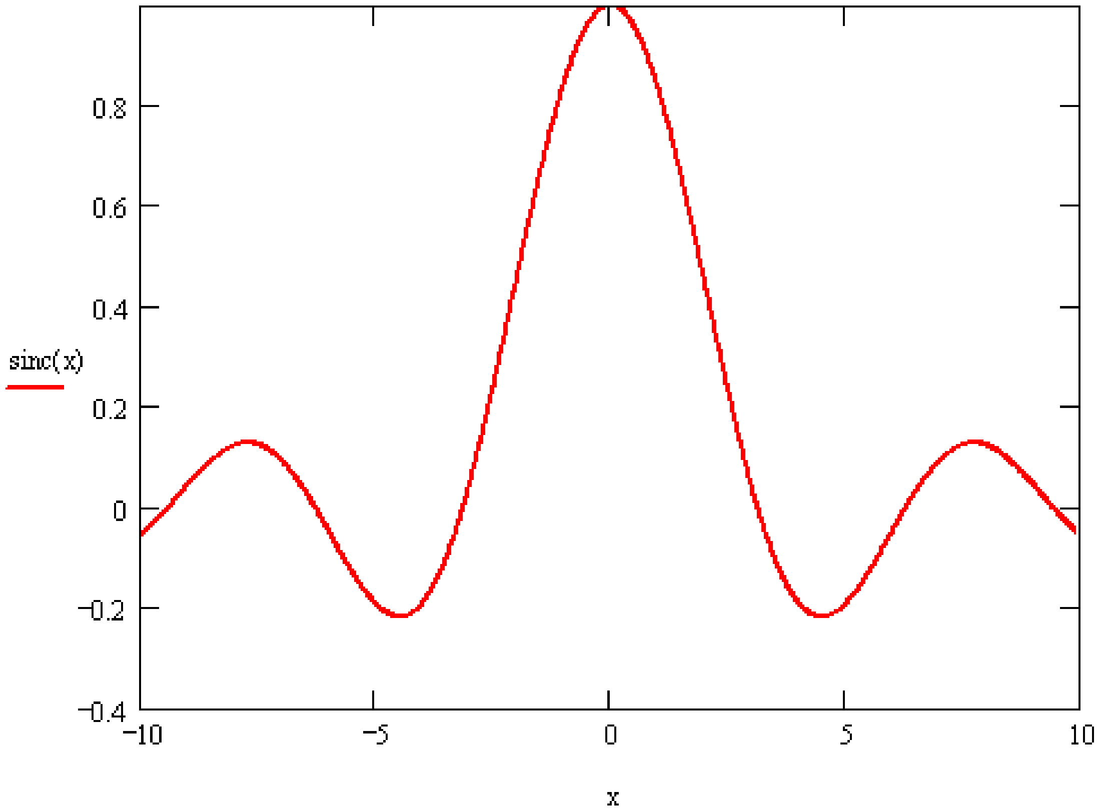


2.6-rasm. Logarifmik funksiya

Logarifmik funksiya – bu $y=log_a x$ *ko'rinishidagi funksiyadir, bu yerda* $a>0$, $a \neq 1$.



2.7-rasm. Asosiy giperbolik funksiyalar



2.8-rasm. Sine-funksiya

Listing 2.4. Trigonometrik funksiyalarga misollar

Trigonometrik funksiyalar – sonli-raqamli argument funksiyalari: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans.

$$\sin(0.5) = 0.479 \qquad \frac{1}{\csc(0.5)} = 0.479$$

$$\mathrm{asin}(0.479) = 0.5 \qquad \mathrm{acsc}\left(\frac{1}{0.479}\right) = 0.5$$

$$\mathrm{acos}(0.682) = 0.82$$

$$z := 47$$

$$\cos\left(\frac{\pi \cdot z}{180}\right) = 0.682$$

Misollar

1. $\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 0.182$

2. $\tan(2\,\mathrm{atan}(3)) = -0.75$

3. $\tan\left(2\,\mathrm{acos}\left(\frac{-3}{5}\right)\right) = 3.429$

4. $\cos\left(2\,\mathrm{asin}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0.5$

Listing 2.5. To‘g‘ri chiziq va OX o‘qi orasidagi burchakni hisoblashga misollar

$atan2(1,1) = 0.785$ $\quad$ $atan2(-1,-1) = -2.356$

$angle(1,1) = 0.785$ $\quad$ $angle(-1,-1) = 3.927$

Misol

$atan2(1,2) = 1.107$ $\quad$ $atan2(-1,-2) = -2.034$

$angle(1,3) = 1.249$ $\quad$ $angle(-1,-3) = 4.391$

Listing 2.6. Giperbolik funksiyalarga misol

$z := 1.27$

$$\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 1.921$$

$cosh(z) = 1.921$

$acosh(1.921) = 1.27$

Misol

$z := 2.976865$

$$\frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = 9.839$$

$cosh(z) = 9.839$

$acosh(9.839) = 2.977$

2.2.2. Yordamchi funksiyalar

Yuqorida sanab o‘tilganlardan tashqari Mathcad bir qator *yordamchi funksiya*larni o‘z ichiga kiritgan, ular ko‘p vaziyatlarda hisoblashlarni yengillashtiradi:

- **Discontinuous functions (Uzlukli funksiyalar);**
- **Round-off and truncation (Qisqartirishlar va yiriklashtirishlar)** (listing 2.7);
- **Sorting (Sortirovkalashlar);**
- **Strings (Satrli);**
- **Finance functions (Moliya);**
- **Coordinate transform (Koordinatalarni qayta o‘zgartirish)** (listing 2.8);
- **Conditional (Shartlar)** (listing 2.9);
- **Expression type (Ifoda turi).**

Listing 2.7. Qisqartirishlar va yiriklashtirishlar funksiyalari

$ceil(3.7) = 4$ $\quad$ $floor(3.7) = 3$ $\quad$ $trunc(3.7) = 3$

$ceil(-3.7) = -3$ $\quad$ $floor(-3.7) = -4$ $\quad$ $trunc(-3.7) = -3$

$ceil(3.7 - 2.1 \cdot i) = 4 - 2i$

$floor(3.7 - 2.1 \cdot i) = 3 - 3i$

$trunc(3.7 - 2.1i) = 3 - 2i$

$round(1.23456789, 0) = 1$ $\quad$ $round(12.3456789, 0) = 12$

$round(12.3456789, 1) = 12.3$ $\quad$ $round(12.3456789, -1) = 10$

$round(12.3456789, 2) = 12.35$ $\quad$ $round(12.3456789, -2) = 0$

$round(12.3456789, 5) = 12.34568$

$round(1.2345 + 6.789i, 1) = 1.2 + 6.8i$

Misollar

$\mathrm{ceil}(4.6) = 5$

$\mathrm{ceil}(-4.6) = -4$

$\mathrm{ceil}(4.6 - 2.1i) = 5 - 2i$

$\mathrm{floor}(4.6 - 2.1i) = 4 - 3i$

$\mathrm{trunc}(4.6 - 2.1i) = 4 - 2i$

$\mathrm{round}(2.46578, 0) = 2$

$\mathrm{round}(24.46578, 1) = 24.5$

$\mathrm{round}(24.46578, 3) = 24.466$

$\mathrm{floor}(4.6) = 4$

$\mathrm{floor}(-4.6) = -5$

$\mathrm{round}(24.46578, 0) = 24$

$\mathrm{round}(24.46578, -1) = 20$

$\mathrm{round}(24.46578, -3) = 0$

$\mathrm{trunc}(4.6) = 4$

$\mathrm{trunc}(-4.6) = -4$

$\mathrm{round}(24.46578, 4) = 24.466$

$\mathrm{round}(2.465 + 7.8945i, 2) = 2.47 + 7.89i$

Izoh

Mathcadning oldingi versiyalarida (11-nchi bilan birga) qisqartirish va yiriklashtirish funksiyalari analitikdan farq qiladigan natija berishi mumkin edi (bu raqamlarni taqdim etish prinsipiga bog‘liq edi). Mathcad 12 da bu funksiyalar ancha to‘g‘riroq ishlaydi, simvoliga mos keladigan yiriklashtirishning aniq natijasini chiqaradi.

Listing 2.8. Tekislikda koordinatalarni qayta o‘zgartirish funksiyasi

$$\mathrm{xy2pol}\left(\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}7.071\\1.429\end{pmatrix} \qquad \mathrm{xy2pol}(1,7) = \begin{pmatrix}7.071\\1.429\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{pol2xy}\left(\begin{pmatrix}7.071\\1.429\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0.999\\7\end{pmatrix} \qquad \mathrm{pol2xy}(7.071, 1.429) = \begin{pmatrix}0.999\\7\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{xyz2cyl}(1,1,1) = \begin{pmatrix}1.414\\0.785\\1\end{pmatrix} \qquad \mathrm{cyl2xyz}(1, \pi, 3.93) = \begin{pmatrix}-1\\0\\3.93\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{xyz2sph}(1,1,1) = \begin{pmatrix}1.732\\0.785\\0.955\end{pmatrix} \qquad \mathrm{sph2xyz}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Misollar

$$xy2pol\left(\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}8.544\\1.212\end{pmatrix} \qquad xy2pol(3,8)=\begin{pmatrix}8.544\\1.212\end{pmatrix}$$

$$pol2xy\left(\begin{pmatrix}8.544\\1.212\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} \qquad pol2xy(8.544,1.212)=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$$

$$xyz2cyl(2,2,2)=\begin{pmatrix}2.828\\0.785\\2\end{pmatrix} \qquad cyl2xyz(2,\pi,4.494)=\begin{pmatrix}-2\\0\\4.494\end{pmatrix}$$

$$xyz2sph(2,2,2)=\begin{pmatrix}3.464\\0.785\\0.955\end{pmatrix} \qquad sph2xyz\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}1.299\\0.75\\0.866\end{pmatrix}$$

Listing 2.9. Belgi va shartlar funksiyalari

$sign(-4)=-1 \qquad sign(1.3)=1$

$if(1>3,1,3)=3$

if(1 > 3,"Yes" ,"No") = "No"

Misol

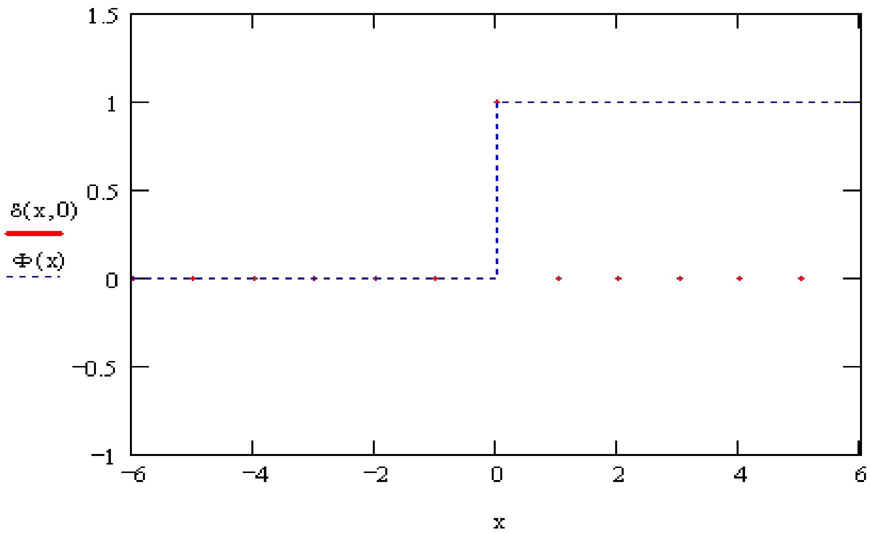
$sign(-6)=-1 \qquad sign(3.5)=1$

$if(2>4,2,3)=3$

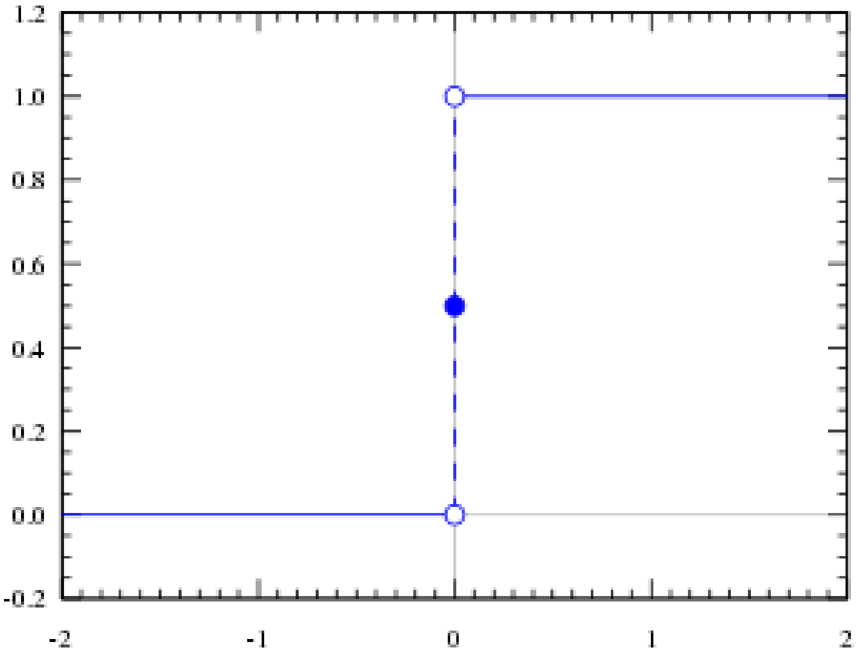
if(3 > 5,"Yes" ,"No") = "No"

Izoh

Mathcad 12 ishlab chiquvchilari kiritib o‘rnatilgan funksiya *until*ni qayta tiklashdi, u 12-versiyagacha hujjatlarga sikllarni dasturlash yordamisiz kiritish uchun xizmat qilar edi. Until (x,y) funksiyasi siklni "nodasturaviy" imitatsiya qilish uchun xizmat qiladi: agar $x<0$ bo‘lsa navbatdagi y hisoblanadi, so‘ngra yana yangi x hisoblanadi (x ning o‘zi ham qaysidir yo‘l bilan y ga bog‘liq), $x<0$ sharti yana tekshiriladi va h.k. x manfiy bo‘lmagandagi y ning oxirgi qiymati funksiya natijasi sifatida chiqariladi.



2.9-rasm. Xevisayd funksiyalari va eskirgan Kroneker funksiyasi



Xevisayd birlik funksiyasi

Xevisayd funksiyasi, birlik bosqichli funksiya, holat bosqichi – bu maxsus matematik funksiya, uning qiymati manfiy argumentlar uchun nulga, musbat argumentlar uchun esa birga teng:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Ko‘pincha funksiya nulda (H(0)) qanday qiymat qabul qilishining ahamiyati yo‘q.

Kroneker simvoli (yoki Kroneker deltasi) – bu ikki o‘zgaruvchining funksiyasidir, o‘zgaruvchilar bir-biriga teng bo‘lsa u 1 ga, aks holda u 0 ga teng. O‘zgaruvchilar odatda butun son deb faraz qilinadi.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Masalan, $\delta_{12} = 0$, *lekin* $\delta_{33} = 1$.

Ya`ni (δ_{ij}*) elementlaridan tarkib topgan matritsa – birlik matritsasi bo‘ladi.*

Kroneker simvoli ko‘pincha tenzor belgilanish sifatida traktovka qilinadi. Xususan, bu δ_{ij}, δ_j^i *va* δ^{ij} *ko‘rinishidagi turli yozuvlar tenzorlarning muayyan turi: mos ravishda ikki marta kovariantliga, bir marta kovariantli bir marta kontravariantliga va ikki marta kontravariantliga mansub ekanligini urg‘ulash uchun foydalaniladi.*

Diqqat!

Mathcad 12 dan boshlab Kroneker 5 funksiyasi (simvoli) (2.9-rasm) kiritib o‘rnatilgan funksiyalar ro‘yxatidan o‘chirilgan.

2.2.3. Joriy vaqtni chiqarish funksiyasi

Mathcad 12 versiyasida yangi o‘rnatib kiritilgan funksiya paydo bo‘ldi, u ba`zan hisoblash jarayonini xronometraj qilish uchun foydali bo‘lishi mumkin:

- time (*x*) – joriy vaqt tizimiy o‘zgaruvchisining qiymati (sekundda):

- x – argument (kiritib o‘rnatilgan funksiyani identifikatsiya qilish uchun zarur xolos, natijaga hech qanday ta`sir qilmaydi).

Funksiyadan tipik foydalanish uni ikki qayta hisoblashni talab qiladi: Siz xronometraj qilmoqchi bo‘lgan hisobiy fragmentdan oldin va keyin (listing 2.10). *Time* (x) ning o‘zini yakka hisoblash vaqt tizimiy o‘zgaruvchisining absolyut qiymatini beradi (listing 2.10 ning birinchi qatori). Shuni yodda tutingki, hisoblash vaqti haqida arziydigan informatsiyani olish uchun Tools / Calculate Worksheet (Servis / Hammasi hisoblansin) komandasi bilan hujjatdagi bor narsalarning hammasini qayta hisoblab chiqish zarur.

Listing 2.10. Hisoblashlarni xronometraj qilish

$$\mathrm{time}(0) = 1.074 \times 10^{9}$$

$$T := \mathrm{time}(0)$$

$$i := 0 .. 10^{5}$$

$$v_i := \sqrt[3]{i}$$

$$\mathrm{time}(1) - T = 1.438 \times 10^{3}$$

Misol

$$\mathrm{time}(8) = 1.224 \times 10^{9}$$

$$T := \mathrm{time}(8)$$

$$i := 0 .. 10^{5}$$

$$v_i := \sqrt[4]{i}$$

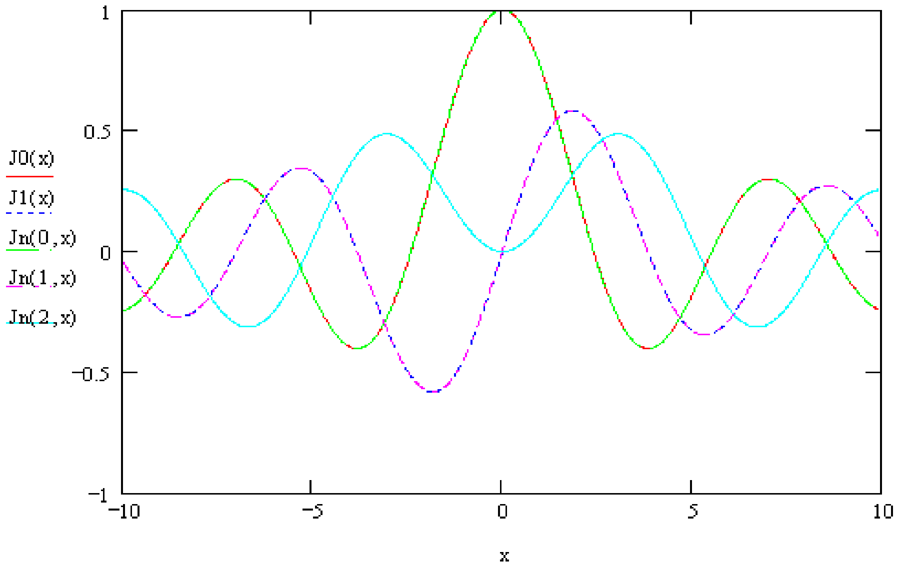
$$\mathrm{time}(9) - T = 226.316$$

2.2.4. Maxsus funksiya

Mathcadga turli matematik funksiyalar ko‘p miqdorda kiritib o‘rnatilgan, ular versiyadan versiyaga to‘ldirib boriladi. Ularning ko‘p qismi maxsus sonli-raqamli metodlarni jalb qilmasdan yechiladi, lekin ular ayniqsa matematik fizikada katta ahamiyatga ega. Masalan, Bessel funksiyalari ba`zi oddiy differensial tenglamalar uchun turli chegaraviy masalalarning yechimi hisoblanadi. Mos differensial tenglamalarning muayyan turini maxsus funksiyalar bo‘yicha ma`lumotnomalardan yoki Mathcad ma`lumot tizimidan topish mumkin.

Mathcadda maxsus funksiyalar bir necha guruhlarga bo‘lingan:

- Bessel (Bessel funksiyalari) (2.10- va 2.11-rasmlar);
- Error function and complementary error function (Xatoliklar integrallari);
- Special functions (Qolgan maxsus funksiyalar).



2.10-rasm. Birinchi tartibli Bessel funksiyalari

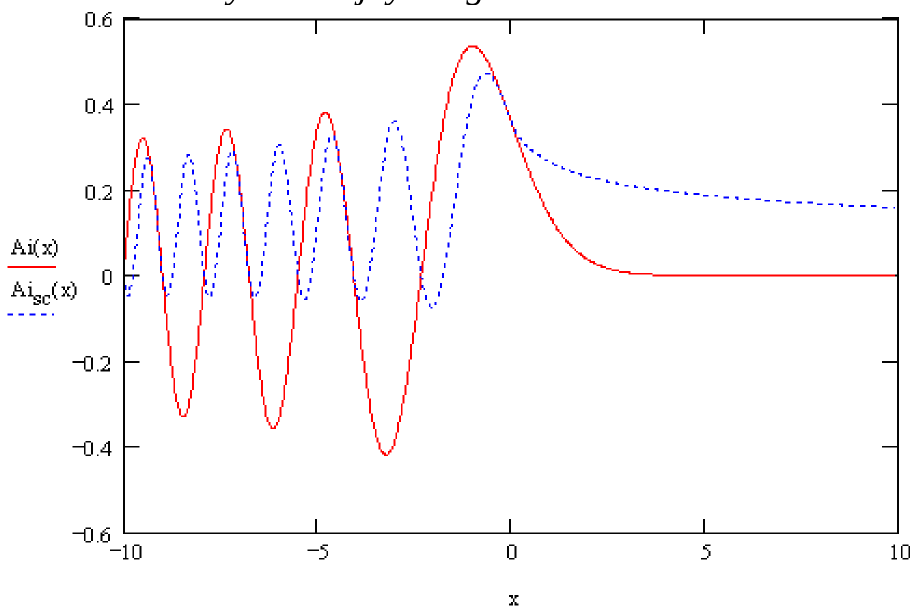
Izoh

Mathcad 12 da Bessel sinfiga oid bo‘lgan Eyri maxsus funksiyalarining yangi me`yorlangan shakli paydo bo‘ldi, ularning yozilishida pastki indeks *sc* qo‘shiladi (masalan, $Ai_{SC}$), bu argumentning katta qiymatlarida hisoblash aniqligini yaxshilaydi. Besselning boshqa me`yorlangan funksiyalari Mathcadning oldingi versiyalarida qo‘shilgan edi.

$J_a(x)$ ko‘rinishida belgilanadigan birinchi tartibli Bessel funksiyalari – bu α ning butun yoki manfiy bo‘lmagan qiymatlarida x = 0 nuqtada chekli bo‘lgan yechimlardir. Muayyan funksiyani va uni normallashni tanlash uning xossalari bilan aniqlanadi. Bu funksiyalarni nul atrofida Teylor qatoriga (yoki α ning butun bo‘lmagan qiymatlarida ancha umumiy bo‘lgan darajali qatorga) yoyish yordamida bu funksiyalarni aniqlash mumkin:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

Bu yerda G(z) – bu Eyler gamma-funksiyasi, faktorialni butun bo‘lmagan qiymatlarga umumlashtirishdir. Bessel funksiyasining grafigi shunday sinusoidaga o‘xshaydiki, uning tebranishlari $1/\sqrt{x}$ *ga proporsional so‘nadi, vaholanki, amalda funksiyaning nullari nodavriy tarzda joylashgan.*



2.11-rasm. Eyri funksiyalari (Ai_{sc} Mathcad 12 da paydo bo‘ldi)

Eyri funksiyasi $A_i(x)$ – maxsus funksiya bo'lib, u Britaniya astronomi Jorj Biddel Eyri nomiga qo'yilgan. $A_i(x)$ va unga bog'liq bo'lgan $B_i(x)$ ham Eyri funksiyasi deyiladi, u Eyri tenglamasi deb nomlanuvchi

$$y''-xy=0,$$

differensial tenglamaning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimidir. Bu eng oddiy differensial tenglama bo'lib, u shunday nuqtaga egaki, bu nuqtada yechim ko'rinishi tebranuvchidan eksponensialga o'zgaradi. U uchburchakli potensial chuqurdagi zarracha uchun Shryodinger tenglamasining yechimi ham bo'ladi.

2.3. Algebraik ko'rsatkichlar

Bu bo'limda Mathcadda, asosan, analitik bajariladigan algebraik hisoblashlar haqida gap ketadi. Mathcad foydalanuvchilarining ko'pchiligi bu imkoniyatlar haqida yetarli darajada xabar topishmagan, vaholanki, ular ko'p vaziyatlarda murakkab bo'lmagan, oddiy o'zgartishlarni bajarishda vaqt va kuchni sezilarli tejash imkonini beradi.

2.3.1. Simvolli hisoblashlarning usullari haqida

Mathcadda simvolli hisoblashlarni ikki xil variantda olib borish mumkin:

- menyu komandalari yordamida;
- simvolli chiqarish operatori —>, simvolli protsessorning tayanch so'zlari va oddiy formulalari yordamida (Mathcad ma`lumot tizimida bu usul real vaqtda simvolli hisoblashlar – live symbolic evaluation – deb nomlanadi).

Birinchi usul hisoblashlar qadamlari saqlanmasdan bir marta foydalanish uchun qandaydir analitik natija tez olinishi talab qilinganda qulay bo'ladi. Ikkinchi usul ko'rgazmaliroq hisoblanadi, chunki ifodalarni an`anaviy matematik shaklda yozish va simvolli hisoblashlarni Mathcad hujjatlarida saqlash imkonini beradi. Bundan tashqari menyu orqali amalga oshirilayotgan analitik o'zgartirishlar faqat ushbu onda ajratib ko'rsatilgan bitta ifodaga taalluqli bo'ladi.

Izoh

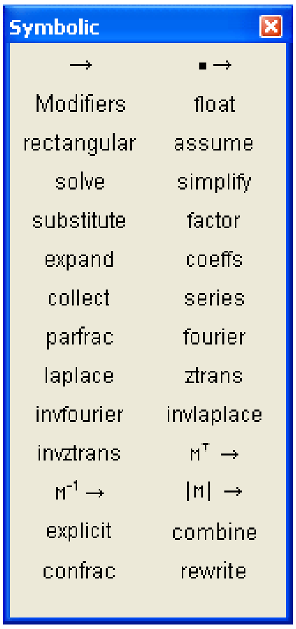
Simvolli hisoblashlarda Mathcadga kiritib o'rnatilgan funksiyalarning ko'p qismidan, tabiiyki sonli-raqamli metodlarni amalga oshiradiganlaridan boshqalaridan, foydalanishga ruxsat etiladi.

Mathcadning simvolli protsessori ifodalarni soddalashtirish, ularni ko'paytuvchilarga yoyish, simvolli summalash va hadma-had ko'paytirish kabi asosiy algebraik o'zgartirishlarni bajarishni biladi.

Komandalar yordamida simvolli hisoblashlarga bosh menyu Symbolics (Simvollar) mo'ljallangan, u Mathcad analitik bajarishni biladigan matematik operatsiyalarni birlashtirgan. Ikkinchi usulni realizatsiya qilishda sonli-raqamli hisoblashlar uchun yaroqli bo'lgan Mathcadning hamma vositalari (masalan, Calculator, Evaluation panellar va h.k.) va instrumentlarning maxsus matematik paneli (uni ekranga Math (Matematika) panelida Symbolic Keyword Toolbar (Simvolika paneli) knopkasini bosib chaqirish mumkin) qo'llaniladi. Symbolic (Simvolika) panelida simvolli o'zgartirishlarning maxsus komandalariga mos knopkalar joylashgan (2.12-rasm). Masalan, ifodani hadlarga yoyish, o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish kabi boshqa operatsiyalar, ularni Mathcadda sonli-raqamli yechib bo'lmaydi va ular uchun kiritib o'rnatilgan funksiyalar nazarda tutilmagan.

2.3.2. Ifodalarni yoyish

Simvolli hisoblashlarning ikkala turini *cos(4x)* ifodani ko‘paytuvchilarga yoyish misolida ko‘rib chiqamiz. Simvolli yoyish yoki kengaytirish operatsiyasi davomida hamma summa va ko‘paytmalar ochiladi, murakkab trigonometrik bog‘lanishlar esa trigonometrik ayniyatlar yordamida yoyiladi. Ifodalarni yoyish Symbolics / Expand (Simvolika / Yoyilsin) komandasini tanlash yoki simvolli chiqarish operatori bilan birga tayanch so‘z *expand* dan foydalanish yo‘li bilan amalga oshiriladi.

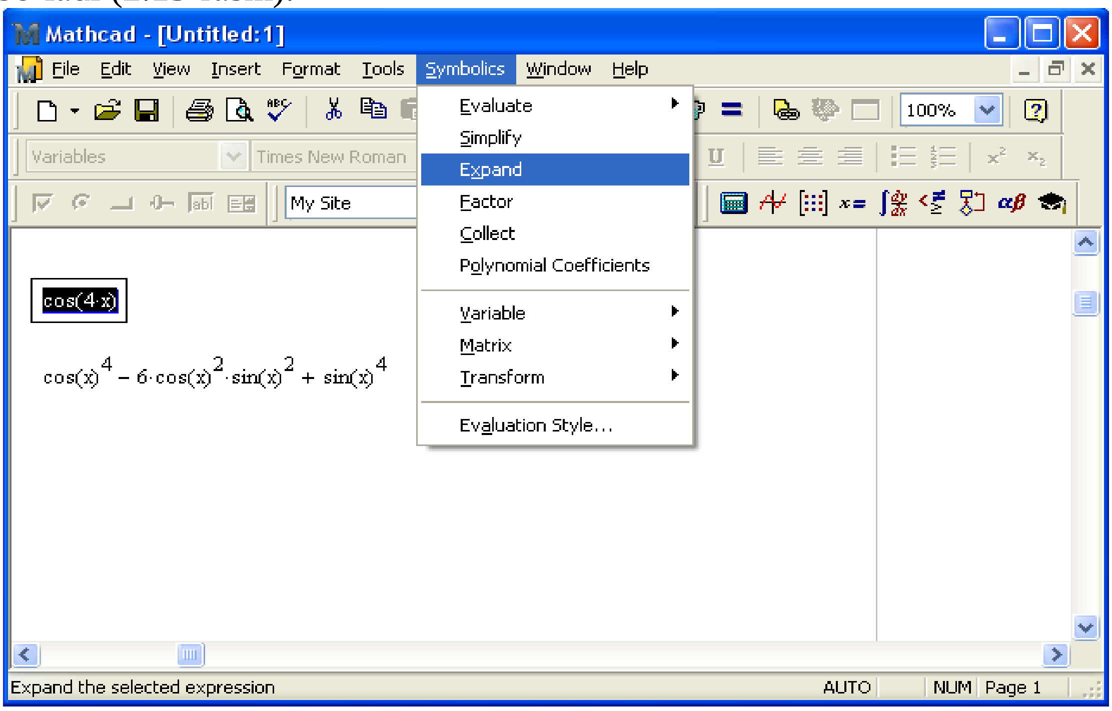


2.12-rasm. Symbolic paneli

Birinchi usul (menyu yordamida yoyish).

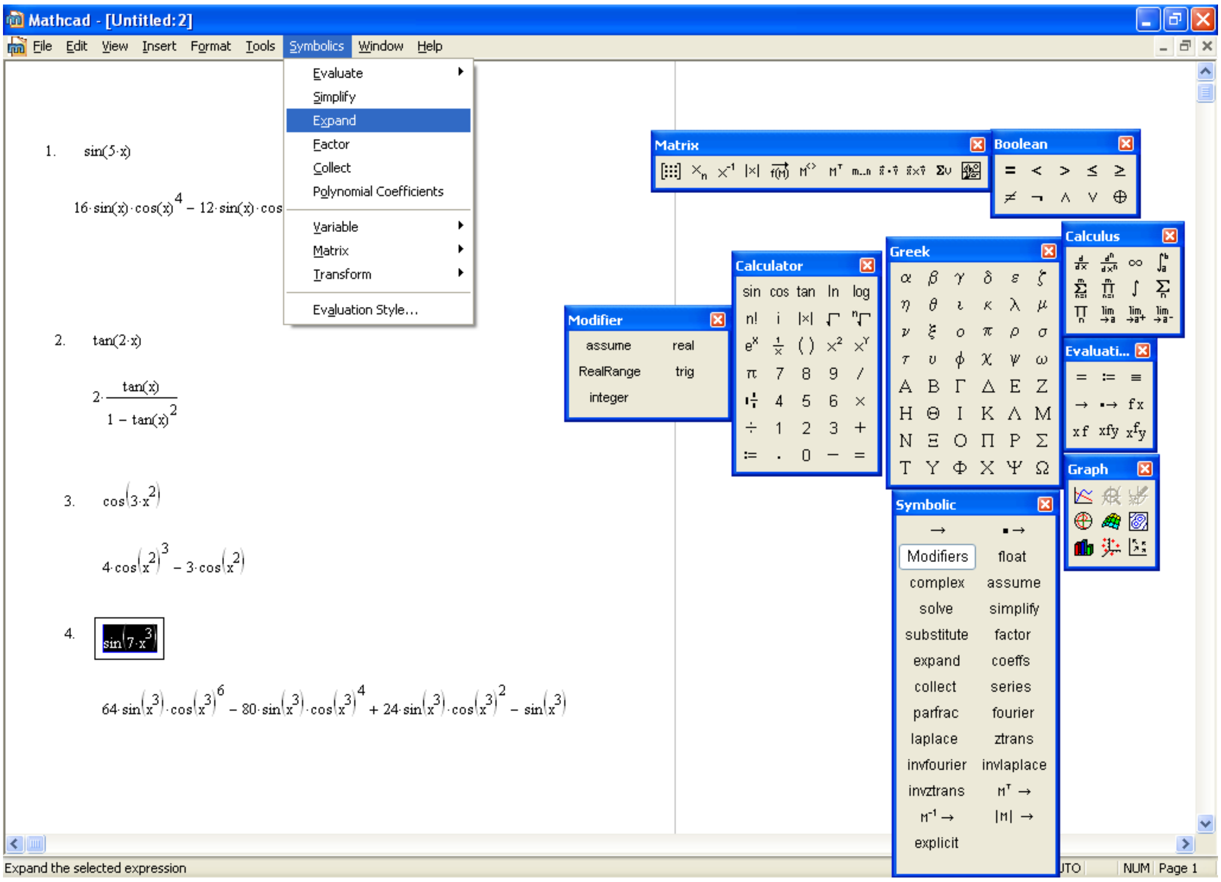
1. *cos(4x)* ifodani kiriting.
2. Uni butunicha ajratib ko‘rsating (2.13-rasmga qarang).
3. Bosh menyuda Symbolics / Expand (Simvolika / Yoyilsin) punktini tanlang.

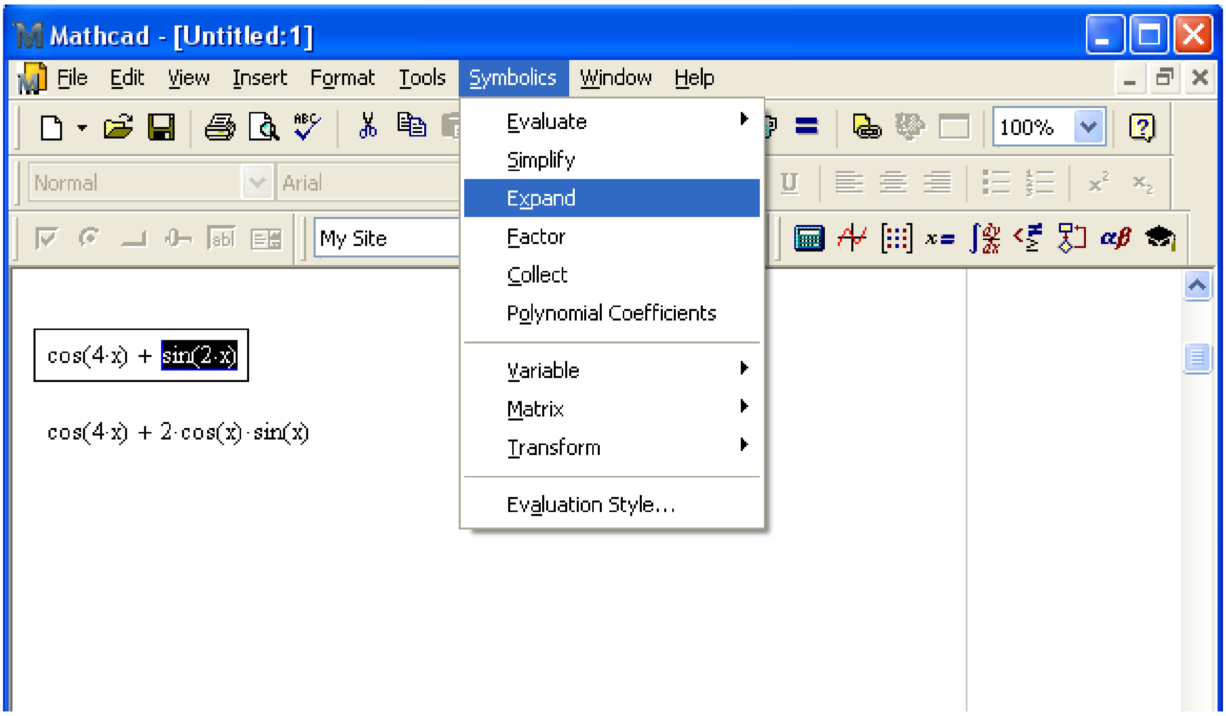
Bundan keyin ifodani yoyish natijasi biroz pastroqda yana bitta qator ko‘rinishida paydo bo‘ladi (2.13-rasm).



2.13-rasm. Symbolics/Expand menyu komandasi yordamida ifodani ko‘paytuvchilarga yoyish

Misol





2.14. Ifodaning bir qismini simvolli yoyish va uning natijasi

Diqqat!

Menyu yordamida simvolli operatsiyalar faqat qandaydir obyekt (ifoda, uning bir qismi yoki alohida o‘zgaruvchi) ustidagina bajarilishi mumkin. Istalayotgan analitik o‘zgartishlarni to‘g‘ri amalga oshirish uchun, bu o‘zgartishlar qaysi obyektga taalluqli bo‘lsa, o‘sha obyektni oldindan ajratib ko‘rsatish zarur. Ushbu holda o‘zgartishlar *cos(4x)* ifodaning hammasiga qo‘llandi. Agar 2.14-rasmda ko‘rsatilganidek, formulaning bir qismi ajratib ko‘rsatilsa, u holda mos o‘zgartishlar faqat ajratilgan qismga qo‘llanadi (ushbu rasmda pastki qator).

Ikkinchi usul (–> operatori yordamida yoyish).

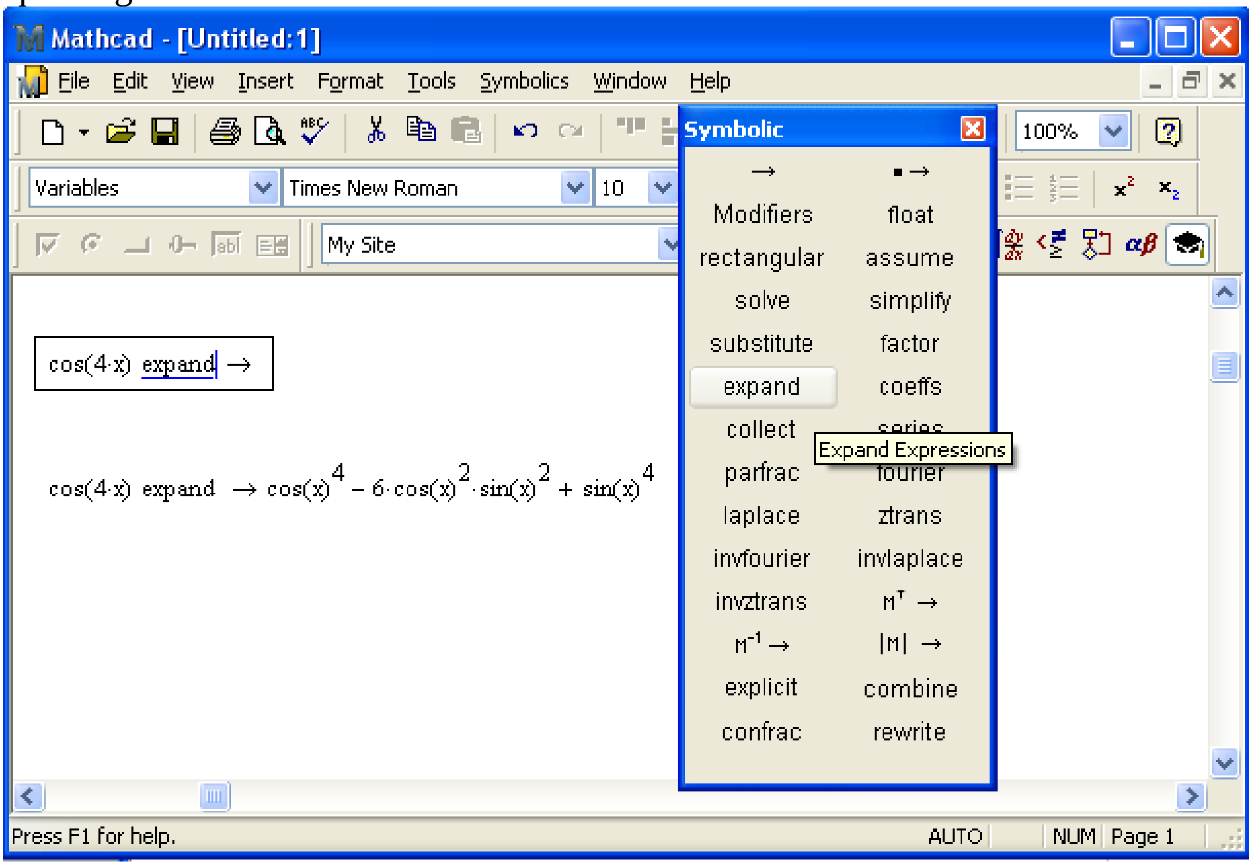
1. Ifodani, masalan *cos(4x)*ni, kiriting.

2. Symbolic (Simvolika) panelida Expand (Yoyilsin) knopkasini bosing.

3. Paydo bo‘lgan tayanch so‘z *expand* (2.15-rasm, yuqorida)dan keyin o‘rinto‘ldirgichga o‘zgaruvchi *x* nomini kiriting yoki o‘rinto‘ldirgichni yo‘qotish uchun <Del> klavishasini bosing.

4. Simvolli chiqarish operatori —> ni kiriting.

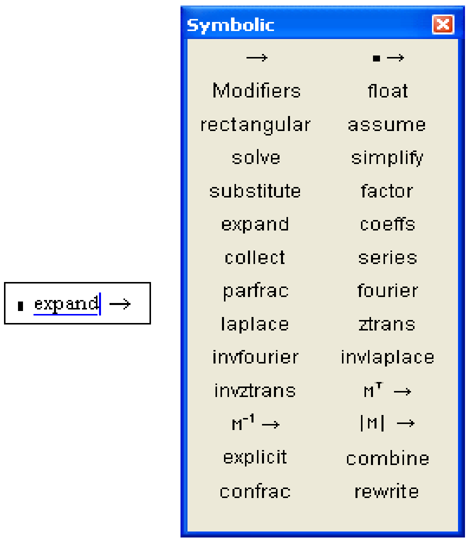
5. <Enter> klavishasini bosing yoki ifoda chegarasidan tashqarida sichqonni shiqillating.



