

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

Тверской государственной технической университет

В.Ф. Комиссарчик

**Автоматическое регулирование технологических
процессов**

Учебное пособие

Тверь 2001

УДК 62.50

Автоматическое регулирование технологических процессов: Учебное пособие (Издание второе, расширенное) / В.Ф. Комиссарчик; Тверской государственный технический университет, Тверь, 2001, 248с.

Рассматриваются методы расчёта автоматических систем регулирования технологических процессов различных типов.

Предназначено для студентов специальности 21.02 «Автоматизация технологических процессов и производств» при изучении ими одноимённой дисциплины.

Подготовлено на кафедре автоматизации технологических процессов Тверского государственного технического университета.

Введение

Одной из важнейших задач автоматизации технологических процессов является автоматическое регулирование, имеющее целью поддержание постоянства (стабилизацию) заданного значения регулируемых переменных или их изменение по заданному во времени закону (программное регулирование) с требуемой точностью, что позволяет обеспечить получение продукции нужного качества, а также безопасную и экономичную работу технологического оборудования.

В качестве регулируемых переменных обычно используются режимные (уровень, температура, давление, расход) или качественные (влажность, плотность, вязкость, состав и т.д.) показатели функционирования технологических процессов, характеризующие материальный или энергетический баланс в аппаратах и свойства продукта.

Задача автоматического регулирования реализуется посредством автоматических систем регулирования (АСР). Структурная схема замкнутой АСР приведена на рис. 1.

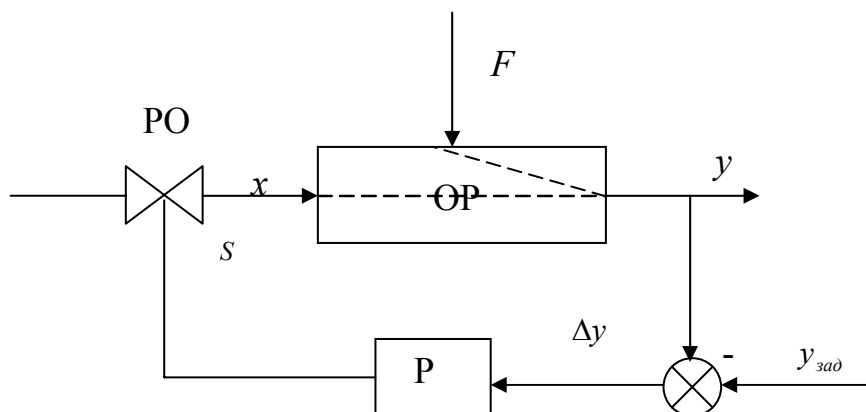


Рис. 1.

На рис. 1 обозначено:

ОР – объект регулирования (технологический процесс или аппарат);

y – регулируемая переменная;

x – регулирующее воздействие, с помощью которого осуществляется процесс регулирования. Регулирующими воздействиями обычно являются расходы жидких, газообразных, сыпучих тел;

РО – регулирующий (рабочий) орган, с помощью которого изменяется расход вещества (энергии). Для изменения расходов жидких и газообразных тел широкое применение находят рабочие органы дросселирующего типа с изменяющимся проходным сечением;

S – положение рабочего органа обычно измеряемое в % хода РО (например, перемещение штока клапана или поворот заслонки). Поскольку регулирующее воздействие x , как правило, не измеряется, в качестве регулирующего воздействия обычно принимают S , тем самым относя РО к объекту регулирования;

F - возмущающие воздействия, оказывающие влияние на величину регулируемой переменной;

Р - автоматический регулятор – совокупность элементов, предназначенных для решения задачи регулирования;

$y_{зад}$ - заданное значение регулируемой переменной, которое должно поддерживаться регулятором;

\otimes - сравнивающее устройство, вырабатывающее сигнал рассогласования (ошибки) Δy :

$$\Delta y = y_{зад} - y$$

В качестве примера на рис. 2 изображена схема регулирования температуры продукта $\theta_{пр}$ на выходе теплообменника изменением подачи теплоносителя G_T .