2.15-rasm. Ifodani simvolli yoyish

Izoh

Harakatni boshqacha tartibda ham bajarish mumkin: dastlab tayanch so‘z kiritiladi, so‘ngra paydo bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichlarga ifoda va o‘zgaruvchi teriladi.



2.16-rasm. Tayanch so‘zini dastlabki kiritish natijasi

Simvolli chiqarish operatorini, yodingizda bo‘lsa, Mathcad redaktorida bir necha usul bilan: Evaluation (Ifodalar) yoki Symbolic (Simvolika) panellaridan biridagi —> knopkani bosib yoki <Ctrl>+<.> klavishalarini birgalikda bosib kiritish mumkin.

Ifodani simvolli yoyish natijasi 2.15-rasmda, pastda ko‘rsatilgan.

Maslahat

Agar Sizda simvolli hisoblashlar usulini tanlash imkoni bo‘lsa, ikkinchi usulni –» operatori yordamida tanlang, chunki bunda hujjatda foydalanuvchining amali saqlanib qoladi. Simvolli hisoblashlarning maxsus menyusi – Mathcad eski versiyalaridan qolib ketgan.

Ba`zi ifodalar analitik o‘zgartishlarga bo‘ysunmaydi. Agar shunday bo‘lsa (yoki masala umuman analitik yechimga ega emas, yoki u Mathcad simvolli protsessori uchun haddan tashqari murakkab), natija sifatida ifodaning o‘zi chiqariladi (listing 2.11, pastki qatorda).

Listing 2.11. Simvolli o‘zgartishlar

$$\cos(2x)\ \text{expand}, x\ \rightarrow 2\cdot\cos(x)^2 - 1$$

$$\cos(x)\ \text{expand}, x\ \rightarrow \cos(x)$$

Misollar

1. $\sin(2x)\ \text{expand}, x\ \rightarrow 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

2. $\tan(2\cdot x)\ \text{expand}, x\ \rightarrow 2\cdot\dfrac{\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$

3. $\tan(\alpha+\beta)\ \text{expand}, x\ \rightarrow \dfrac{\tan(\beta)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\beta)\cdot\tan(\alpha)}$

4. $\tan(\alpha-\beta)\ \text{expand}, x\ \rightarrow \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\beta)\cdot\tan(\alpha)}$

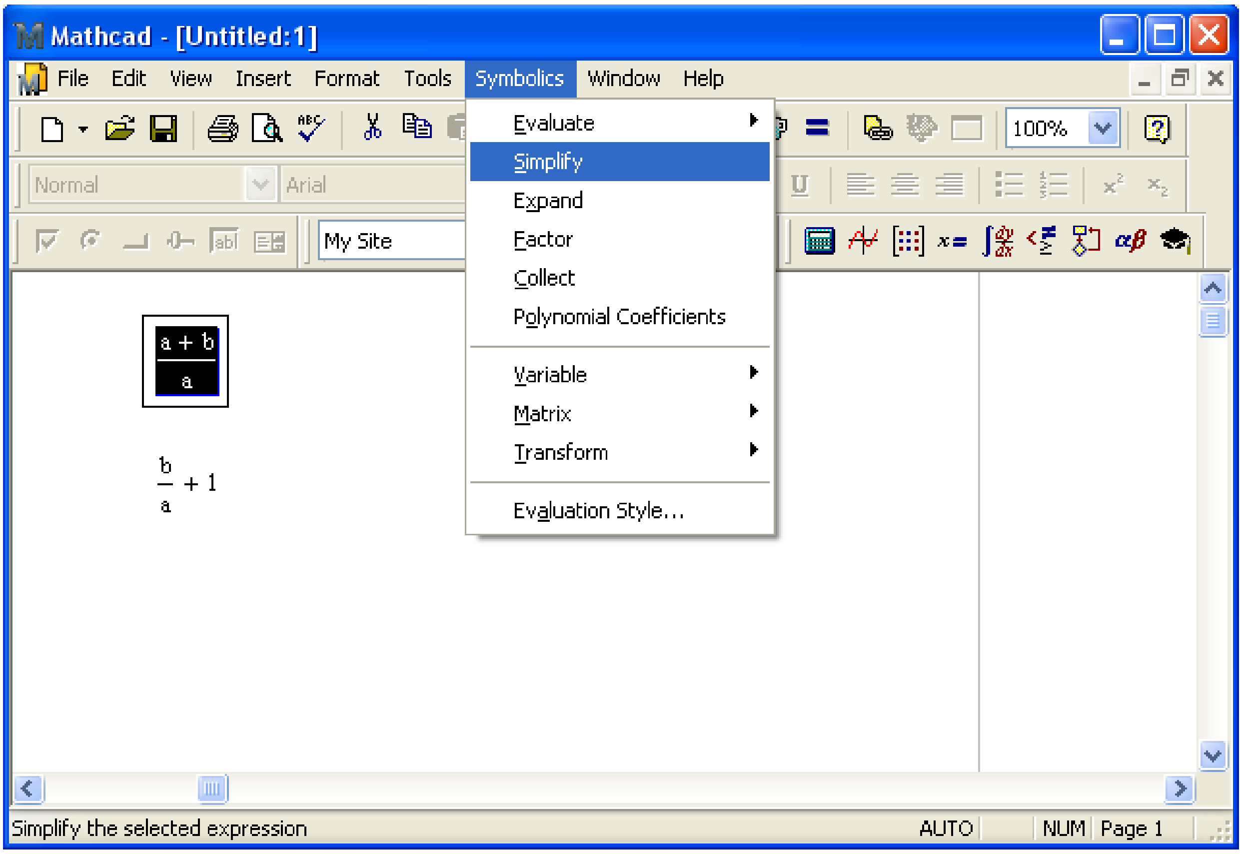
Izoh

Bundan keyin simvolli hisoblashlarni menyu yordamida ko‘rganda natijalarni rasmlar yordamida illyustratsiya qilamiz, –> operatorini qo‘llab bajarilgan simvolli hisoblashlarni esa listinglar ko‘rinishida keltiramiz.

2.3.3. Ifodalarni soddalashtirish

Ifodalarni soddalashtirish – bu ko‘p qo‘llaniladigan, ma`nosi bo‘yicha yoyish operatsiyasiga teskari bo‘lgan, operatsiyadir. Mathcadning simvolli protsessori ifodani shunday o‘zgartirishga intiladiki, u mumkin qadar sodda shaklni egallasin. Bunda turli arifmetik formulalar, o‘xshash yig‘iluvchilarni keltirish, trigonometrik ayniyatlar, teskari funksiyalarni qayta hisoblash va boshqalardan foydalaniladi. Menyu yordamida ifodani soddalashtirish uchun (2.17-rasm):

1. Ifodani kiriting.
2. Ifodani butunlay yoki uning soddalashtirilishi lozim bo‘lgan bir qismini ajratib ko‘rsating.
3. Symbolics / Simplify (Simvolika / Soddalashtiring) komandasini tanlang.



2.17-rasm. Ifodani soddalashtirish

Simvolli chiqarish operatori yordamida ifodani soddalashtirish uchun *simplify* tayanch so‘zidan foydalaning (listing 2.12). Agar ifodaga kiruvchi ba`zi o‘zgaruvchilarga ilgari ba`zi qiymatlar berilgan bo‘lsa, simvolli chiqarish bajarilganda bu qiymatlar o‘zgaruvchilarga qo‘yilib qolgan bo‘ladi (listing 2.13).

Listing 2.12. Ifodani soddalashtirish

$$\frac{a+b-a}{2a}\ \text{simplify}\ \to \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$$

$$\frac{a+b-a}{2a} \to \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$$

Misollar

1. $$a+\frac{1}{2a+a}\ \text{simplify}\ \to \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot a^2+1}{a}$$

$$a+\frac{1}{2\cdot a+a} \to a+\frac{1}{3\cdot a}$$

2. $$b-\frac{1}{4\cdot a+2\cdot b}\ \text{simplify}\ \to \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot b\cdot a+2\cdot b^2-1}{2\cdot a+b}$$

$$b-\frac{1}{4\cdot a+2\cdot b} \to b-\frac{1}{4\cdot a+2\cdot b}$$

3. $$4\cdot c+\frac{1}{5\cdot a-3\cdot c}-a \text{ simplify } \to \frac{-\left[(-23)\cdot c\cdot a+12\cdot c^2-1+5\cdot a^2\right]}{5\cdot a-3\cdot c}$$

$$4\cdot c+\frac{1}{5\cdot a-3\cdot c}-a \to 4\cdot c+\frac{1}{5\cdot a-3\cdot c}-a$$

4. $$a^2+2\cdot a\cdot b-b^2 \text{ simplify } \to a^2+2\cdot b\cdot a-b^2$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b-b^2 \to a^2+2\cdot b\cdot a-b^2$$

Listing 2.13. O‘zgaruvchilar qiymati qo‘yilib ifodani soddalashtirish

$$a := 5 \qquad b := 10$$

$$\frac{a+b-a}{2a} \text{ simplify } \to 1$$

$$\frac{a+b-a}{2a} \to 1$$

Misollar

1. $$a := 5$$

$$a+\frac{1}{2\cdot a+a} \text{ simplify } \to \frac{76}{15}$$

$$a+\frac{1}{2\cdot a+a} \to \frac{76}{15}$$

2. $$a := 7 \qquad b := 3$$

$$b-\frac{1}{4\cdot a+2\cdot b} \text{ simplify } \to \frac{101}{34}$$

3. $$c := 4 \qquad b := 5$$

$$4\cdot c+\frac{1}{5\cdot a-3\cdot c}-a \text{ simplify } \to \frac{208}{23}$$

$$4\cdot c+\frac{1}{5\cdot a-3\cdot c}-a \to \frac{208}{23}$$

4. $$a := 5 \qquad b := 10$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b-b^2 \text{ simplify } \to 25$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b-b^2 \to 25$$

Raqamlari bo‘lgan ifodalarni soddalashtirish. Raqamlarda o‘nlik nuqta bo‘lishiga qarab, soddalashtirish har xil bajariladi. Agar u bor bo‘lsa, ifoda bevosita hisoblanadi (listing 2.14).

Listing 2.14. Raqamli ifodani soddalashtirish

$$\sqrt{3.01} \text{ simplify } \to 1.7349351572897472412$$

$$\operatorname{acos}(0) \text{ simplify } \to \frac{1}{2}\cdot\pi$$

Misollar

1. $\sqrt[3]{132+9^2}$ simplify $\rightarrow 213^{\frac{1}{3}}$

2. $\sqrt{965.36}$ simplify $\rightarrow 31.070242998727898588$

3. $\sqrt{555.00}$ simplify $\rightarrow 23.558437978779492926$

4. $\sqrt[4]{132.0+2\cdot 9^2}$ simplify $\rightarrow 4.1408245796558741311$

2.3.4. Ko'paytuvchilarga yoyish

Ifodalarni oddiy ko'paytuvchilarga yoyish Symbolics / Factor (Simvolika / Ko'paytuvchilarga yoyish) komandasi yordamida (2.18-rasm) yoki simvolli chiqarish operatori bilan birga *factor* tayanch so'zidan foydalanib (listing 2.15) amalga oshiriladi. Bu operatsiya polinomlarni ancha soddaroq polinomlar ko'paytmasiga, butun sonlarni esa – oddiy ko'paytuvchilarga yoyish imkonini beradi. Menyu komandasini qo'llaganda, uni chaqirishdan oldin, ko'paytuvchilarga yoyishga rejalashtirilgan ifodani butunicha yoki uning bir qismini ajratib ko'rsatishni yoddan chiqarmang.

Listing 2.15. Ko'paytuvchilarga yoyishga misollar

$$x^4 - 16 \text{ factor } \rightarrow (x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)$$

$$28 \text{ factor } \rightarrow 2^2\cdot 7$$

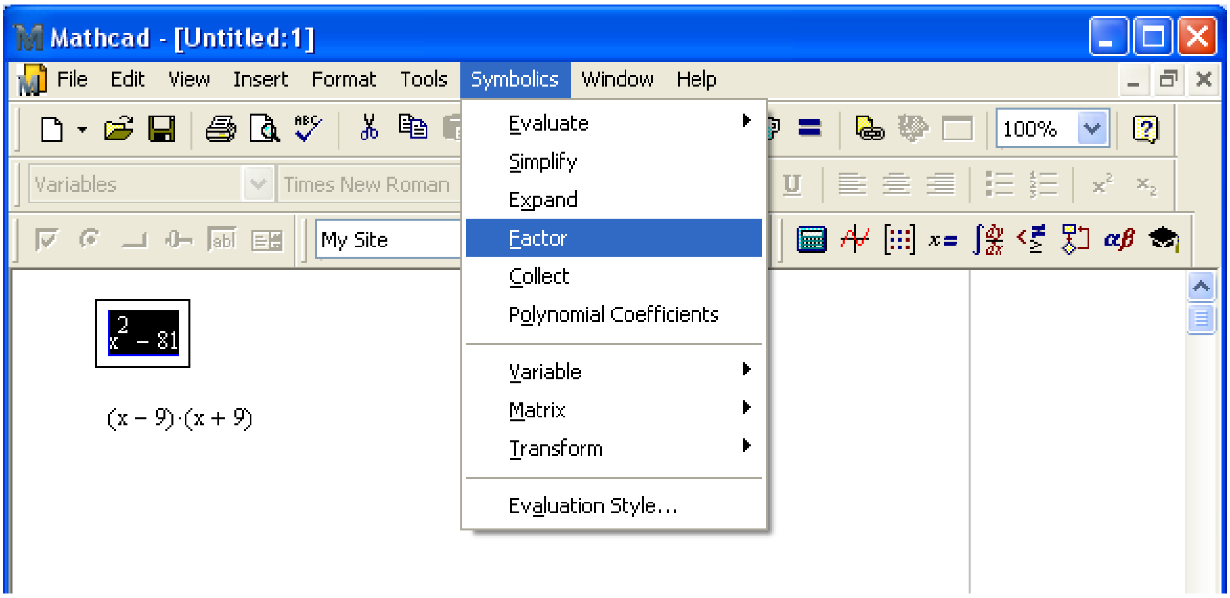
Misollar

1. $x^4 - 81$ factor $\rightarrow (x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(x^2+9\right)$

2. $x^3 + 27$ factor $\rightarrow (x+3)\cdot\left(x^2-3\cdot x+9\right)$

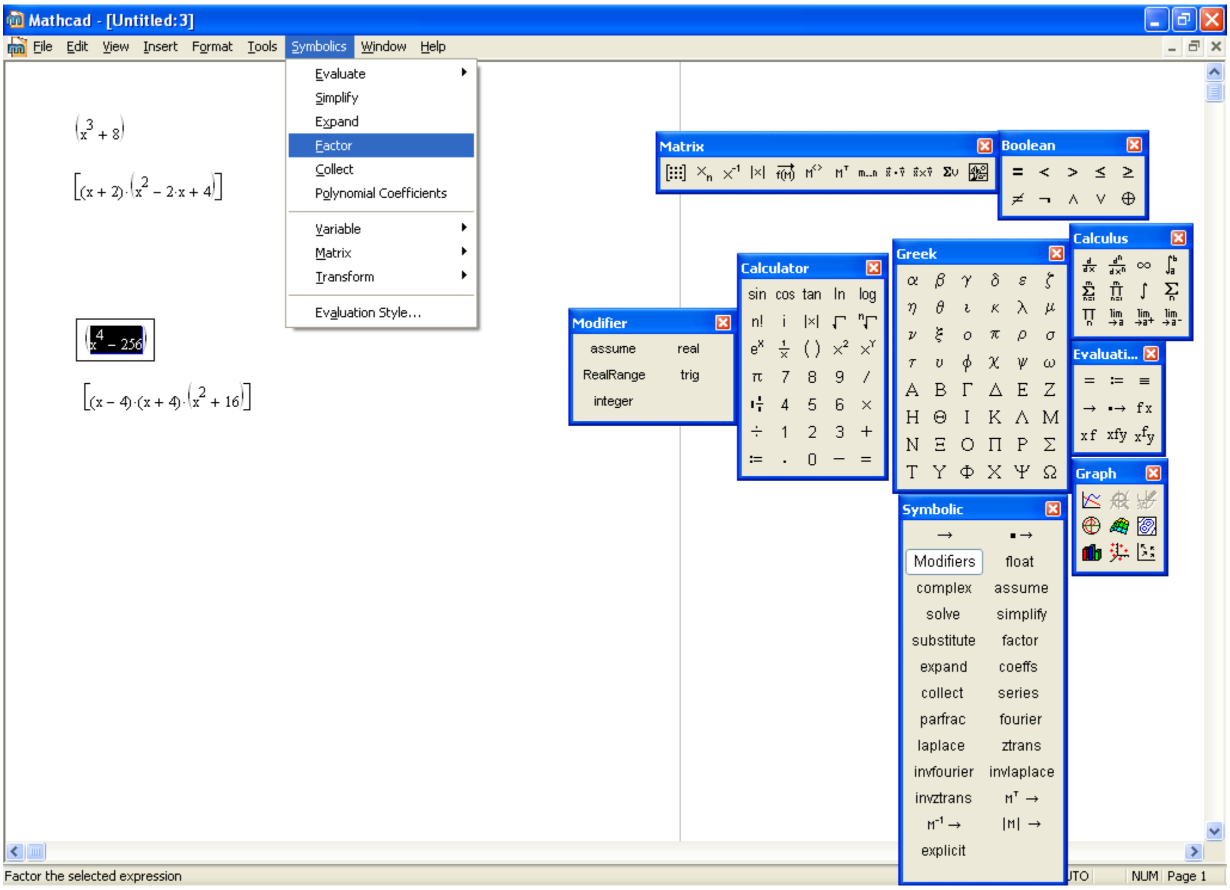
3. 21 factor,x $\rightarrow 3\cdot 7$

4. 585 factor,x $\rightarrow 3^2\cdot 5\cdot 13$



2.18-rasm. Ifodani ko'paytuvchilarga yoyish

Misol



2.3.5. O'xshash qo'shiluvchilarni keltirish

Menyu yordamida o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish uchun:

1. Ifodani kiriting.

2. Qaysi o'zgaruvchiga nisbatan o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish kerak bo'lsa, o'sha o'zgaruvchining nomini ifodada ajratib ko'rsating (2.19-rasmdagi misolda bu o'zgaruvchi *y*).

3. Symbolics / Collect (Simvolika / O'xshashlarni keltirish) komandasini tanlang.

Natijada o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish natijasi ifoda etilgan qator paydo bo'ladi (2.19-rasmda pastki qator).

Simvolli chiqarish operatori yordamida o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish uchun:

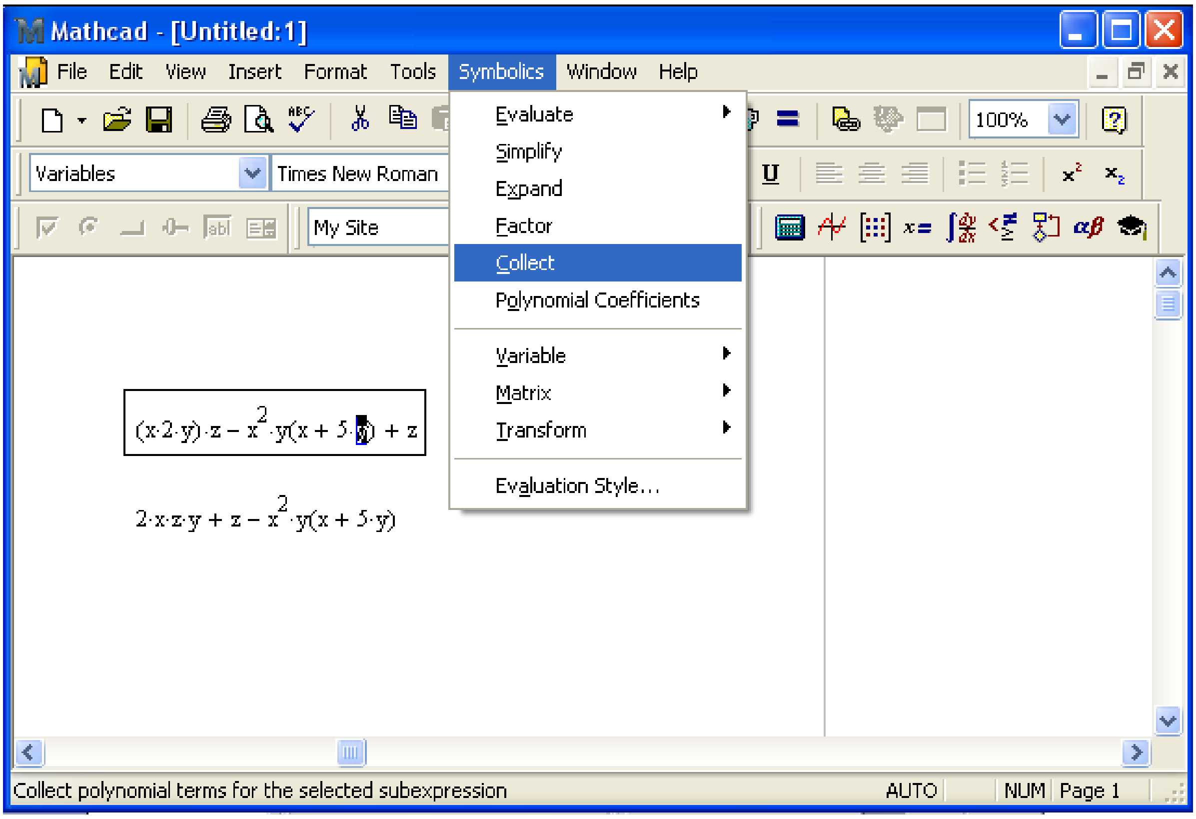
1. Ifodani kiriting.

2. Symbolic (Simvolika) panelida *Collect* knopkasini bosing.

3. Qaysi o'zgaruvchiga nisbatan o'xshash qo'shiluvchilarni keltirish kerak bo'lsa, o'sha o'zgaruvchining nomini kiritib o'rnatilgan *collect* tayanch so'zidan keyin o'rinto'ldirgichga kiriting (listing 2.16 dagi misolning birinchi qatorida – bu o'zgaruvchi *x*, ikkinchi qatorda – *y*).

4. Simvolli chiqarish operatori —> ni kiriting.

5. <Enter> klavishasini bosing.



2.19-rasm. O‘xshash qo‘shiluvchilarni keltirish

Izoh

Tayanch so‘zi *collect* dan keyin vergullar bilan ajratilgan bir nechta o‘zgaruvchi berilishi ruxsat etiladi. Bu holda (bu hol listing 2.6 ning oxirgi qatorida illyustratsiya qilingan) o‘xshash qo‘shiluvchilarni keltirish har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha ketma-ket bajariladi.

Listing 2.16. Har xil o‘zgaruvchilar bo‘yicha o‘xshash qo‘shiluvchilarni keltirish

$$(x + 2y)z - z^2 y(x + 5y) + z \text{ collect}, x \rightarrow \left(z - z^2 \cdot y\right) \cdot x + 2 \cdot y \cdot z - 5 \cdot z^2 \cdot y^2 + z$$

$$(x + 2y)z - z^2 y(x + 5y) + z \text{ collect}, y \rightarrow -5 \cdot z^2 \cdot y^2 + \left(2 \cdot z - z^2 \cdot x\right) \cdot y + z \cdot x + z$$

$$(x + 2y)z - z^2 y(x + 5y) + z \text{ collect}, x, y, z \rightarrow \left(z - z^2 \cdot y\right) \cdot x + 2 \cdot y \cdot z - 5 \cdot z^2 \cdot y^2 + z$$

Misollar

1. $(a + b)^3 \text{ collect}, b \rightarrow b^3 + 3 \cdot a \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 \cdot b + a^3$
2. $(a + b)^3 \text{ collect}, a \rightarrow b^3 + 3 \cdot a \cdot b^2 + 3 \cdot a^2 \cdot b + a^3$
3. $(x - y)^4 \text{ collect}, x \rightarrow x^4 - 4 \cdot y \cdot x^3 + 6 \cdot y^2 \cdot x^2 - 4 \cdot y^3 \cdot x + y^4$
4. $(x + y)^4 \text{ collect}, x \rightarrow x^4 + 4 \cdot y \cdot x^3 + 6 \cdot y^2 \cdot x^2 + 4 \cdot y^3 \cdot x + y^4$

2.3.6. Polinom koeffitsiyentlarini hisoblash

$n \in \{0,1,\ldots\}$ *va* $\{a_0, \ldots, a_n\} \subset A$ *da x o‘zgaruvchiga nisbatan*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$$

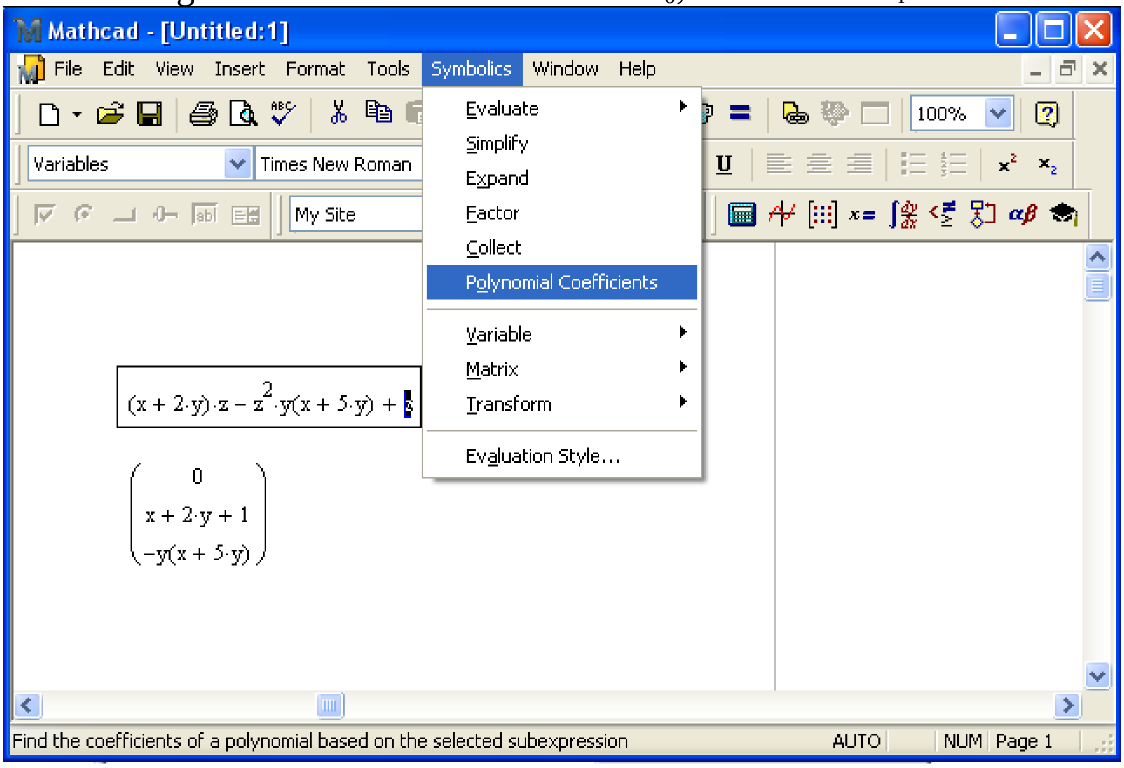
ko'rinishidagi funksiya polinom yoki A ko'pchilik ustida ko'rsatilgan o'zgaruvchidan ko'phad deyiladi. a_j *soni – (o'zgaruvchining* $^{(n-j)-}$*darajasida) polinom koeffitsiyenti,* $a_j x^{n-j}$ *ifoda – polinom hadi,* a_n *– erkin had,* $x^{(n-j)}$ *– monom deyiladi.*

Agar ifoda qaysidir o'zgaruvchi x nisbatan polinom bo'lsa va bu ifoda $a_0+a_1x+a_2x^2+...$ ko'rinishida emas, balki ancha oddiyroq polinomlar ko'paytmasi ko'rinishida berilgan bo'lsa, bu holda $a_0,a_1,a_2...$ koeffitsiyentlar Mathcad simvolli protsessori tomonidan oson aniqlanadi. Koeffitsiyentlarning o'zi boshqa o'zgaruvchilarning funksiyalari bo'lishi mumkin.

Menyu yordamida ifodadagi polinomial koeffitsiyentlarni hisoblash uchun (2.20-rasm):

1. Ifodani kiriting.
2. Unda o'zgaruvchining nomini yoki polinomial koeffitsiyentlari hisoblanishi talab qilingan ifodani ajratib ko'rsating (2.20-rasmdagi misolda bu o'zgaruvchi z).
3. Symbolic / Polynomial Coefficients (Simvolika / Polinomial koeffitsiyentlar).

Natijada ifoda ostida polinomial koeffitsiyentlardan tarkib topgan vektor paydo bo'ladi. Vektorning birinchi elementi – erkin had a_0, ikkinchisi – a_i va h.k.



2.20-rasm. Polinom koeffitsiyentlarini hisoblash

Izoh

Polinomial koeffitsiyentlar yechilishini talab qiladigan muayyan masala polinom ildizlarini sonli-raqamli aniqlashga bag'ishlangan bo'limida keltiriladi.

Simvolli chiqarish operatori yordamida polinomial koeffitsiyentlarni hisoblab chiqarish uchun:

1. Ifodani kiriting.
2. Symbolic (Simvolika) panelida *Coeffs* knopkasini bosing.
3. Kiritib o'rnatilgan tayanch so'z *Coeffs* dan keyin o'rinto'ldirgichga polinom argumentini kiriting.
4. Simvolli chiqarish operatori —> ni kiriting.
5. <Enter> klavishasini bosing.

Polinom koeffitsiyentlarini hisoblash uchun misollar 2.17- va 2.18-listinglarda keltirilgan. Listing 2.17 turli argumentlar uchun koeffitsiyentlarni hisoblashni ko‘rsatadi. Ikkinchi listing nafaqat alohida o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlarini aniqlash imkoniyatini, balki ko‘rilayotgan formulaga tarkibiy qism sifatida kirgan murakkab ifodalar uchun ham koeffitsiyentlarni aniqlash imkoniyatini namoyish qiladi.

Listing 2.17. Polinom koeffitsiyentlarini hisoblash

$$(x+2y)z - z^2y(x+5y) + z \text{ coeffs}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x + 2\cdot y + 1 \\ -y\cdot x - 5\cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$(x+2y)z - z^2y(x+5y) + z \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot y\cdot z - 5\cdot z^2\cdot y^2 + z \\ z - z^2\cdot y \end{pmatrix}$$

Misollar

1. $(a+b)+c+(a-b)+c \text{ coeffs}, c \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot a \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $(a+b)^2\cdot c + a\cdot b\cdot\left(a - c + b^2\right) + c \text{ coeffs}, a \rightarrow \begin{pmatrix} c\cdot b^2 + c \\ c\cdot b + b^3 \\ c + b \end{pmatrix}$

3. $a\cdot b\cdot(2\cdot c - c) + 4\cdot b + 3\cdot a + b \text{ coeffs}, b \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot a \\ c\cdot a + 5 \end{pmatrix}$

4. $a\cdot b - 3\cdot b\cdot c - (4\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot b) - 4\cdot c \text{ coeffs}, a \rightarrow \begin{bmatrix} (-3)\cdot c\cdot b - 4\cdot c \\ (-5)\cdot b \end{bmatrix}$

Listing 2.18. Oddiy o‘zgaruvchi va ifoda uchun polinomial koeffitsiyentlarni hisoblash

$$(x-4)(x-7)x + 99 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 99 \\ 28 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x-4)^3 + (x-4)(x-7)x + 99 \text{ coeffs}, x-4 \rightarrow \begin{pmatrix} 99 \\ x^2 - 7\cdot x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

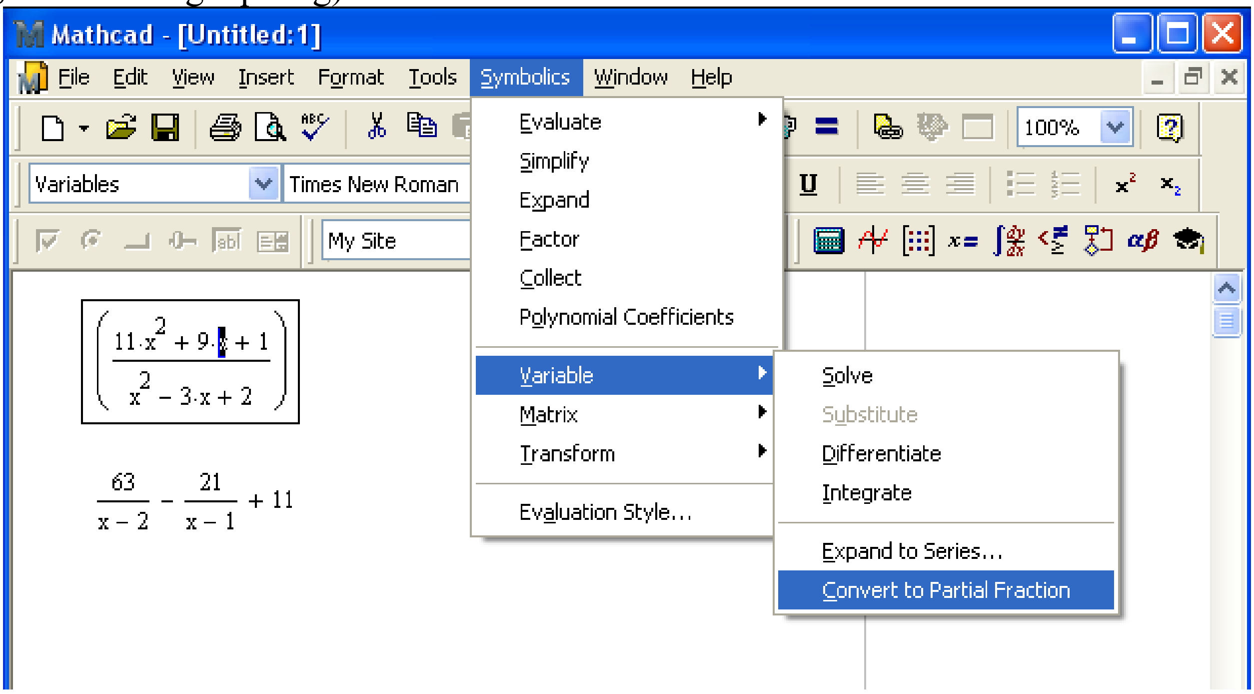
Misollar

1. $\left(x^2 - 16\right)\cdot\left(x^3 + 7\right) + 186 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 74 \\ 0 \\ 7 \\ -16 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2. $(x-3)^4 - \left(x^2 - 3\cdot x + 9\right)^2 - 23 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -23 \\ -54 \\ 27 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$3.\ x^4 + 25\cdot x^3 - (x-9)^2 + 35\cdot x - 2 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -83 \\ 53 \\ -1 \\ 25 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 4.\ 352\cdot x^2 - (x-5)\cdot(2\cdot x+10)^2 - 20 \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 480 \\ 100 \\ 332 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2.3.7. Oddiy kasrlarga bo'lish

Murakkab kasrni oddiyroq kasrlarga yoyish uchun yoki Symbolics / Variable / Convert to Partial Fractions (Simvolika / O'zgaruvchi / Elementar kasrlarga bo'linsin) komandasini bajarish (2.21-rasm) yoki tayanch so'z *parfras* ko'rsatilishi (2.19-listing) lozim. Birinchi usul (menyu) qo'llanilganida, uning komandasini tanlashdan oldin, qaysi o'zgaruvchi bo'yicha yoyish amalga oshiriladigan bo'lsa, o'sha o'zgaruvchini ajratib ko'rsating, agar ikkinchi usuldan foydalanilsa (simvolli chiqarish operatoridan), o'zgaruvchining nomini tayanch so'z *parfrac* dan keyin ko'rsatish lozim. Umuman, oddiy kasrlarga yoyishda amallar ketma-ketligi oddiy, ya`ni har galgidek (masalan, 2-, 3-, 4-bo'limlarga qarang) bo'ladi.



2.21-rasm. Murakkab kasrni oddiy kasrlarga yoyish

Listing 2.19. Elementar kasrlarga yoyish

$$\frac{11x^2 + 9x + 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ convert, parfrac}, x \rightarrow 11 - \frac{21}{x-1} + \frac{63}{x-2}$$

Misollar

$$1.\ \frac{326\cdot x^2 - 3\cdot x + 13}{630\cdot x^2 - x + 1} \text{ convert,parfrac}, x \rightarrow \frac{163}{315} + \frac{3932 - 782\cdot x}{198450\cdot x^2 - 315\cdot x + 315}$$

$$2.\ \frac{3\cdot x^3 - 6\cdot x + 13}{x^2 - 3\cdot x + 2} \text{ convert,parfrac}, x \rightarrow 3\cdot x + 9 - \frac{10}{x-1} + \frac{25}{x-2}$$

3. $\frac{1}{x^2 + 12 \cdot x + 36}$ convert, parfrac, x $\rightarrow \frac{1}{(x+6)^2}$

4. $\frac{3 \cdot x + 36}{(x-3)^3}$ convert, parfrac, x $\rightarrow \frac{45}{(x-3)^3} + \frac{3}{(x-3)^2}$

2.3.8. Qatorlar va ko‘paytmalarni hisoblash

Analitik chekli yoki cheksiz summa yoki ko‘paytmani hisoblash uchun:

1. Summalash yoki ko‘paytmalarning mos simvollarini kiritib o‘rnatish uchun Calculus (Hisoblashlar) panelidan foydalanib ifodani kiriting. Zarurat bo‘lganda qatorning chegarasi sifatida cheksizlik simvoli (<Ctrl>+<Shift>+<Z> klavishalari)ni kiriting.

2. Simvolli hisoblashlarning qaysi stilini istayotganingizga qarab Symbolics / Simplify (Simvolika / Soddalashtirilgan) komandasini tanlang yoki simvolli chiqarish operatori —> ni kiriting.

Qatorlar va ko‘paytmalarni sonli-raqamli yoki simvolli hisoblashga misollar 2.20- va 2.21-listinglarda keltirilgan.

Listing 2.20. Qatorlarni simvolli va sonli-raqamli hisoblash

$$\sum_{i=0}^{10} 2^i = 2.047 \times 10^3 \qquad \sum_{i=0}^{10} 2^i \rightarrow 2047$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i \rightarrow \frac{-1}{a-1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{2^n n!} \rightarrow e^{\frac{1}{2}} = 1.649$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!} \rightarrow e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\sum_{n=0}^{100} \frac{1^n}{2^n n!} = 1.649$$

Misollar

1. $\sum_{n=0}^{2} \frac{2 \cdot n}{3^n + 9 \cdot n!} \rightarrow \frac{17}{54}$ $\qquad \sum_{n=0}^{2} \frac{2 \cdot n}{3^n + 9 \cdot n!} = 0.315$

2. $\sum_{i=0}^{3} \left(a^i - 23\cdot i!\right) \to (-229) + a + a^2 + a^3$ $\qquad \sum_{i=0}^{3} \left(2^i - 23\cdot i!\right) = -215$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3\cdot n!} \to \frac{2}{3}\cdot e^x$ $\qquad \sum_{n=0}^{100} \frac{2^n}{3\cdot n!} = 2.463$

4. $\sum_{i=0}^{10} (23\cdot i)^2 \to 203665$ $\qquad \sum_{i=0}^{10} (23\cdot i)^2 = 2.037\times 10^5$

Listing 2.21. Ko‘paytmani simvolli hisoblash

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \to 0 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \to \infty$$

Misollar

1. $\prod_{n=1}^{3} \frac{1}{n^3+n^2-3} \to \frac{-1}{297}$ $\qquad$ 2. $\prod_{n=1}^{\infty} e^n \to \infty$

3. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} \to 0$ $\qquad$ 4. $\prod_{n=1}^{2} \sqrt[n]{e^2} \to \left(e^2\right)^{\frac{3}{2}}$

2.3.9. O‘zgaruvchini o‘rniga qo‘yish (подстановка)

Simvolli hisoblashlarning juda qulay imkoniyati – bu ifodaga o‘zgaruvchi qiymatini qo‘yish operatsiyasidir. Menyu yordamida o‘rniga qo‘yish quyidagi tarzda amalga oshiriladi (2.22-rasm):

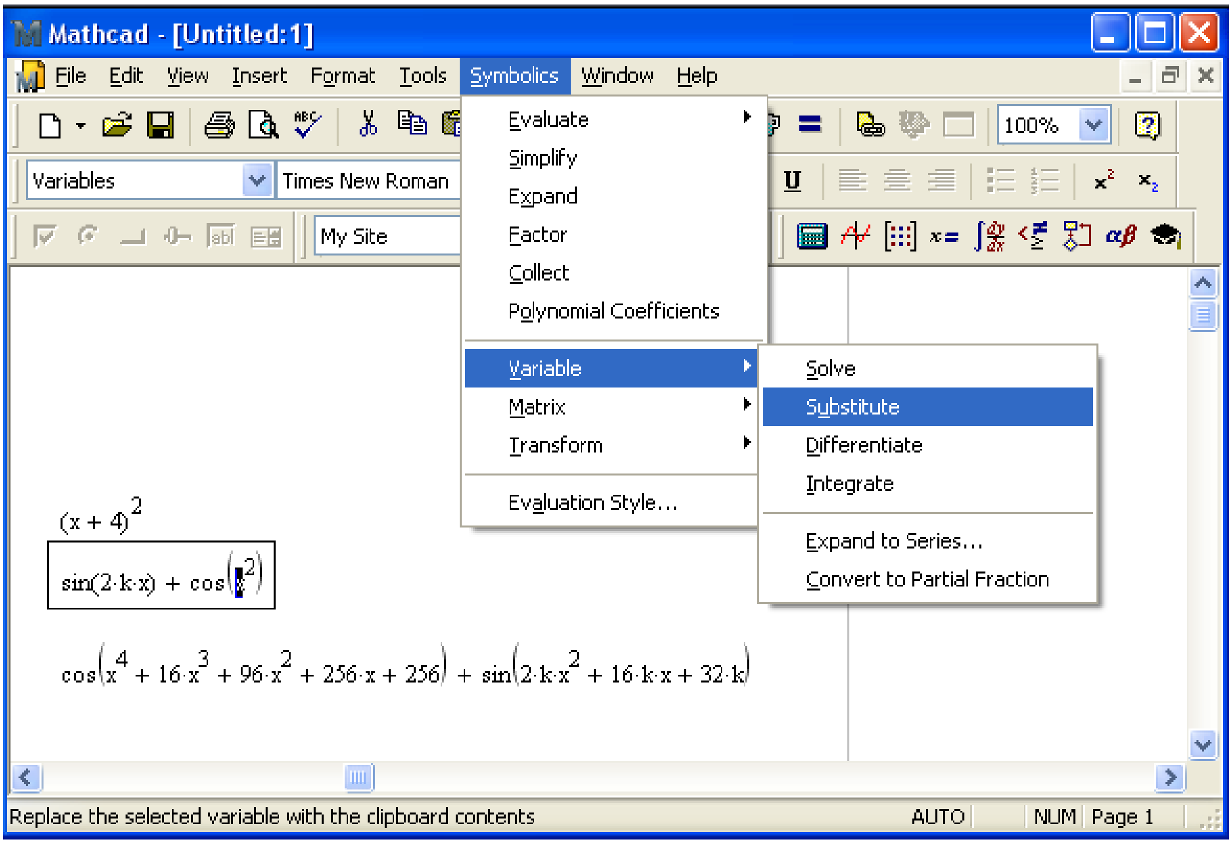
1. Qaysidir ifodaga qo‘yilishi lozim bo‘lgan o‘zgaruvchining qiymatini ajratib ko‘rsating. O‘zgaruvchining qiymati istalgan o‘zgaruvchilarga nisbatan istalgan bo‘lishi mumkin (2.22-rasmda o‘rnatish uchun hujjatning birinchi qatori olingan).

2. <Ctrl>+<C> klavishalarini bosib yoki Standard (Standart) instrumentlar panelida Copy (Kopiya oling) knopkasini bosib, o‘zgaruvchi qiymatidan almashtirish buferiga kopiya oling.

3. Almashtirish buferidan qiymati qo‘yilishi talab qilingan o‘zgaruvchini (bu o‘zgaruvchining qiymati o‘zgartiriladi) ajratib ko‘rsating (2.22-rasm ikkinchi qatorida o‘zgaruvchi *x* ajratib ko‘rsatilgan).

4. Symbolics / Variable / Substitute (Simvolika / O‘zgaruvchi / O‘rniga qo‘yilgan) komandasini bajaring.

Bu amallar natijasi 2.22-rasmdagi hujjatning pastki qatorida illyustratsiya qilingan.



2.22-rasm. O‘zgaruvchi qiymatini qo‘yish

Ushbu operatsiyani simvolli chiqarish operatori bilan birgalikda amalga oshirish uchun *substitute* tayanch so‘zidan foydalaning, bu so‘z Symbolic (Simvolika) panelidagi shu nomli knopka bilan hujjatga kiritib o‘rnatiladi. *Substitute* tayanch so‘zidan keyin qaysi formuladagi aynan qaysi o‘zgaruvchini almashtirish lozimligini ko‘rsatuvchi mantiqiy ifodani o‘rinto‘ldirgichga kiritish kerak (listing 2.22).

Listing 2.22. O‘zgaruvchi qiymatini qo‘yish

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right)\ \text{substitute}, k = a\cdot x^2 \ \rightarrow \sin\left(a\cdot x^4 + b\cdot x\right)$$

Misollar

1. $\cos\left(k\cdot x^3 + b\cdot x^2 + 12\cdot x + 69\right)\ \text{substitute}, k =$
$= a\cdot x^2 + 3\cdot x + 6 \ \rightarrow \cos\left[\left(a\cdot x^2 + 3\cdot x + 6\right)\cdot x^3 + b\cdot x^2 + 12\cdot x + 69\right]$

2. $\ln(23 + k\cdot x)\ \text{substitute}, k = a\cdot x + 6 \ \rightarrow \ln[23 + (a\cdot x + 6)\cdot x]$

3. $\log\left(k\cdot x + 2\cdot x^2 - 3\right)\ \text{substitute}, k = a + 6 \ \rightarrow \dfrac{\ln\left[(a+6)\cdot x + 2\cdot x^2 - 3\right]}{\ln(10)}$

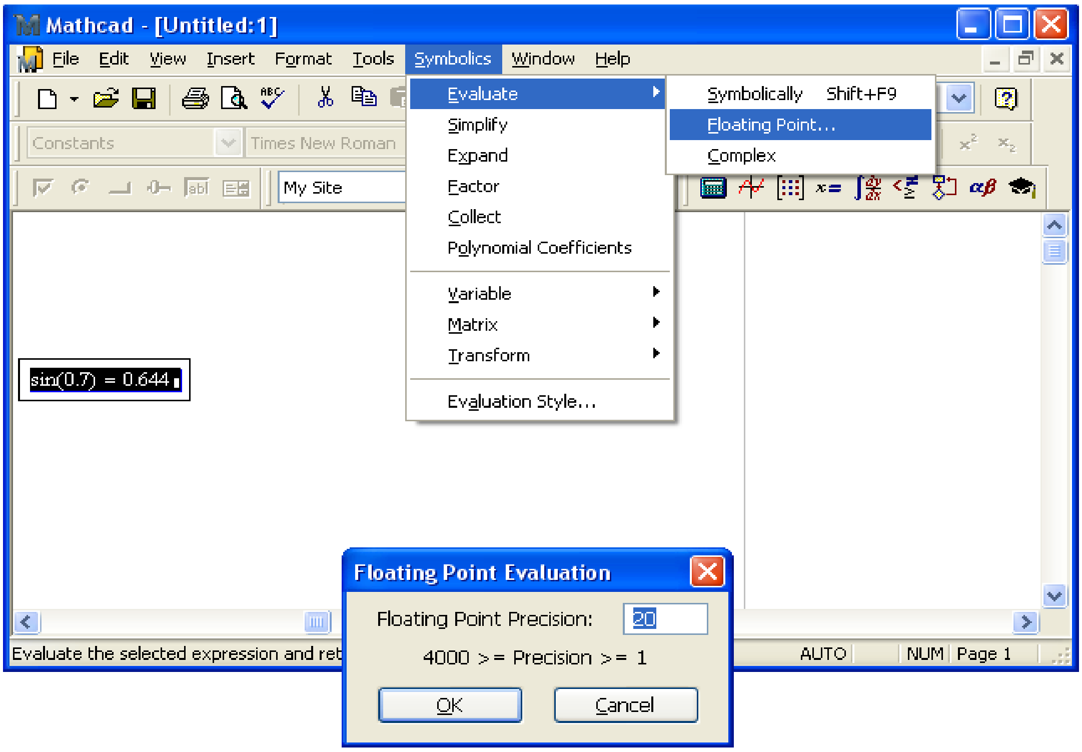
4. $\tan(12\cdot k + 6\cdot x + 9)\ \text{substitute}, k = a + 2\cdot x \ \rightarrow \tan(12\cdot a + 30\cdot x + 9)$

2.3.10. Ifodaning sonli-raqamli qiymatini olish

Simvolli protsessor yordamida (haqiqiy yoki kompleks) ifodaning sonli-raqamli qiymatini hisoblab topish mumkin. Ba`zan bu usul sonli-raqamli protsessorni (ya`ni oddiy tenglik belgisini) qo‘llaganga ko‘ra qulayroq bo‘ladi. Qandaydir ifodaning (2.23-rasm) qiymatini hisoblab topish uchun Symbolics / Evaluate / Symbolically (Simvolika / Hisoblab topilsin / Simvolli) komandasini yoki Symbolics / Evaluate / Floating Point (Simvolika / Hisoblab topilsin / Suzib yuruvchi nuqtali) punktini tanlang. Keyingi holda

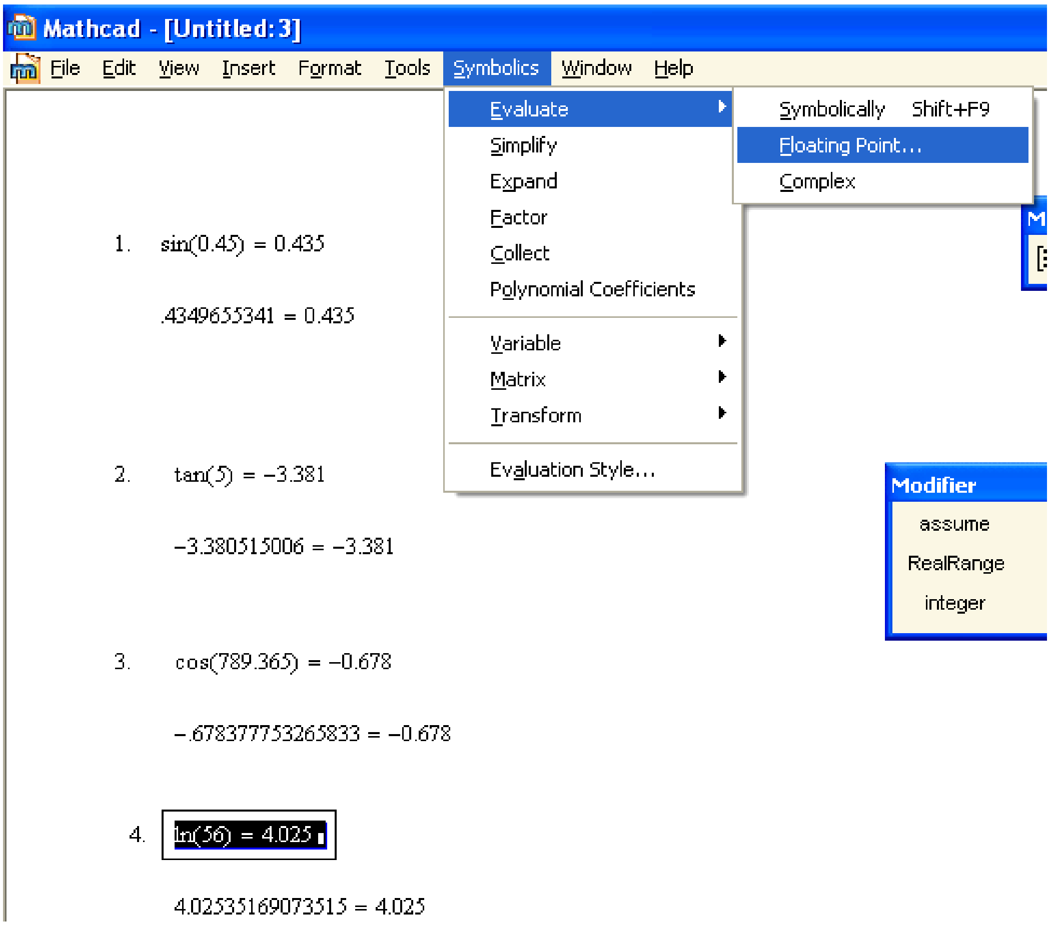
Floating Point Evaluation (Suzuvchi nuqtali hisoblashlar) dialogi yordamida Sizga chiqarilish aniqligini berish taklif qilinadi. Ushbu komandalarni qo‘llash natijasida Mathcad, mumkin bo‘lgan joylarda, simvolli natijalarni suzib yuruvchi nuqtali sonlar ko‘rinishidagi qiymatlar bilan almashtiradi.

Symbolics / Evaluate / Complex (Simvolika / Hisoblab topilsin / Kompleksli) menyuning yana bitta punkti ifodani $a+bi$ ko‘rinishida taqdim etish imkonini beradi.



2.23-rasm. Suzib yuruvchi nuqtali ifodani hisoblash

Misol



Ta`siri bo‘yicha shunga o‘xshash bo‘lgan tayanch so‘zlar *float* va *complex* dan hujjatlarda ularni Symbolic (Simvolika) panelidan kiritib foydalanish mumkin. Tayanch so‘z *float* natijani suzuvchi nuqtali chiqarish aniqligi qiymati bilan birga ishlatiladi (listing 2.23). *Complex* so‘zi yordamida ifodalarni ham simvolli ko‘rinishda va ham sonli qiymatlarni hisobga olgan holda, agar ular oldindan o‘zgaruvchilarga berilgan bo‘lsa, o‘zgartirish mumkin (listing 2.24 da bir necha misollar keltirilgan).

Listing 2.23. Suzib yuruvchi nuqtali ifodani hisoblash

$x := 3 \qquad k := 2.4$

$\cos(k \cdot x) + 4 \cdot x^{2-k} \text{ float}, 3 \;\rightarrow 3.19$

$\cos(k \cdot x) + 4 \cdot x^{2-k} \text{ float}, 10 \;\rightarrow 3.185927374$

$\cos(k \cdot x) + 4 \cdot x^{2-k} \text{ float}, 20 \;\rightarrow 3.1859273744412716730$

Misollar

$x := 5 \qquad k := 2.9$

1. $\sin(2 \cdot k + 3) + 3 \cdot k^{2-x} \text{ float}, 5 \;\rightarrow .70792$

2. $\tan\left(6 \cdot \dfrac{x}{k-1}\right) + 3 \cdot x^2 \text{ float}, 6 \;\rightarrow 75.0817$

3. $\ln(k \cdot x + 2) + 9 \cdot \dfrac{1}{k-x} \text{ float}, 8 \;\rightarrow -1.4823539$

4. $\cos(6 \cdot k + 8 \cdot x + 3) - k \text{ float}, 10 \;\rightarrow -3.658531600$

Listing 2.24. Ifodalarni kompleks o‘zgartirishlar

$e^{z+2i} \text{ complex} \;\rightarrow e^z \cdot \cos(2) + i \cdot e^z \cdot \sin(2)$

$4.2 \cdot 2i^{1.8-3i} \text{ complex} \;\rightarrow 1193.4523970930846183 + 1107.3477730509390980 \cdot i$

$x := i$

$4 \cdot x^3 \text{ complex} \;\rightarrow -4 \cdot i$

$4 \cdot x^{3.1} \text{ complex} \;\rightarrow .62573786016092347604 - 3.9507533623805509048 \cdot i$

Misollar

1. $e^{z^2+2 \cdot i} \text{ complex} \;\rightarrow e^{z^2} \cdot \cos(2) + i \cdot e^{z^2} \cdot \sin(2)$

2. $(3.2 \cdot i)^{2+i} \text{ complex} \;\rightarrow e^{(2+i) \cdot \ln(3.2 \cdot |i|)} \cdot \cos\left[(2+i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \text{signum}(i)\right) \cdot \pi\right] +$

$+ i \cdot e^{(2+i) \cdot \ln(3.2 \cdot |i|)} \cdot \sin\left[(2+i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \text{signum}(i)\right) \cdot \pi\right]$

$x := i$

3. $3.2 \cdot x^{4-i}$ complex $\rightarrow 3.2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \pi}$

4. $9 + 3 \cdot x^2$ complex $\rightarrow 6$

2.3.11. Chegarani hisoblash

Mathcad simvolli protsessori imkoniyatlarining yorqin namoyon bo‘lishi – bu chegaralarni, hosilalarni, integrallarni va qatorlarga yoyishlarni analitik hisoblash hamda algebraik tenglamalarni yechishdir. Bu operatsiyalarning hammasi, ular Symbolics (Simvolika) menyusi vositasida bajarilganida, Variable (O‘zgaruvchi) nimmenyusida bo‘ladi. Mos ravishda, qaysi o‘zgaruvchiga nisbatan operatsiya bajarilsa, ifodadagi o‘zgaruvchining oldindan ajratib ko‘rsatilishi talab qilinadi. O‘zgaruvchini ajratib ko‘rsatish uchun uni kiritish chiziqlari orasiga joylashtirish kifoya, lekin ko‘proq ko‘rgazmali bo‘lishi uchun sichqon ko‘rsatkichini ifodaning kerakli qismi ustida yuritib, uni qora rangli qilib ajratish yaxshiroq bo‘ladi.

Izoh

Boshqa hisoblash operatorlaridan farqli ravishda chegaralar faqat simvolli hisoblab topilishi mumkin.

- Chegaralar (listing 2.25):
  - ikki taraflama;
  - chap;
  - o‘ng.

Listing 2.25. Chegaralarni simvolli hisoblash operatorlari

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 3x}{x} \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

Misollar

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + 5 \cdot x}{2 \cdot x} \rightarrow \dfrac{5}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3 \cdot x}{5 + 2 \cdot x} \rightarrow \dfrac{3}{7}$

3. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{3 + x} \rightarrow \dfrac{1}{5}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 + x^2\right) \rightarrow 3$

2.3.12. Analitik hisoblashlarning xususiyatlari haqida

Yuqorida Mathcadda simvolli hisoblashlarning asosiy usullari ko‘rib chiqildi. Ular, odatda, oddiy misollarda ko‘rsatiladi; bu misollar u yoki bu simvolli operatsiyani illyustratsiya qildi. Bunga qaramasdan turli hisoblarni, jumladan sonli-raqamli hisoblarni, Mathcadda bajarishda simvolli protsessor imkoniyatlaridan yanada samaraliroq foydalanish mumkin. Ba`zilarini ko‘rib chiqamiz.

Simvolli chiqarish operatori bilan simvolli hisoblashlarni bajarishda foydalanuvchi funksiyalarini va Mathcad hujjatida oldindan aniqlangan o‘zgaruvchilarni simvolli protsessor korrektli qabul qiladi. Demak, foydalanuvchi dasturiga simvolli hisoblarni kiritishning kuchli apparati mavjud. Foydalanuvchi funksiyasini qo‘llashga misollar 2.26- va 2.27-listinglarda keltirilgan. Bu listinglardagi oxirgi qatorlarni solishtiring. Simvolli chiqarish belgisidan chap tomondagi ifoda bir xil bo‘lishiga qaramasdan natija har xil chiqqan. Gap shundaki, listing 2.27 da o‘zgaruvchi *x* ga oldindan 4 qiymati berilgan. O‘zgaruvchi qiymatlari simvolli hisoblarga ta`sir qilganligi sababli, natija *x* o‘rniga 4 soni qo‘yilganligini hisobga oladi.

Listing 2.26. Simvolli hisoblashlarda foydalanuvchi funksiyasi

$$f(k,x) := \cos(k\cdot x) + 4\cdot x^{2-k}$$

$$f(k,x)\ \text{substitute}, k = \sqrt{x}\ \rightarrow \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + 4\cdot x^{2-x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f(k,x)\ \text{series}, k, 2\ \rightarrow \left(1 + 4\cdot x^2\right) + \left(-4\cdot x^2\cdot \ln(x)\right)\cdot k$$

Misollar

1. $f(k,x) := \log(k) + \cos(k\cdot x)$

$$f(k,x)\ \text{substitute}, k = \sqrt{x}\ \rightarrow \frac{\ln(1)}{\ln(10)} + \cos(1)$$

$$f(k,x)\ \text{series}, k, 5\ \rightarrow \frac{\ln(k)}{\ln(10)} + 1 - \frac{1}{2}\cdot k^2 + \frac{1}{24}\cdot k^4$$

2. $f(k,x) := \cos(k\cdot x) + k\cdot 4$

$$f(k,x)\ \text{substitute}, k = x^2\ \rightarrow \cos(1) + 4$$

$$f(k,x)\ \text{series}, k, 4\ \rightarrow 1 + 4\cdot k - \frac{1}{2}\cdot k^2 \qquad +$$

3. $f(k,x) := \sin(x + k)\cdot \ln(x)$

$$f(k,x)\ \text{substitute}, 5\cdot k = 1\cdot x\ \rightarrow 0$$

$$f(k,x)\ \text{series}, k, 5\ \rightarrow 0$$

Listing 2.27. O‘zgaruvchilar qiymatlari simvolli hisoblashlar natijasiga ta`sir qiladi

$$f(k,x) := \cos(k\cdot x) + 4\cdot x^{2-k}$$

$$x := 4$$

$$f(k,x)\ \text{series}, k, 2\ \rightarrow 65 + (-64\cdot \ln(4))\cdot k$$

Misollar

1. $f(k,x) := \log(k) + \cos(k \cdot x)$

$x := 2$

$$f(k,x) \text{ series}, k, 5 \rightarrow \frac{\ln(k)}{\ln(10)} + 1 - 2 \cdot k^2 + \frac{2}{3} \cdot k^4$$

2. $f(k,x) := \cos(k \cdot x) + k \cdot 4$

$x := 2$

$$f(k,x) \text{ series}, k, 4 \rightarrow 1 + 4 \cdot k - 2 \cdot k^2$$

3. $f(x,k) := \sin(x + k) \cdot \ln(x)$

$x := 1$

$$f(k,x) \text{ series}, k, 5 \rightarrow \sin(1) \cdot \ln(k) + \cos(1) \cdot \ln(k) \cdot k + \frac{-1}{2} \cdot \sin(1) \cdot \ln(k) \cdot k^2 +$$
$$+ \frac{-1}{6} \cdot \cos(1) \cdot \ln(k) \cdot k^3 + \frac{1}{24} \cdot \sin(1) \cdot \ln(k) \cdot k^4$$

Aksincha, Symbolics (Simvolika) menyusi orqali simvolli operatsiyalar bajarilganda simvolli protsessor kiritish chiziqlari orasida joylashgan ifodadan boshqa hech nimani "ko‘rmaydi". Shu sababli na foydalanuvchi funksiyalari va na qaysidir o‘zgaruvchilarning oldindan aniqlangan qiymatlari hisoblashlarga aslo ta`sir qilmaydi.

Maslahat

Agar ifoda bilan ba`zi analitik amallarni "shu onda" bajarish va javobni ifodaga kiruvchi o‘zgaruvchilarning joriy qiymatlari hisobga olinmaydigan umumiy ko‘rinishda olish talab qilinsa Symbolics (Simvolika) menyusidan foydalaning.

3 – BOB. DIFFERENSIALLASH

Differensiallash

Funksiyani differensiallash – bu berilgan funksiya hosilasini hisoblash jarayonidir.

Differensiallash operatsiyasi Mathcadda ham sonli-raqamli va ham analitik shakllarda realizatsiya qilingan va an`anaviy operator, ya`ni mos matematik simvollar (qo‘shish yoki ko‘paytirishga o‘xshab), yordamida belgilanadi. Agar hisoblash operatsiyasi hisoblash protsessori yordamida bajarilsa, sonli-raqamli algoritm xususiyatlarini yaxshi tasavvur qilish zarur, chunki bu amal foydalanuvchi uchun "kadr ortida" qoladi. Mathcad yordamida argumentlari soni istalgancha bo‘lgan skalyar funksiyalarning hosilalarini hisoblash mumkin, bunda ham funksiyalar va ham argumentlar haqiqiy va kompleks sonlar bo‘lishi mumkin.

3.1. Analitik differensiallash

Aminmizki, siz bahaybat funksiyalar hosilalarini hisoblashni osonlik bilan bajarish imkonini beradigan simvolli protsessor imkoniyatlarini yetarli darajada baholaysiz. Boshqa hamma operatsiyalardan farqli ravishda, simvolli differensiallash analitik ko‘rinishda berilgan funksiyalarning aksariyat ko‘p qismi uchun muvaffaqiyatli bajariladi. Mathcad muhitida funksiyalarni analitik differensiallagan foydalanuvchi bunday hisoblarni boshqa «qo‘lda» bajarmaydi.

Simvolli protsessor katta hajmdagi funksiyalarning hosilalarini osonlik bilan hisoblaydi. Simvolli differensiallash analitik berilgan funksiyalarning ko‘p qismi uchun muvaffaqiyatli bajariladi.

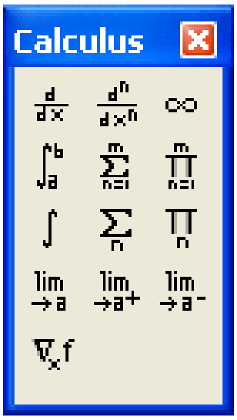
3.1.1. Funksiyani analitik differensiallash

Mathcadda *f(x)* funksiyasining hosilasini analitik topish uchun:

1. *f(x)* funksiyani bering.

2. Calculus (Hisoblashlar) panelidagi Derivative (Hosila) knopkasini bosib differensiallash operatorini kiriting yoki operatorni klaviaturadagi savol belgisi <?> dan kiriting.

3. Differensiallash operatorining hosil bo‘lgan o‘rinto‘ldirgichlariga (3.1-rasm) *x* argumentiga bog‘liq bo‘lgan funksiyani, ya`ni *f(x)* ni va argument *x* ning nomini kiriting.



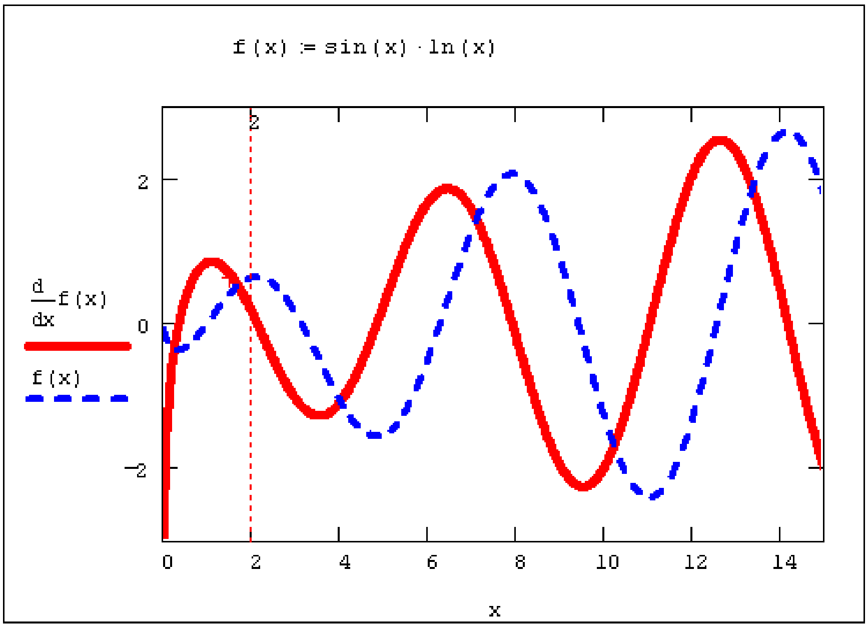
3.1-rasm. Differensiallash operatori

4. Javobni olish uchun simvolli hisoblash operatori (<–>>)ni kiriting.

Listing 3.1. Analitik differensiallashga misol

$$f(x) := \sin(x) \cdot \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$$

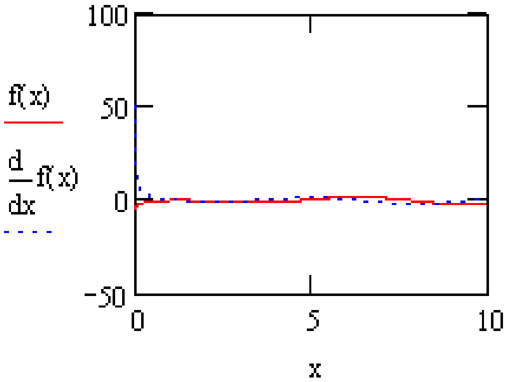


3.2-rasm. Funksiya hosilasi funksiyasi

Misollar

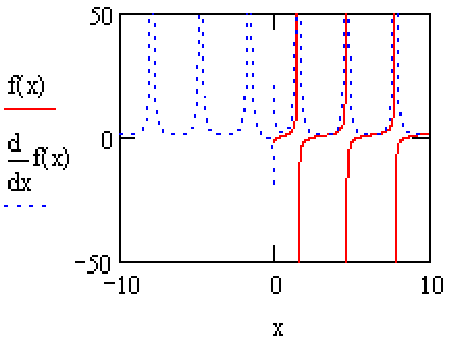
1. $f(x) := \cos(x) \cdot \ln(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow (-\sin(x)) \cdot \ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$



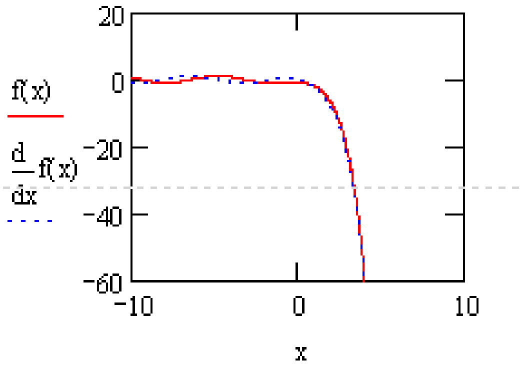
2. $f(x) := \tan(x) + \log(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 1 + \tan(x)^2 + \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$$



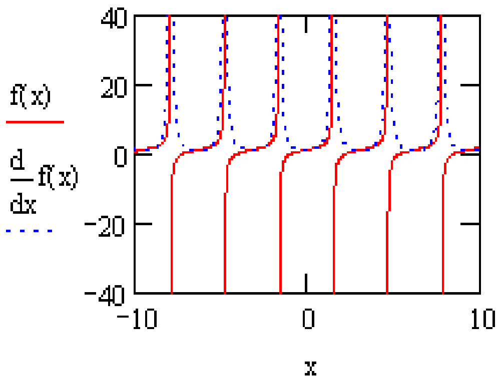
3. $f(x) := \sin(x) - e^{x}$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \cos(x) - e^{x}$$



4. $f(x) := \tan(x) + \log(10)$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 1 + \tan(x)^{2}$$



Izoh 1

Yuqorida bayon qilingan differensiallash operatorini qo‘llash misolida natija o‘sha o‘zgaruvchi *x* ning funksiyasidir. Grafik yordamida differensiallash operatsiyasini vizualizatsiya qilish misoli 3.2-rasmda keltirilgan.

Izoh 2

Berilgan funksiya nafaqat argument *x* ga, balki boshqa argumentlarga, masalan *f(x,y,z,t)* va sh.k.ga, bog‘liq bo‘lishi mumkin. Bu holda differensiallash aynan yuqoridagidek bajariladi, bunda differensiallash o‘zgaruvchisini aniqlash zarurati (differensiallash operatorining pastki o‘rinto‘ldirgichida) yanada oydinlashadi. Turli argumentlar bo‘yicha hosilalarni hisoblash (bu holda xususiy hosilalar haqida gapirishadi), tabiiyki, butunicha boshqa natija beradi (3.4-bo‘limga qarang).

3.1.2. Funksiya hosilasini nuqtada hisoblash

Funksiya f(x)ning x_0 nuqtadagi hosilasi. Funksiya f(x)ning x_0 nuqtadagi hosilasi deb $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *ifodaga aytiladi, bu yerda $\Delta x = x - x_0$ – argument orttirmasi, x va x_0 – mustaqil o‘zgaruvchining f(x) funksiya aniqlanadigan jabhadagi ikki qiymati, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ farq f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.*

Funksiya hosilasini nuqtada hisoblash uchun, argumentning o‘sha nuqtadagi qiymatini oldindan berish lozim (listing 3.2, ikkinchi qator). Bu holda differensiallash natijasi son – o‘sha nuqtadagi hosila qiymati bo‘ladi. Agar natijani analitik ko‘rinishda qidirib topishga muvaffaq bo‘linsa, u sonli-raqamli ifoda ko‘rinishida keltiriladi, uni son shaklida olish uchun chiqarilgan ifodadan keyin sonli-raqamli tenglik simvoli <=> ni kiritish kifoya qiladi (listing 3.2 ning oxirgi qatori).

Listing 3.2. Nuqtada funksiyani analitik differensiallash

$$f(x) := \sin(x)\cdot\ln(x)$$

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} = 0.166$$

Misollar

1. $f(x) := \cos(x)\cdot\ln(x)$

$$x := 5$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow (-\sin(5))\cdot\ln(5) + \frac{1}{5}\cdot\cos(5) = 1.6$$

2. $f(x) := \tan(x) + \log(x)$

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 1 + \tan(2)^2 + \frac{1}{2\cdot\ln(10)} = 5.992$$

3. $f(x) := \sin(x) - e^x$

$$x := 3$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \cos(3) - e^3 = -21.076$$

4. $f(x) := \tan(x) + \log(10)$

$$x := 5$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 1 + \tan(5)^2 = 12.428$$

Funksiyani differensiallash uchun unga oldindan qandaydir ism berilishi (3.1- va 3.2-listinglarda qilinganidek) shart emas. Funksiyani bevosita differensiallash operatorida aniqlash mumkin (buni 3.3-listingning birinchi qatori namoyish qiladi).

Listing 3.3. Differensiallash operatoridan to‘g‘ri va noto‘g‘ri foydalanish

$$\frac{d}{dx}\sin(x) \rightarrow \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sin(2) \rightarrow 0$$

Misollar

1. $\frac{d}{dx}\cos(x) \rightarrow -\sin(x)$

$\frac{d}{dx}\cos(0) \rightarrow 0$

2. $\frac{d}{dx}\tan(x) \rightarrow 1 + \tan(x)^2$

$\frac{d}{dx}\tan(1) \rightarrow 0$

3. $\frac{d}{dx}\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}\ln(2.7) \rightarrow 0$

4. $\frac{d}{dx}\log(x) \rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln(10)}$

$\frac{d}{dx}\log(10) \rightarrow 0$

Siz sezganingizdek, differensiallash operatori, odatda, uning umumqabul qilingan belgilanishiga mos keladi, shuning uchun undan intuitiv foydalanish mumkin. Lekin ba`zi hollarda differensiallash operatorini kiritishda ogoh bo‘lish kerak. 3.3-listingning ikkinchi qatorida keltirilgan misolni ko‘rib chiqaylik – u nuqtada hosilani hisoblashda differensiallash operatorini noto‘g‘ri qo‘llashni namoyish qiladi. *x*=2 da *sin(x)* hosilasini hisoblash o‘rniga, nul qiymati olingan. Buning sababi – *sin(x)* funksiyasining argumenti o‘zgaruvchi *x* ko‘rinishida emas, balki raqam ko‘rinishida kiritilgan. Shuning uchun Mathcad, listingning birinchi qatori talabiga muvofiq, oxirgi qatorni dastlab *x*=2 nuqtada sinus qiymatini hisoblash, so‘ngra esa bu qiymatni (ya`ni konstantani) differensiallash sifatida qabul qiladi. Shu sababli javobga hayratlanmaylik – konstantani qaysi nuqtada differensiallamang, natija nul bo‘laveradi.

Izoh

Bu gaplar sonli-raqamli differensiallash operatsiyasiga ham, ya`ni <–>> operatorining o‘rniga <=> operatorini qo‘llashga ham, taalluqlidir.

3.1.3. Differensiallash operatori orqali foydalanuvchi funksiyalarini aniqlash

Differensiallash operatorini, istalgan boshqa operator kabi, foydalanuvchining xususiy funksiyalarini aniqlash uchun qo‘llash mumkin. Listing 3.4 da *f(x)* dan hosila orqali yana bitta foydalanuvchi funksiyasi *f(x)* aniqlanadi, so‘ngra simvolli chiqarish operatori yordamida uning oshkor ko‘rinishi (listingda oxiridan bitta oldingi qator) va *x*=1 nuqtada muayyan qiymati (oxirgi qator) aniqlanadi.

Listing 3.4. Differensiallash operatori vositasida funksiyani aniqlash

$f(x) := x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1$

$g(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$g(x) \rightarrow 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 3$

$g(1) = -1$

Misollar

1. $f(x) := x^5 - 3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - x - 10$

$g(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$g(x) \rightarrow 5 \cdot x^4 - 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 1$

$g(5) = 2.959 \times 10^3$

2. $f(x) := \ln(x) + 2 \cdot x^2 - \sin(x) + 2 \cdot x - 12$

$g(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$g(x) \rightarrow \frac{1}{x} + 4 \cdot x - \cos(x) + 2$

$g(10) = 42.939$

3. $f(x) := \cos(x) - 3\cdot x^2 + 8\cdot\frac{1}{x}$

$$g(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$g(x) \rightarrow (-\sin(x)) - 6\cdot x - \frac{8}{x^2}$$

$$g(1) = -14.841$$

4. $f(x) := \ln(x-6) + 15\cos(x) + 6\cdot x^2$

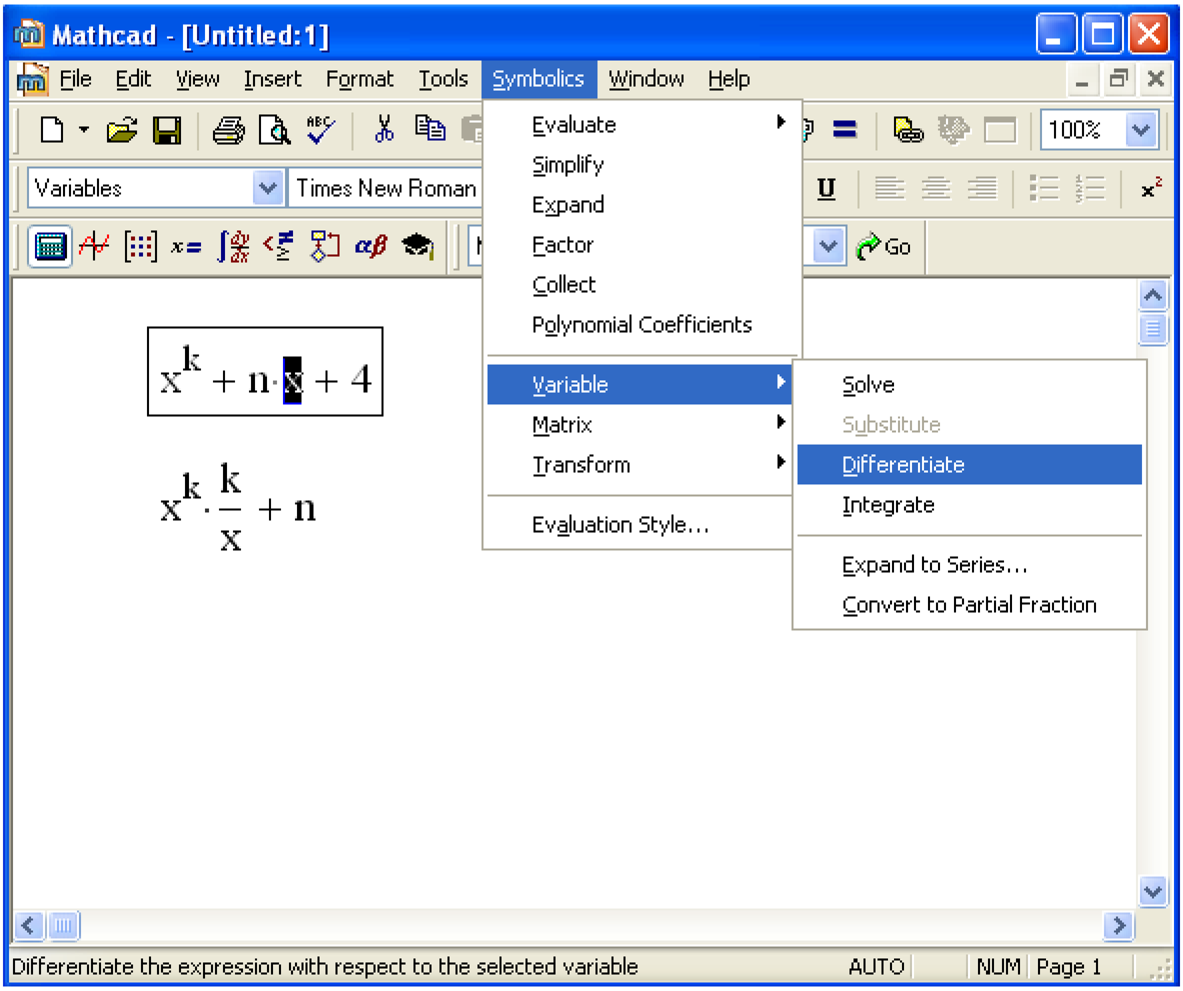
$$g(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$g(x) \rightarrow \frac{1}{x-6} - 15\cdot\sin(x) + 12\cdot x$$

$$g(3) = 33.55$$

3.1.4. Menyu yordamida differensiallash

Qaysidir o‘zgaruvchi bo‘yicha ifodani analitik differensiallash uchun unda ushbu o‘zgaruvchini ajratib ko‘rsating va Symbolics / Variable / Differentiate (Simvolika / O‘zgaruvchi / Differensiallang) komandasini tanlang (3.3-rasm).



3.3-rasm. O‘zgaruvchi bo‘yicha analitik differensiallash

Natijada ifodadan keyingi qatorda uning hosilasining qiymati paydo bo‘ladi. Ikkinchi hosilani topish uchun differensiallash natijasida olingan qiymatga ushbu amallar ketma-ketligini qaytadan qo‘llang. Yuqori tartibli hosilalar ham ana shunday topiladi.

3.2. Sonli-raqamli differensiallash

Mathcadning hisoblash protsessori sonli-raqamli differensiallashning yuqori aniqligini ta`minlaydi.

3.2.1. Nuqtada differensiallash

Qandaydir nuqtada *f(x)* funksiyani sonli-raqamli differensiallash uchun (simvolli o‘rniga) sonli-raqamli chiqarish operatoridan foydalanish lozim:

1. Hosila hisoblanadigan nuqta *x* ni aniqlang, masalan, *x*:=1.
2. Differensiallash operatorini kiriting va oddiy tarzda o‘rinto‘ldirgichlarga funksiya va argument nomlarini kiriting (3.1-rasmga qarang).
3. Natijani sonli-raqamli chiqarish operatori = ni kiriting.

Listing 3.5 da funksiya *f(x)=sin(x)·ln(x)* ni differensiallash misoli keltirilgan.

Listing 3.5. Funksiyani nuqtada sonli-raqamli differensiallash

$$f(x) := \sin(x)\cdot\ln(x)$$

$$x := 0.1$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = -1.293$$

Misollar

1. $f(x) := \sin(x)\cdot\cos(x)$

$x := 0.5$

$\frac{d}{dx}f(x) = 1.746$

2. $f(x) := \log(x) + \sin(x)$

$x := 1$

$\frac{d}{dx}f(x) = 1.746$

3. $f(x) := 10 + 2\cdot\sin(x)$

$x := 1$

$\frac{d}{dx}f(x) = -0.399$

4. $f(x) := \ln(x+3) - \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

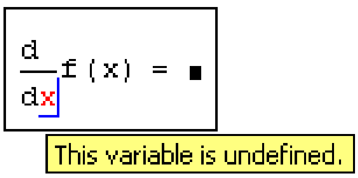
$x := 3$

$\frac{d}{dx}f(x) = -0.399$

Diqqat!

Listing 3.5 ning ikkinchi qatorida qilinganidek, sonli-raqamli differensiallash amalga oshiriladigan nuqtani oldindan aniqlashni unutmang. Aks holda 3.4-rasmda ko‘rsatilgan xatolik (ifodaga kiruvchi o‘zgaruvchi yoki funksiya oldindan aniqlanmaganligi) haqida ma`lumot beriladi. Simvolli differensiallash esa (3.1-bo‘limga qarang) differensiallash nuqtasining majburan ochiq berilishini talab qilmaydi. Bu holda hosila qiymati (son yoki sonli-raqamli ifoda) o‘rniga analitik bog‘lanish (listing 3.1 ga qarang) chiqariladi.

$$f(x) := \sin(x)\cdot\ln(x)$$



3.4-rasm. Differensiallash operatorini qo‘llashda xatolik (argument berilmagan)

Izoh

Mathcadning 11 va undan keyingi versiyalarida analitik ko‘rinishda berilgan funksiyalarni sonli-raqamli differensiallashni tezlashtirish va aniqligini oshirish uchun simvolli protsessor avtomatik tarzda ishga tushiriladi, bu amal muvaffaqiyatsiz chiqqan taqdirdagina, sonli-raqamli metod ishga tushiriladi.

3.2.2. Differensiallash algoritmi haqida

Sonli-raqamli differensiallash uchun Mathcad yetarli darajada murakkab algoritmni qo‘llaydi, u verguldan keyin 7÷8 belgigacha aniqlikda hosilani hisoblaydi. Differensiallash xatoligi, boshqa sonli-raqamli metodlardan farqli ravishda, TOL yoki CTOL konstantalariga bog‘liq emas, balki bevosita algoritm bilan aniqlanadi. Bu algoritm (Ridder metodi) Mathcadga kiritib o‘rnatilgan ma`lumot tizimida bayon etilgan, unga Help (Ma`lumot) menyusi orqali kirishi mumkin. *f(x)* funksiyasining hosilasini sonli-raqamli aniqlashni, uning muhim aspektlarida to‘xtab, sodda misolda ko‘rinishida bayon qilamiz. Eng oddiy ayirmali formula Ridder metodidan sezilarli farq qiladi, lekin u bizga ba`zi masalalarga yorqinlik kiritishda yordam beradi, chunki u sonli-raqamli differensiallashning bazaviy prinsipiga – bir-biriga nisbatan yaqin joylashgan bir nechta nuqtalardagi *f(x)* funksiyaning qiymatlari orqali hosilani hisoblashga asoslangan.