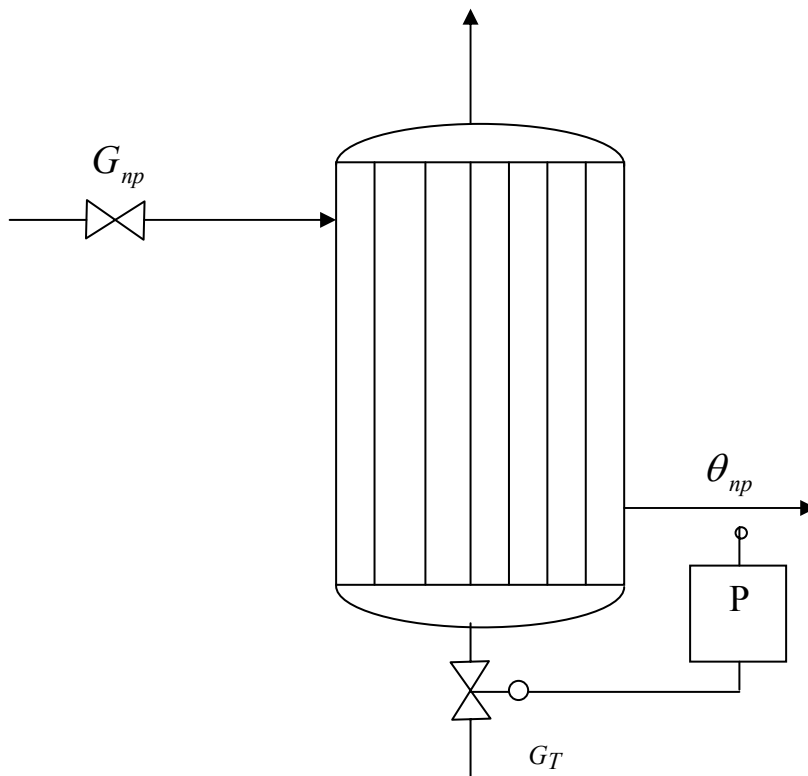


Рис. 2.

Одним из основных возмущений в этой системе является расход нагреваемого продукта G_{np} .

Поводом для регулирования в замкнутой АСР является возникновение ошибки Δu . При её появлении регулятор изменяет регулирующее воздействие x до полного устранения ошибки (в идеальной системе). Таким образом, АСР предназначена для поддержания регулируемой переменной на заданном уровне при колебаниях возмущающих воздействий в определённых пределах. Другими словами, основной задачей регулятора является устранение рассогласования Δu изменением регулирующего воздействия.

Важнейшим достоинством замкнутой АСР является то, что она реагирует на любое возмущение, приводящее к возникновению рассогласования. В то же время подобным системам принципиально присуща ошибка регулирования, поскольку возникновение

рассогласования Δu всегда предшествует его устранению и, кроме того, замкнутая АСР при определённых условиях может стать неустойчивой.

Основными задачами, возникающими при расчёте АСР, являются:

1. Математическое описание объекта регулирования;
2. Обоснование структурной схемы АСР, типа регулятора и формирование требований к качеству регулирования;
3. Расчёт параметров настройки регулятора;
4. Анализ качества регулирования в системе.

Целью расчёта замкнутой АСР является обеспечение требуемого качества регулирования. Под качеством регулирования будем понимать значения показателей, характеризующих форму кривой переходного процесса в замкнутой АСР при ступенчатом воздействии на её входе. Примерный вид переходных характеристик замкнутой АСР по каналам задающего и возмущающего (в частном случае регулирующего) воздействий показан на рис. 3.

Переходная характеристика замкнутой системы по каналу задающего воздействия (линия $y_{факт}$ на рис. 3а) отражает характер перехода регулируемой переменной от одного установившегося значения к другому.