Funksiya hosilasining ta`rifiga asoslanib, quyidagini qayd etish mumkin

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} + o(\Delta) \tag{3.1}$$

Hosilani sonli-raqamli aniqlashning asosiy muammosi aynan Δ qiymatini tanlash bilan bog‘liq. Birinchi qarashda, yetarli aniqlikni ta`minlash uchun, juda kichik Δ ni tanlash tushunarli bo‘lishi uchun listing 3.6 da keltirilgan Mathcad-dasturidan foydalanamiz, u ayirmali formula (3.1) xatoligini (Δ qadamga bog‘liq holda) hisoblaydi. Hosil bo‘lgan bog‘lanish grafigi 3.5-rasmda tasvirlangan, bunda ikkala o‘q uchun logarifmik masshtab tanlangan, hosilaning o‘zi esa (misol uchun), 3.6-listingga muvofiq, bitta nuqta x=1 da hisoblangan.

Listing 3.6. Ayirmali formula aniqligining qadamga bog‘liqligini hisoblash

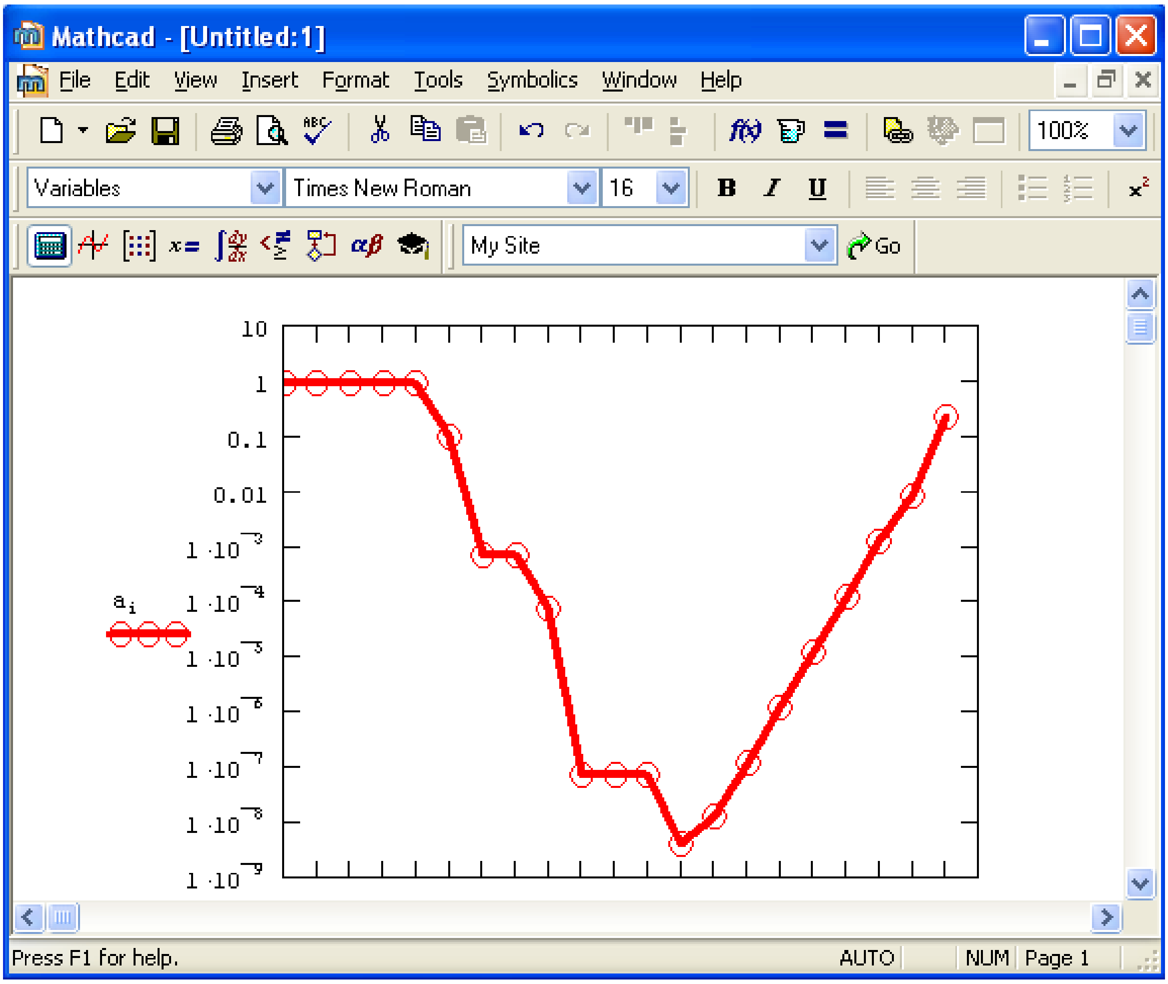
$$f(x) := \sin(x)\cdot\ln(x)$$

$$x := 1$$

$$i := 0..20$$

$$\Delta_i := 10^{-i}$$

$$a_i := \left|\frac{d}{dx}f(x) - \frac{f(x+\Delta_i) - f(x)}{\Delta_i}\right|$$



3.5-rasm. Formula (3.1) aniqligining delta qadamga bog‘liqligi grafigi (listing 3.6 ning davomi)

Misol

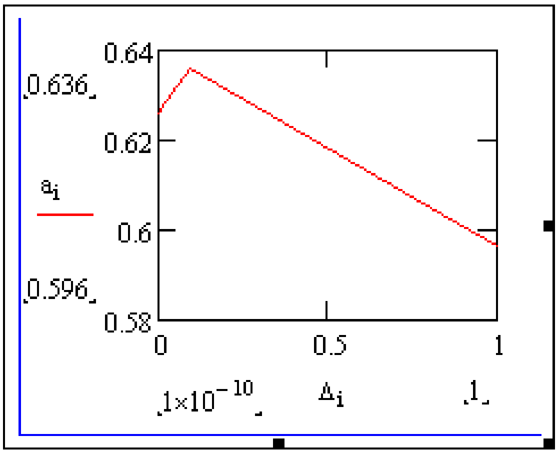
$$f(x) := \sin(x) \cdot \log(x)$$

$$x := 2$$

$$i := 0..10$$

$$\Delta_i := 10^{-i}$$

$$a_i := \left| \frac{d}{dx}\left(f(x) - \frac{f(x+\Delta_i) - f(x)}{\Delta_i} \right) \right|$$

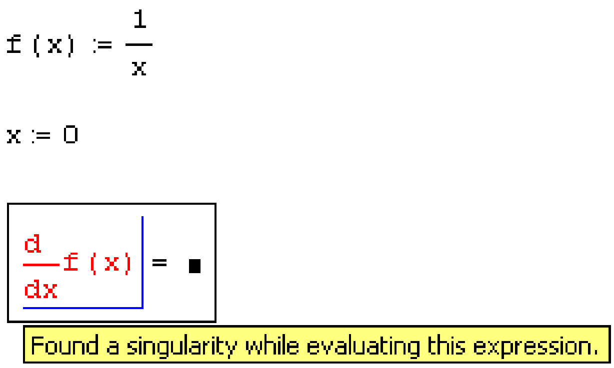


Grafikning o‘ng tomonida xatolikning ortishi tushunarli bo‘lsa, chunki (3.1) formulaga binoan Δ qancha katta bo‘lsa, xatolik shuncha ko‘p bo‘ladi, juda kichik Δ larda xatolikning ortishi, birinchi qarashda, kishini hayratga soladi. Lekin gap shundaki, ayirmali formulani qo‘llaganda, biz *f(x)* funksiyaning qiymatlarini istalgan nuqtada aniq hisoblay olamiz deb faraz qilgan edik. Lekin istalgan kompyuter hisoblari bartaraf qilib bo‘lmaydigan xatoliklarga ega, xususan, ularda sonlar diskret taqdim etiladi. Shuning uchun biz amalda *f(x)* ning qiymatini qandaydir xatolik bilan hisoblashimiz mumkin, chunki kompyuterdagi hisoblashlarda sonlar yiriklashtiriladi (округляются).

Natijada qadam juda kichik bo‘lganda ayirmali formula yaqin sonlarni bir-biridan ayirishni bildiradi. Bu holda *f(x)* funksiyasini hisoblashdagi xatoliklar hal qiluvchi bo‘lib qoladi va ayirmali hosilani hisoblash summar xatoligining sezilarli darajada ortishiga olib keladi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: *qadam qiymatini «juda kichik» tanlab bo‘lmaydi, aks holda f(x) ni hisoblash xatoliklari differensiallash natijasi noto‘g‘ri bo‘lishiga olib keladi*. 3.5-rasmdan shu narsa ko‘rinadiki, ushbu holda Δ ning oraliq qiymatlarini tanlash lozim, bu minimal (yoki deyarli minimal) xatolikni ta`minlaydi.

Shu narsani qayd qilish lozimki, differensiyalanayotgan funksiya xarakteriga qarab, Δ ning qabul qilinishi mumkin bo‘lgan qiymatlari diapazoni har xil bo‘ladi. Shuning uchun har bir muayyan holda sonli-raqamli differensiallash uchun tanlangan qadam to‘g‘riligini testlovchi qo‘shimcha qadamlarni bajarish talab qilinadi. Bunday protsedura Mathcadda qo‘llanilgan differensiallashning adaptiv algoritmiga kiritilgan, bu hosilani sonli-raqamli hisoblash uchun uning nihoyatda ishonchli bo‘lishini ta`minlaydi.

Demak, differensiallashda Mathcadda murakkab muammolar vujudga kelmaydi. Singulyar nuqta atrofida differensiyalanayotgan funksiyalar bundan istisno; masalan, *f(x)=1/x* funksiyasi uchun bu *x*=0 yaqinidagi nuqtalar bo‘ladi. *x*=0 da uning hosilasini topmoqchi bo‘lsak (3.6-rasm), nulga bo‘lishdagi xatoliklarning biri haqida "Can't divide by zero" (Nulga bo‘lishning imkoniyati yo‘q) yoki "Found a singularity while evaluating this expression. You may be dividing by zero" (Bu ifodani hisoblashda singulyarlik topildi. Balki, Siz nulga bo‘layotibsiz).



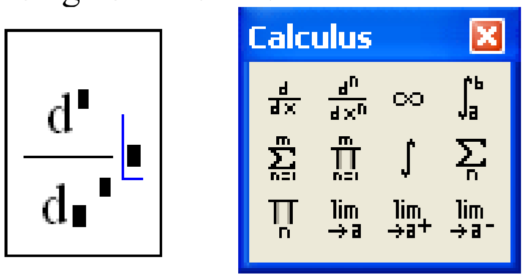
3.6-rasm. Agar berilgan nuqtada funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lmasa, xatolik haqida xabar chiqadi

Agar hosilani nulga juda yaqin, masalan, $x=10^{-100}$ da, sonli-raqamli aniqlashga harakat qilib ko‘rilsa, hosila mavjud bo‘lishiga qaramasdan xatolik haqida ma`lumot "Can't converge to a solution" (Yechimni topish mumkin emas) paydo bo‘lishi mumkin. Mathcadning yangi versiyalari (11-dan boshlab) bu qiyinchilikni bartaraf qiladilar, chunki ularda hatto sonli-raqamli differensiallashda ham dastlab analitik yechimni beruvchi simvolli protsessor ishga tushadi, unga differensiallash argumentini qo‘yish to‘g‘ri natija beradi.

3.3. Yuqori tartibli hosilalar

Mathcad yuqori tartibli, 3-dan 5-gacha, hosilalarni sonli-raqamli aniqlash imkonini beradi. *f(x)* funksiyaning *x* nuqtada *N*-tartibli hosilasini hisoblash uchun, birinchi tartibli hosilani olishda qanday amallar bajarilgan bo‘lsa (3.1- va 3.2-bo‘limlarga qarang), o‘sha amallarni bajarish kerak, faqat shu farq bilanki, hosila operatori o‘rniga *N*-hosila operatori (Nth Derivative)ni qo‘llash lozim. Bu operator

Calculus (Hisoblashlar) panelidan yoki klaviaturadan <Ctrl>+<?> klavishalarini bosib kiritiladi va qo‘shimcha yana ikkita o‘rinto‘ldirgichga ega (3.7-rasm), ularga *N* sonini joylashtirish lozim. Operatorning matematik mohiyatiga binoan o‘rinto‘ldirgichlarning birida hosilaning tartibini aniqlash o‘sha raqamning ikkinchi o‘rinto‘ldirgichda avtomatik tarzda paydo bo‘lishiga olib keladi.



3.7-rasm. Yuqori tartibli hosila operatori

Ta`rif bo‘yicha *N*=0 dagi «hosila» funksiyaning o‘ziga teng, *N*=1 da esa oddiy birinchi tartibli hosila olinadi. Listing 3.7 berilgan nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini sonli-raqamli va simvolli hisoblashni namoyish qiladi. E`tibor bering, oddiy hosila hisoblangandagi kabi, differensiallash operatoridan oldin funksiyaning argumentiga hosila hisoblanadigan qiymat berilishi lozim. Simvolli chiqarish operatori yordamida yuqori tartibli hosilalarni analitik topish uchun esa (3.1-bo‘limga mos ravishda) argument qiymatlarini kiritish mumkin emas (listing 3.8).

Listing 3.7. Nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topishga misol

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$x := 3$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 0.074$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$$

Misollar

1. $$f(x) := \tan(x+3) + \frac{1}{x-2}$$

$$x := 3$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 1.369$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow 2\cdot\tan(6)\cdot\left(1+\tan(6)^2\right) + 2$$

2. $$f(x) := \ln(x+9) - e^{x-2}$$

$$x := 1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -0.378$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow \frac{-1}{100} - e^{-1}$$

3. $$f(x) := \cos(x+3) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x := 3$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = -0.894$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) \rightarrow (-\cos(6)) - \frac{1}{81}\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{27}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\right)$$

4. $f(x) := \tan(x \cdot 3) + 3 \cdot \cos(x + 8)$

$$x := 5$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = -29.42$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 6 \cdot \tan(15) \cdot \left(3 + 3 \cdot \tan(15)^2\right) - 3 \cdot \cos(13)$$

Listing 3.8. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini analitik qidirishga misol

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$$

Misollar

1. $f(x) := \tan(x + 3) + \dfrac{1}{x - 2}$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 2 \cdot \tan(x + 3) \cdot \left(1 + \tan(x + 3)^2\right) + \frac{2}{(x - 2)^3}$$

2. $f(x) := \ln(x + 9) - e^{x-2}$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{-1}{(x + 9)^2} - e^{x-2}$$

3. $f(x) := \cos(x + 3) + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow (-\cos(x + 3)) - \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4} + 2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$$

4. $f(x) := \tan(x \cdot 3) + 3 \cdot \cos(x + 8)$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow 6 \cdot \tan(3 \cdot x) \cdot \left(3 + 3 \cdot \tan(3 \cdot x)^2\right) - 3 \cdot \cos(x + 8)$$

Izoh

Mathcadning simvolli protsessori listing 3.7 ning oxirgi qatorida berayotgan natija hisoblovchi protsessor bitta oldingi qatorda berayotgan natija bilan bir xilligiga inonish uchun uni soddalashtirish zarur. Buning uchun olingan oxirgi ifodani ajratib ko‘rsatish va Symbolics (Simvolika) menyusida Simplify (Soddalashtirish) punktini tanlash lozim. Bundan keyin pastda yana bitta qator paydo bo‘ladi, unda ajratib ko‘rsatilgan ifodaning sonli natijasi keltiriladi.

Sonli-raqamli metod hosilalarni 5-tartibgacha hisoblash imkoniyatiga ega, simvolli protsessor esa hosilalarni istalgan tartibgacha (albatta, masalaning analitik yechimi mavjud bo‘lsa) yechishni biladi. Bu listing 3.9 da illyustratsiya qilingan, unda funksiyaning oltinchi tartibli hosilasi analitik hisoblangan, o‘sha ifodaning natijasini sonli-raqamli chiqarishga urinish esa xatolikka olib kelgan.

Listing 3.9. Oltinchi tartibli hosilani sonli-raqamli va simvolli hisoblash

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^6}{dx^6}f(x) \rightarrow \frac{720}{x^7}$$

$$\frac{d^6}{dx^6}f(x) =$$

Tartibi 5-dan yuqori bo‘lgan hosilani hisoblash uchun, n-tartibli hosila operatorini ketma-ket bir necha marta qo‘llash mumkin (listing 3.10). Lekin shuni yodda tutish lozimki, yuqori tartibli hosilalarni sonli-raqamli aniqlash, birinchi tartibli hosilalarni aniqlashda qo‘llaniladigan Ridder hisoblash metodi bilan amalga oshiriladi. Yuqorida ta`kidlanganidek, birinchi hosila uchun bu metod sonning 7-8-razryadigacha aniqlikni ta`minlaydi, hosila tartibi har birlikka ortganida aniqlik taxminan bir razryadga kamayadi.

Diqqat!

Yuqori tartibli hosilalarni sonli-raqamli hisoblashda aniqlik sezilarli darajada yomonlashishi mumkin. Xususan, *1/x* funksiyaning oltinchi tartibli hosilasini aniqlashga intilganda natija sifatida nul chiqadi, vaholanki, oltinchi tartibli hosilaning haqiqiy qiymati simvolli protsessor yordamida topilishi mumkin (listing 3.10).

Listing 3.10. Nuqtada funksiyaning oltinchi tartibli hosilasini sonli-raqamli qidirishga intilish noto‘g‘ri natija beradi.

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$x := 0.1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d^5}{dx^5}f(x) = 0$$

$$\frac{d^6}{dx^6}f(x) \rightarrow \frac{720}{x^7}$$

Misol

$$f(x) := \ln(x+9) - e^{x-2}$$

$$\frac{d^6}{dx^6}f(x) \rightarrow \frac{-120}{(x+9)^6} - e^{x-2}$$

$$x := 1$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d^5}{dx^5}f(x) = -0.368$$

3.4. Xususiy hosilalar

Mathcadning protsessori yordamida nafaqat bitta, balki istalgancha miqdordagi argumentlar funksiyalarining hosilalarini hisoblash mumkin. Bir nechta argumentli funksiyaning qaysidir bitta argument bo‘yicha hosilasi – xususiy hosila deyiladi. Xususiy hosilani hisoblash uchun, odatda, hosila operatorini Calculus (Hisoblashlar) panelidan kiritish va mos o‘rinto‘ldirgichda, qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallash amalga oshirilishi kerak bo‘lsa, o‘shaning nomini terish lozim.

3.4.1. Xususiy hosilalar

Xususiy hosila – faqat bitta argument o‘zgarganda bir nechta o‘zgaruvchilar funksiyasining o‘zgarishi tezligini tavsiflovchi differensialni hisoblashning tushunchasidir.

Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalarini qidirishga misollar 3.11- va 3.12-listinglarda keltirilgan. Ikkala listingning birinchi qatorida funksiyaning o‘zi aniqlangan, keyingi qatorlarda esa (simvolli yoki sonli-raqamli usulda) uning hosilalari ikkala o‘zgaruvchilar – *x* va *k* bo‘yicha hisoblangan. Xususiy hosilani nuqtada aniqlash uchun, hamma argumentlarning qiymatlarini oldindan berish zarur, bu listing 3.12 ning keyingi qatorlarida keltirilgan. E`tibor bering, funksiya hosilasini simvolli qidirish uchun uning hamma argumentlarining qiymatini oldindan berish zarurati yo‘q (listing 3.12 ning uchinchi qatori), sonli-raqamli differensiallash uchun esa (listingning oxirgi qatori) funksiyaning hamma argumentlari oldindan aniqlangan bo‘lishi kerak, aks holda natija o‘rniga xatolik to‘g‘risida xabar paydo bo‘ladi.

Listing 3.11. Xususiy hosilalarni analitik hisoblash

$$f(x,k) := k\cdot\sin(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,k) \rightarrow k\cdot\cos(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial k}f(x,k) \rightarrow \sin(x)$$

Misollar

1. $f(x,k) := k\cdot\cos(x+6)$

$$\frac{d}{dx}f(x,k) \rightarrow (-k)\cdot\sin(7)$$

$$\frac{d}{dk}f(x,k) \rightarrow \cos(7)$$

2. $f(x,k) := k + \tan(x-1)$

$$\frac{d}{dx}f(x,k) \rightarrow 1$$

$$\frac{d}{dk}f(x,k) \rightarrow 1$$

3. $f(x,k) := x\cdot\tan(k) + \frac{1}{k}$

$$\frac{d}{dx}f(x,k) \rightarrow \tan(k)$$

$$\frac{d}{dk}f(x,k) \rightarrow 1 + \tan(k)^2 - \frac{1}{k^2}$$

4. $f(x,k) := x^2 + \ln(k+5)$

$$\frac{d}{dx}f(x,k) \rightarrow 2$$

$$\frac{d}{dk}f(x,k) \rightarrow \frac{1}{k+5}$$

Listing 3.12. Xususiy hosilalarni nuqtada simvolli va sonli-raqamli hisoblash

$$f(x,k) := k\cdot\sin(x)$$

$$x := 10$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,k) \rightarrow k\cdot\cos(x)$$

$$k := 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,k) = -0.839$$

Misollar

1. $f(x,k) := k \cdot \cos(x+6)$

$x := 1$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) \rightarrow (-k) \cdot \sin(7)$$

$k := 2$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) = -1.314$$

2. $f(x,k) := k + \tan(x-1)$

$x := 3$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) \rightarrow 1 + \tan(2)^2$$

$k := 2$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) = 5.774$$

3. $f(x,k) := x \cdot \tan(k) + \frac{1}{k}$

$x := 3$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) \rightarrow \tan(2)$$

$k := 5$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) = -3.381$$

4. $f(x,k) := x^2 + \ln(k+5)$

$x := 4$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) \rightarrow 8$$

$k := 3$

$$\frac{d}{dx} f(x,k) = 8$$

Yuqori tartiblarning xususiy hosilalari yuqori tartiblarning oddiy hosilalari kabi hisoblanadi (3.3-bo'limga qarang). Listing 3.13 funksiyaning o'zgaruvchilari *x* va *y* bo'yicha ikkinchi tartibli hosilalarni hamda aralash hosilani hisoblashni namoyish qiladi.

Listing 3.13. Ikkinchi xususiy hosilani hisoblash

$$f(x,y) := y^2 \cdot x^3 + y \cdot x^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) \rightarrow 6 \cdot y^2 \cdot x + 2 \cdot y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \rightarrow 2 \cdot x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \rightarrow 6 \cdot y \cdot x^2 + 2 \cdot x$$

Misollar

1. $f(x,y) := y^2 \cdot x^4 - y \cdot x^2$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x,y) \rightarrow 12 \cdot y^2 \cdot x^2 - 2 \cdot y$$

$$\frac{d^2}{dy^2} f(x,y) \rightarrow 2 \cdot x^4$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x,y) \rightarrow 8 \cdot y \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

2. $f(x,y) := y^4 + x \cdot y^3$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x,y) \rightarrow 0$$

$$\frac{d^2}{dy^2} f(x,y) \rightarrow 12 \cdot y^2 + 6 \cdot x \cdot y$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x,y) \rightarrow 3 \cdot y^2$$

3. $f(x,y) := 8\cdot x^2 - 3\cdot y^3 + 2$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \rightarrow 16$$

$$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \rightarrow (-18)\cdot y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right) \rightarrow 0$$

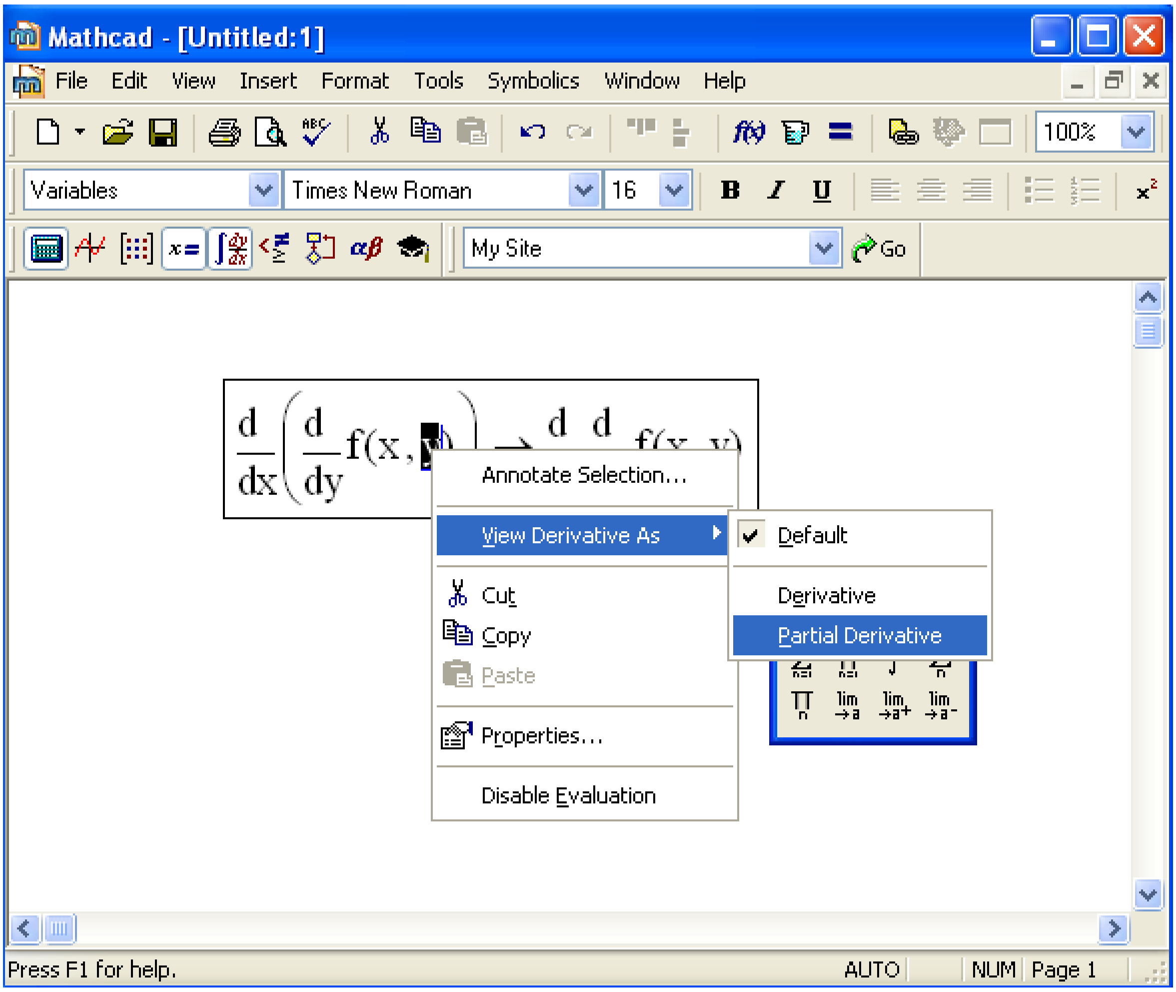
4. $f(x,y) := 12\cdot x^4\cdot y^2 + 5\cdot x^3\cdot y - 8$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y) \rightarrow 144\cdot x^2\cdot y^2 + 30\cdot x\cdot y$$

$$\frac{d^2}{dy^2}f(x,y) \rightarrow 24\cdot x^4$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}f(x,y)\right) \rightarrow 96\cdot x^3\cdot y + 15\cdot x^2$$

E`tibor bergan bo‘lsangiz, uchchala 3.11-3.13 listinglarda differensiallash operatori xususiy hosilaning an`anaviy shaklida yozilgan. Operatorning yozilishi hisoblashga ta`sir qilmaydi, balki hisoblarni taqdim etishning ko‘nikib qolingan shakli bo‘libgina xizmat qiladi.



3.8-rasm. Differensiallash operatori shaklining o‘zgarishi

Xususiy hosilani taqdimot qilishda differensiallash operatori ko‘rinishini o‘zgartirish uchun quyidagilarni bajarish lozim:

1. Sichqon o‘ng knopkasini bosib differensiallash operatori jabhasidan kontekstli menyuni chaqiring.

2. Kontekstli menyuda yuqorigi punkt View Derivative As (Hosilani … kabi ko‘rsating)ni tanlang.

3. Paydo bo‘lgan nimmenyuda (3.8-rasm) Partial Derivative (Xususiy hosila) punktini tanlang.

Hosilaning o‘zgarmas bo‘yicha qabul qilingan ko‘rinishini qaytarish uchun nimmenyuda Default (O‘zgarmas) punktni tanlang yoki uni oddiy ko‘rinishda taqdim etish uchun – Derivative (Hosila) punktni bosing.

3.4.2. Misollar: gradiyent, divergensiya va rotor

Gradiyent – bu vektor bo‘lib, u qaysidir kattalikning eng tez o‘zgaradigan yo‘nalishini ko‘rsatadi, uning qiymati maydonning bir nuqtasidan boshqa nuqtasi tomon o‘zgarib boradi (Maydon nazariyasiga qarang). Agar kattalik u(x,y,z) funksiyasi orqali ifodalansa, u holda gradiyent (vektor)ni tashkil etuvchilar quyidagiga teng:

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

Gradiyent (vektor) qaysidir nuqtada shu nuqtadagi sath (уровень) sirtiga normal bo‘ylab yo‘naladi, gradiyent (vektor) uzunligi quyidagiga teng:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Vektor maydoni a(M)ning (x,y,z) nuqtadagi divergensiyasi (расхождениеси) – skalyar miqdor bo‘ladi:

$$\mathrm{div}\,a = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z,$$

bu yerda P, Q, R – a vektorining komponentlari. Divergensiya (matematik) – bu nuqtani o‘rab turgan berk sirtdan o‘tayotgan vektor maydoni oqimining, ushbu sirt nuqtaga intilayotganda u cheklagan hamma nisbatining chegarasidir. Divergensiya (matematik) matematikaning fizikadagi ilovalarida muhim rol o‘ynaydi. Masalan, agar vektor maydon a(M)ni siqilmaydigan suyuqlikning barqaror oqimidagi tezliklar maydoni sifatida ko‘rilsa, bu holda nuqtadagi diva shu nuqtadagi manba`ning intensivligini (diva>0) yoki oqib ketish intensivligini (diva<0) yoki manba` va novning mavjud emasligini (diva=0) bildiradi. Divergensiya (matematik) xossalari:

$$\mathrm{div}\,(a + b) = \mathrm{div}\,a + \mathrm{div}\,b;\ \mathrm{div}\,(\varphi a) = \varphi\,\mathrm{div}\,a + a\,\mathrm{grad}\,\varphi;\ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,a = 0;$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \Delta\varphi$$

(bu yerda Δ – Laplas operatori).

Xususiy hosilalar haqidagi bayonni hisoblash amaliyotida tez-tez uchrab turadigan vektorli analizning bir nechta misollari bilan tugatamiz. Ulardan birinchisining, ikki o‘zgaruvchi funksiyasi *gradiyent*ini hisoblashga bag‘ishlanganining, dasturaviy amalga oshirilishi listing 3.14 da keltirilgan. Misol sifatida listingning birinchi qatorida aniqlangan *f(x,y)* funksiya olingan, uning grafigi 3.9-rasmda sath chiziqlari ko‘rinishida keltirilgan. Ma`lumki, *f(x,y)* funksiyaning gradiyenti – bu (listing 3.14 ning ikkinchi qatoriga muvofiq) uning xususiy hosilalari orqali aniqlangan *x* va *y* argumentlarning vektorli funksiyasidir. Listingning uchinchi qatorida gradiyentni analitik hisoblash bajariladi, listingning qolgan qismida esa, funksiya sath chiziqlari grafigini va uning gradiyenti vektor maydonining grafigini tayyorlash uchun zarur bo‘lgan, ranjirlangan o‘zgaruvchilar va matritsalar berilgan (3.10-rasm).

Listing 3.14. Ikki o‘zgaruvchi funksiyasi gradiyentini hisoblash

$$f(x, y) := 0.12 \cdot x^2 + x \cdot y - 0.01 \cdot y^4$$

$$grad(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{pmatrix}$$

$$grad(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} .24 \cdot x + y \\ x - .4e{-1} \cdot y^3 \end{pmatrix}$$

$N := 5$

$i := 0 .. \; 2 \cdot N$

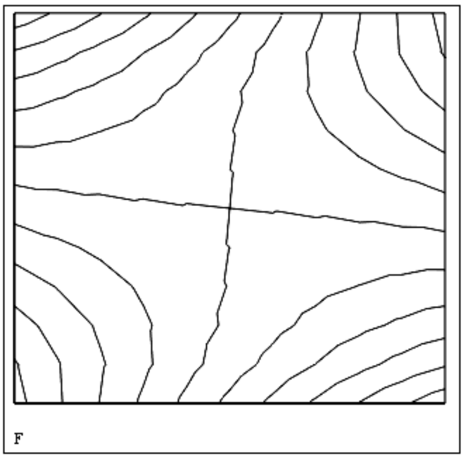
$j := 0 .. \; 2 \cdot N$

$F_{i,j} := f(i - N, j - N)$

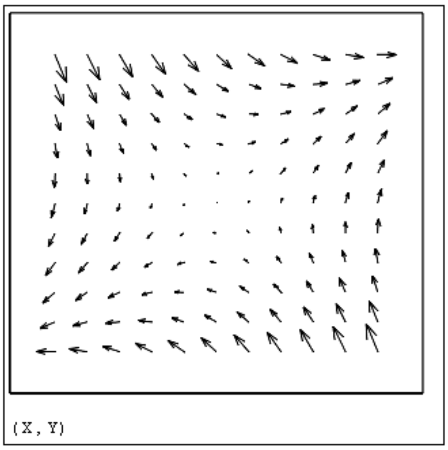
$V_{i,j} := grad(i - N, j - N)$

$X_{i,j} := (V_{i,j})_0$

$Y_{i,j} := (V_{i,j})_1$



3.9-rasm. Ikki o‘zgaruvchi modeli funksiyasi (listing 3.14 davomi)



3.10. Ikki o‘zgaruvchi funksiyasi gradiyentining vektor maydoni (listing 3.14 davomi)

Misol

$$f(x,y) := 5.6 \cdot x^3 + x^2 \cdot y - 3.2 \cdot y^3$$

$$grad(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$grad(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 16.8 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y \\ x^2 - 9.6 \cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$N := 4$

$i := 0 .. 3 \cdot N$

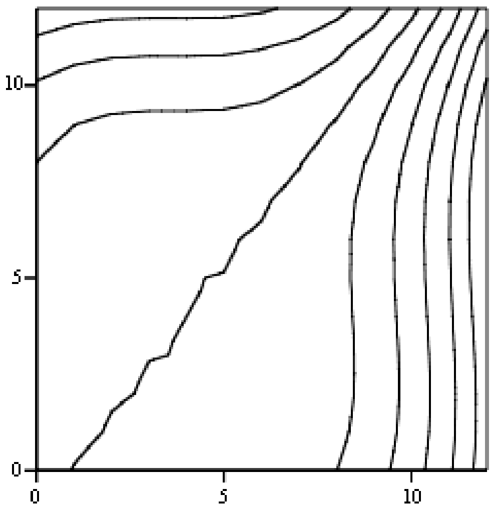
$j := 0 .. 3 \cdot N$

$F_{i,j} := f(i - N, j - N)$

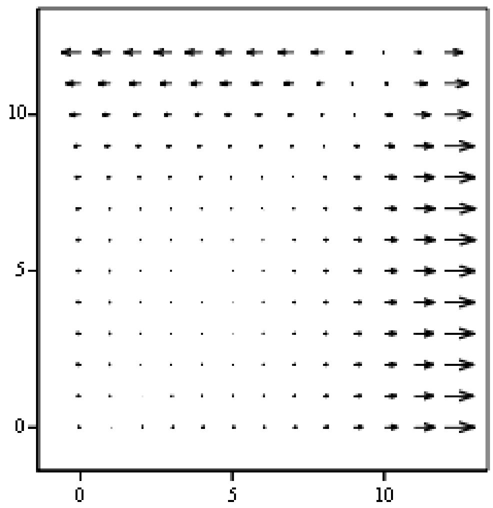
$V_{i,j} := grad(i - N, j - N)$

$X_{i,j} := (V_{i,j})_0$

$Y_{i,j} := (V_{i,j})_1$



F



F

3.9- va 3.10-rasmlardagi grafiklarni solishtirib, shunga inonish mumkinki, *gradiyentning matematik ma`nosi – bu har bir nuqta (x,y)da funksiya f(x,y) eng tez o'sadigan tekislikdagi yo'nalishlardir*. Gradiyentning absolyut qiymati (ya`ni har bir nuqtadagi vektor uzunligi) *f(x,y)* o'zgarishining lokal tezligini aniqlaydi. Grafiklarni solishtirganda shuni ko'ramizki, ularda ko'rsatilgan *(x,y)* jabhasining markazida *f(x,y)* funksiya sekin o'zgaradi (mos ravishda uning gradiyentlarining qiymatlari kichik bo'ladi), burchaklarida esa – tez o'zgaradi (u yerda gradiyent qiymatlari maksimal).

Gradiyent x, y o'zgaruvchilarning skalyar emas, balki vektor funksiyasidir, chunki amalda u – har bir nuqtada vektorning mos (gorizontal va vertikal) proyeksiyalarini beruvchi ikki funksiyaning kombinatsiyasidir. Ushbu bobda shu paytgacha biz skalyar funksiyalarni differensiallashni ko'rib chiqqan edik, lekin matematikada ko'p hollarda vektorli funksiyalar hosilalarini hisoblashga to'g'ri keladi. Ushbu amallarni vektorli maydonga qo'llaniladigan *divergensiyani* qidirish operatsiyasi misolida (listing 3.15 va 3.11-rasm), ya`ni fazoviy koordinatalarga bog'liq bo'lgan vektorli funksiya misolida ko'rib chiqamiz.

Listing 3.15. Vektorli funksiya divergensiyasini hisoblash

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.24\cdot x + y \\ x - 4\cdot 10^{-2}\cdot y^3 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y) := \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)_0 + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)_1$$

$$div(x,y) \rightarrow .24 - \frac{3}{25}\cdot y^2$$

Misollar

1. $$f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.35\cdot x + 5\cdot y \\ x + 5\cdot 10^{-3}\cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y) := \left(\frac{d}{dx} f(x,y)_0\right) + \frac{d}{dy} f(x,y)_1$$

$$div(x,y) \rightarrow .35 + \frac{1}{100}\cdot y$$

2. $$f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.3\cdot y + 5\cdot x \\ 6x + 5\cdot 10^{-5}\cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y) := \left(\frac{d}{dx} f(x,y)_0\right) + \frac{d}{dy} f(x,y)_1$$

$$div(x,y) \rightarrow 5 + \frac{1}{10000}\cdot y$$

3. $$f(x,y) := \begin{pmatrix} 12\cdot y + x \\ x - 2\cdot 10^{-5}\cdot y^5 \end{pmatrix}$$

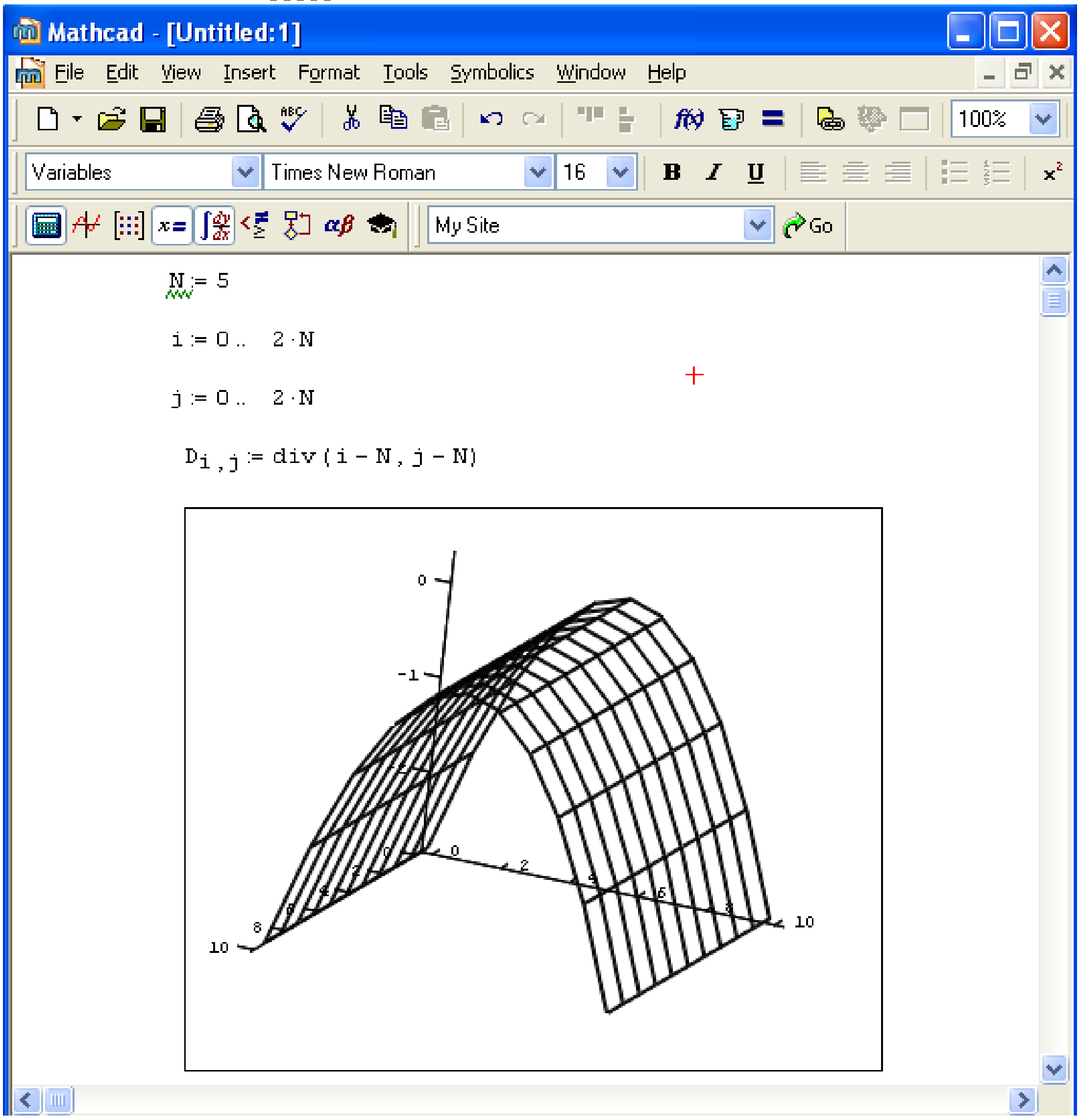
$$div(x,y) := \left(\frac{d}{dx} f(x,y)_0\right) + \frac{d}{dy} f(x,y)_1$$

$$div(x,y) \rightarrow 1 - \frac{1}{10000}\cdot y^4$$

4. $$f(x,y) := \begin{pmatrix} 11\cdot y + 4x \\ 3x - 2\cdot 10^{-2}\cdot y^3 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y) := \left(\frac{d}{dx} f(x,y)_0\right) + \frac{d}{dy} f(x,y)_1$$

$$div(x,y) \rightarrow 4 - \frac{3}{50}\cdot y^2$$



3.11-rasm. Vektorli funksiya divergensiyasi grafigi (listing 3.15 davomi)

Agar, matematikada qabul qilinganidek, gradiyentni olish operatorini *V* simvoli bilan belgilasak, vektor – funksiyaning divergensiyasini skalyar ko'paytma *Vf* sifatida aniqlash mumkin, vektor analizning keng tarqalgan yana bitta operatsiyasi – *rotor*ni (yoki boshqachasiga uyurma yoki uyurmalilik) – vektor ko‘paytma *V×f* ko‘rinishida belgilaymiz.

3.11-rasm vektorli funksiya *f(x,y)* misolini (listingning birinchi qatorida aniqlanadi) va uning divergensiyasini hisoblashni (analitik tarzda uchinchi qatorda amalga oshirilgan) illyustratsiya qiladi. Shu narsaga e`tibor beringki, boshlang‘ich (berilgan) vektor – funksiya sifatida 3.10-rasmda vektor maydoni shaklida ko‘rsatilgan oldingi hisoblarning natijasi olingan. 3.11-rasm yuqori qismidagi kod qatorlari hisoblangan divergensiyaning grafigini (uch o‘lchamli sirt va sath chiziqlari, mos ravishda yuqoridan va pastdan) tayyorlash uchun kerak.

3.16-listingda o‘sha vektorli funksiya *f(x,y)* rotorining hisoblari xuddi shunday strukturaga ega, bunda rotorni olish operatsiyasini aniqlash (listing 3.15 uchun divergensiya holatidek) uning ikkinchi qatorida keltirilgan.

Misol

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.65\cdot x^2 + 6\cdot y \\ 2x - 6\cdot 10^{-3}\cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y) := \frac{d}{dx}\left(f(x,y)_0 + \frac{d}{dy}f(x,y)_1\right)$$

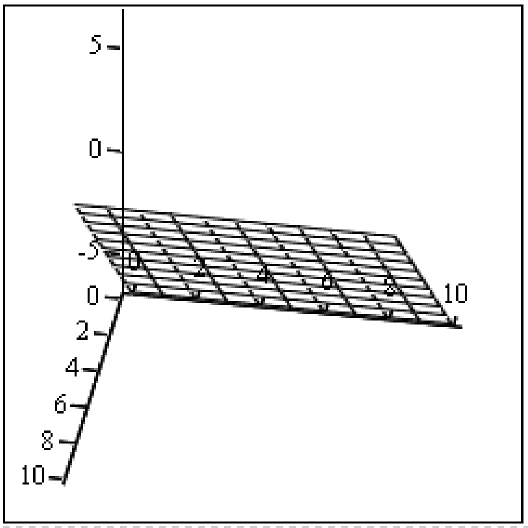
$$div(x,y) \rightarrow 1.30\cdot x$$

$$N := 5$$

$$i := 0..2\cdot N$$

$$j := 0..2\cdot N$$

$$D_{i,j} := div(i - N, j - N)$$



D

Listing 3.16. Vektorli funksiya rotorini hisoblash

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.24\cdot x + y \\ x - 4\cdot 10^{-2}\cdot y^3 \end{pmatrix}$$

$$rot(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)_1 - \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)_0$$

$$rot(x,y) \rightarrow 0$$

Misollar

1. $f(x,y) := \begin{pmatrix} 0.4\cdot x + 0.5y \\ 2x - 14\cdot 10^{-2}\cdot y \end{pmatrix}$

$$rot(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y)_1 - \frac{d}{dy}f(x,y)_0$$

$$rot(x,y) \rightarrow 1.5$$

2. $f(x,y) := \begin{pmatrix} 4\cdot x + 5y \\ x - y \end{pmatrix}$

$$rot(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y)_1 - \frac{d}{dy}f(x,y)_0$$

$$rot(x,y) \rightarrow -4$$

$$3.\ f(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{y}{8} \\ x-(5+y) \end{bmatrix} \qquad 4.\ f(x,y) := \begin{bmatrix} y+x^8 \\ 2x-\left(x+y^6\right) \end{bmatrix}$$

$$rot(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y)_1 - \frac{d}{dy}f(x,y)_0 \qquad rot(x,y) := \frac{d}{dx}f(x,y)_1 - \frac{d}{dy}f(x,y)_0$$

$$rot(x,y) \rightarrow \frac{7}{8} \qquad rot(x,y) \rightarrow 0$$

3.14-3.16 listinglardagi misollar ikki o‘zgaruvchili funksiyalarga taalluqli edi, ya`ni ular ikki o‘lchamli holni bayon qilgan. Yana ikkita listing – 3.17 va 3.18 – yuqorida sanab o‘tilgan vektorli analizning operatsiyalari uch o‘lchamli (fazoviy) holda qanday amal qilishini ko‘rsatadi.

Listing 3.17. Uch o‘zgaruvchili funksiyaning gradiyenti

$$f(x,y,z) := z\cdot\sin(x\cdot y)$$

$$grad(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$grad(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} z\cdot\cos(y\cdot x)\cdot y \\ z\cdot\cos(y\cdot x)\cdot x \\ \sin(y\cdot x) \end{pmatrix}$$

Misol

$$f(x,y,z) := 2\cdot z\cdot\cos(3\cdot x\cdot y)$$

$$grad(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y,z) \\ \frac{d}{dy}f(x,y,z) \\ \frac{d}{dz}f(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$grad(x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} (-6)\cdot z\cdot\sin(3\cdot x\cdot y)\cdot y \\ (-6)\cdot z\cdot\sin(3\cdot x\cdot y)\cdot x \\ 2\cdot\cos(3\cdot x\cdot y) \end{bmatrix}$$

Listing 3.18. Uch o‘lchamli fazoda divergensiya va vektor

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \cdot y \\ z \\ x + 2z \end{pmatrix}$$

$$div(x,y,z) := \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_0 + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_1 + \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_2$$

$$rot(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_2 - \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_0 - \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_2 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_1 - \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_0 \end{pmatrix}$$

$$div(x,y,z) \rightarrow y + 2$$

$$rot(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -x \end{pmatrix}$$

3.4.3. Misol: yakobian

Misol

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \cdot y \\ z \\ x + 4z \end{pmatrix}$$

$$div(x,y,z) := \frac{d}{dx}\left[f(x,y,z)_0 + \frac{d}{dy}\left(f(x,y,z)_1 + \frac{d}{dz} f(x,y,z)_2\right)\right]$$

$$rot(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dy}\left(f(x,y,z)_2 - \frac{d}{dz} f(x,y,z)_1\right) \\ \frac{d}{dz}\left(f(x,y,z)_0 - \frac{d}{dx} f(x,y,z)_2\right) \\ \frac{d}{dx}\left(f(x,y,z)_1 - \frac{d}{dy} f(x,y,z)_0\right) \end{bmatrix}$$

$$div(x,y,z) \rightarrow y$$

$$rot(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorli funksiyaning xususiy hosilalarini topish bilan bog‘liq bo‘lgan yana bitta masala, bu – yakobianni (yoki Yakobi matritsasining determinantini) – *vektorli funksiyaning uning hamma argumentlari bo‘yicha xususiy hosilalaridan tuzilgan matritsani* hisoblashdir. Bu masala matematikaning turli jabhalarida, masalan, bikir differensial tenglamalarga nisbatan, uchraydi. Vektorli argument *x* vektorli funksiyasi *f(x)*ning yakobianini hisoblash usullari listing 3.19 da keltirilgan. Unda yakobianning xususiy hosilalarini aniqlash uchun har bir *i*-nchi skalyar komponent *f(x)i* Mathcad simvolli protsessori tomonidan differensiallanadi.

Listing 3.19. Vektorli argument vektorli funksiyasining yakobianini hisoblash

$$f(x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 \\ (x_1)^{x_0} \\ x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{\partial}{\partial z} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{\partial}{\partial z} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{\partial}{\partial z} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

Misollar

1. $f(x) := \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 \\ (x_1)^{x_0} \\ x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}$

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

$$2.\ f(x) := \begin{bmatrix} (2x)_0 \cdot x_1 \\ \left(x_1\right)^{x_0} \\ x_1 \cdot (3x)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot y & 2 \cdot x & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & 3 \cdot z & 3 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$3.\ f(x) := \begin{bmatrix} (2x)_1 \cdot x_2 \\ \left(x_2\right)^{x_0} \\ 2 \cdot (3x)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot z & 2 \cdot y \\ z^x \cdot \ln(z) & 0 & z^x \cdot \frac{x}{z} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4.\ f(x) := \begin{bmatrix} (2 - x)_1 \cdot 5 x_2 \\ \left(x_2 \cdot x_1\right) \cdot 5 \\ 2 \cdot (3x)_0 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_0 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_1 \\ \frac{d}{dx} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dy} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 & \frac{d}{dz} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)_2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & (-5) \cdot z & (-5) \cdot y + 10 \\ 0 & 5 \cdot z & 5 \cdot y \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ushbu yakobianning o‘zini boshqacha ham hisoblash mumkin, bunda bitta argumentli funksiya emas, balki uchta skalyarli argument *f(x,y,z)* funksiyasi aniqlanishi kerak (listing 3.20). Shuni yodda tutingki, yakobianni sonli-raqamli aniqlash uchun dastlab u hisoblanadigan nuqtani, ya`ni listing 3.19 terminlarida vektor *x* ni yoki listing 3.20 belgilanishlarida uchchala o‘zgaruvchi *x, y, z* larning hammasini aniqlab olish zarur.

Listing 3.20. Uchta skalyar argumentlar vektorli funksiyasining yakobianini hisoblash

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y^x \\ y \cdot z \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_0 & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_0 & \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_1 & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_1 & \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)_2 & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)_2 & \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)_2 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

Misollar

1. $$f(x,y,z) := \begin{bmatrix} (2 - x) + y \\ y \cdot x \\ 2 \cdot (3x) \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_0 \\ \frac{d}{dx} f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dx} f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_2 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x + y \\ y^x \\ y x \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_0 \\ \frac{d}{dx} f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dx} f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dy} f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dz} f(x,y,z)_2 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.\ f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^y \\ y^x \\ y+x \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_0 \\ \frac{d}{dx}f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dx}f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_2 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} x^y \cdot \frac{y}{x} & x^y \cdot \ln(x) & 0 \\ y^x \cdot \ln(y) & y^x \cdot \frac{x}{y} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.\ f(x,y,z) := \begin{bmatrix} x^y \\ (y+5)^x \\ y \cdot x \end{bmatrix}$$

$$J(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_0 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_0 \\ \frac{d}{dx}f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_1 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_1 \\ \frac{d}{dx}f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dy}f(x,y,z)_2 & \frac{d}{dz}f(x,y,z)_2 \end{pmatrix}$$

$$J(x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} x^y \cdot \frac{y}{x} & x^y \cdot \ln(x) & 0 \\ (y+5)^x \cdot \ln(y+5) & (y+5)^x \cdot \frac{x}{y+5} & 0 \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

3.5. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish

Differensiallash bilan bog‘liq bo‘lgan yana bitta operatsiya – bu funksiyani *Teylor qatori*ga istalgan x o‘zgaruvchi bo‘yicha qaysidir nuqtada yoyishdir. Agar bu nuqta $x=0$ bo‘lsa, qatorni *Maklaren qatori* ham deyishadi va u $x=0$ nuqta atrofida $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...$ ko‘rinishdagi summa sifatida taqdim etiladi. Bu erda a_i – x ga bog‘liq bo‘lmagan, lekin, balkim boshqa o‘zgaruvchilarning (boshlang‘ich funksiya ularga bog‘liq) funksiyalari bo‘lgan, koeffitsiyentlar. Aynan ushbu koeffitsiyentlar funksiyaning hosilasi orqali ifodalanadi. Agar u $x=0$ da xususiyatga ega bo‘lsa, uning mos ravishda yoyilishi *Loran qatori* deyiladi.

Teylor qatoriga yoyish qidirilganda uning koeffitsiyentlarining hammasini ochiq ko‘rinishda hisoblash zarurati yo‘q, chunki bu operatsiyani Mathcadni ishlab chiquvchilar nazarda tutishgan va u simvolli protsessor yordamida bajariladi. Bunda operatsiyani bajarish uchun ham mos kiritib o‘rnatilgan funksiyalardan va ham Symbolics (Simvolika) menyusidan foydalanish mumkin.

3.5.1. Menyu yordamida qatorga yoyish

Qandaydir ifodani qatorga yoyish uchun:

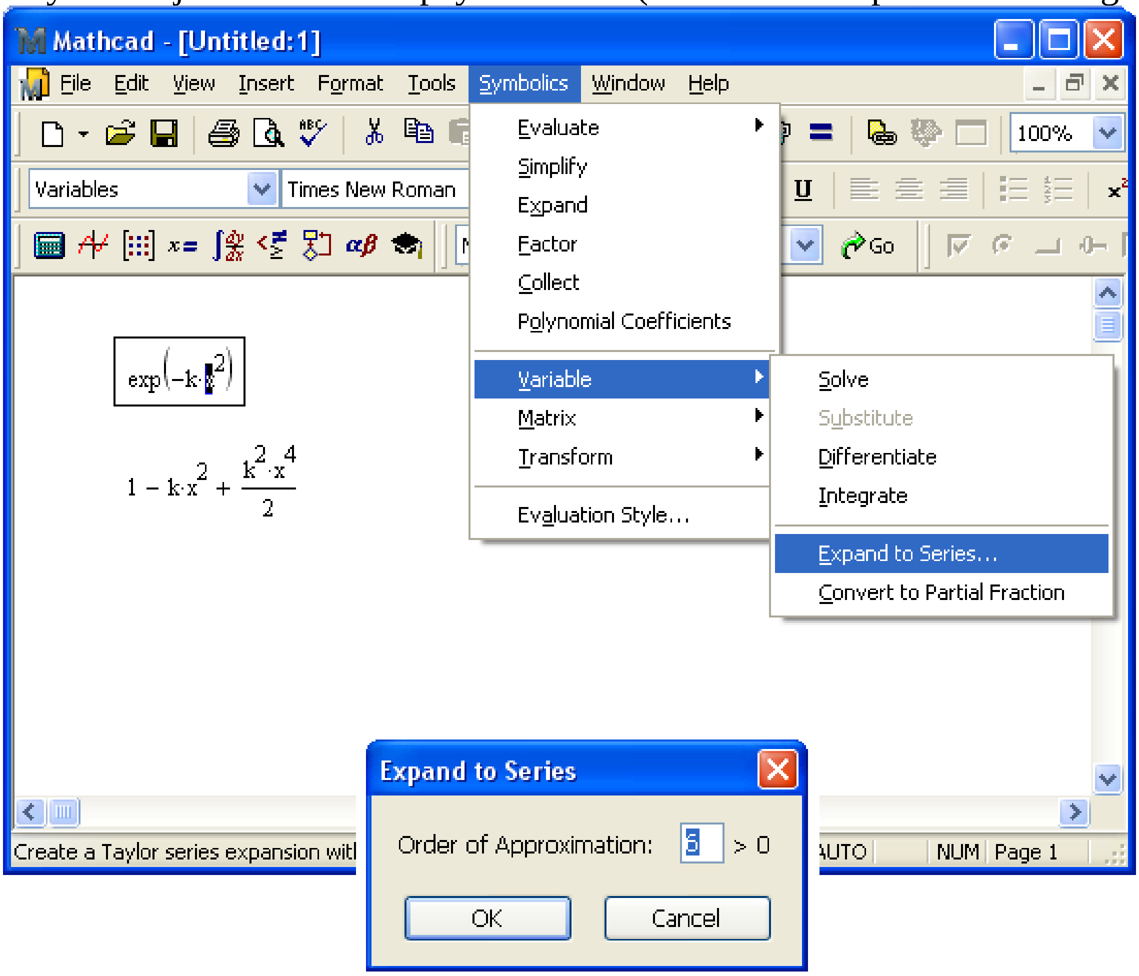
1. Ifodani kiriting.

2. O‘zgaruvchining qiymatini ajratib ko‘rsating, u bo‘yicha qatorga yoyish talab qilinadi.

3. Symbolics / Variable / Expand to Series (Simvolika / O‘zgaruvchi / Qatorga yoyilsin) komandasini bajaring (3.12-rasm).

4. Paydo bo‘lgan dialog darchasi Expand to Series (Qatorga yoyilsin)ga approksimatsiya (Order of Approximation)ning istalayotgan tartibini kiriting va OK knopkasini bosing.

Yoyish natijasi ifoda ostida paydo bo‘ladi (3.12-rasmda u pastda ko‘rsatilgan).



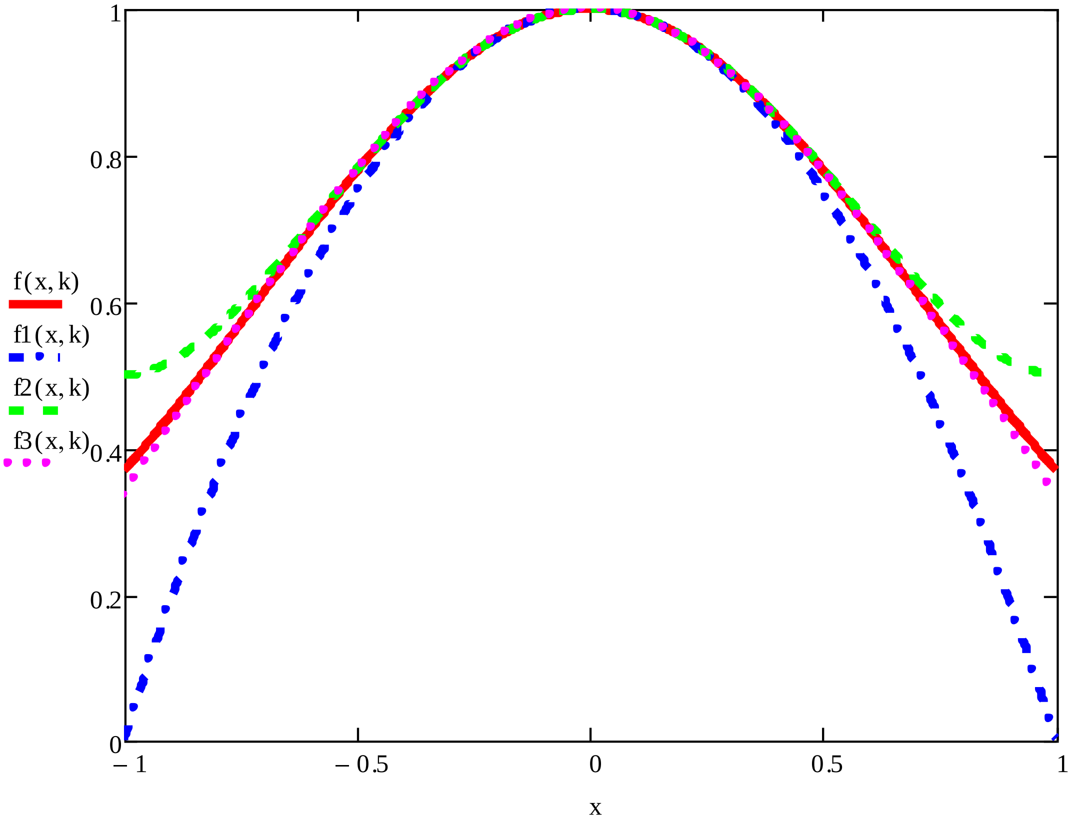
3.12-rasm. Ifodani qatorga o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha analitik yoyish

Izoh

Shuni yodda tutingki, yoyish faqat *x=0* nuqtada amalga oshiriladi. Boshqa, *x=a* nuqtada yoyilmani olish uchun, misol uchun, o‘zgaruvchi *x* o‘rniga *x-a* qiymatni qo‘yish mumkin.

3.5.2. Qatorga yoyish operatori

Simvolli chiqarish operatori yordamida, alternativ usulda qatorga yoyish uchun, tayanch so‘z *series* dan foydalaning, buning uchun Symbolic (Simvolika) panelidagi shu nomli knopkani bosib, uni kiritib o‘rnating. Tayanch so‘z *series* dan keyin, verguldan so‘ng, yoyilish qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha amalga oshiriladigan bo‘lsa o‘sha o‘zgaruvchining nomi va approksimatsiya tartibi ko‘rsatiladi (3.21- va 3.22-listinglar). Boshlang‘ich funksiya va uning Teylor qatoriga (approksimatsiyaning har xil tartiblari bilan) bir necha yoyilmalarini 3.13-rasmda keltirilgan grafik bo‘yicha solishtirishimiz mumkin.



3.13-rasm. Approksimatsiya tartibiga qarab funksiyaning qatorga yoyilishlari grafigi (listing 3.21 davomi)

Grafikdan ko‘rinadiki, qatorga yoyish *x=0* nuqta atrofida yaxshi ishlaydi, undan uzoqlashgan sari yoyilma funksiyadan tobora ko‘proq farqlanib boradi. Tabiiyki, approksimatsiya tartibi qanchalik yuqori bo‘lsa, Teylorning mos yoyilmasi boshlang‘ich funksiyaga shunchalik yaqinroq joylashadi.

Listing 3.21. Funksiyani tartibi har xil approksimatsiyali bo‘lgan qatorga yoyish

$$f(x,k) := \exp\left(-k\cdot x^2\right)$$

$$f(x,k)\ \text{series}, x, 3\ \rightarrow 1 + (-k)\cdot x^2$$

$$f(x,k)\ \text{series}, x, 5\ \rightarrow 1 + (-k)\cdot x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot k^2\right)\cdot x^4$$

$$f(x,k)\ \text{series}, x, 7\ \rightarrow 1 + (-k)\cdot x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot k^2\right)\cdot x^4 + \left(\frac{-1}{6}\cdot k^3\right)\cdot x^6$$

Listing 3.22. Bir necha o‘zgaruvchili funksiyani har xil o‘zgaruvchilar bo‘yicha yoyish

$$f(x,k) := \exp\left(-k\cdot x^2\right)$$

$$f(x,k)\ \text{series}, k, 4\ \rightarrow 1 + \left(-x^2\right)\cdot k + \left(\frac{1}{2}\cdot x^4\right)\cdot k^2 + \left(\frac{-1}{6}\cdot x^6\right)\cdot k^3$$

$$f(x,k)\ \text{series}, x, 4\ \rightarrow 1 + (-k)\cdot x^2$$

Misollar

1. $f(x,k) := \exp\left(-2k\cdot x^4\right)$

$f(x,k)$ series, x, 5 $\rightarrow 1 + (-2)\cdot k\cdot x^4$

$f(x,k)$ series, x, 7 $\rightarrow 1 + (-2)\cdot k\cdot x^4$

$f(x,k)$ series, x, 9 $\rightarrow 1 + (-2)\cdot k\cdot x^4 + 2\cdot k^2\cdot x^8$

2. $f(x,k) := \exp\left(-4k\cdot x^6\right)$

$f(x,k)$ series, k, 5 $\rightarrow 1 + (-4)\cdot x^6\cdot k + 8\cdot x^{12}\cdot k^2 + \frac{-32}{3}\cdot x^{18}\cdot k^3 + \frac{32}{3}\cdot x^{24}\cdot k^4$

$f(x,k)$ series, x, 7 $\rightarrow 1 + (-4)\cdot k\cdot x^6$

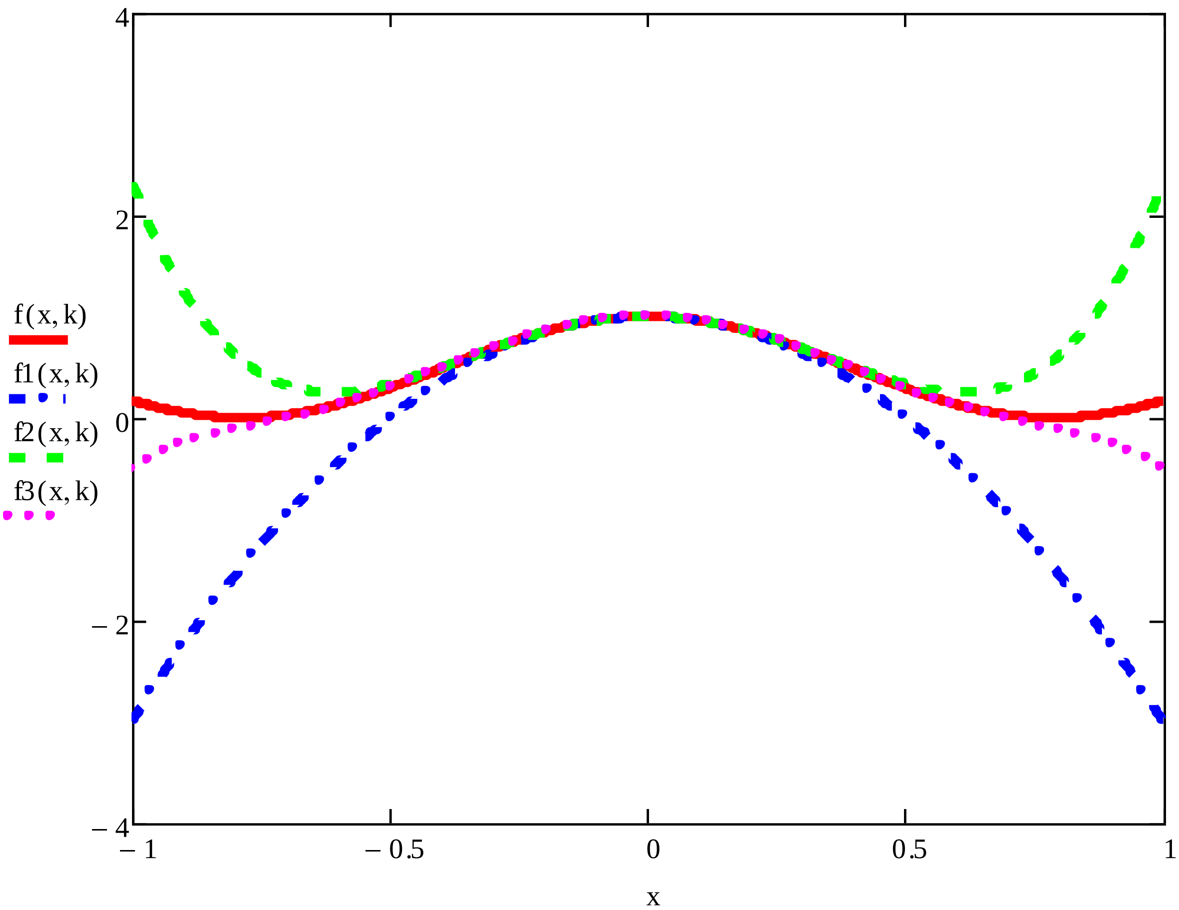
3. $k := 2$

$f(x,k) := \cos(k x)^2$

$f1(x,k) := f(x,k)$ series, x, 3 $\rightarrow 1 - k^2\cdot x^2$

$f2(x,k) := f(x,k)$ series, x, 5 $\rightarrow 1 - k^2\cdot x^2 + \frac{k^4\cdot x^4}{3}$

$f3(x,k) := f(x,k)$ series, x, 7 $\rightarrow 1 - k^2\cdot x^2 + \frac{k^4\cdot x^4}{3} - \frac{2\cdot k^6\cdot x^6}{45}$



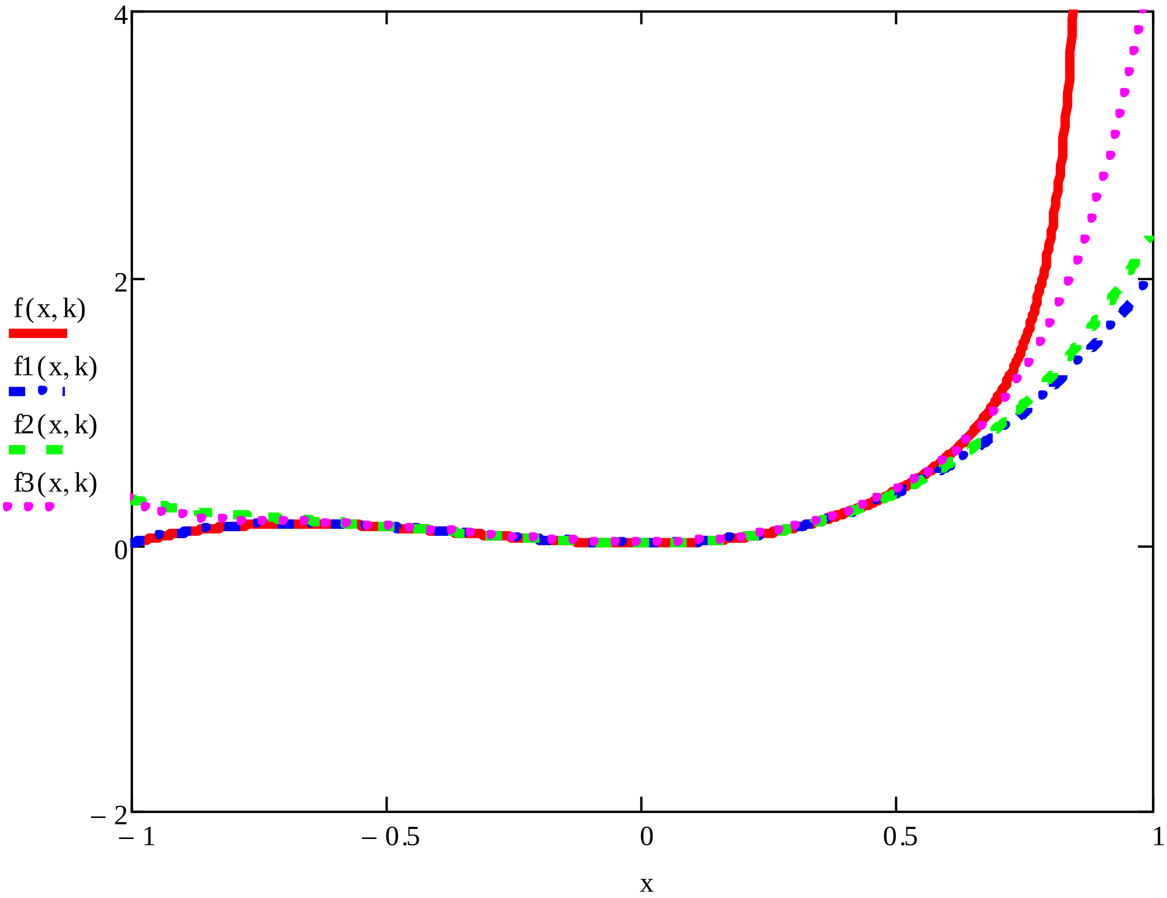
4. $k := 1$

$$f(x,k) := \tan\left(x^3 + kx^2\right)$$

$$f1(x,k) := f(x,k) \text{ series}, x, 3 \;\rightarrow k \cdot x^2 + x^3$$

$$f2(x,k) := f(x,k) \text{ series}, x, 5 \;\rightarrow k \cdot x^2 + x^3 + \frac{k^3 \cdot x^6}{3}$$

$$f3(x,k) := f(x,k) \text{ series}, x, 7 \;\rightarrow k \cdot x^2 + x^3 + \frac{k^3 \cdot x^6}{3} + k^2 \cdot x^7 + k \cdot x^8$$



4 – BOB. INTEGRALLASH

Integrallash

Integral (lotin. integer – butun) – matematikaning eng ahamiyatli tushunchalaridan biri bo'lib, u birinchidan, funksiyalarni ularning hosilalari bo'yicha topish (masalan, nuqtaning tezligi bo'yicha harakatlanayotgan nuqta bosib o'tgan yo'lni ifodalovchi funksiyani topish), ikkinchidan – yuzalar, hajmlar, yoy uzunliklari, muayyan vaqt oralig'ida kuchlar bajargan ishni va sh.k.larni o'lchash ehtiyoji tufayli vujudga kelgan. Bularga mos ravishda noaniq va aniq integrallarni farqlashadi, ularni hisoblash integral hisoblash masalasiga kiradi.

Sonli-raqamli integrallash – hisoblash nuqtayi-nazaridan eng oddiy operatsiyalardan biri, boshqa tarafdan esa ba`zi funksiyalarni analitik integrallab bo'lmaydi.

4.1. Aniq integral

Quyi chegarasi a va yuqori chegarasi b bo'lgan f(x) funksiyaning aniq integrali quyidagi ayirma sifatida aniqlanishi mumkin:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx, \tag{1}$$

bu yerda F_x *– f(x)ning boshlang'ich funksiyasidir; ta`rif boshlang'ich funksiyalarning qaysi biri aniq integralni hisoblash uchun tanlab olinganligiga bog'liq emas. Agar f(x) funksiya uzluksiz bo'lsa, keltirilgan ta`rif a<b bo'lgan holda O.Koshining (1823 y) quyidagi ta`rifiga ekvivalent bo'ladi: kesma [a,b]ning nuqtalar bilan ixtiyoriy bo'linishi ko'riladi.*

$$a = x_0 \langle x_1 \langle K \langle x_n = b \tag{2}$$

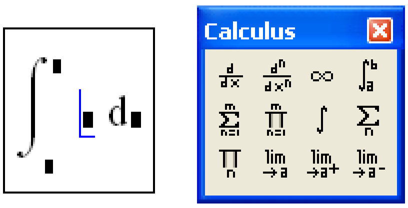
Mathcadda integrallash hisoblash operatori ko'rinishida realizatsiya qilingan. Skalyar funksiyalardan integrallash chegaralarida integrallarni hisoblash ruxsat etiladi, o'z navbatida chegaralarning o'zi ham skalyar bo'lishi kerak. Integrallash chegaralari haqiqiy bo'lishi shart, lekin integral ostidagi funksiya esa kompleks qiymatlarga ham ega bo'lishi mumkin, shuning uchun integral qiymati ham kompleks bo'lishi mumkin.

4.1.1. Integrallash operatori

Integrallash, differensiallash va yana boshqa ko'p matematik amallar kabi, Mathcadda "qanday yozilsa – shunday kiritiladi" prinsipida o'rnatilgan. Aniq integralni hisoblash uchun hujjatda uni oddiy matematik shakldа yozish lozim. Bu Calculus (Hisoblashlar) paneli yordamida integral belgili knopkani bosib yoki klaviaturadan <Shift>+<7> klavishalar birikmasini kiritib bajariladi. Integral simvoli bir nechta o'rinto'ldirgichlar bilan birga paydo bo'ladi (4.1-rasm), unga integrallashning quyi va yuqori intervallarini, integralosti funksiyani va integrallash o'zgaruvchisini kiritish kerak.

Izoh

Agar integrallash chegaralari o'lchamga ega bo'lsa, o'lcham ikkala chegara uchun bir xil bo'lishi kerak.



4.1-rasm. Integrallash operatori

Integrallash natijasini olish uchun tenglik yoki simvolli tenglik belgisini kiritish lozim. Birinchi holda integrallash sonli-raqamli metodda amalga oshiriladi, ikkinchi holda esa – agar muvaffaqiyatli bo‘lsa, Mathcad simvolli protsessori yordamida integralning aniq qiymati topiladi. Listing 4.1 shu ikki usulni illyustratsiya qiladi. Albatta, simvolli integrallashni faqat sodda integralosti funksiyalari uchungina amalga oshirish mumkin.

Listing 4.1. Aniq integralni sonli-raqamli va simvolli hisoblash

$$\int_0^{\pi} \exp\left(-x^2\right)\, dx = 0.886$$

$$\int_0^{\pi} \exp\left(-x^2\right)\, dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}(\pi)\cdot \pi^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}(\pi)\cdot \pi^{\frac{1}{2}}$$

Misol

$$\int_0^{\pi} \exp\left[-(2x)^6\right] dx = 0.464$$

$$\int_0^{\pi} \exp\left[-(2x)^6\right] dx \rightarrow \int_0^{\pi} e^{(-64)\cdot x^6}\, dx$$

Izoh 1

Bitta yoki ikkala chegarasi cheksiz bo‘lgan integrallarni hisoblash mumkin (listing 4.2). Buning uchun mos chegara o‘rniga (o‘sha Calculus (Hisoblashlar) panelidan foydalanib) cheksizlik simvolini kiriting. «Minus cheksizlik»ni kiritish uchun cheksizlik simvoli oldiga minus belgisini qo‘shib qo‘ying.

Listing 4.2. Chegaralari cheksiz bo‘lgan integrallarni hisoblash

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\, dx \rightarrow \pi^{\frac{1}{2}}$$

Misollar

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(3x)^2\right] dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot \pi^{\frac{1}{2}}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(6\cdot x^2\right) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{6\cdot x^2}\, dx$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-3\cdot \frac{1}{x^2}\right) dx \rightarrow \infty$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(5\sqrt{6}\cdot x^9\right) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{5\cdot 6^{\frac{1}{2}}\cdot x^9}\, dx$

Izoh 2

Integral ostidagi funksiya istalgan miqdordagi o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Mathcad integralni aynan qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha hisoblashi lozimligini ko‘rsatish uchun uning nomini mos o‘rinto‘ldirgichga kiritish kerak. O‘zgaruvchilarning biri bo‘yicha sonli-raqamli integrallash uchun integralosti funksiya ulardan bog‘liq bo‘lgan va ular uchun Siz integralni hisoblashni mo‘ljallab turgan qolgan o‘zgaruvchilarning qiymatlarini oldindan berish lozim (listing 4.3).

Listing 4.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyani har xil o‘zgaruvchilar bo‘yicha hisoblash

$$\int_a^b \exp\left(-x\,z^2\right)\,dx \to \frac{-1}{z^2}\cdot e^{-b\cdot z^2} + \frac{1}{z^2}\cdot e^{-a\cdot z^2}$$

$$\int_a^b \exp\left(-x\,z^2\right)\,dz \to \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}\left(b\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{erf}\left(a\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Misollar

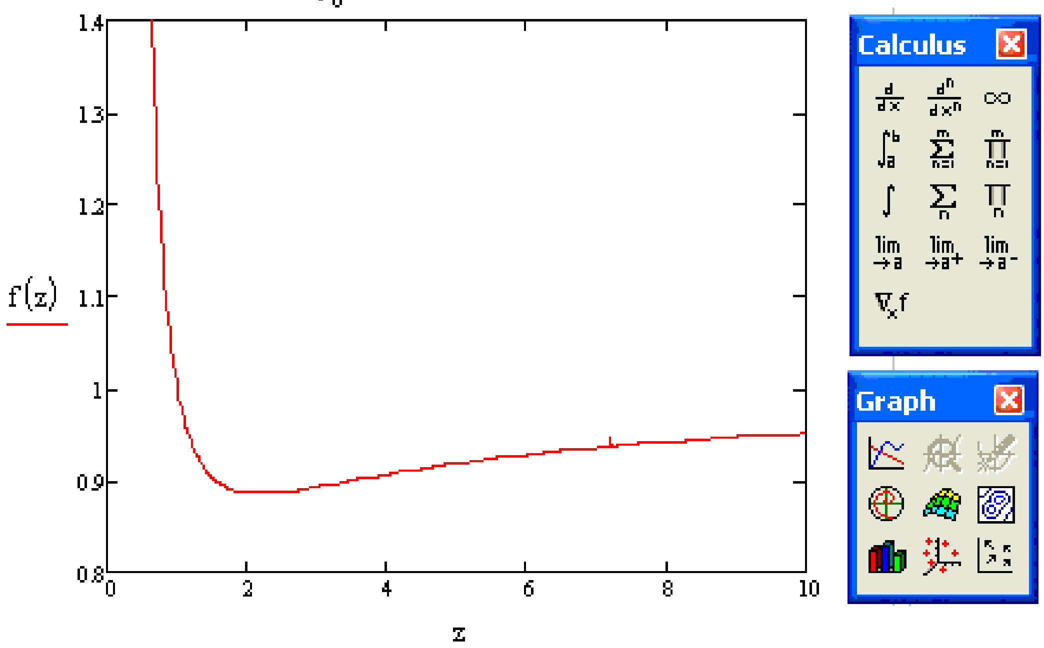
1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \exp\left[-(2x)^6\right]dx = 0.464$

$$\int_0^{\pi} \exp\left[-(2x)^6\right]dx \to \int_0^{\pi} e^{(-64)\cdot x^6}\,dx$$

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx = 0.395$

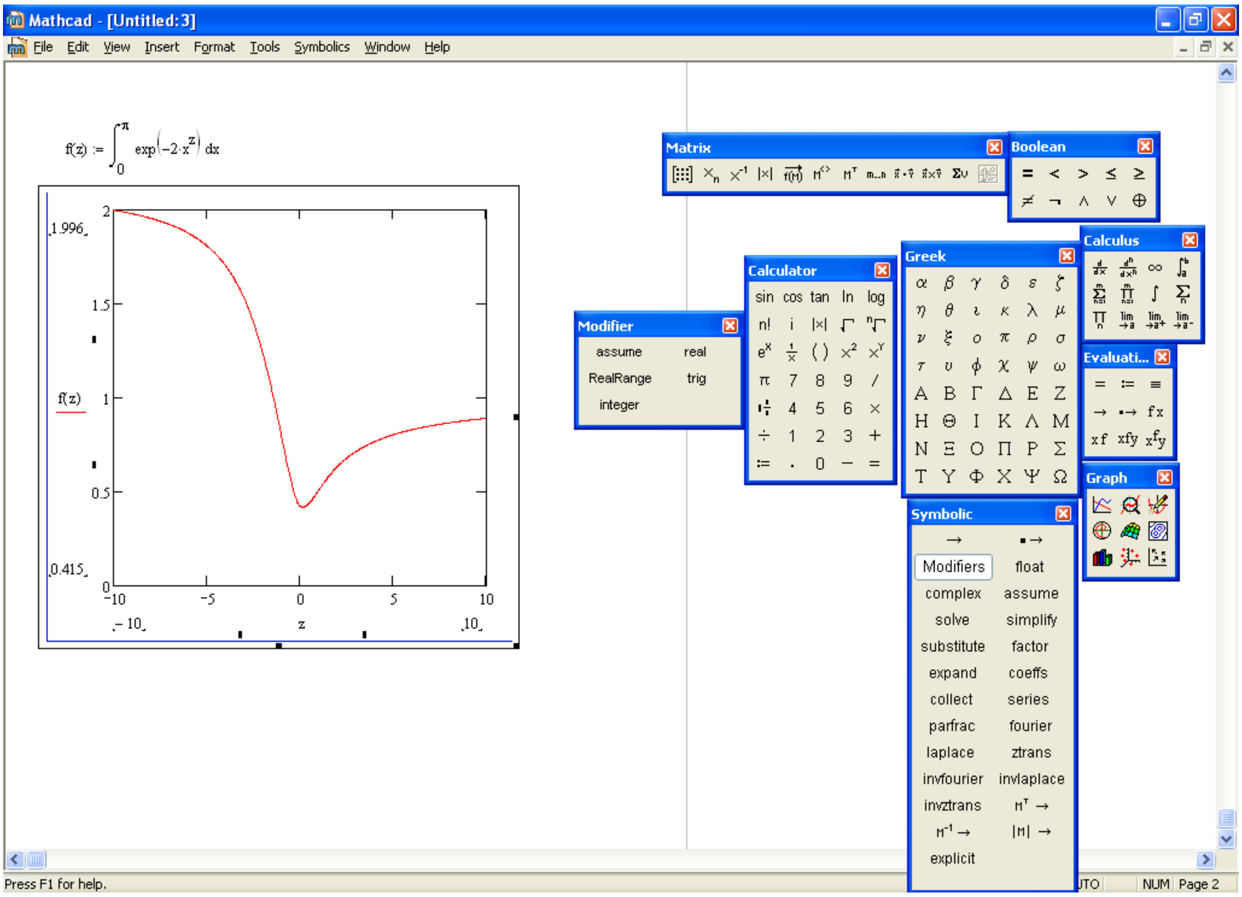
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)dx \to \left(\frac{1}{2}\cdot\pi + \pi^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{erf}\left(\frac{2}{\pi}\right)\cdot e^{\frac{4}{\pi^2}}\right)\cdot e^{\frac{-4}{\pi^2}} - \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$f(z) := \int_0^{\infty} \exp\left(-x^z\right)dx$$



4.2-rasm. Foydalanuvchi funksiyasida integrallash operatoridan foydalanish

Misol



Izoh 3

Integrallash operatoridan boshqa operatorlar kabi sikllarda funksiyalarni aniqlash uchun va ranjirlangan o‘zgaruvchilarni hisoblash uchun foydalanish mumkin. Foydalanuvchi funksiyasi *f(z)*ga aniq integral qiymatini berish va uning bir nechta qiymatlarini hisoblash misoli 4.2-rasmda keltirilgan. Integrallash natijasi grafigini qanday qurish mumkinligi ham shu rasmda ko‘rsatilgan.