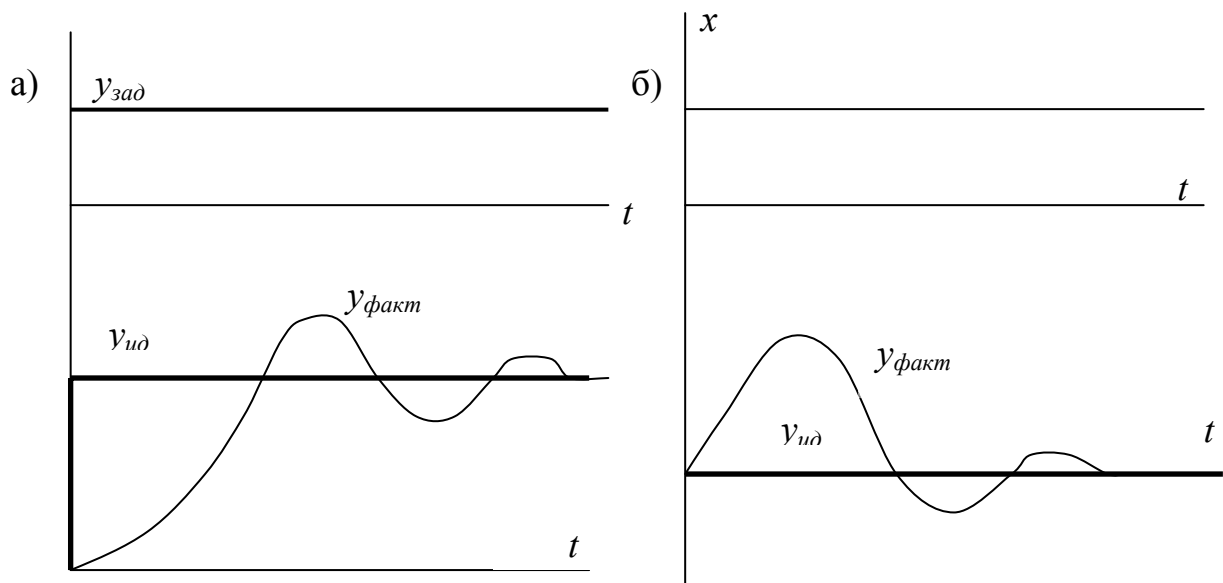


Рис. 3.

Идеальным было бы, если бы этот переход совершался скачком (линия $y_{ид}$)

Переходная характеристика по каналу регулирующего воздействия (линия $y_{факт}$ на рис. 3б) отражает процесс подавления системой возмущения. Идеальным было бы, чтобы система вообще не реагировала на возмущение (линия $y_{ид}$).

В настоящем пособии рассматриваются методы решения типовых задач, возникающих при расчёте АСР различных типов, находящих применение в практике автоматизации технологических процессов.

1. Математическое описание объектов регулирования [1 ÷ 4]

1.1. Основные характеристики и свойства объектов регулирования

Объект регулирования может находиться в одном из двух состояний: статике или динамике.

Статикой называется установившийся режим, в котором входные и выходные величины объекта постоянны во времени. (Это определение справедливо для устойчивых (статических) объектов).

Динамика – это изменение во времени выходной переменной объекта вследствие изменения входной переменной или ненулевых начальных условий.

Статические характеристики объектов регулирования

Поведение объекта регулирования в статике характеризуется статической характеристикой «вход-выход», представляющей зависимость между установившимися значениями выходной и входной переменных:

$$y_{уст} = f(x_{уст})$$

По виду статических характеристик различают линейные и нелинейные объекты. Статическая характеристика линейного объекта представляет прямую, проходящую через начало координат с уравнением

$$y = Kx$$

(Характеристику с уравнением $y = Kx + b$, не проходящую через начало координат, можно свести к линейной, обозначив $y - b = y'$.)

Объекты, статические характеристики которых отличаются от прямой, являются нелинейными.

Тангенс угла наклона статической характеристики α , равный производной выходной переменной по входной, называется статическим коэффициентом передачи объекта:

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

Коэффициент K имеет размерность: единиц выходной переменной на единицу входного воздействия. Физический смысл: изменение регулируемой переменной на единицу входного воздействия, т.е. коэффициент передачи характеризует крутизну статической характеристики.

Для линейных объектов $K=y/x$ – константа, для нелинейных K есть функция x .

При расчёте АСР нелинейные характеристики обычно линеаризуют. Широкое применение находит линеаризация касательной (линейным приближением разложения в ряд Тейлора). Пусть x_0 , y_0 – точка, в окрестности которой линеаризуется функция $y=f(x)$. Считая

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

находим
$$(y - y_0) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_0} (x - x_0) \quad (1)$$

При использовании линеаризованного уравнения (1) следует учитывать, что точность линеаризации уменьшается с ростом величины приращения Δx , поэтому линеаризация касательной справедлива лишь в

достаточно малой окрестности точки x_0 . Кроме того, поскольку в выражение (1) входит производная функции $f(x)$, данный способ линеаризации пригоден лишь для дифференцируемых функций.

Динамические характеристики объектов регулирования.

Дифференциальное уравнение

Основной динамической характеристикой объектов регулирования является дифференциальное уравнение. Объекты могут описываться дифференциальными уравнениями двух типов: обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных. Обыкновенные дифференциальные уравнения описывают объекты с сосредоточенными параметрами, которые условно можно считать емкостями с идеальным (мгновенным) перемешиванием. Переменные в таких объектах зависят только от времени и не зависят от координат точки измерения переменной.

Уравнения в частных производных описывают объекты с распределёнными параметрами (физически это обычно аппараты, у которых одна из координат много больше остальных, например, теплообменник «труба в трубе», аппараты колонного типа и т.п.). В таких объектах значения переменных зависят не только от времени, но и координат точки измерения переменных, поэтому в дифференциальные уравнения входят не только производные по времени, но и по координатам. Обычно при расчётах уравнения в частных производных аппроксимируют системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

В дальнейшем будем рассматривать объекты, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями вида:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_0 x; \quad m < n, \quad (2)$$

где n – порядок левой части и всего уравнения в целом,

m – порядок правой части.