4.1.2. Sonli-raqamli integrallash algoritmini tanlash haqida

Sonli-raqamli integrallash natijasi – integralning aniq emas, balki taxminiy qiymatidir, aniqlanish xatoligi kiritib o‘rnatilgan konstanta TOL ga bog‘liq. U qanchalik kichik bo‘lsa, integral shuncha aniqlik bilan topiladi, lekin hisoblashga ko‘proq vaqt sarflanadi. Indamaslik bo‘yicha TOL=0,001 hisoblashni tezlashtirish uchun TOL ning kattaroq qiymatini o‘rnatish mumkin.

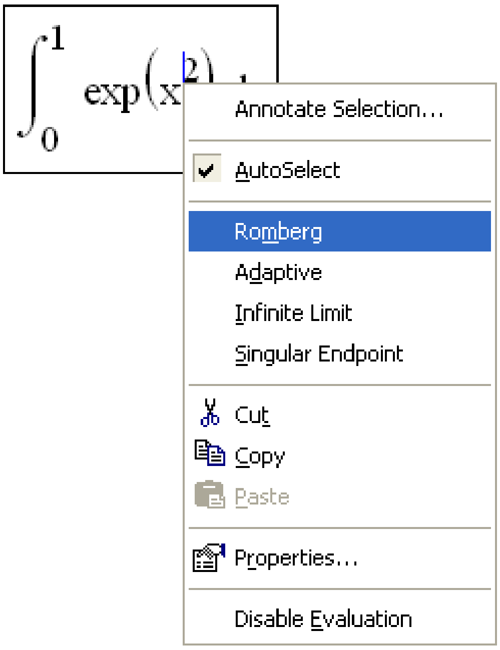
Maslahat

Agar hisoblash tezligi biz uchun prinsipial ahamiyatga ega bo‘lsa, masalan, sikl ichida integralni ko‘p marta qayta hisoblashda, aniqlik qiymatini ehtiyotkorlik bilan tanlang. Sizning hisoblaringizga o‘xshash bo‘lgan integralosti funksiya bilan test misolida albatta eksperiment qiling. TOL ning har xil qiymatlari uchun integralni hisoblab, TOL konstantasining kamayishi integrallash xatoligiga qanday ta`sir qilishini ko‘ring va aniqlik/hisoblash tezligi nisbatining optimal qiymatini tanlang.

Mathcad redaktorida sonli-raqamli integrallash operatorini kiritib, Siz amalda haqiqiy dasturni yaratasiz. Masalan, 4.2-rasmdagi listingning birinchi qatori – haqiqiy dasturdir, faqat uning asosiy qismi Sizning nazaringizdan MathSoft kompaniyasi ishlab chiquvchilari tomonidan berkitilgan. Ko‘p hollarda bunga e`tibor bermasdan Mathcadga to‘liq ishonish mumkin. Lekin ba`zan ushbu dastur parametrlarini boshqarish ko‘nikmasi talab qilib qolinishi mumkin, buni biz TOL konstantasini tanlash misolida ko‘rib chiqdik. Bundan tashqari, foydalanuvchining o‘zi sonli-raqamli integrallash algoritmini tanlash imkoniyatiga ega. Buning uchun:

1. Hisoblanayotgan integral chap qismining istalgan joyida sichqonning o‘ng knopkasini shiqillating.

2. Paydo bo‘lgan kontekstli menyuda bor bo‘lgan sonli-raqamli algoritmlardan birini, masalan Romberg (Romberg)ni, tanlang (4.3-rasm).



4.3-rasm. Sonli-raqamli integrallash algoritmini tanlash kontekstli menyu yordamida amalga oshiriladi

Shunga e`tibor beringki, 4.3-rasmda ko‘rsatilganidek, algoritmlardan biri birinchi marta tanlanishidan oldin, kontekstli menyudagi tekshirish bayroqchasi AutoSelect (Avtomatik tanlash) punkti yonida o‘rnatiladi. Buning ma`nosi: *algoritmni Mathcad aniqlaydi, bunda u integrallash chegaralari va integral ostidagi funksiya xususiyalarining tahliliga asoslanadi.* Algoritmlardan biri tanlangan zahoti, bu bayroqcha tashlab yuboriladi, tanlangan algoritm esa nuqta bilan belgilanadi.

Mathcadni ishlab chiquvchilari integrallashning to‘rtta sonli-raqamli metodini dasturlashgan:

- Romberg (Romberg) – xususiyatlarga ega bo‘lmagan funksiyalarning ko‘pchiligi uchun;
- Adaptive (Adaptiv) – integrallash intervalida tez o‘zgaruvchi funksiyalari uchun;
- Infinite Limit (Cheksiz chegara) – chegaralari cheksiz bo‘lgan integrallar uchun;
- Singular Endpoint (Singulyar chegara) – oxirida singulyarlik bo‘lgan integrallar uchun (integrallash intervalining bitta yoki ikkala oxirlarida aniqlanmagan funksiyalar uchun Rombergning modifikatsiyalangan algoritmi qo‘llanadi).

Sonli-raqamli metodni tanlashni, kontekstli menyuda bayroqchani AutoSelect (Avtomatik tanlash)ga o‘rnatib, Mathcadga ishonib topshirganingiz ma`qul. Boshqa metodni tanlab ko‘rsa bo‘ladi, masalan, maxsus hollarda, Sizda hisob natijalari to‘g‘riligiga gumon bo‘lganda, hisob natijalarini solishtirib ko‘rish uchun.

Agar integral ostidagi funksiya "yaxshi" bo‘lsa, ya`ni integrallash intervalida keskin o‘zgarmasa, xususiyatlarga ega bo‘lmasa va cheksizlikka aylanmasa, integralning sonli-raqamli yechimi hech qanday "syurpriz" keltirmaydi.

4.1.3. Integrallashning an`anaviy algoritmlari haqida

Mathcadda realizatsiya qilingan sonli-raqamli integrallash metodini bayon qilishga o‘tishdan avval, sonli-raqamli integrallashning asosiy prinsiplarini ko‘rib chiqamiz. Funksiya $f(x)$ aniq integralining geometrik ma`nosi – ushbu funksiya grafigi va x o‘qi hosil qilgan shakl yuzasidan – kelib chiqqan holda "yaxshi" funksiyani integrallashning eng oson usuli – to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasini qo‘llashni taklif qilish mumkin. Uning yordamida qayd etilgan shaklning yuzasi elementar to‘rtburchaklar summasi sifatida hisoblanadi, integralosti funksiya $f(x)$ ko‘p to‘rtburchaklar bilan almashtiriladi.

To‘rtburchaklar metodining illyustratsiyasi 4.4-rasmda keltirilgan. Interval i ni hisoblash uchun integrallash intervali $[a,b]$ N bo‘lakka bo‘linadi. Har bir i-nchi kesmada $f(x)$ kengligi h va balandligi $f(x_i)$ bo‘lgan to‘rtburchak bilan almashtiriladi. Bu elementar to‘rtburchaklardan har birining yuzasi $hf(x_i)$ ni tashkil qiladi, ularning summasi s ni esa qidirilayotgan integral I ga yaqin deb hisoblasa bo‘ladi. N–>~ da elementar to‘rtburchaklarning ko‘pligi integralosti funksiya hosil qilgan izlanayotgan shaklga intiladi, qiymat S–>I, bunda xatolik (s ning aniq qiymat i dan farqi) $O(h^2)$ ni tashkil qiladi.

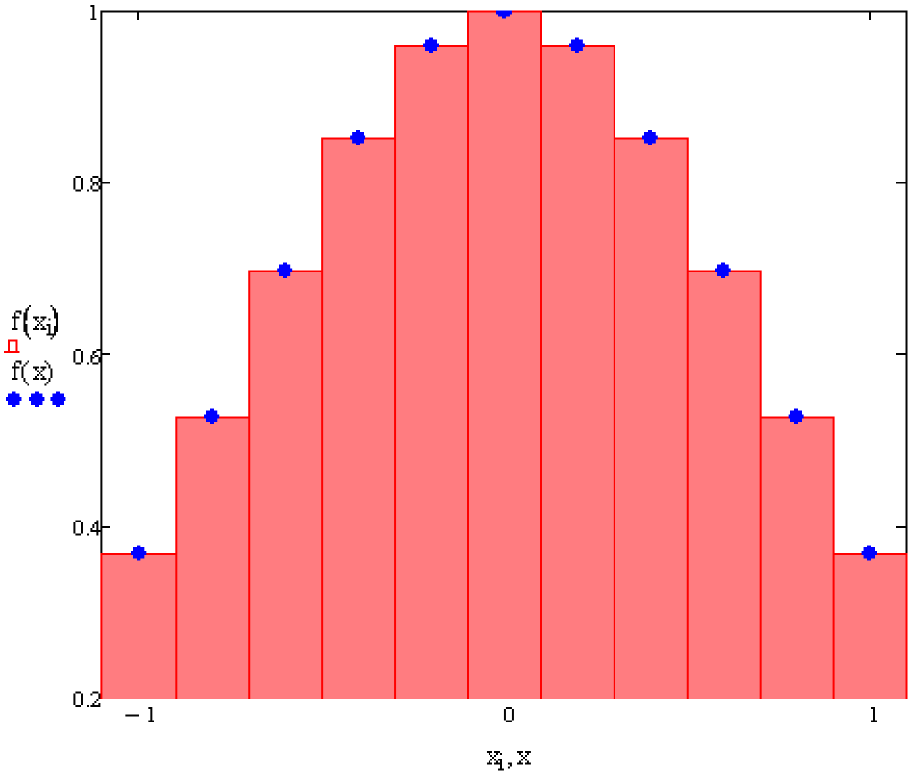
$$f(x) := \exp\left(-x^2\right)$$

$$N := 10$$

$$h := \frac{2}{N}$$

$$i := 0..N$$

$$x_i := i \cdot h - 1$$



4.4-rasm. To‘g‘ri to‘rtburchaklar algoritmi xatoliklarini baholash

To‘g‘ri to‘rtburchaklar algoritm ma`nosini, berilgan integralosti funksiyani boshqa, unga yaqinroq (ushbu holda bo‘lakli-uzluksiz) funksiya bilan almashtirish sifatida, qabul qilish mumkin, uni integrallashni analitik hisoblash oson bo‘lishligi uchun. Integrallashning aniqroq metodlarining prinsipi – aynan integralosti funksiya *f(x)*ni qandaydir unga yaqin bo‘lgan bog‘lanish *y(x)* bilan almashtirish va so‘ngra integralni shu funksiyadan hisoblashdadir. Bunda, birinchidan, *y(x)* integrali analitik usulda aniq hisoblana olinadigan bo‘lsin; ikkinchidan esa, funksiya *f(x)* esa, xatolik kam bo‘lishi uchun, *y(x)*ga mumkin qadar yaqin bo‘lishi kerak.

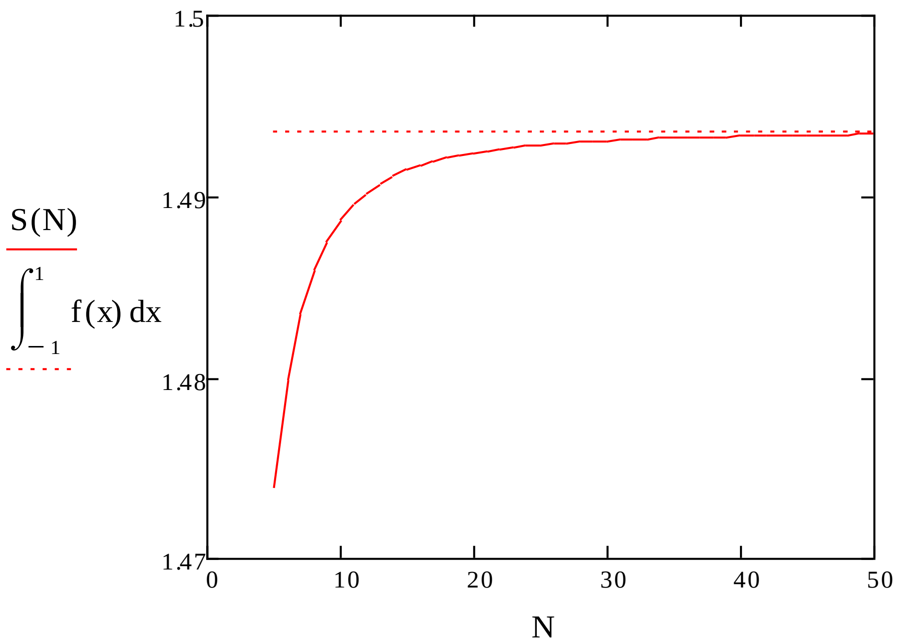
Ma`lumki, eng oddiy algoritm – bu integralosti funksiya *f(x)*ni integrallash qadamlari *N* ning har birida qandaydir *y(x)* polinom bilan interpolyatsiya qilishdadir. Interpolyatsiya qiluvchi polinomlarni, xususan, tartibi bilan farqlanuvchi polinomlarni, qurishning har xil yo‘llari taklif qilinishi mumkin. Masalan, Lagranj polinomlari integrallashning *N* elementar intervallarining har birida *n* nuqtalarda *f(x)* interpolyatsiya qilinganda quriladi. Integrallash klassik algoritmlarining oilasi bu holda Nyuton-Kotes metodi deyiladi. Eslatib o‘tamiz, *n=1* da to‘g‘ri chiziq polinom bo‘ladi va biz bunda trapetsiyalar metodiga ega bo‘lamiz; *n=2* da integrallashning har bir qadamida kvadrat parabola interpolyatsiya qiluvchi polinom bo‘ladi va biz Simpson algoritmini olamiz va h.k.

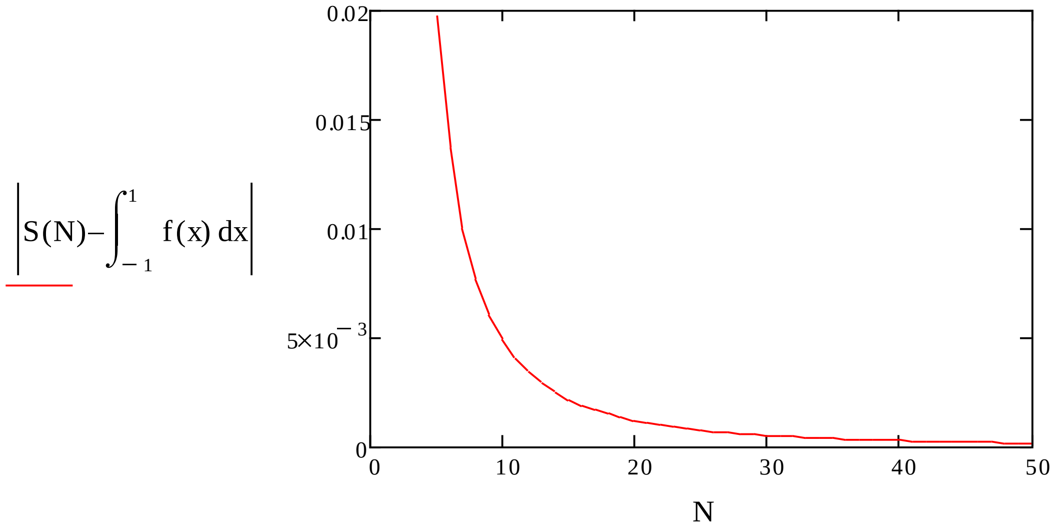
Sanab o‘tilgan an`anaviy algoritmlarning kamchiligi – kamchiliklarni miqdoriy baholashdagi qiyinchiliklardadir. Xatoliklar uchun analitik formulalar (ular, xususan, approksimatsiya metodi tartibini belgilaydi) ko‘paytuvchidan tashqari integralosti funksiyasi hosilasining (muayyan oliy tartibdagi) kattaligini tavsiflovchi qo‘shimcha ko‘paytuvchini beradi. Muayyan hisoblarda uning qiymatini baholash juda murakkab va shu sababli algoritmning summar xatoligini ham hisoblash murakkabdir. Lekin xatolik kattaligi haqidagi ma`lumotlar juda katta ahamiyatga ega va integrallash intervalini bo‘laklarga bo‘lish soni *N* ni optimal tanlash uchun ularning miqdoriy bahosiga ega bo‘lish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

$$f(x) := \exp\left(-x^2\right)$$

$$S(N) := \sum_{i=0}^{N-1} \left(f\left(i \cdot \frac{2}{N} - 1 \right) \cdot \frac{2}{N} \right)$$

$$N := 5 .. 50$$





4.5-rasm. To‘g‘ri to‘rtburchaklar algoritmi xatoliklarini baholash

Xatolikni aposterior baholash uchun, masalan, N ning bir necha qiymatlari uchun hisoblangan $s(N)$ bog‘lanishining analizini qo‘llash mumkin (4.5-rasm). Bir tarafdan, $s(N)$ muayyan darajali qonun N~K bo‘yicha o‘zgarishini, ikkinchidan, $s(N) \to i$ (integralning aniq qiymatiga intilishini) bilgan holda, metod xatoligini yetarli darajada aniq aniqlash mumkin. 4.5-rasmdagi pastki grafikda xatolikning N dan bog‘liqligi keltirilgan (ushbu holda grafik ko‘rgazmaliroq bo‘lishi uchun integralning aniq qiymatidan foydalanilgan, amaliy hollarda esa u noma`lum bo‘ladi). Mathcadda foydalanilgan, aniq integrallarni hisoblash algoritmi shunga o‘xshash protsedura bilan bog‘langan.

4.1.4. Romberg algoritmi

Romberg iteratsion algoritmining asosiy g‘oyalarini keltiramiz, u Mathcad tizimida sonli-raqamli integrallash operatsiyasini bajarishda qo‘llanadi.

- Dastlab bir nechta interpolyatsiyalovchi polinomlar quriladi, ular integrallash intervalida integral ostidagi funksiya $f(x)$ni almashtiradi. Birinchi iteratsiya sifatida polinomlar 1, 2 va 4 intervallar bo‘yicha hisoblanadi. Masalan, yuqorida qayd qilinganidek, 1 interval bo‘yicha qurilgan birinchi polinom – bu integrallash intervalining ikki chegaraviy nuqtasidan o‘tkazilgan oddiy to‘g‘ri chiziq, ikkinchisi – kvadrat parabola va h.k.
- Koeffitsiyentlari ma`lum bo‘lgan har bir polinomdan integral analitik osonlik bilan hisoblanadi. Interpolyatsiyalovchi polinomlar integrallarining ketma-ketligi quyidagicha aniqlanadi: $I_1, I_2, I_4, \ldots$ Masalan, trapetsiyalar qoidasi bo‘yicha $I_1 = (b-a)\cdot(f(a)+f(b))/2$ va h.k.
- Har xil nuqtalar soni bo‘yicha interpolyatsiya qilinganligi sababli hisoblab topilgan integrallar I_1, I_2, ... bir-biridan biroz farqlanadi. Bunda interpolyatsiya uchun qancha ko‘p nuqtadan foydalanilsa, interpolyatsion polinomning integrali izlanayotgan integral I ga shunchalik ko‘proq yaqinlashadi va nuqtalar soni cheksizga intilganda izlanayotgan kattalik haqiqiy I ga intiladi. Shuning uchun interpolyatsiya ketma-ketligi $i_1, i_2, i_4, \ldots$ elementar interval nul kenglikka erishguncha ma`lum tarzda amalga oshiriladi. Ushbu ekstrapolyatsiya natijasi j hisoblanayotgan integralga yaqinlashuv sifatida qabul qilingan.

• Yangi iteratsiyaga o‘tish integrallash intervalini yanada maydaroq bo‘laklarga bo‘lish, interpolyatsiyalovchi polinomlar ketma-ketligining yangi hadini qo‘shish va Rombergning yangi (*N*-nchi) yaqinlashuvi J^N ni hisoblash yordamida amalga oshiriladi.

• Interpolyatsiya nuqtalarining soni qanchalik ko‘p bo‘lsa, Rombergning hisoblanayotgan integralga navbatdagi yaqinlashuvi shunchalik yaqin bo‘ladi va mos ravishda oldingi iteratsiya yaqinlashuvidan shunchalik kam farqlanadi. Oxirgi ikki iteratsiya orasidagi farq $|J^N\text{-}J^{N-1}|$ xatolik TOL dan yoki TOL$|J^N|$ dan kichik bo‘lgan zahoti iteratsiya to‘xtatiladi va ekranda integrallash natijasi sifatida J^N paydo bo‘ladi.

4.2. Noaniq integral

Noaniq integral – bu bir haqiqiy o‘zgaruvchi funksiyasi f(x)ning boshlang‘ich funksiyasi F(x)dir, uning x ning har bir qiymatidagi hosilasi f(x)ga teng. Qaysidir funksiyaning boshlang‘ich funksiyasiga doimiy qo‘shilganda, yana o‘sha funksiyaning boshlang‘ichi olinadi. Demak, f(x) funksiyaning bitta boshlang‘ichi F(x) bo‘lganda, bu funksiyaning hamma boshlang‘ichlari uchun F(x)+S ko‘rinishidagi umumiy ifoda olinadi. Bu boshlang‘ichlarning umumiy ifodasi f(x) funksiyaning noaniq integrali:

$$\int f(x)dx$$

deyiladi. Integral hisoblash asosiy teoremalaridan biri – haqiqiy o‘zgaruvchining har bir uzluksiz funksiyasi f(x) noaniq integralga ega bo‘ladi.

Oldingi bo‘lim aniq integralni, ya`ni integral ostidagi funksiya grafigi va *x* o‘qi hosil qilgan yuzaga teng sonli qiymatni qidirish muammosiga bag‘ishlangan edi (4.4-rasmga qarang). Noaniq integralni topish masalasi ancha murakkabroq, chunki u shunday funksiyani qidirishga bag‘ishlanganki, uning hosilasi boshlang‘ich integral ostidagi funksiyaga teng bo‘lsin. Bu masalaning yechimi butunicha Mathcadning simvolli protsessoriga yuklatilgan.

4.2.1. Simvolli integrallash

Qaysidir funksiyani analitik integrallash uchun Calculus (Hisoblashlar) panelidagi noaniq integral simvolini kiritish lozim, paydo bo‘lgan hujjat – shablonda o‘rinto‘ldirgich to‘ldiriladi va simvolli tenglik belgisi kiritiladi. Agar amal muvaffaqqiyatli bo‘lsa, biroz hisoblash vaqti o‘tgandan keyin, kiritilgan ifodadan o‘ng tarafda uning analitik natijasi paydo bo‘ladi (listing 4.4). Agar funksiyani analitik integrallashning uddasidan chiqilmasa, Siz kiritgan ifodaning o‘zi qaytadan dublyaj qilinadi (listing 4.5).

Izoh

Simvolli integrallashda Siz kiritayotgan ifodalarda turli parametrlardan foydalanishga ruxsat etiladi. Agar ifodadan oldin Siz hech qayerda ularning qiymatlarini aniqlamagan bo‘lsangiz, (hisoblashlar muvaffaqiyatli bo‘lgan holda) Mathcadning simvolli protsessori ushbu parametrlardan integrallash natijasining analitik bog‘lanishini beradi (listing 4.4 da *a* parametrdan).

Listing 4.4. Noaniq integralni analitik hisoblash

$$\int \exp\left(-a\cdot x^2\right)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\cdot \mathrm{erf}\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot x\right)$$

Misollar

1. $$\int \exp\left(2\cdot b\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx \rightarrow x\cdot e^{2\cdot\frac{b}{x^2}} - 2\cdot b\cdot\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{[(-2)\cdot b]^{\frac{1}{2}}}\cdot \mathrm{erf}\left[\frac{[(-2)\cdot b]^{\frac{1}{2}}}{x}\right]$$

2. $$\int \exp\left(a\cdot x^3\right)dx \rightarrow \mathrm{indef\_int}\left(e^{a\cdot x^3},x\right)$$

3. $$\int \exp7\cdot |x|\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot |x|\cdot \exp7$$

4. $$\int \exp8\cdot\left(x^3\right)^2 dx \rightarrow \frac{1}{7}\cdot \exp8\cdot x^7$$

Listing 4.5. Analitik integrallashning iloji yo‘q

$$\int \exp\left(-a\cdot x^b\right)\,dx \rightarrow \int e^{-a\cdot x^b}\,dx$$

Misollar

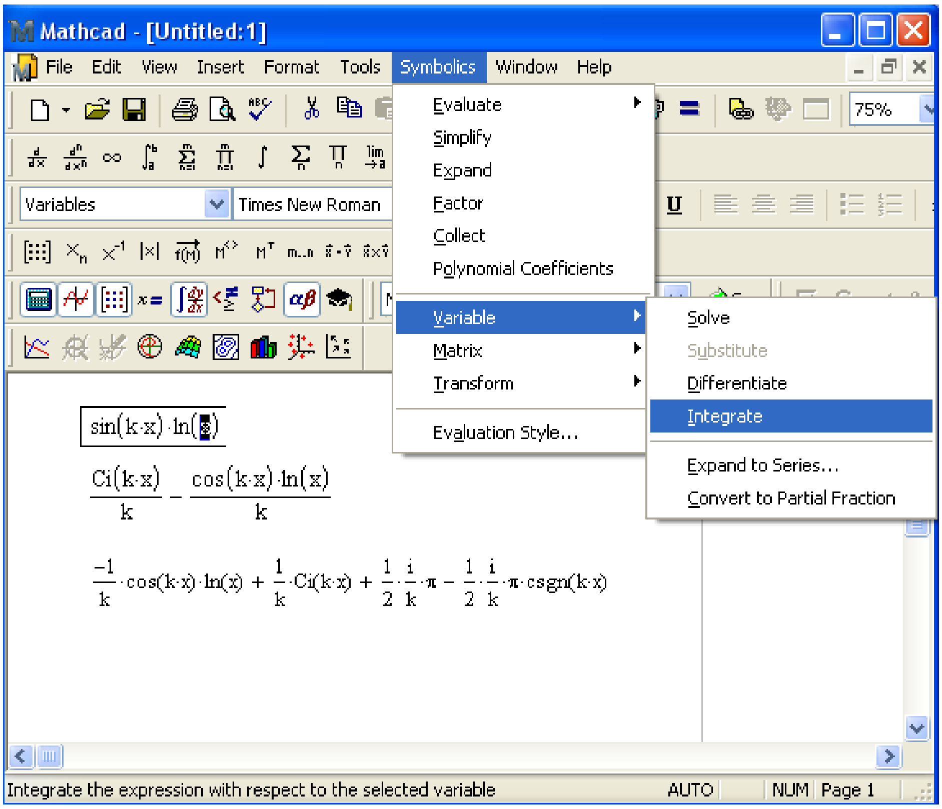
1. $$\int \exp\left(-a\cdot x^{3\cdot b}\right)dx \rightarrow \mathrm{indef\_int}\left[e^{(-a)\cdot x^{3\cdot b}},x\right]$$

2. $$\int \exp\left(a\cdot\frac{1}{x^b}\right)dx \rightarrow \mathrm{indef\_int}\left(e^{\frac{a}{x^b}},x\right)$$

3. $$\int \exp\left(-a\cdot x^b\right)dx \rightarrow \mathrm{indef\_int}\left[e^{(-a)\cdot x^b},x\right]$$

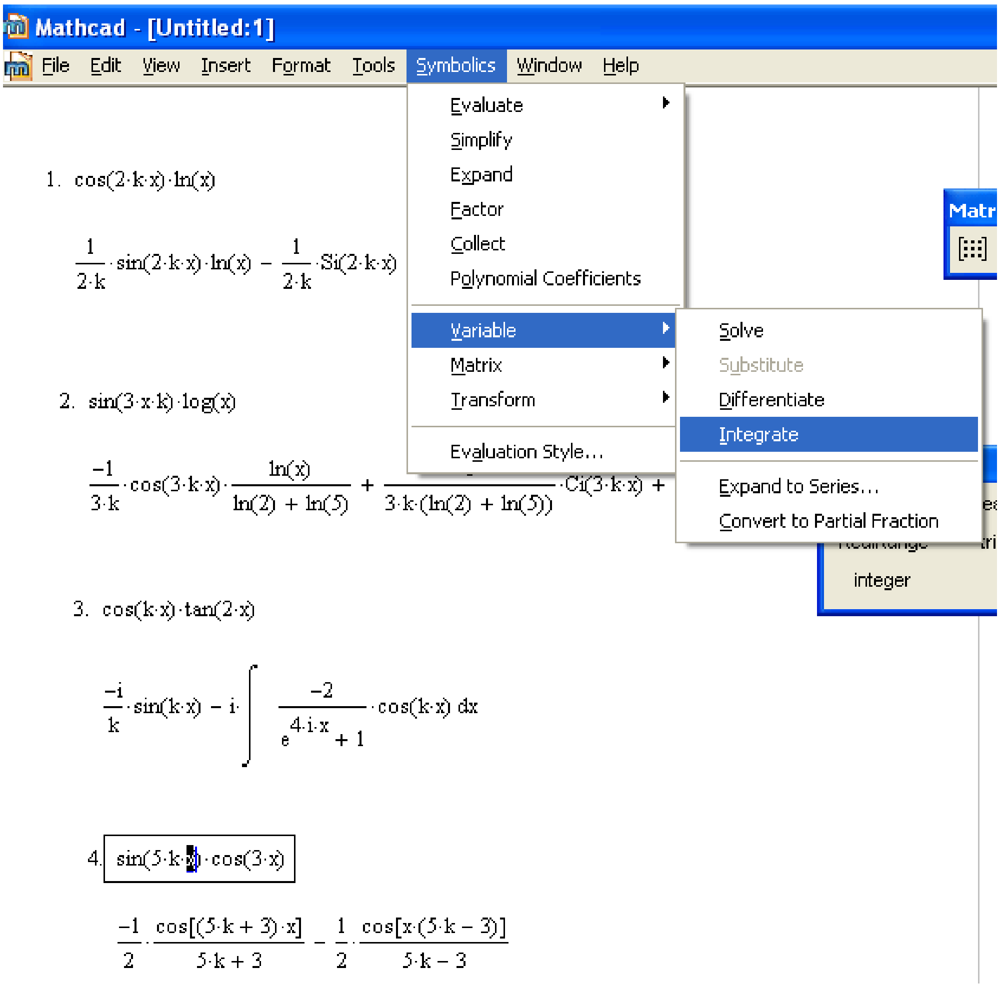
4.2.2. Menyu yordamida integrallash

Menyu yordamida qaysidir ifodadan muayyan o‘zgaruvchi bo‘yicha noaniq integralni hisoblash uchun ifodada o‘zgaruvchini ajratib ko‘rsating va Symbolics / Variable / Integrate (Simvolika / O‘zgaruvchi / Integrallash) komandasini bajaring (4.6-rasm). Hisoblangan noaniq integralning analitik taqdimoti pastroqda paydo bo‘ladi. Bunda natija tarkibida ham Mathcadga kiritib o‘rnatilgan funksiyalar va ham boshqa maxsus funksiyalar bo‘lishi mumkin, Mathcadda ularni bevosita hisoblab bo‘lmaydi, lekin simvolli protsessor ularni ba`zi analitik operatsiyalarning natijasi sifatida taqdim etishni "biladi".



4.6-rasm. Menyu yordamida o‘zgaruvchi bo‘yicha ifodani integrallash

Misollar



4.3. Maxsus turdagi integrallar

Mathcad muhitida integrallash usullari haqidagi bayonni matematikaning turli jabhalarida tez-tez uchrab turadigan ba`zi maxsus hollardagi hisoblash misollari bilan yakunlaymiz.

4.3.1. Cheksiz chegarali integrallar

Yuqorida (4.1.1-bo‘limdagi izoh 1 va listing 4.2) qayd etganimizdek, bir yoki ikkala chegarasi cheksiz bo‘lgan aniq integralni hisoblab chiqarish uchun, Calculus (Hisoblashlar) panelidan foydalanib, ishlab chiquvchilar tomonidan maxsus nazarda tutilgan cheksizlik simvolini integrallash intervallarining kerakli o‘rinto‘ldirgichlariga kiritish kifoya qiladi.

4.3.2. Uzoqlashuvchi integrallar

Agar integral uzoqlashsa (cheksizga teng bo‘lsa), Mathcadning hisoblovchi protsessori xatolik haqida xabar chiqarishi mumkin, bunda integrallash operatori, odatdagidek, qizil rang bilan ajratiladi. Xatolik ko‘pincha "Found a number with a magnitude greater than 10^{307}" (10^{307} qiymatdan katta son topildi) yoki "Can't converge to a solution" (Yechimga kelmayapti) ko‘rinishlarga ega bo‘ladi. Listing 4.6 (listingning pastki qatori) integralni sonli-raqamli hisoblashning iloji yo‘qligini namoyish qiladi. Lekin simvolli protsessor, integralning cheksiz qiymatini juda to‘g‘ri topdi va bu integralni hisoblashni uddaladi (listing 4.6 dagi yuqori qator).

Listing 4.6. Uzoqlashuvchi integralni hisoblash

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \to \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$$

Listing 4.6 masalasini cheksiz chegarali integrallarni hisoblash algoritmi (Infinite Limit)dan boshqa metod bilan sonli-raqamli yechishga harakat qilinganda noto‘g‘ri yechim olinadi (listing 4.7). *Bunda cheksizlik o‘rniga, sonli cheksizlikka biroz yetmaydigan, hisoblash protsessori uchun oddiy katta son (10^{307}) bo‘lgan, chekli son olinadi.* Shuni qayd qilamizki, Mathcad algoritmni avtomatik tanlash rejimida (AutoSelect) cheksiz chegarali integrallar uchun aynan Infinite Limit algoritmini taklif qiladi.

Listing 4.7. Yomon tanlangan sonli-raqamli algoritm (bu holda, adaptivli) uzoqlashuvchi integralni noto‘g‘ri topadi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 6.325 \times 10^{153}$$

4.3.3. O‘zgaruvchi chegarali integral

Simvolli protsessor integrallarni, jumladan, parametrlarga bog‘liq integrallarni, analitik hisoblashning ajoyib imkoniyatlarini taklif qiladi. O‘zgaruvchi chegarali (yuqorigi yoki pastki) integralni hisoblash alohida ahamiyatga ega, buning uchun integrallash chegararidan biri o‘zgaruvchi bo‘ladi, u albatta integrallash o‘zgaruvchisidan o‘zgacha bo‘ladi (listing 4.8). Tabiiyki, simvolli protsessor nuqtayi-nazaridan, o‘zgaruvchi chegarali integral – qo‘shimcha parametrga bog‘liq bo‘lgan oddiy aniq integraldir.

Listing 4.8. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan integralni analitik hisoblash

$$\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \rightarrow 2\cdot z^{\frac{1}{2}}$$

Misollar

1. $\int_0^z \frac{1}{x^2}\,dx \rightarrow \infty$

3. $\int_0^z \sqrt[3]{\frac{x}{6}}\,dx \rightarrow \frac{1}{8}\cdot z^{\frac{4}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}$

2. $\int_0^z \sqrt{3\cdot x}\,dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot z^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

4. $\int_0^z e^{3x}\,dx \rightarrow \frac{1}{3}\cdot e^{3\cdot z} - \frac{1}{3}$

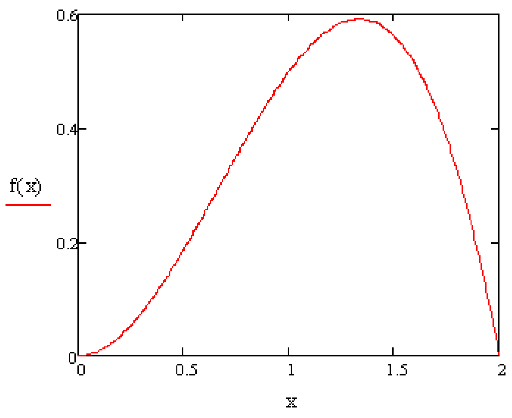
4.3.4. Misol: egri chiziq yoyining uzunligi

Xulosa qilib Mathcad hisoblash protsessoridan qaysidir funksiya *f(x)* bilan berilgan egri chiziq bo‘lagining uzunligini hisoblash misolini keltiramiz; chegara – funksiya argumentlari *a* va *b* larning ikki qiymatlari oralig‘idir (4.8-rasm). Matematik analizning ushbu sodda masalasining yechimi listing 4.11 da keltirilgan, listingda yoy uzunligi hisoblanadigan formula uchinchi (oxirgi) qatorda keltirilgan. E`tibor bering, natijani olish uchun ham sonli-raqamli integrallash va ham differensiallash operatsiyalarini qo‘llash zarur.

$$f(x) := x^2 - \frac{x^3}{2}$$

$$a := 0 \qquad b := 2$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx = 2.42$$



4.8-rasm. Funksiya grafigi qaysidir uzunlikdagi yoyni aniqlaydi (listing 4.11 davomi)

Listing 4.11. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash

$$f(x) := x^2 - \frac{x^3}{2}$$

$$a := 0 \qquad b := 2$$

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx = 2.42$$

Misollar

1. $f(x) := 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 14$

$a := 1 \qquad b := 2$

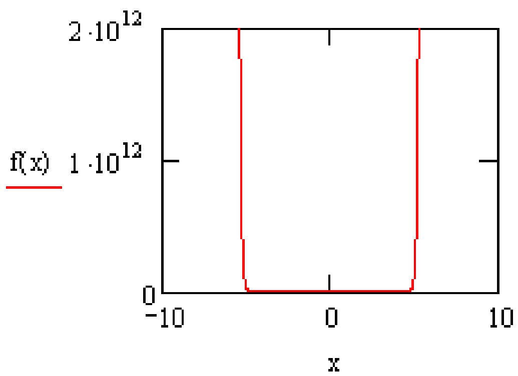
$$\int_a^b \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)}}\,dx = -0.686$$

2. $f(x) := 3\cdot x^2 + e^{x^2}$

$a := 1 \qquad b := 0$

$$\int_b^a \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx = 4.915$$

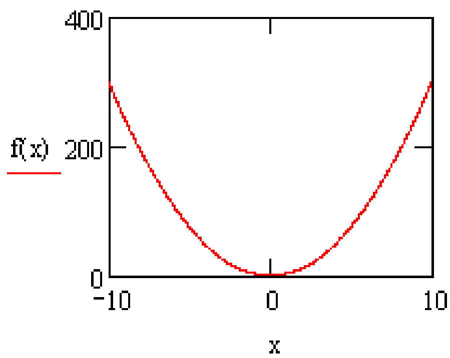
3. $$\int_b^a \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2 + \frac{1}{x^2}}\,dx = -8.484 \times 10^{-3}$$



4. $f(x) := \sin\left(x^4\right) + e^{x^2}$

$a := 1 \qquad b := 2$

$$\int_b^a \sqrt{\frac{d}{dx}f(x)}\,dx = -6.14$$



4.4. Furye integrali

Endi aniq turdagi integrallarni (analitik yoki sonli) hisoblash bilan bog‘liq bo‘lgan hisoblash matematikasining xarakterli muammolariga murojaat qilamiz. Bu masalalar ma`lumotlarga ishlov berish algoritmlari bilan chambarchas bog‘langan. Bunday integrallar hisoblashlarda keng qo‘llanilgani sababli, ular uchun maxsus algoritmlar ishlab chiqilgan (4.1.4-bo‘limga qarang), ulardan ba`zilari Mathcad arsenalida hisoblash protsessorining kiritib o‘rnatilgan funksiyalari va simvolli protsessorning mos operatsiyalari shaklida mavjud.

Eng keng tarqalgan integral o‘zgartiruvchi – bu Furye o‘zgartirishlaridir, u *f(x)* funksiyani garmonik funksiyalar bo‘yicha integral ko‘rinishida taqdim etadi – u Furye integrali deyiladi:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \exp(-iwx)\,dx$$

F(w) funksiya Furye o‘zgartirish yoki dastlabki *f(x)* funksiyaning Furye-spektri deb ham ataladi. Uning argumenti *w* – *f(x)* mos garmonik tashkil etuvchisining chastotasi degan ma`noga ega. Furye o‘zgartishini ifodalovchi funksiya, garchi *f(x)* haqiqiy bo‘lsa ham, kompleksdir.

4.4.1. Funksiyalarning integral o‘zgartuvchilari haqida

Umuman qaraganda, integral o‘zgartishlar ta`rif bo‘yicha qaysidir funksiya *f(x)*ga boshqa argumentdan bo‘lgan boshqa funksiya *F(w)*ni mos qilib qo‘yadi. Bu moslik *f(x)–»F(w)* integral bog‘lanish ko‘rinishida beriladi. Mathcadning simvolli protsessori funksiyalarning integral o‘zgartirishlarining uch turi – Furye o‘zgartirishi, Laplas o‘zgartirishi va *Z*-o‘zgartirishlarni amalga oshirish imkonini beradi. To‘g‘ri o‘zgartirishlar bilan bir qatorda ushbu uchta teskari o‘zgartirishlarni, ya`ni

F(w)–>f(x),

amalga oshirish imkoniyati mavjud.

Analitik hamma integral o‘zgartishlar simvolli integrallashga o‘xshash bajariladi (4.2.2-bo‘limga qarang). Ifoda o‘zgarishlarini hisoblash uchun, qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha o‘zgartishlar amalga oshirilsa, o‘sha ajratib ko‘rsatiladi, so‘ngra menyuning mos punkti tanlanadi. Simvolli chiqarish operatoridan foydalanib bajariladigan o‘zgartishlar mos tayanch so‘zlardan biri bilan amalga oshiriladi, bu so‘zdan keyin esa zarur bo‘lgan o‘zgaruvchining nomi ko‘rsatilishi talab qilinadi.

Uchta integral o‘zgartishlardan har biriga simvolli hisoblash misollarini keltiramiz, hamda Furye- va veyvlet- o‘zgartishlarining sonli-raqamli metodlari haqida bayon qilamiz.

4.4.2. Furye analitik o‘zgartishlari

Menyu yordamida Furye o‘zgartishlarini analitik hisoblash 4.9-rasmda ko‘rsatilgan, buning uchun Symbolics / Transform / Fourier (Simvolika / O‘zgartirish / Furye) menyu komandasidan foydalaniladi. Listing 4.12 da *fourier* tayanch so‘zi va simvolli chiqarish operatori —» ni qo‘llab Furye chiziqli almashtirishlarni hisoblashning ikkita misoli keltirilgan. Listing 4.13 Furye teskari o‘zgartishlarni qo‘llash va bundan keyin olingan ifodani to‘g‘ri o‘zgartishni illyustratsiya qiladi, natijada boshlang‘ich funksiya olinadi.

Diqqat!

Simvolli o‘zgartishlar natijalari tarkibiga maxsus funksiyalarni kiritishi mumkin, ular Mathcadning kiritib o‘rnatilgan funksiyalari emas, shu sababli ulardan keyinchalik hisoblashlarda foydalanib bo‘lmaydi. Ularning nomini Mathcad matnli axborot sifatida qabul qiladi.