Поскольку реальные объекты регулирования представляют инерционные звенья, всегда $m < n$.

Для уменьшения числа коэффициентов левую и правую части дифференциального уравнения можно разделить на один из коэффициентов (например, a_0) и, таким образом, считать его равным единице.

В статике уравнение (2) принимает вид

$$y = b_0 x,$$

следовательно, коэффициент b_0 равен статическому коэффициенту передачи объекта.

Передаточная функция

Действия над дифференциальными уравнениями упрощаются при использовании преобразования Лапласа. Кроме того, преобразование Лапласа позволяет ввести понятие передаточной функции.

Смысл преобразования Лапласа заключается в том, что функции $x(t)$ вещественной переменной t ставится в соответствие функция $x(p)$ комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$.

$x(t)$ называется оригиналом, $x(p)$ – изображением по Лапласу. Операция преобразования по Лапласу записывается следующим образом:

$$x(p) = L[x(t)],$$

L – интегральный оператор Лапласа, определяемый следующим образом

$$x(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt \quad (3)$$

Основные свойства преобразования Лапласа

1. Запаздыванию аргумента на τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$ (теорема смещения оригинала), т.е.

$$L\{x(t - \tau)\} = x(p)e^{-p\tau} \quad (4)$$

Это свойство позволяет находить изображения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

2. Дифференцированию оригинала при нулевых начальных условиях соответствует умножение изображения на p :

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\}_{x(0)=0} = px(p),$$

поэтому формально переменную p можно считать символом дифференцирования. В статике $p=0$.

В общем случае

$$L\left\{\frac{d^k x}{dt^k}\right\}_{x(0)=0} = p^k x(p) \quad (5)$$

Поскольку интегрирование есть действие обратное дифференцированию, интегрированию оригинала соответствует деление изображения на p :

$$L\left\{\int x(t)dt\right\} = x(p) / p$$

Свойство (5) позволяет записать изображение по Лапласу дифференциального уравнения (2):

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)y(p) = (b_m p^m + \dots + b_0)x(p)$$

Таким образом, изображение по Лапласу дифференциального уравнения (2) представляет алгебраическое выражение, которое можно разрешить относительно изображения выходной переменной $y(p)$, а затем снова перейти от изображения к оригиналу. Эта операция называется обратным преобразованием Лапласа и обозначается оператором L^{-1} :

$$x(t) = L^{-1}\{x(p)\}$$

Обратное преобразование Лапласа определяется интегралом

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\omega}^{\alpha+j\omega} x(p)e^{pt} dp$$

Для облегчения нахождения изображения по оригиналу и оригинала по изображению составлены таблицы соответствия между оригиналами и их изображениями для простейших функций. (Эти таблицы приводятся в руководствах по преобразованию Лапласа и в учебниках по теории управления). Для нахождения оригиналов сложных изображений пользуются формулой разложения изображения на простые дроби. (см п.6.3.).

Отношение изображения по Лапласу выходной переменной к изображению входной переменной при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + 1},$$

или, поскольку $b_0 = K$, передаточную функцию можно записать в виде:

$$W(p) = K \frac{b_m p^m + \dots + 1}{a_n p^n + \dots + 1} = K \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (6)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ - полиномы от p порядков n и m соответственно.

Какая же связь между передаточной функцией и статическим коэффициентом передачи?

Передаточная функция – это динамическая характеристика, коэффициент передачи – статическая характеристика. Статика (покой) есть частный случай динамики (движения). Следовательно, K есть частный случай $W(p)$ в статике. Поскольку в статике $p=0$, то

$$K = W(0)$$

Временные характеристики

Временной характеристикой объекта называется его реакция на типовой апериодический сигнал. В качестве входных сигналов чаще всего используют ступенчатую функцию или её производную - δ - функцию. Реакция объекта или любого динамического звена на ступенчатую функцию единичной амплитуды (единичную ступенчатую функцию) называется переходной характеристикой объекта (звена) $h(t)$. Реакцию объекта на ступеньку произвольной амплитуды x_0 называют кривой разгона объекта (рис.4). Для получения переходной характеристики из кривой разгона $y(t)$ следует разделить каждую ординату кривой разгона на амплитуду ступеньки:

$$h(t) = y(t) / x_0$$

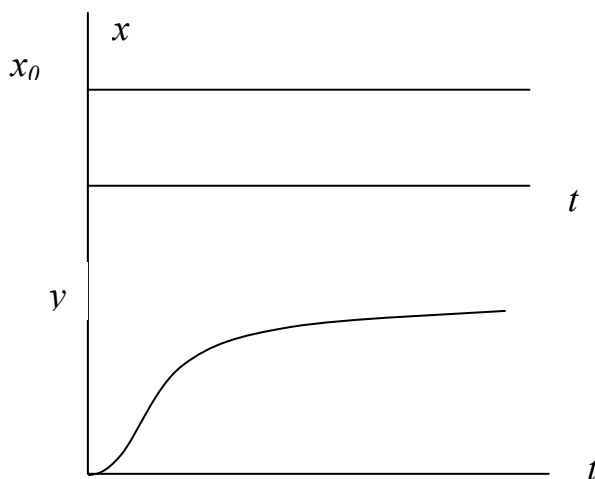


Рис. 4.

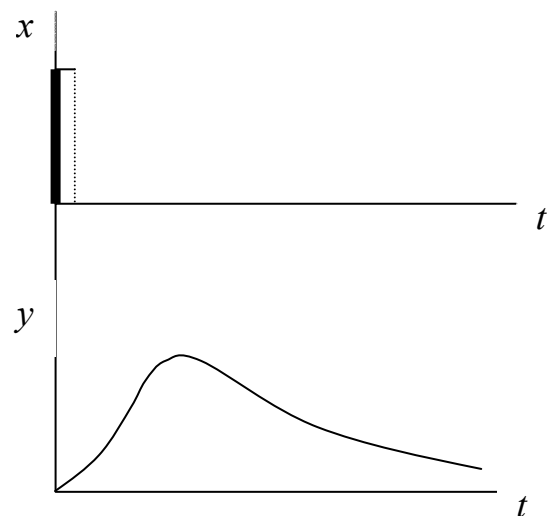


Рис. 5.

Реакция объекта на δ функцию (в реальных условиях на импульс конечной длительности и амплитуды, например, прямоугольный) называется импульсной характеристикой (весовой функцией) объекта управления (рис. 5).

Частотные характеристики

Определяют поведение объекта в частотной области при подаче на его вход гармонического сигнала:

$$x(t) = x_{\max} \sin \omega t,$$

где $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$ - круговая частота сигнала, f - частота, T - период повторения сигнала, x_{\max} - амплитуда сигнала.

На выходе линейного объекта также возникают гармонические колебания той же частоты, но с другой амплитудой и фазой (рис. 6):

$$y(t) = y_{\max} (\omega t + \varphi); \quad \varphi = \frac{\Delta t}{T} 360^\circ$$

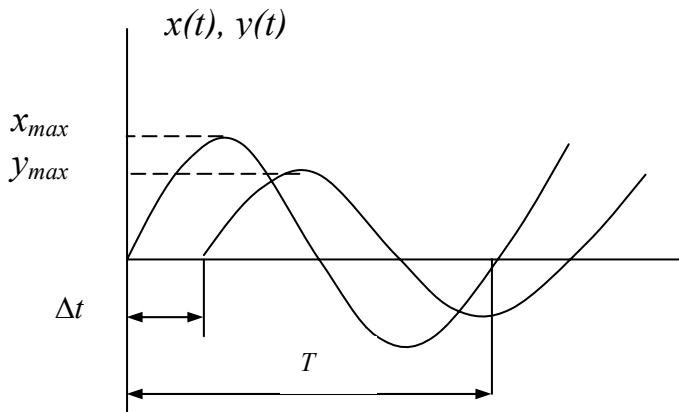


Рис. 6.

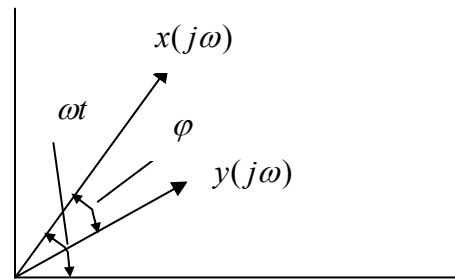


Рис. 7.

Значения y_{\max} и φ зависят от частоты входного сигнала. Поскольку нас интересует изменение сразу двух величин – амплитуды и фазы, частотные характеристики удобно рассматривать в комплексной плоскости. Гармонический входной сигнал изображается на комплексной плоскости вектором $x(j\omega)$, длина (модуль) которого равен амплитуде x_{\max} , а угол наклона (аргумент) равен фазе колебаний ωt (рис. 7):

$$x(t) \propto x_{\max} (\omega) e^{j\omega t} = x(j\omega)$$

(Символ \propto в данном случае означает «изображается»).

Аналогично выходной сигнал объекта $y(t)$ изображается в комплексной плоскости вектором $y(j\omega)$:

$$y(t) \propto y_{\max}(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)} = y(j\omega)$$

Изображения $x(j\omega)$ и $y(j\omega)$ называются изображениями по Фурье (спектрами Фурье) гармонических сигналов $x(t)$ и $y(t)$.

Отношение изображений Фурье выходного гармонического сигнала к входному называется частотной передаточной функцией (ЧПФ) или комплексной частотной характеристикой $W(j\omega)$:

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{y_{\max}(\omega)}{x_{\max}(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Модуль частотной передаточной функции $A(\omega)$ на частоте ω определяет коэффициент передачи объекта на данной частоте, $\varphi(\omega)$ - сдвиг по фазе между выходным и входным сигналами на частоте ω .

Передаточная функция есть функция комплексной переменной $p = \alpha + j\omega$. Частотная передаточная функция есть функция мнимой переменной $j\omega$. Следовательно, частотная передаточная функция есть частный случай передаточной функции, когда переменная p принимает чисто мнимое значение $j\omega$. Поэтому формально выражение для частотной передаточной можно найти, заменяя в передаточной функции $W(p)$ переменную p на $j\omega$, т.е. полагая $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + 1}$$

В чём же разница между передаточной функцией и частотной передаточной функцией?

Передаточная функция отражает поведение объекта регулирования или любого динамического звена в динамике при произвольной форме входного воздействия. Частотная передаточная функция отражает

поведение объекта (звена) лишь в установившемся режиме гармонических колебаний. Таким образом, частотная передаточная функция есть частный случай передаточной функции (так же, как мнимая переменная $j\omega$ есть частный случай комплексной переменной p).

Частотную передаточную функцию записывают в алгебраической форме (декартовых координатах):

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)]; \quad Q(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)],$$

либо в показательной форме (полярных координатах):

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)|; \quad \varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)]$$

Годограф вектора $W(j\omega)$ (график, описываемый концом вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞) называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ). АФХ показывает, как изменяются отношения амплитуд и сдвиг по фазе между выходным и входным сигналами при изменении частоты входного сигнала (рис. 8).

Зависимости отношения амплитуд выходного и входного сигналов $A(\omega)$ и сдвига по фазе между выходным и входным сигналами $\varphi(\omega)$ от частоты называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристиками соответственно (рис. 9). АФХ содержит такую же информацию об объекте (звене), как АЧХ и ФЧХ вместе взятые.

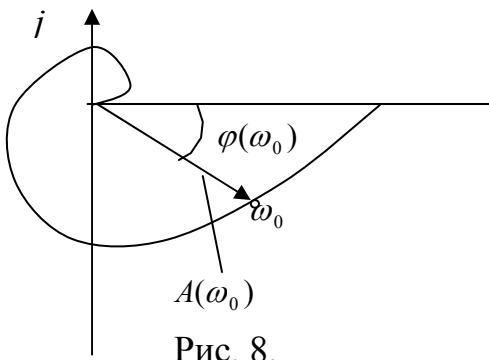


Рис. 8.

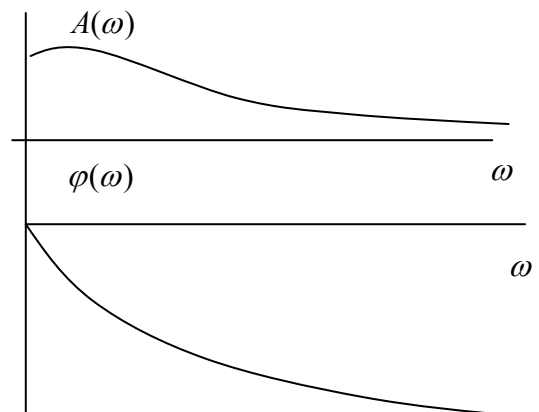


Рис. 9.

Основные свойства объектов регулирования.

Нагрузка

Нагрузка – количество вещества или энергии, отбираемое в процессе работы от объекта регулирования. Изменение нагрузки, как правило, является основным возмущающим воздействием в системе регулирования, т.к. приводит к нарушению равновесия между притоком и стоком вещества (энергии) в объекте, что вызывает изменение регулируемой переменной (например, уровня жидкости в ёмкости (рис. 10))

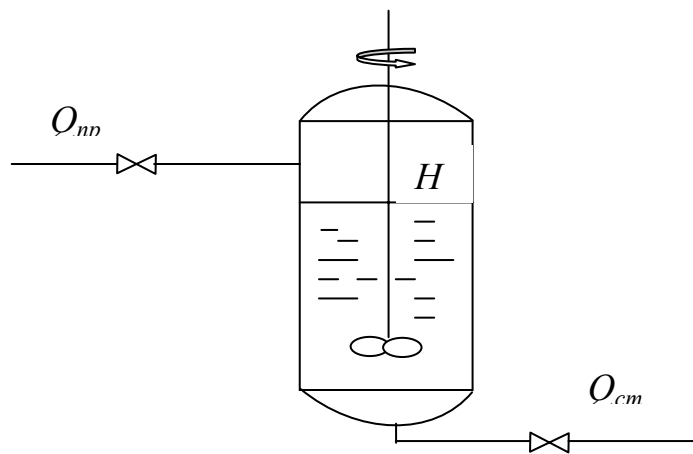


Рис. 10.