Listing 4.12. Furye to‘g‘ri o‘zgartishlariga misollar

$$\cos\left(k^2\cdot x\right)\ \text{fourier}, x\ \rightarrow \pi\cdot\Delta\left(\omega - k^2\right) + \pi\cdot\Delta\left(\omega + k^2\right)$$

$$\cos\left(k^2\cdot x\right)\ \text{fourier}, k\ \rightarrow \left(\frac{\pi}{|x|}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{-1}{4}\cdot\frac{\omega^2}{|x|}}$$

Misollar

1. $\sin\left(k^2\cdot 2\cdot x\right)$ fourier,x $\rightarrow (-i)\cdot\pi\cdot\Delta\left(\omega - 2\cdot k^2\right) + i\cdot\pi\cdot\Delta\left(\omega + 2\cdot k^2\right)$

$\sin\left(k^2\cdot 2\cdot x\right)$ fourier,k $\rightarrow 0$

2. $e^x + k$ fourier,x $\rightarrow 2\cdot\pi\cdot\Delta(\omega + i) + 2\cdot k\cdot\pi\cdot\Delta(\omega)$

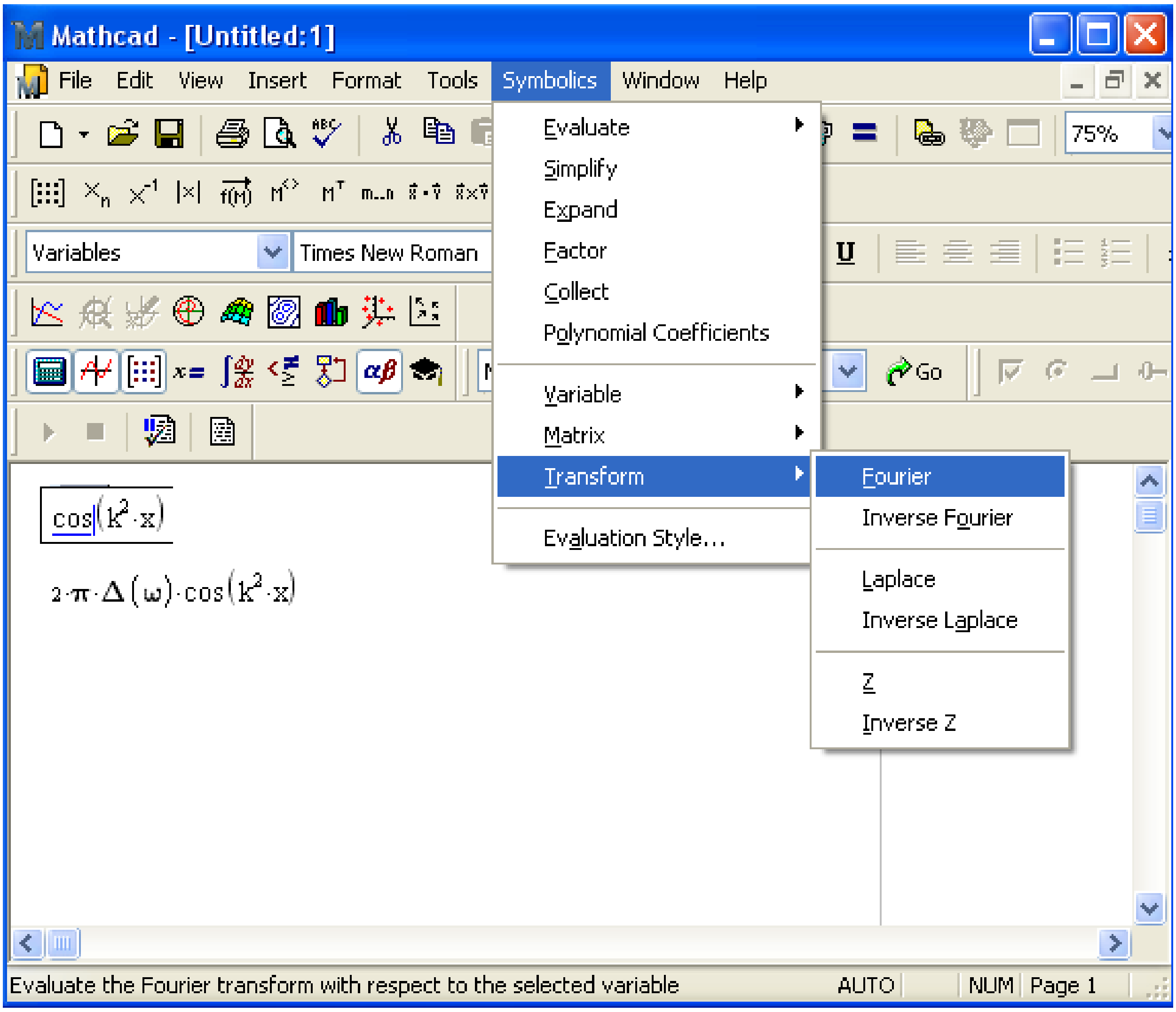
$e^x + k$ fourier,k $\rightarrow 2\cdot e^x\cdot\pi\cdot\Delta(\omega) + 2\cdot i\cdot\pi\cdot\Delta(1,\omega)$

3. $\tan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$ fourier,x $\rightarrow \text{fourier}\left(\tan\left(\frac{1}{x}\right),x,\omega\right) - 2\cdot\pi\cdot\Delta(2,\omega)$

$\tan\left(\frac{1}{k}\right) + x^2$ fourier,k $\rightarrow \text{fourier}\left(\tan\left(\frac{1}{k}\right),k,\omega\right) + 2\cdot x^2\cdot\pi\cdot\Delta(\omega)$

4. $\log(x) + \frac{1}{k^3}$ fourier,x $\rightarrow \frac{1}{\ln(10)}\cdot\pi\cdot\frac{\Phi(-\omega) - \Phi(\omega)}{\omega} + \frac{2}{k^3}\cdot\pi\cdot\Delta(\omega)$

$\log(x) + \frac{1}{k^3}$ fourier,k $\rightarrow 2\cdot\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\cdot\pi\cdot\Delta(\omega) - \frac{1}{2}\cdot i\cdot\pi\cdot\omega^2\cdot(\Phi(-\omega) - \Phi(\omega))$



4.9-rasm. Menyu yordamida Furye-o‘zgartishlarni hisoblash

Listing 4.13. Furye teskari va to‘g‘ri o‘zgartishlari

$$\frac{1}{\omega} \text{ invfourier}, \omega \rightarrow \frac{1}{2} \cdot i \cdot (\Phi(t) - \Phi(-t))$$

$$\frac{-1}{2} \cdot i \cdot (-\Phi(t) + \Phi(-t)) \text{ fourier}, t \rightarrow \frac{1}{\omega}$$

Misollar

1. $$\frac{1}{\pi} \text{ invfourier}, \pi \rightarrow \frac{1}{2} \cdot i \cdot (\Phi(t) - \Phi(-t))$$

$$\frac{-1}{2} \cdot i \cdot (-\Phi(t) - \Phi(-t)) \text{ fourier}, t \rightarrow i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega)$$

2. $$\omega \text{ invfourier}, \omega \rightarrow (-i) \cdot \Delta(1, t)$$

$$(-1) \cdot \Delta(1, t) \text{ fourier}, t \rightarrow (-i) \cdot \omega$$

3. $$e^{\pi} + 2 \cdot x \text{ invfourier}, \pi \rightarrow \Delta(t - i) + 2 \cdot x \cdot \Delta(t)$$

$$\Delta(t - 1) + 2 \cdot x \cdot \Delta(t) \text{ fourier}, t \rightarrow e^{(-i) \cdot \omega} + 2 \cdot x$$

4. $$\sqrt{e^{\omega}} \text{ invfourier}, \omega \rightarrow \text{invfourier}\left[\left(e^{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}, \omega, t\right]$$

$$\left(e^{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ fourier}, t \rightarrow 2 \cdot \left(e^{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \pi \cdot \Delta(\omega\omega)$$

4.4.3. Furye diskret o‘zgartishi

Oldingi bo‘limda Mathcad simvolli protsessorining, formula shaklida berilgan Furye funksiyasini analitik o‘zgartishlar qilishga, imkon beruvchi imkoniyatlari haqida bayon qilindi. Ammo hisobiy matematika masalalarining ko‘p qismi yoki jadval ko‘rinishida berilgan funksiyalarni (masalan, qandaydir eksperimentning natijalari) yoki analitik integrallashning iloji bo‘lmagan funksiyalar uchun Furye integrallarini hisoblash bilan bog‘liq. Bu holda simvolli o‘zgartishlar o‘rniga integrallashning sonli-raqamli metodlarini qo‘llashga to‘g‘ri keladi, bu metod integral ostidagi funksiyani diskretlash bilan bog‘liq, shu sababli *diskretlash Furye o‘zgartuvchisi* deb ataladi.

Mathcad sonli-raqamli protsessorida Furye tezkor o‘zgartishi (быстрое преобразование Фурье – BPF) algoritmi yordamida amalga oshirilgan. Bu algoritm Mathcadning bir nechta kiritib o‘rnatilgan funksiyalarida realizatsiya qilingan, ular bir-biridan faqat normirovkalar bilan farqlanadi:

- fft(y) – Furye to‘g‘ri o‘zgartishi vektori;
- FFT (y) – Furye to‘g‘ri o‘zgartishi vektori boshqa normirovkada;
- ifft (w) – Furye teskari o‘zgartishi vektori;

- IFFT (w) – Furye teskari o‘zgartishi vektori boshqa normirovkada:
  - y – haqiqiy ma`lumotlar vektori, ular argumentning teng oraliqlarda olingan qiymatlaridir;
  - w – Furye-spektr haqiqiy ma`lumotlari vektori, ular chastotaning teng oraliqlarda olingan qiymatlaridir.

Diqqat!

Furye to‘g‘ri o‘zgartishi argumenti, ya`ni vektor *y* $2^n$ ta elementga ega bo‘lishi kerak (*n* – butun son). $1+2^{n-1}$ elementli vektor natija bo‘ladi. Va aksincha, Furye teskari o‘zgartish argumenti $1+2^{n-1}$ elementga ega bo‘lishi kerak, $2^n$ elementli vektor uning natijasi bo‘ladi. Agar ma`lumotlar (berilganlar) soni 2 darajasiga mos kelmasa, yetishmayotgan elementlar o‘rni nullar bilan to‘ldirilishi lozim.

Listing 4.14 da modelli funksiya *f(x)* uchun Furye-spektr hisobi misoli keltirilgan, u har xil amplitudali ikkita sinusoidaning summasidir (4.10-rasmdagi yuqoridagi grafik). Hisob *N=128* nuqta bo‘yicha bajariladi, bunda ma`lumotlarni diskretlash intervali y_i *h* ga teng deb qabul qilishadi. Listingning oxiridan bitta oldingi qatorda chastota *W* ning mos qiymatlari to‘g‘ri (корректно) aniqlanadi, oxirgi qatorda esa kiritib o‘rnatilgan funksiya FFT qo‘llaniladi. Furye-spektrning olingan grafigi 4.10-rasmda (pastda) ko‘rsatilgan. E`tibor bering, hisob natijalari uning moduli ko‘rinishida taqdim etilmoqda, chunki spektrning o‘zi, yuqorida qayd etganimizdek, kompleksdir. Spektrning olingan amplitudalari va cho‘qqilari joyini listing boshlanishidagi sinusoida ta`rifi bilan solishtirish foydadan holi emas.

Listing 4.14. Modelli signalni Furye diskret o‘zgartishi (BPF algoritmi)

$f(x) := 0.5\sin(2\pi\cdot 0.1\cdot x) + 1\cdot\sin(2\pi\cdot 0.5x)$

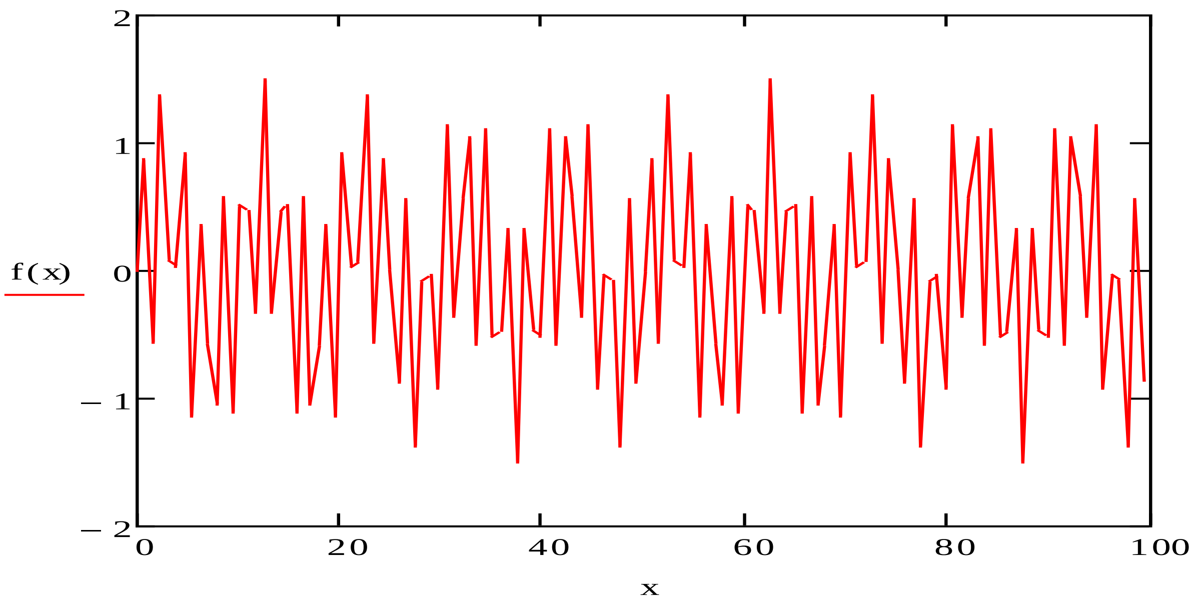
$L := 100$

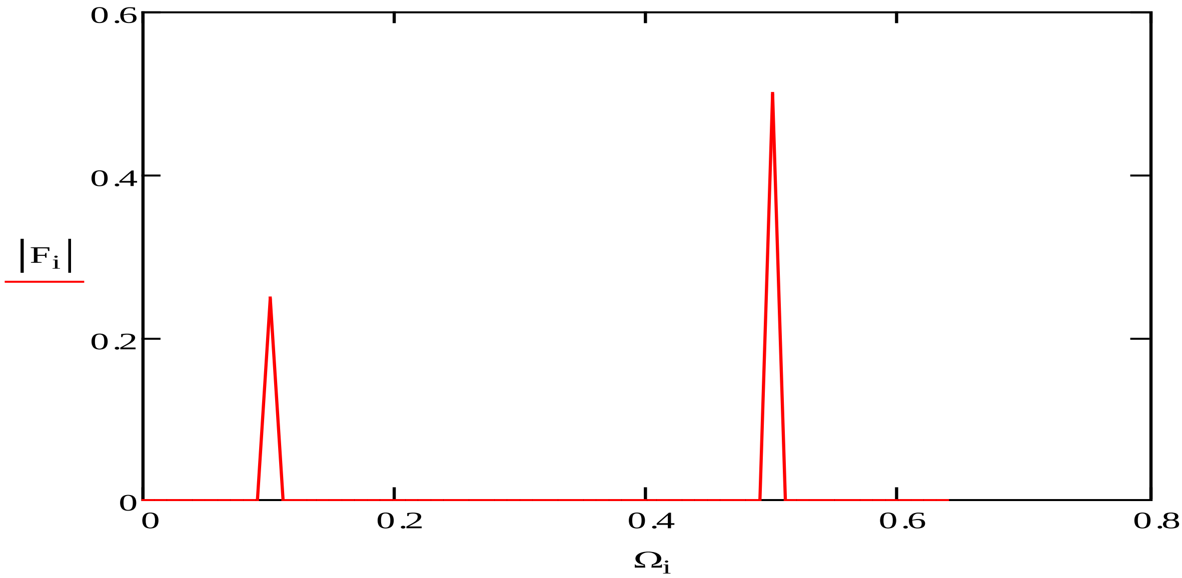
$N := 128 \quad h := \frac{L}{N}$

$i := 0..N-1 \quad x_i := i\cdot h$

$y_i := f(x_i) \quad \Omega_i := \frac{i}{L}$

$F := CFFT(y)$





4.10-rasm. Modelli funksiya va uning Furye o‘zgartishi (listing 4.14 davomi)

Misollar

$f(x) := 1\cdot\sin(2\pi\cdot 0.01\cdot x) + 2\cdot\sin(2\pi\cdot 0.1\cdot x)$

$L := 100$

$N := 128$

$h := \frac{L}{N}$

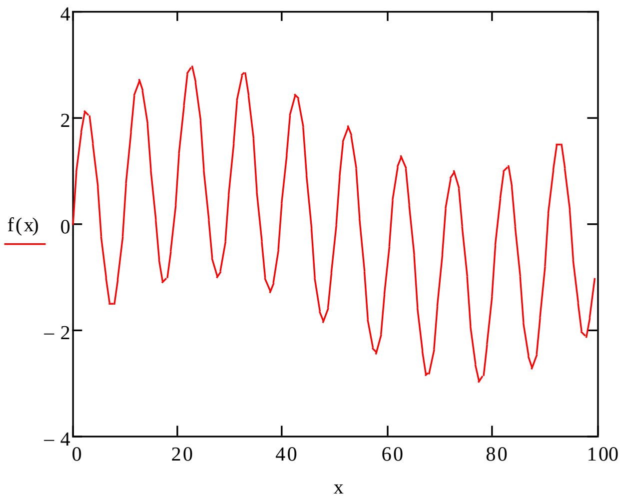
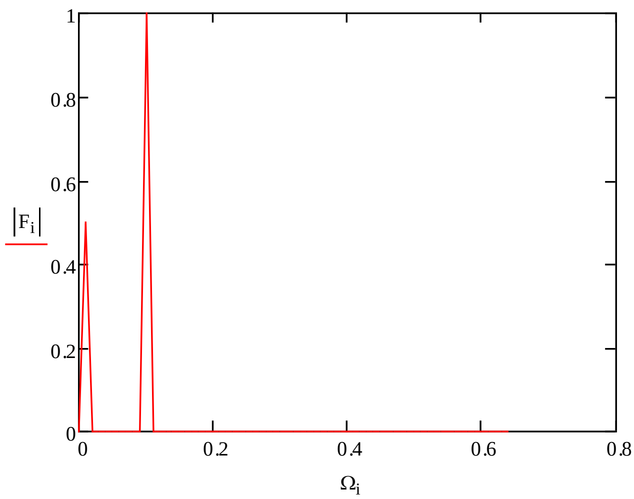
$i := 0..N-1$

$x_i := i\cdot h$

$y_i := f(x_i)$

$\Omega_i := \frac{i}{L}$

$F := FFT(y)$

$f(x) := \sin(2\pi\cdot 0.1\cdot x)^2 + \sin(2\pi\cdot 0.01\cdot x)$

$L := 100$

$N := 128$

$h := \frac{L}{N}$

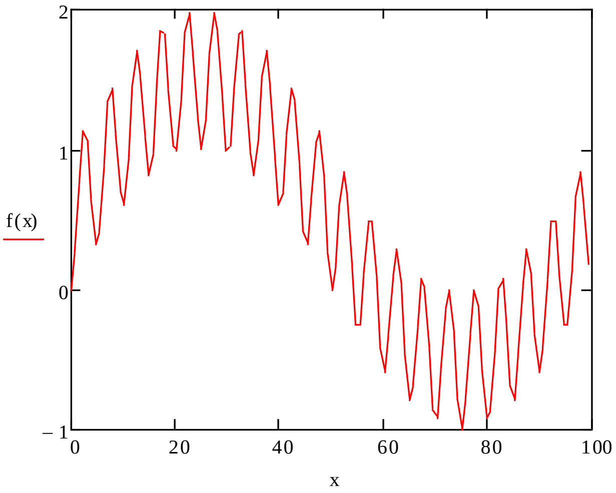
$i := 0..N-1$

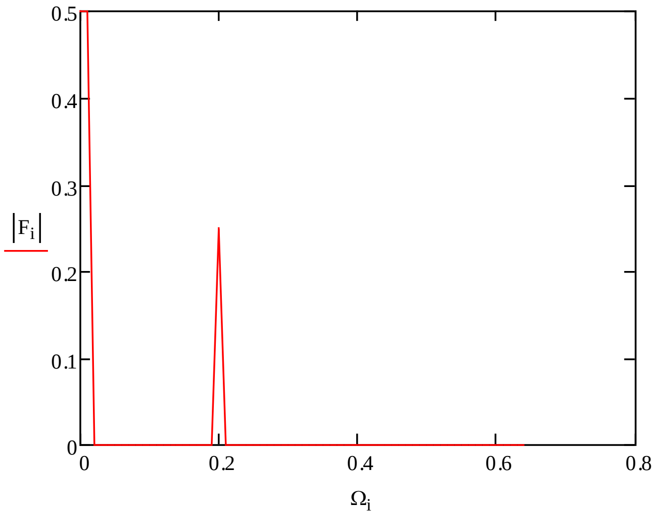
$x_i := i \cdot h$

$y_i := f(x_i)$

$\Omega_i := \frac{i}{L}$

$F := FFT(y)$





$f(x) := \cos(2\pi \cdot 0.1x) + 5\cos(2\pi \cdot 0.01 \cdot x)$

$L := 100$

$N := 128$

$h := \frac{L}{N}$

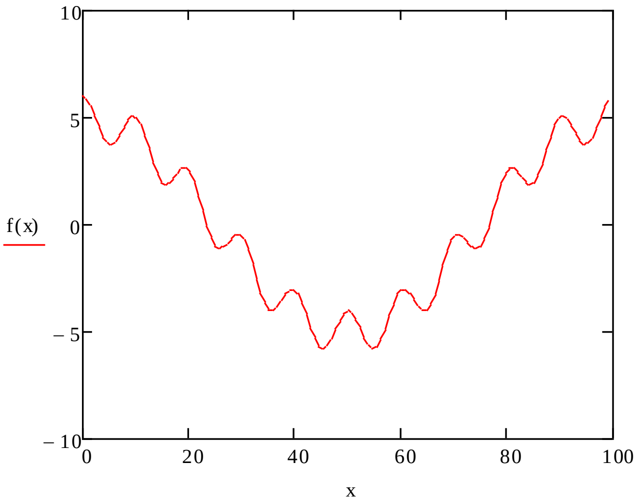
$i := 0..N-1$

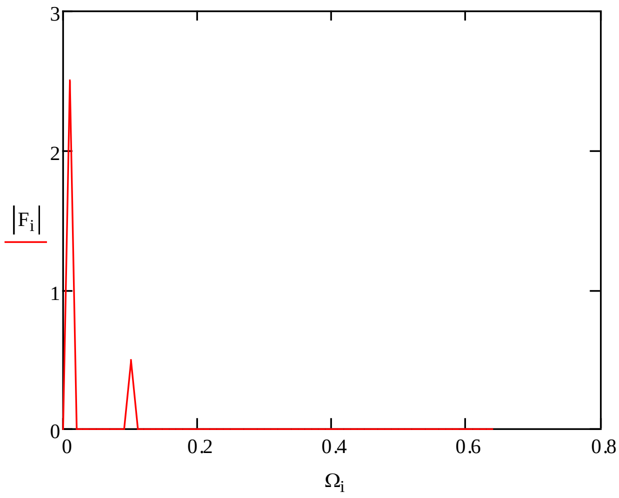
$x_i := i \cdot h$

$y_i := f(x_i)$

$\Omega_i := \frac{i}{L}$

$F := FFT(y)$





$f(x) := 2\cos(2\pi \cdot 0.1x) + x \cdot 0.1$

$L := 100$

$N := 128$

$h := \frac{L}{N}$

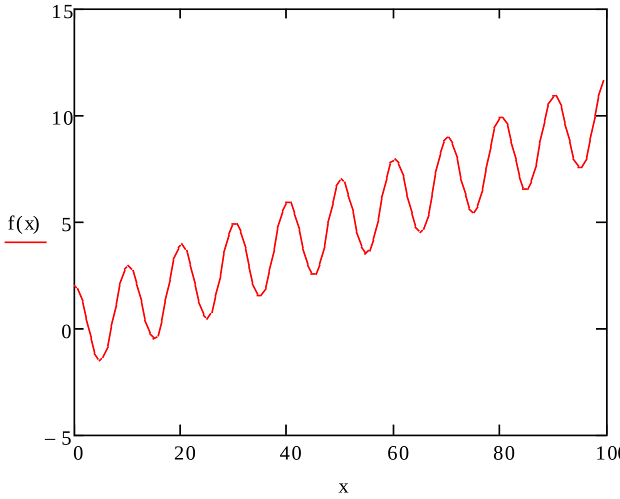
$i := 0..N-1$

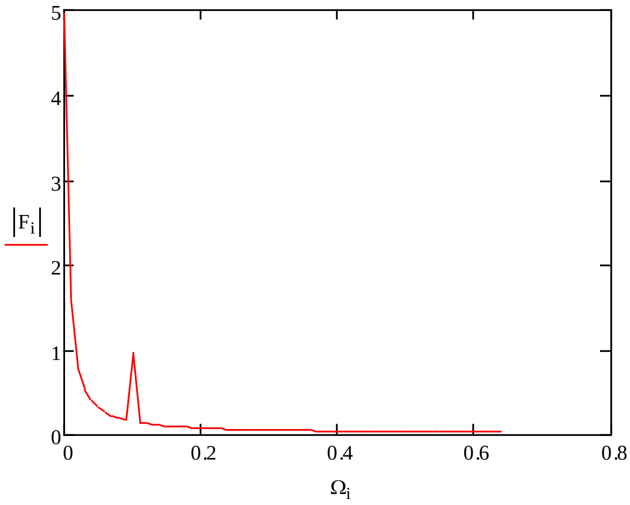
$$x_i := i \cdot h$$

$$y_i := f(x_i)$$

$$\Omega_i := \frac{i}{L}$$

$$F := FFT(y)$$



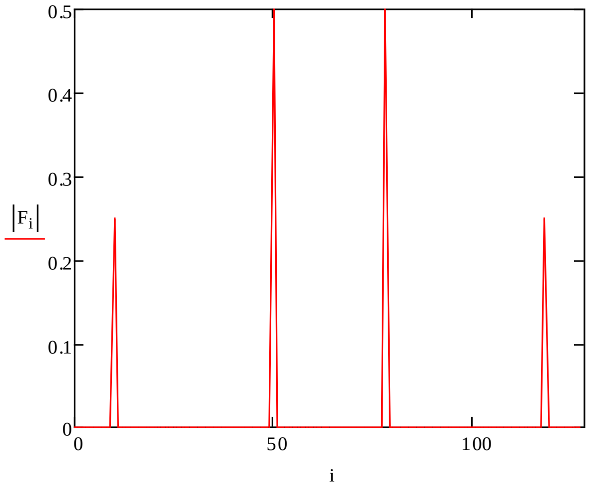


4.4.4. Kompleks ma`lumotlarni Furye o‘zgartishi

Kompleks ma`lumotlar uchun Furye tez o‘zgartishi algoritmi mos funksiyalarga kiritib o‘rnatilgan, ularning nomiga litera "s" kiradi:

- cfft(y) – Furye to‘g‘ri kompleks o‘zgartuvchisi vektori boshqa normirovkada;
- CFFT(y) – Furye to‘g‘ri kompleks o‘zgartuvchisi vektori boshqa normirovkada;
- icfft(y) – Furye teskari kompleks o‘zgartuvchisi vektori;
- ICFFT(w) – Furye teskari kompleks o‘zgartuvchisi vektori boshqa normirovkada:
  - y – vektor ma`lumotlari, teng oraliqlarda olingan argument qiymatlari;
  - w – Furye-spektr ma`lumotlari vektori, teng oraliqlarda olingan chastota qiymatlari.

Furye haqiqiy o‘zgartishi funksiyalari quyidagi faktdan foydalanishadi: ma`lumotlar haqiqiy bo‘lganda spektr nulga nisbatan simmetrik bo‘ladi va uning faqat yarmi chiqariladi (4.4.3-bo‘limga qarang). Shuning uchun 128 haqiqiy ma`lumotlar bo‘yicha Furye spektrining atigi 65 nuqtasi olindi. Agar o‘sha ma`lumotlarga Furye kompleks o‘zgartuvchisi funksiyasi qo‘llanilsa (4.11-rasm), 128 elementdan vektor hosil bo‘ladi. 4.10- va 4.11-rasmlarni solishtirib, haqiqiy va kompleks Furye-o‘zgartishlari natijalari orasidagi muvofiqlikni oydinlashtirish mumkin.



4.11-rasm. Furye kompleks o‘zgartishi (listing 4.14 davomi)

4.4.5. Furye ikki o‘lchamli o‘zgartishlari

Mathcadda nafaqat *f(x)* funksiyaning bir o‘lchamli Furye o‘zgartishlarini, balki ikki o‘zgaruvchili funksiya *f(x,y)*ning ikki o‘lchamli o‘zgartishlarini hisoblash imkoniyati mavjud. Boshqacha aytganda, kompleksli diskretli Furye o‘zgartishlarining kiritib o‘rnatilgan funksiyalarini nafaqat bir o‘lchamli, balki ikki o‘lchamli massivlar, ya`ni matritsalarga ham qo‘llashga ruxsat etiladi. Bunga mos misol listing 4.15 da va 4.12-rasmda boshlang‘ich ma`lumotlar sirtining grafigi (chapdagi grafik) va hisoblangan ikki o‘lchamli Furye-spektr grafigi (o‘ngdagi grafik) ko‘rinishida keltirilgan.

Listing 4.15. Furye ikki o‘lchamli diskretli o‘zgartishi

$N := 32$

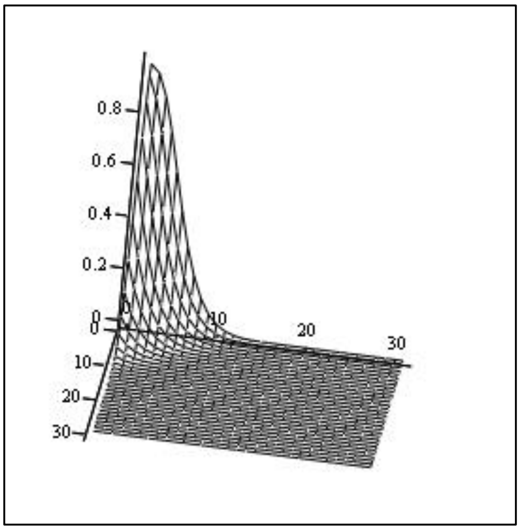
$i := 0 .. N-1$

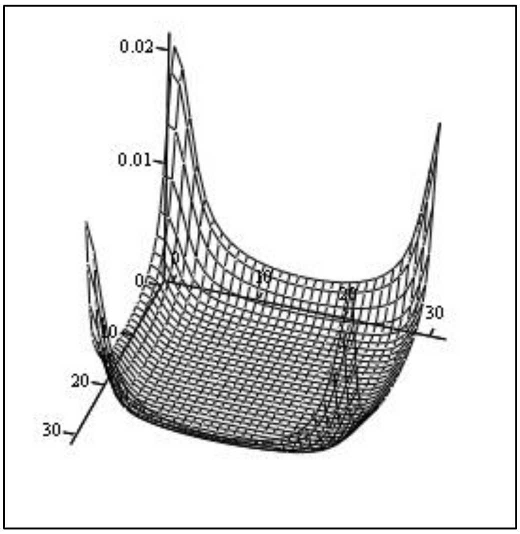
$j := 0 .. N-1$

$Y_{i,j} := \exp\left[\frac{-(i+j)^2}{N}\right]$

$F := CFFT(Y)$

$F_{i,j} := \left|F_{i,j}\right|$





Y F

4.12-rasm. Ikki o‘zgaruvchi funksiyasi va uning ikki o‘lchamli Furye o‘zgartishi (listing 4.15 davomi)

Misollar

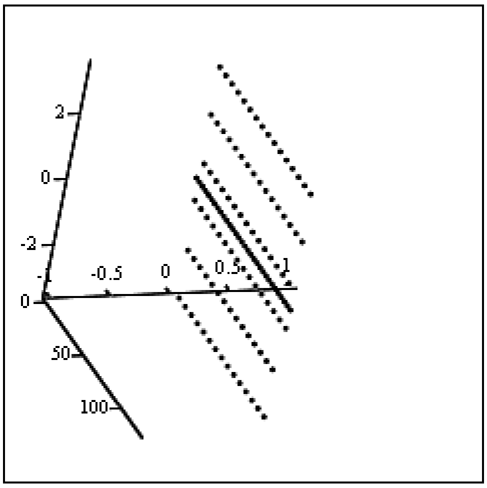
$N := 25$

$i := 0 .. N-1 \qquad j := 0 .. N-1$

$Y_{i,j} := \exp\left[\frac{(i+j)^2}{N+25}\right]$

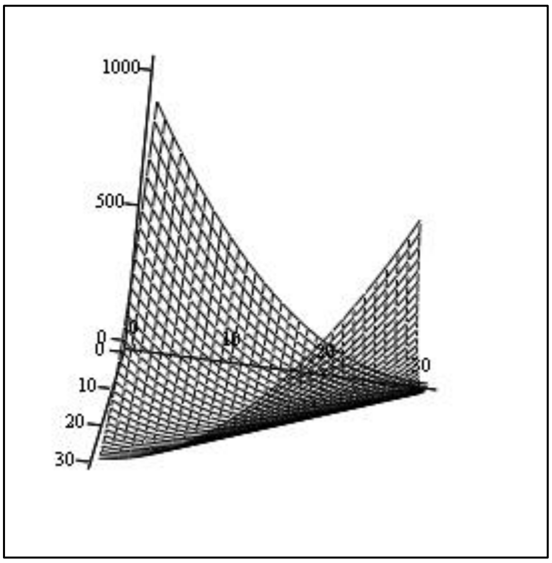
$F := CFFT(Y)$

$F_{i,j} := \left|F_{i,j}\right|$

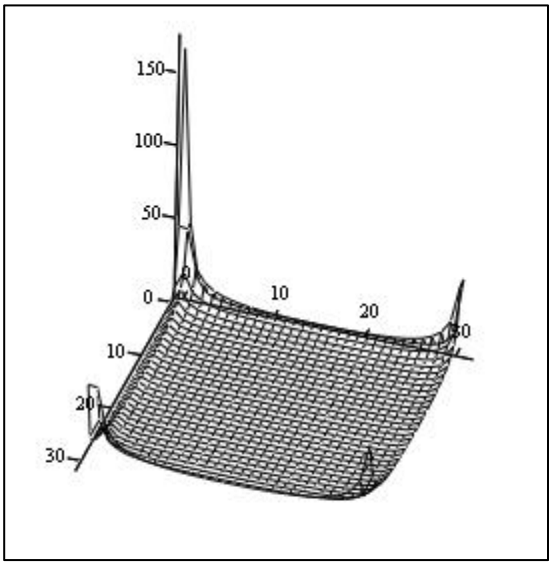


Y

$N := 32$
$i := 0 .. N-1$
$j := 0 .. N-1$
$Y_{i,j} := (i + j - 30)^2$
$F := CFFT(Y)$
$F_{i,j} := \left|F_{i,j}\right|$

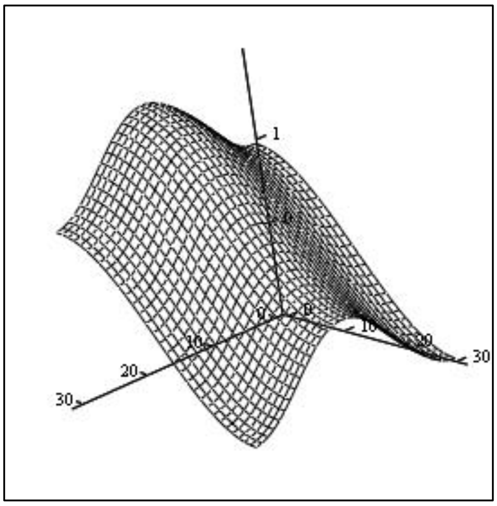


Y

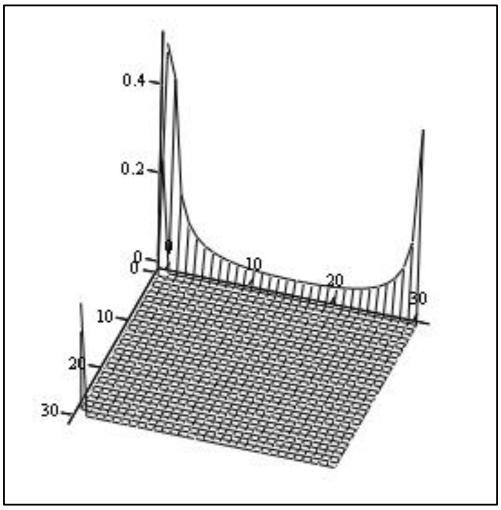


F

$N := 32$
$i := 0 .. N-1$
$j := 0 .. N-1$
$Y_{i,j} := \sin\left(\frac{i}{10}\right)^2 + \cos\left(\frac{j}{10}\right)$
$F := CFFT(Y)$
$F_{i,j} := \left|F_{i,j}\right|$



Y



F

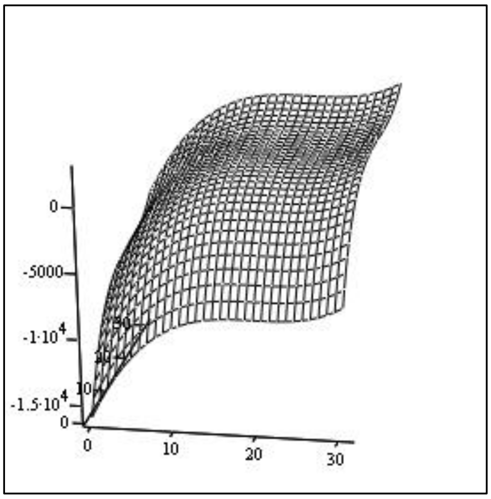
$N := 32$
$i := 0 .. N-1$

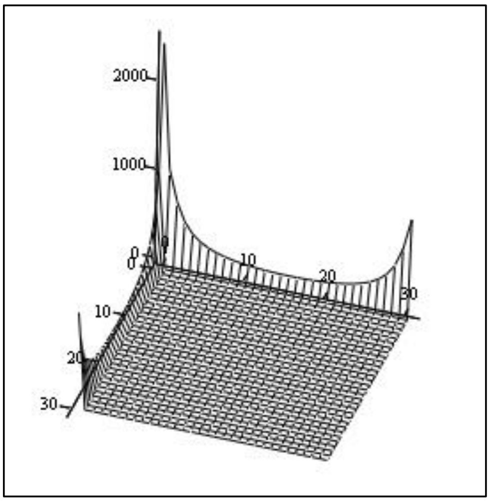
$j := 0 .. \; N-1$

$Y_{i,j} := -(20-i)^3 - (20-j)^3$

$F := CFFT(Y)$

$F_{i,j} := \left|F_{i,j}\right|$





Y F

4.5. Boshqa integral o‘zgartishlar

Integrallashga bag‘ishlangan bobning oxirida Fure integralidan tashqari keng qo‘llaniladigan yana uchta o‘zgartishlarni ko‘rib chiqamiz. Laplas o‘zgartishlari va Z-o‘zgartish hisobiy matematikaning amaliy masalalarida kamroq uchraydi, lekin veyvlet-o‘zgartish (uning nazariyasi nisbatan yaqinda paydo bo‘ldi), ma`lumotlarga ishlov berish muammolarida liderlik pozitsiyalariga asta-sekin chiqib bormoqda.

4.5.1. Laplas o‘zgartishlari

Laplas o‘zgartishi deb *f(x)*ning quyidagi ko‘rinishdagi integraliga aytiladi:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot \exp(-sx)\, dx$$

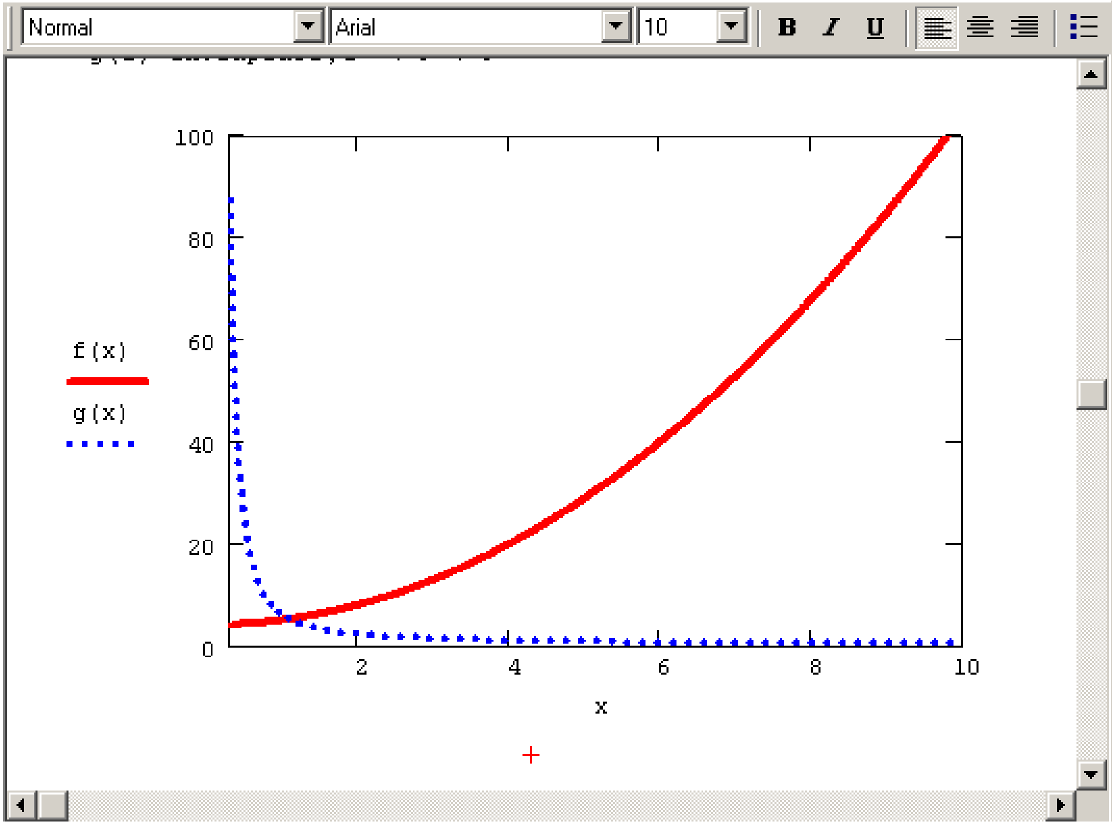
Laplas o‘zgartishi Furye-o‘zgartishi kabi hisoblanadi (4.4-bo‘limga qarang). Laplas o‘zgartishiga misollar listing 4.16 va 4.13-rasmlarda keltirilgan.