Кроме того, изменение нагрузки приводит к изменению динамических характеристик объекта. Например, в ёмкости с идеальным перемешиванием (рис.10) постоянная времени равна отношению объёма жидкости, запасённой ёмкостью, к нагрузке, т.е. постоянная времени этого объекта обратно пропорциональна нагрузке.

Ёмкость

Ёмкость- количество вещества (энергии), которое способен накопить объект. Ёмкость характеризует инерционность объекта регулирования.

Объекты регулирования могут быть одно- и многоемкостными. Многоемкостные объекты состоят из двух и более емкостей, разделённых

переходными сопротивлениями. Количество емкостей определяет порядок дифференциального уравнения объекта. Например, ёмкость с жидкостью на рис. 10 относится к числу одноёмкостных объектов. Примером трёхемкостного объекта является кожухо-трубчатый теплообменник на рис. 2, в котором нагреваемая жидкость получает тепло через стенки трубок от теплоносителя. Первая ёмкость – количество тепла в нагреваемой жидкости в межтрубном пространстве. Вторая ёмкость – количество тепла в теплоносителе внутри трубок. Третья ёмкость – количество тепла в стенках труб (эта ёмкость обычно мала по сравнению с остальными, и ею пренебрегают).

Самовыравнивание

Самовыравнивание – способность объекта восстанавливать равновесие между притоком и стоком вещества (энергии) за счёт изменения регулируемой переменной вследствие внутренней отрицательной обратной связи в объекте регулирования. Например, в ёмкости со свободным сливом (рис. 10) при увеличении притока увеличивается уровень и за счёт этого увеличивается сток до тех пор, пока равновесие между притоком и стоком не восстановится. Чем больше величина самовыравнивания, тем меньше под действием возмущений отклоняется регулируемая переменная. Таким образом, самовыравнивание облегчает работу автоматического регулятора.

В зависимости от величины самовыравнивания объекты регулирования можно разделить на объекты с положительным, нулевым и отрицательным самовыравниванием.

С динамической точки зрения объекты с положительным самовыравниванием являются устойчивыми инерционными звеньями. Их переходные характеристики заканчиваются в установившемся режиме

участком, на котором регулируемая переменная приходит в состояние покоя и перестаёт изменяться (рис. 11, кривая 1).

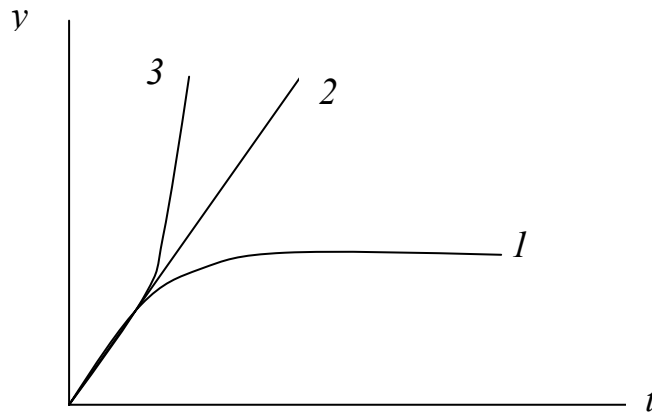


Рис. 11.

Количественно величина самовыравнивания характеризуется коэффициентом самовыравнивания ρ , представляющем модуль величины обратной статическому коэффициенту передачи объекта:

$$\rho = \frac{1}{|K|}$$

Коэффициент самовыравнивания показывает, на сколько должна измениться входная переменная объекта для того, чтобы выход изменился на единицу.

Линейные объекты обладают постоянным самовыравниванием ($\rho = const$), нелинейные — переменным ($\rho = Var$).

К объектам, не обладающим самовыравниванием (объектам с нулевым самовыравниванием), относятся так называемые нейтральные или астатические объекты, представляющие с динамической точки зрения интегрирующие звенья. Изменения регулируемой переменной в таких объектах могут быть сколь угодно большими. Примером нейтрального

объекта является ёмкость с принудительным сливом (рис. 12). Здесь при $Q_{np} \neq Q_{cm}$ уровень растёт до переполнения ёмкости или падает до нуля.