Listing 4.16. Ikki o‘lchamli Laplas o‘zgartishi

$f(x) := x^2 + 4$

$g(s) := f(x) \text{ laplace}, x \rightarrow \dfrac{2}{s^3} + \dfrac{4}{s}$

$g(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow t^2 + 4$



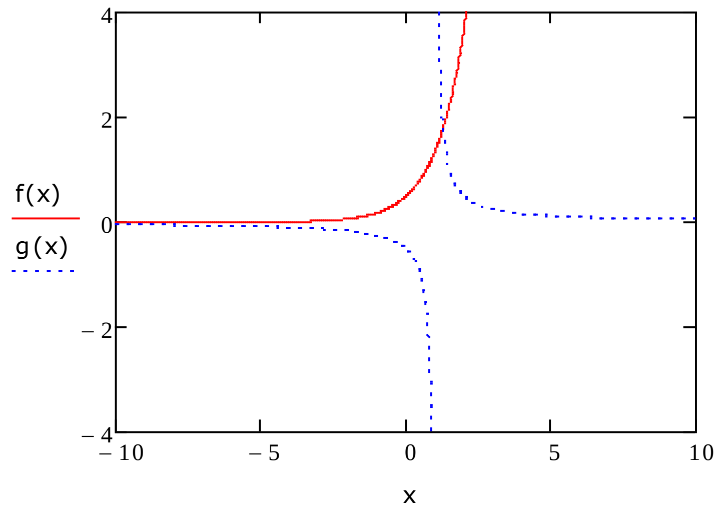
4.13-rasm. To‘g‘ri va teskari Laplas o‘zgartishi (listing 4.16 davomi)

Misollar

$$f(x) := \frac{e^x}{2}$$

$$g(s) := f(x) \text{ laplace}, x \rightarrow \frac{1}{2\cdot(s-1)}$$

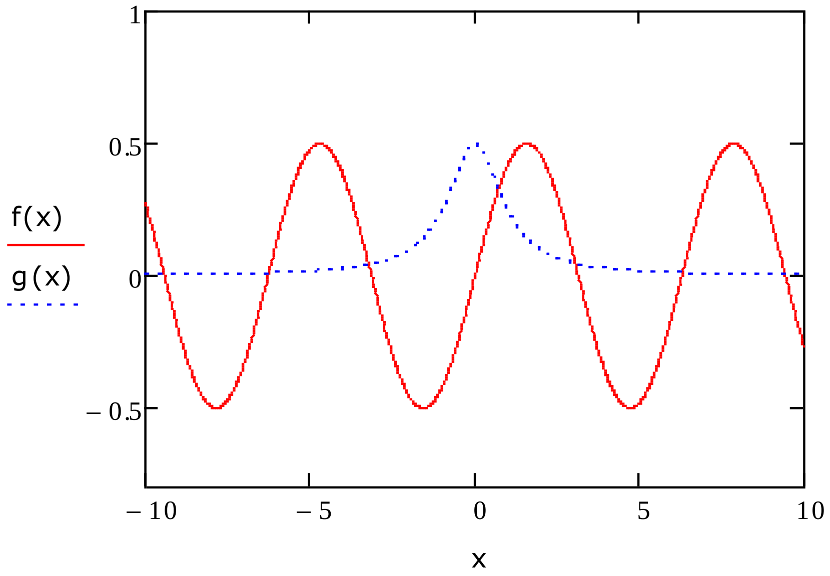
$$g(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow \frac{e^t}{2}$$



$$f(x) := \frac{\sin(x)}{2}$$

$$g(s) := f(x) \text{ laplace}, x \rightarrow \frac{1}{2\cdot\left(s^2+1\right)}$$

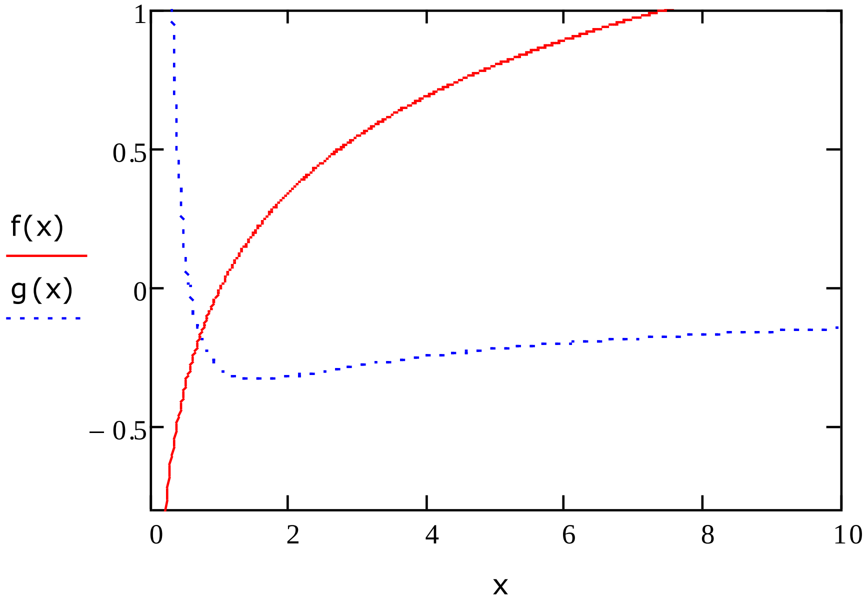
$$g(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow \frac{\sin(t)}{2}$$



$$f(x) := \frac{\ln(x)}{2}$$

$$g(s) := f(x) \text{ laplace}, x \rightarrow -\frac{\gamma + \ln(s)}{2 \cdot s}$$

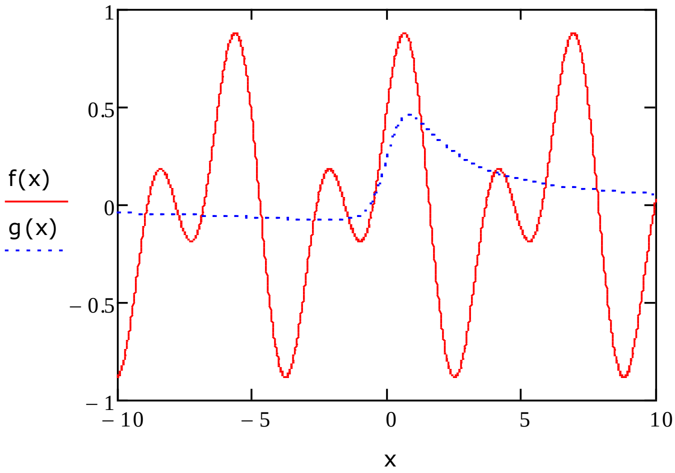
$$g(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow \frac{\ln(t)}{2}$$



$$f(x) := \frac{\cos(x) + \sin(2x)}{2}$$

$$g(s) := f(x) \text{ laplace}, x \rightarrow \frac{s^3 + 2 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 2}{2 \cdot \left(s^4 + 5 \cdot s^2 + 4\right)}$$

$$g(s) \text{ invlaplace}, s \rightarrow \frac{\sin(2 \cdot t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2}$$



4.5.2. Z-o‘zgartish

Funksiya *f(x)*ning *Z*-o‘zgartishi integral bilan emas, balki quyidagi ko‘rinishdagi cheksiz summa bilan aniqlanadi:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(n)\, z^{-n}\right)$$

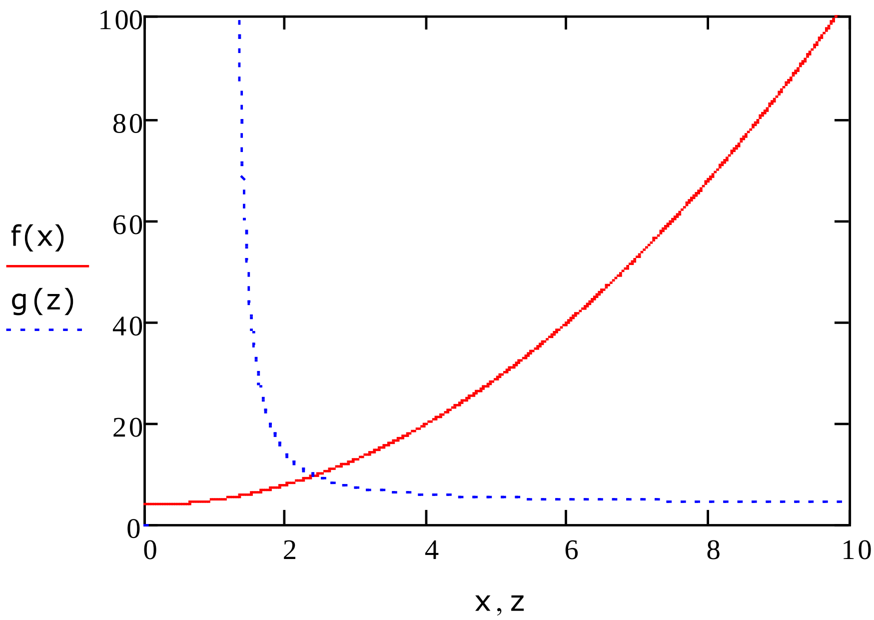
Z-o‘zgartishga misol listing 4.17 da, uning natijalari esa 4.14-rasmda keltirilgan.

Listing 4.17. To‘g‘ri va teskari *Z*-o‘zgartish

$$f(x) := x^2 + 4$$

$$g(z)\ \text{invztrans}, z \ \rightarrow 3\cdot n + 2\cdot \text{combin}(n-1, 2) + 2\ \text{expand} \rightarrow n^2 + 4$$

$$g(z) := f(x)\ \text{ztrans}, x \ \rightarrow \frac{z\cdot\left(4\cdot z^2 - 7\cdot z + 5\right)}{(z-1)^3}$$



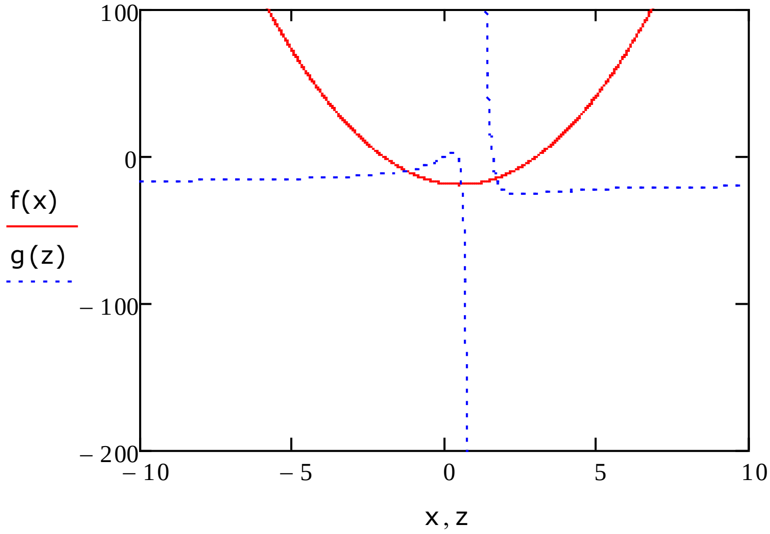
4.14-rasm. To‘g‘ri va teskari *Z*-o‘zgartish (listing 4.17 davomi)

Misollar

$f(x) := (x + 2)\cdot(3x - 9)$

$g(z) := f(x)\ \text{ztrans}, x\ \rightarrow -\dfrac{6\cdot z\cdot\left(3\cdot z^2 - 6\cdot z + 2\right)}{(z-1)^3}$

$g(z)\ \text{invztrans}, z\ \rightarrow 6\cdot n + 6\cdot \text{combin}(n-1, 2) - 24\ \text{expand} \rightarrow 3\cdot n^2 - 3\cdot n - 18$

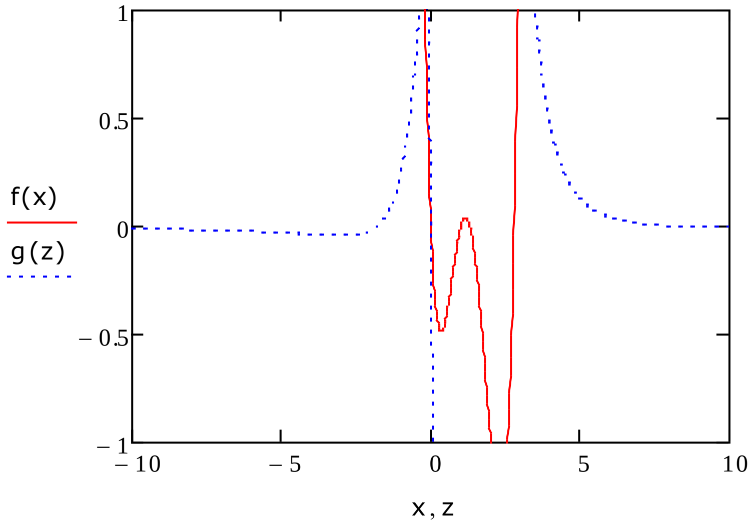


$f(x) := \dfrac{11\cdot x^4}{12} - \dfrac{14\cdot x^3}{3} + \dfrac{85\cdot x^2}{12} - \dfrac{10\cdot x}{3}$

$g(z) := f(x)\ \text{ztrans}, x\ \rightarrow \dfrac{z\cdot\left(7\cdot z - z^2 + 16\right)}{(z-1)^5}$

$k(n) := g(z)\ \text{invztrans}, z\ \rightarrow 4\cdot \text{combin}(n-1, 2) -$
$- n + 27\cdot \text{combin}(n-1, 3) + 22\cdot \text{combin}(n-1, 4) + 1$

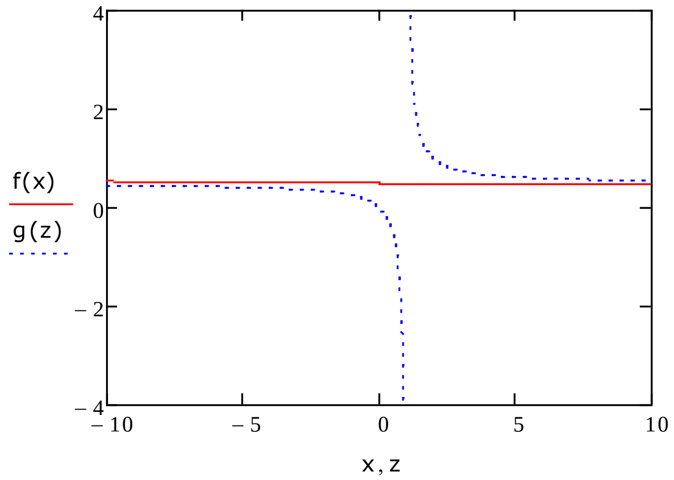
$k(n)\ \text{expand} \rightarrow \dfrac{11\cdot n^4}{12} - \dfrac{14\cdot n^3}{3} + \dfrac{85\cdot n^2}{12} - \dfrac{10\cdot n}{3}$



$f(x) := \dfrac{\sin\left(\dfrac{7\pi}{13}\right)^x}{2}$

$g(z) := f(x)\ \text{ztrans}, x\ \rightarrow \dfrac{z}{2\cdot\left(z - \sin\left(\dfrac{6}{13}\cdot\pi\right)\right)}$

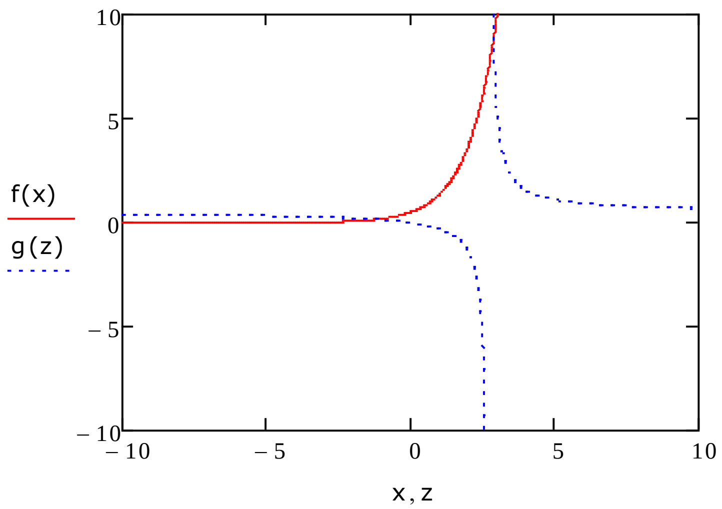
$$k(n) := g(z)\ \mathrm{invztrans}, z \ \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{6\cdot\pi}{13}\right)^{n}}{2}$$



$$f(x) := \frac{e^{x}}{2}$$

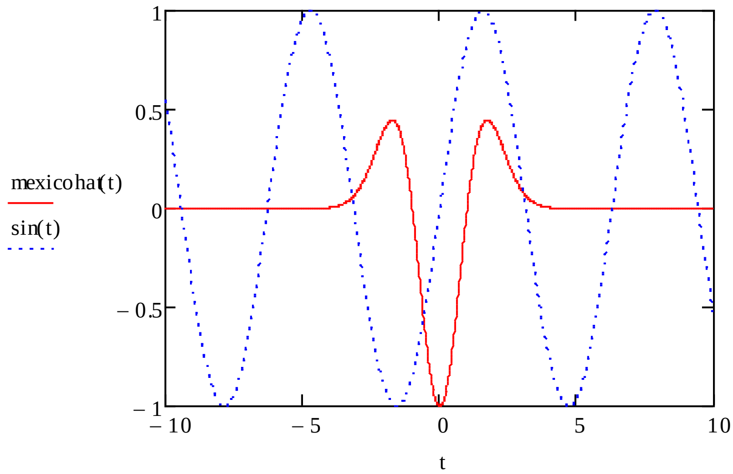
$$g(z) := f(x)\ \mathrm{ztrans}, x \ \rightarrow \frac{z}{2\cdot(z-e)}$$

$$k(n) := g(z)\ \mathrm{invztrans}, z \ \rightarrow \frac{e^{n}}{2}$$



4.5.3. Veyvlet-o‘zgartish

Oxirgi paytlarda veyvlet-o‘zgartishga (yoki diskret to‘lqinli o‘zgartishga) qiziqish ortib bormoqda. U, asosan, nostatsionar signallarni analiz qilishda qo‘llaniladi va uning samarasi Furye-o‘zgartishidan yuqoriroq hisoblanadi. Veyvlet-o‘zgartishning Furye-o‘zgartishidan asosiy farqi – ma`lumotlar sinusoidalar bo‘yicha emas, balki veyvlet hosil qiluvchilar deb nomlanuvchi, boshqa funksiyalar bo‘yicha yoyiladi. Veyvlet hosil qiluvchi funksiyalar, cheksiz ossillanuvchi sinusoidalardan farqli ravishda, o‘zining argumentining qandaydir cheklangan jabhasida lokallashadi, undan tashqarida esa nulga teng yoki cheksiz kichik bo‘ladi. «Meksika qalpog‘i» deb ataluvchi bunday funksiyaga misol 4.15-rasmda ko‘rsatilgan.



4.15-rasm. Sinusoida va veyvlet hosil qiluvchi funksiyani solishtirish

O‘zining matematik ma`nosi bo‘yicha veyvlet-spektr bitta emas, balki ikkita argumentga ega. Chastotadan tashqari, veyvlet hosil qiluvchi funksiya lokallashadigan joy ikkinchi argument *t* bo‘ladi. Shu sababli *x* o‘lchami qanday bo‘lsa, *t* ham shunday o‘lchamga ega bo‘ladi.

Kiritib o‘rnatilgan veyvlet o‘zgartish

Mathcad Dobeshi veyvlet hosil qiluvchi funksiyasi asosida veyvlet-o‘zgartishlarni hisoblash uchun bitta kiritib o‘rnatilgan funksiyaga ega:

- wave (*y*) – Dobeshi to‘g‘ri veyvlet-o‘zgartishi vektori;
- iwave (*v*) – Dobeshi teskari veyvlet-o‘zgartishi vektori:
  - *y* – argument teng oraliq qiymatlari orqali olingan ma`lumotlar vektori;
  - *v* – veyvlet-spektr ma`lumotlar vektori.

Veyvlet-o‘zgartish funksiyasining argumenti, ya`ni vektor *y*, Furye o‘zgartishidagi kabi, 2^n (bu yerda *n* – butun son) elementga ega bo‘lishi kerak. *Wave* funksiyasining natijasi – ikki parametrli veyvlet-spektr bir necha koeffitsiyentlardan komponovka qilingan vektor bo‘ladi. *Wave* funksiyasidan foydalanish xususiyatlari listing 4.18 da illyustratsiya qilingan, u yerda model funksiyasi sifatida ikkita sinusoidalar summasi olingan, ularning grafigi 4.10-rasmda tasvirlangan edi. Dobeshi veyvlet-spektri hisobi natijalari uning koeffitsiyentlarining uchta ko‘rinishida 4.16-rasmda taqdim etilgan.

Listing 4.18. Modelli signalning Dobeshi veyvlet-spektrini hisoblash

$$\mathbf{f(t)} := 0.5\cdot\mathbf{sin}(2\pi\cdot 0.1\cdot\mathbf{t}) + 1\cdot\mathbf{sin}(2\pi\cdot 0.5\cdot\mathbf{t})$$

$$\mathbf{N} := 128 \quad \mathbf{i} := 0..(\mathbf{N}-1) \quad \mathbf{Y_i} := \mathbf{f(i)} \quad \mathbf{W} := \mathbf{wave(Y)}$$

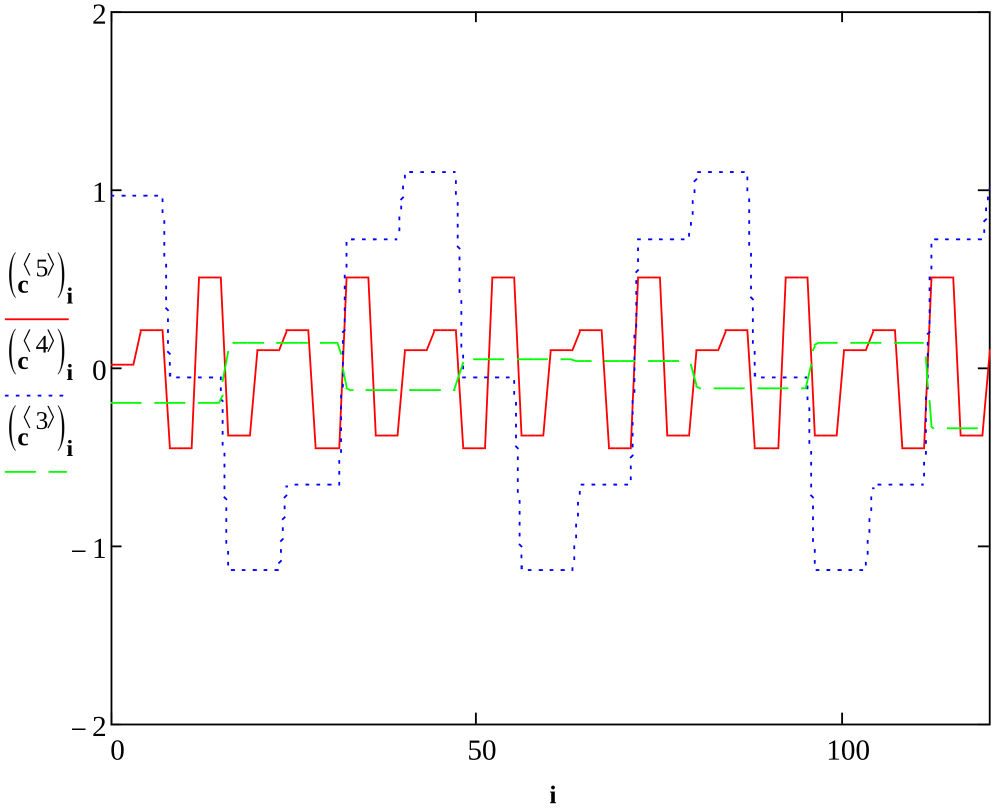
$$\mathbf{coeffs(level)} := \mathbf{submatrix}\left(\mathbf{W}, 2^{\mathbf{level}}, 2^{\mathbf{level}+1} - 1, 0, 0\right)$$

$$\mathbf{Nlevels} := \frac{\mathbf{ln(N)}}{\mathbf{ln}(2)} - 1$$

$$\mathbf{Nlevels} = 6$$

$$\mathbf{k} := 1..\mathbf{Nlevels}$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{i},\,\mathbf{k}} := \mathbf{coeffs(k)}_{\mathbf{floor}\left(\frac{\mathbf{i}\cdot 2^{\mathbf{k}}}{\mathbf{N}}\right)}$$



4.16-rasm. Modelli signalning Dobeshi veyvlet-spektri (listing 4.18 davomi)

Boshqa veyvlet-o‘zgartishlarni dasturlash

Mathcad 11-12 larning professional versiyalari, kiritib o‘rnatilgan *wave* funksiyasi bilan bir qatorda, veyvlet-analizni amalga oshirish uchun kengaytiruvchi paket bilan ta`minlangan. Kengaytiruvchi paket veyvlet-o‘zgartishlarga aloqasi bo‘lgan ko‘p sonli qo‘shimcha kiritib o‘rnatilgan funksiyalarga ega.

Izoh

Kiritib o‘rnatilgan funksiyalar ma`lumotlaridan foydalanish haqidagi qo‘shimcha informatsiyani mos elektron kitobda topish mumkin, uni Help / E-Books / Wavelet extension pack (Ma`lumotnoma (Yordam) / Elektron kitoblar / Ma`lumotlar veyvlet-analizi) menyusi yordamida ochish mumkin.

Kiritib o‘rnatilgan Dobeshi veyvlet-spektr funksiyasi va kengaytirish paketi imkoniyatlaridan tashqari, veyvlet-spektrlarni hisoblash uchun foydalanuvchi algoritmlarni bevosita dasturlash ruxsat etiladi. U mos integrallar oilalarini avaylab sonli-raqamli yechishga keltiriladi. Shunday dasturga misollardan biri listing 4.19 da keltirilgan. Ikkita sinuslar summasidan tuzilgan funksiya analiz qilinadi, ikki parametrli spektr *c(a,b)* grafigi esa 4.17-rasmga veyvlet-analiz oddiy bo‘lgan *(a,b)* tekisligida sath chiziqlari ko‘rinishida chiqarilgan.

Izoh

Listing dasturi juda sodda, lekin tezkorlik nuqtayi-nazaridan u yaxshi bo‘lishdan ancha yiroqda. Har bir integral BPF algoritmida qo‘llanuvchi tezlatuvchi metodlardan foydalanmasdan, mustaqil hisoblanadi. Lekin dasturlashning oddiy usullari veyvlet-o‘zgartishlarning matematik ma`nosini tushunarli darajada yoritadi.

Listing 4.19. «Meksika qalpog‘i» asosida veyvlet-spektrni hisoblash

$$f(t) := 1.0\sin(2\pi \cdot 0.02t) + 0.3\sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot t)$$

$$MHAT(t) := \frac{d^2}{dt^2}\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$$N := 256$$

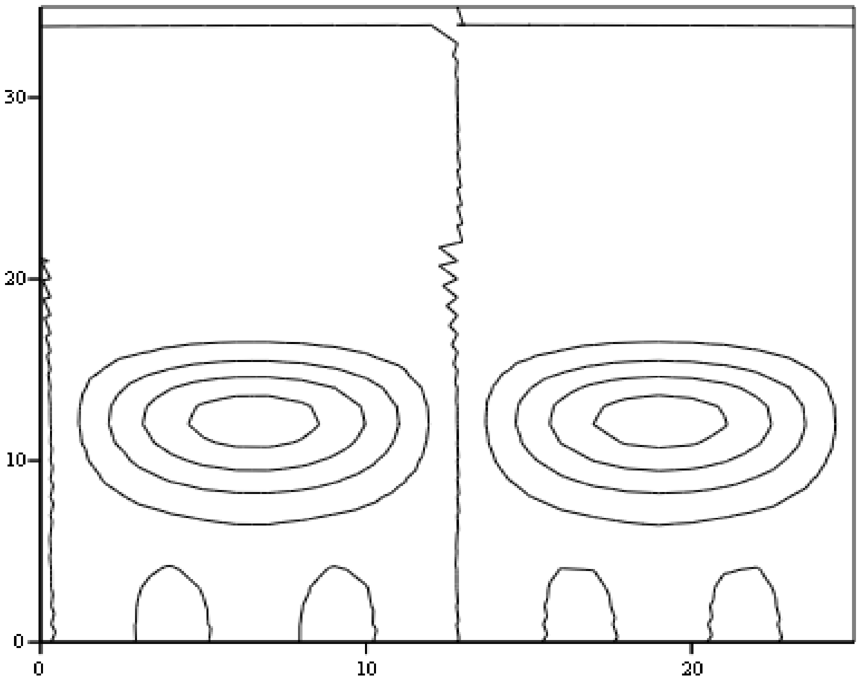
$$b := 0..25$$

$$W(a,b) := \int_{-N}^{N} f(t)\cdot MHAT\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

$$i := 0..10\frac{N}{10}$$

$$a_i := \frac{(i+15)^4}{4\times 10^4}$$

$$C_{i,b} := W\left(a_i, 2\cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



4.17-rasm. «Meksika qalpog‘i» asosida modelli signalning veyvlet-spektri (listing 4.19 davomi)

Misol

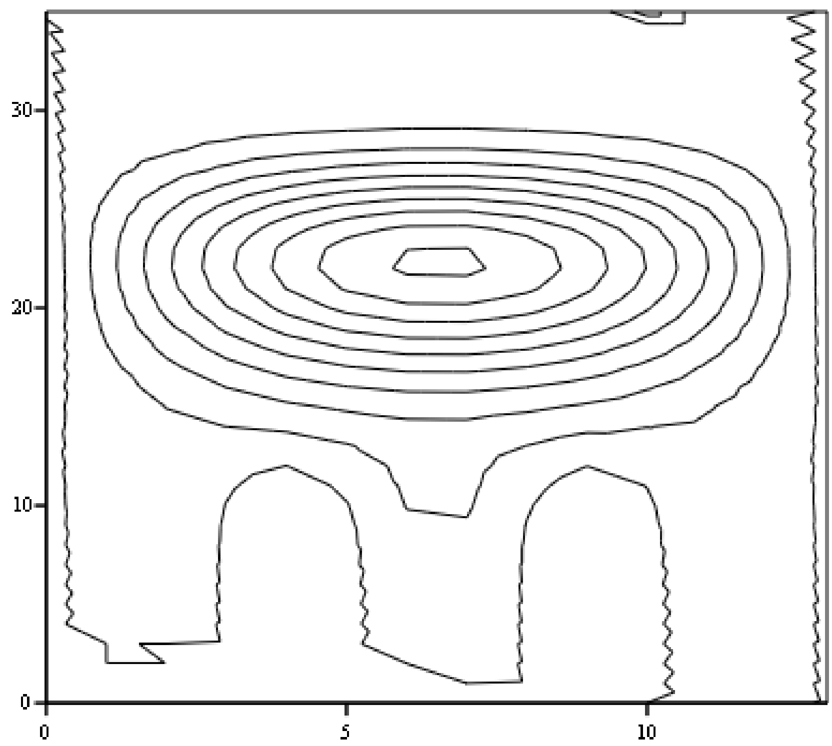
$$f(t) := 2.0\sin(2\pi \cdot 0.02t) + 1.0\sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot t)$$

$$MHAT(t) := \frac{d^2}{dt^2}\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$N := 256$ $b := 0..13$

$$W(a,b) := \int_{-N}^{N} f(t)\cdot MHAT\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

$i := 0..10\frac{N}{10}$ $a_i := \frac{(i+15)^4}{14\times 10^4}$ $C_{i,b} := W\left(a_i, 2\cdot b - \frac{N}{10}\right)$



C^T

ADABIYOTLAR

1. Amirouche, M. L. A Computer-Aided Design and Manufacturing, Co. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
2. Armstrong, C G. «Modeling Requirements for Finite-element Analysis», Computer-Aided Design, Vol. 26, No. 7, pp. 573-578, 1994.
3. Armstrong, C G., Robinson, D. J., Mckeage, R. M., Li, T. S., Bridget!, S. J., Donaghy, R. J., and McGleenan, C A. «Medials for Meshing and More», 4th Annual International Meshing Roundtable, (sponsored by Sandia National Laboratories), October 16-17, 1995.
4. Ashley, S. «Manufacturing Firms Face the Future», Mechanical Engineering, pp. 70-74, June 1997.
5. Barfield, W. and Furness, T. A. III. Virtual Environments and Advanced Interface Design, Oxford University Press, New York, 1995.
6. Beasley, D., Bull, D. R., and Martin, R. R. «An Overview of Genetic Algorithm: Part I, Fundamentals», University Computing, Vol. 19, No. 2, pp. 58-69, Inter-University Committee on Computing, 1993.
7. Beckert, B. A. «Venturing into Virtual Product Development», Computer-Aided Engineering, pp. 45-50, May 1996.
8. Beier, K. «Virtual Reality in Automotive Design and Manufacturing», SAE Technical Paper 94C030, 1994.
9. Boehm, W. and Prantzsch, H. «Geometric Concepts for Geometric Design», A. K. Peters, Wellesley, MA, 1994.
10. Breltinger, F. «Rapid Tooling for Simultaneous Product and Process Development: Part II», RapidNEWS, Vol. 5, No. 6, pp. 52-57, 1997.

MUNDARIJA

1 – BOB. MATHCAD HAQIDA UMUMIY MA`LUMOT .... - 2 -

1.1. MATHCAD BILAN TANISHUV .... - 2 -
1.1.1. Mathcad vazifasi .... - 2 -
1.1.2. Foydalanuvchi interfeys .... - 3 -
1.1.3. Instrumentlar panellari .... - 5 -
1.1.4. Ma`lumot uchun informatsiya .... - 7 -
1.2. MATHCADDA HISOBLASH ASOSLARI .... - 9 -
1.2.1. Sonli-raqamli va simvolli chiqarish operatorlari .... - 9 -
1.2.2. Matematik ifodalar va kiritib oʻrnatilgan funksiyalar .... - 10 -
1.2.3. Oʻzgaruvchilar va qiymatni berish operatori .... - 12 -
1.2.4. Foydalanuvchi funksiyalari .... - 14 -
1.2.5. Sonlarning turlari .... - 17 -
1.2.6. Ranjirlangan oʻzgaruvchilar va matritsalar .... - 21 -
1.2.7. Oʻlchamli oʻzgaruvchilar .... - 25 -
1.3. FORMULALARNI KIRITISH VA TAHRIRLASH .... - 27 -
1.3.1. Mathcad redaktori interfeysining elementlari .... - 28 -
1.3.2. Formulalarni kiritish .... - 28 -
1.3.3. Formulalar ichida kiritish chizigʻini siljitish .... - 29 -
1.3.4. Formulalarni oʻzgartirish .... - 30 -
1.3.5. Dasturlash .... - 33 -
1.4. GRAFIKLAR .... - 36 -
1.4.1. Grafiklarning turlari .... - 36 -
1.4.2. Grafikni yaratish .... - 37 -
1.4.3. Ikki vektorlarning X-Y grafigi .... - 37 -
1.4.4.Funksiyaning X-Y grafigi .... - 38 -
1.4.5. Ma`lumotlarning bir nechta qatorini qurish .... - 39 -
1.4.6. Grafiklarni formatlash .... - 42 -
1.4.7. Uch oʻlchamli grafiklar .... - 48 -

2 – BOB. ALGEBRAIK HISOBLASHLAR .... - 51 -

2.1. OPERATORLAR .... - 51 -
2.1.1. Arifmetik operatorlar .... - 51 -
2.1.2. Hisoblash operatorlari .... - 52 -
2.1.3. Mantiqiy operatorlar .... - 52 -
2.1.4. Matritsa operatorlari .... - 54 -
2.1.5. Ifoda operatorlari .... - 55 -
2.2. FUNKSIYALAR .... - 55 -
2.2.1. Elementar funksiyalar .... - 55 -
2.2.2. Yordamchi funksiyalar .... - 58 -
2.2.3. Joriy vaqtni chiqarish funksiyasi .... - 61 -
2.2.4. Maxsus funksiya .... - 62 -
2.3. ALGEBRAIK KOʻRSATKICHLAR .... - 64 -
2.3.1. Simvolli hisoblashlarning usullari haqida .... - 64 -
2.3.2. Ifodalarni yoyish .... - 65 -
2.3.3. Ifodalarni soddalashtirish .... - 68 -
2.3.4. Koʻpaytuvchilarga yoyish .... - 71 -
2.3.5. Oʻxshash qoʻshiluvchilarni keltirish .... - 72 -
2.3.6. Polinom koeffitsiyentlarini hisoblash .... - 73 -
2.3.7. Oddiy kasrlarga boʻlish .... - 76 -
2.3.8. Qatorlar va koʻpaytmalarni hisoblash .... - 77 -
2.3.9. Oʻzgaruvchini oʻrniga qoʻyish (подстановка) .... - 78 -
2.3.10. Ifodaning sonli-raqamli qiymatini olish .... - 79 -

2.3.11. Chegarani hisoblash ... - 82 -
2.3.12. Analitik hisoblashlarning xususiyatlari haqida ... - 83 -
3 – BOB. DIFFERENSIALLASH ... - 85 -
3.1. ANALITIK DIFFERENSIALLASH ... - 85 -
3.1.1. Funksiyani analitik differensiallash ... - 85 -
3.1.2. Funksiya hosilasini nuqtada hisoblash ... - 87 -
3.1.3. Differensiallash operatori orqali foydalanuvchi funksiyalarini aniqlash ... - 89 -
3.1.4. Menyu yordamida differensiallash ... - 90 -
3.2. SONLI-RAQAMLI DIFFERENSIALLASH ... - 90 -
3.2.1. Nuqtada differensiallash ... - 91 -
3.2.2. Differensiallash algoritmi haqida ... - 92 -
3.3. YUQORI TARTIBLI HOSILALAR ... - 94 -
3.4. XUSUSIY HOSILALAR ... - 97 -
3.4.1. Xususiy hosilalar ... - 98 -
3.4.2. Misollar: gradiyent, divergensiya va rotor ... - 101 -
3.4.3. Misol: yakobian ... - 107 -
3.5. FUNKSIYANI TEYLOR QATORIGA YOYISH ... - 111 -
3.5.1. Menyu yordamida qatorga yoyish ... - 111 -
3.5.2. Qatorga yoyish operatori ... - 112 -
4 – BOB. INTEGRALLASH ... - 116 -
4.1. ANIQ INTEGRAL ... - 116 -
4.1.1. Integrallash operatori ... - 116 -
4.1.2. Sonli-raqamli integrallash algoritmini tanlash haqida ... - 119 -
4.1.3. Integrallashning an`anaviy algoritmlari haqida ... - 121 -
4.1.4. Romberg algoritmi ... - 123 -
4.2. NOANIQ INTEGRAL ... - 124 -
4.2.1. Simvolli integrallash ... - 124 -
4.2.2. Menyu yordamida integrallash ... - 125 -
4.3. MAXSUS TURDAGI INTEGRALLAR ... - 127 -
4.3.1. Cheksiz chegarali integrallar ... - 127 -
4.3.2. Uzoqlashuvchi integrallar ... - 127 -
4.3.3. O'zgaruvchi chegarali integral ... - 127 -
4.3.4. Misol: egri chiziq yoyining uzunligi ... - 128 -
4.4. FURYE INTEGRALI ... - 129 -
4.4.1. Funksiyalarning integral o'zgartuvchilari haqida ... - 130 -
4.4.2. Furye analitik o'zgartishlari ... - 130 -
4.4.3. Furye diskret o'zgartishi ... - 132 -
4.4.4. Kompleks ma`lumotlarni Furye o'zgartishi ... - 136 -
4.4.5. Furye ikki o'lchamli o'zgartishlari ... - 137 -
4.5. BOSHQA INTEGRAL O'ZGARTISHLAR ... - 139 -
4.5.1. Laplas o'zgartishlari ... - 139 -
4.5.2. Z-o'zgartish ... - 142 -
4.5.3. Veyvlet-o'zgartish ... - 144 -
ADABIYOTLAR ... - 149 -

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О MATHCAD 3

1.1. ЗНАКОМСТВО С MATHCAD 3
1.1.1. Назначение Mathcad 3
1.1.2. Интерфейс пользователя 6
1.1.3. Панели инструментов 7
1.1.4. Справочная информация 11
1.2. ОСНОВЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В MATHCAD 14
1.2.1. Операторы численного и символьного вывода 14
1.2.2. Математические выражения и встроенные функции 16
1.2.3. Переменные и оператор присваивания 19
1.2.4. Функции пользователя 22
1.2.5. Типы чисел 25
1.2.6. Ранжированные переменные и матрицы 32
1.2.7. Размерные переменные 37
1.3. ВВОД И РЕДАКТИРОВАНИЕ ФОРМУЛ 40
1.3.1. Элементы интерфейса редактора формул 40
1.3.2. Ввод формул 41
1.3.3. Перемещение линий ввода внутри формул 43
1.3.4. Изменение формул 44
1.3.5. Программирование 48
1.4. ГРАФИКИ 53
1.4.1. Типы графиков 53
1.4.2. Создание графика 54
1.4.3. X-Y график двух векторов 55
1.4.4. X-Y график функции 56
1.4.5. Построение нескольких рядов данных 57
1.4.6. Форматирование графиков 61
1.4.7. Трехмерные графики 68

ГЛАВА 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ 85

2.1. ОПЕРАТОРЫ 72
2.1.1. Арифметические операторы 72
2.1.2. Вычислительные операторы 73
2.1.3. Логические операторы 73
2.1.4. Матричные операторы 74
2.1.5. Операторы выражения 76
2.2. ФУНКЦИИ 78
2.2.1. Элементарные функции 78
2.2.2. Вспомогательные функции 82
2.2.3. Функция вывода текущего времени 86
2.2.4. Спецфункции 87
2.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ 89
2.3.1. О способах символьных вычислений 89
2.3.2. Разложение выражений 91
2.3.3. Упрощение выражений 96
2.3.4. Разложение на множители 98
2.3.5. Приведение подобных слагаемых 100
2.3.6. Вычисление коэффициентов полинома 102
2.3.7. Разложение на простые дроби 105
2.3.8. Вычисление рядов и произведений 106
2.3.9. Подстановка переменной 107
2.3.10. Получение численного значения выражения 109

2.3.11. Вычисление предела *112*
2.3.12.О специфике аналитических вычислений *113*

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ **116**

3.1. Аналитическое дифференцирование 116
3.1.1. Аналитическое дифференцирование функции *116*
3.1.2. Вычисление производной функции в точке *119*
3.1.3. Определение функций пользователя через оператор дифференцирования *122*
3.1.4. Дифференцирование при помощи меню *122*
3.2. Численное дифференцирование 123
3.2.1. Дифференцирование в точке *123*
3.2.2. Об алгоритме дифференцирования *125*
3.3. Производные высших порядков 128
3.4. Частные производные 133
3.4.1. Частные производные *133*
3.4.2. Примеры: градиент, дивергенция и ротор *137*
3.4.3. Пример: якобиан *144*
3.5. Разложение функции в ряд Тейлора 149
3.5.1. Разложение в ряд при помощи меню *149*
3.5.2. Оператор разложения в ряд *151*

ГЛАВА 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ **155**

4.1. Определенный интеграл 155
4.1.1. Оператор интегрирования *156*
4.1.2. О выборе алгоритма численного интегрирования *159*
4.1.3.О традиционных алгоритмах интегрирования *161*
4.1.4. Алгоритм Ромберга *166*
4.2. Неопределенный интеграл 166
4.2.1. Символьное интегрирование *166*
4.2.2. Интегрирование при помощи меню *168*
4.3. Интегралы специального вида 169
4.3.1. Интегралы с бесконечными пределами *169*
4.3.2. Расходящиеся интегралы *169*
4.3.3. Интеграл с переменным пределом *170*
4.3.4. Пример: длина дуги кривой *171*
4.4. Интеграл Фурье 173
4.4.1. Об интегральных преобразованиях функций *173*
4.4.2. Аналитическое преобразование Фурье *174*
4.4.3. Дискретное преобразование Фурье *176*
4.4.4. Преобразование Фурье комплексных данных *182*
4.4.5. Двумерное преобразование Фурье *184*
4.5. Другие интегральные преобразования 187
4.5.1. Преобразование Лапласа *187*
4.5.2. Z-преобразование *190*
4.5.3. Вейвлет-преобразование *192*

ЛИТЕРАТУРА **198**