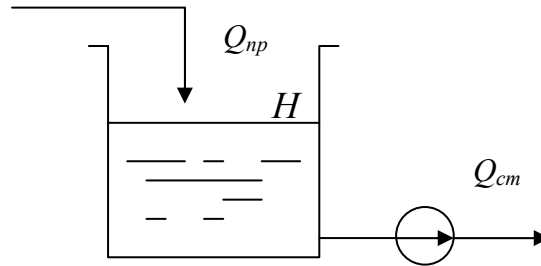


Рис. 12.

При равенстве между притоком и стоком такой объект может находиться в равновесии при любом значении регулируемой переменной, поэтому и называется нейтральным или астатическим.

Установившийся участок переходной характеристики астатического объекта представляет прямую, на которой регулируемая переменная изменяется с постоянной скоростью (кривая 2 на рис. 11).

Уравнение идеального интегрирующего звена

$$y(t) = K_a \int_0^t x(t) dt,$$

откуда
$$K_a = \frac{dy/dt}{x}$$

Параметр K_a , характеризующий объекты с нулевым самовыравниванием, называется приведённой скоростью разгона нейтрального объекта и имеет смысл скорости изменения регулируемой переменной, приходящейся на единицу входного воздействия.

Существуют объекты, в которых при определённых условиях возникает неуправляемый процесс. В этих объектах скорость изменения регулируемой переменной в переходном процессе имеет тенденцию к

самонарастанию (кривая 3 на рис. 11). Такие объекты называют объектами с отрицательным самовыравниванием.

С динамической точки зрения они являются неустойчивыми звеньями. Для нейтральных и неустойчивых объектов $\rho = 0$.

Запаздывание

Запаздывание – промежуток времени от момента нанесения возмущения до начала изменения регулируемой переменной. Различают чистое и ёмкостное запаздывание.

Чистое (транспортное) запаздывание τ_0 – время, которое поток вещества (энергии) затрачивает на прохождение расстояния от точки нанесения возмущения до точки измерения регулируемой переменной в одноёмкостном объекте. Примером звена с чистым запаздыванием является ленточный питатель (транспортёр) (рис. 13).

Время чистого запаздывания равно отношению длины активного участка конвейерной ленты ℓ к линейной скорости ленты V :

$$\tau_0 = \frac{\ell}{V}$$

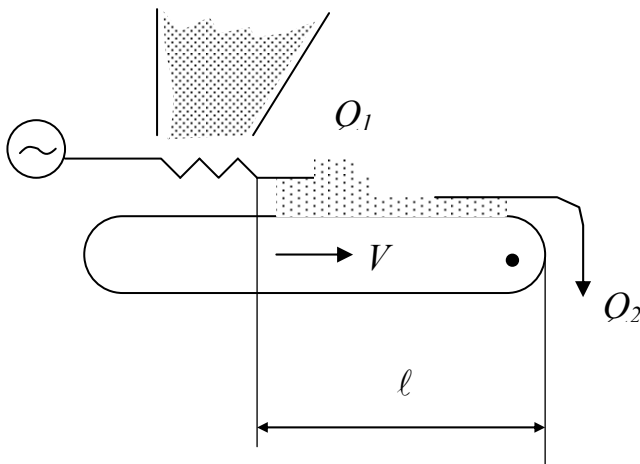


Рис. 13.

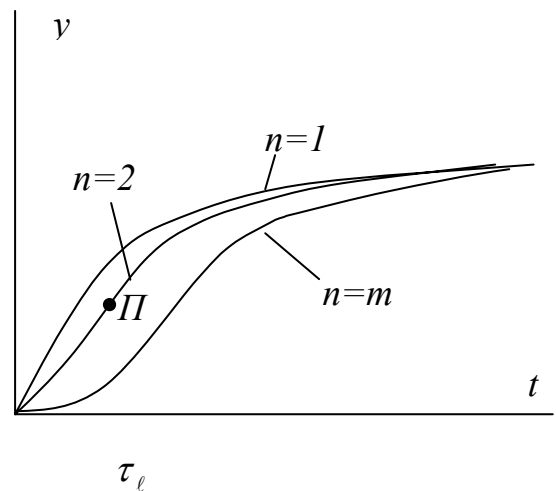


Рис. 14.

В многоемкостных объектах несколько емкостей соединены последовательно, что вызывает замедление перетока вещества (энергии) из одной ёмкости в другую и приводит к возникновению емкостного запаздывания. На рис.14 показаны переходные характеристики одно – ($n=1$), двух - ($n=2$), и многоемкостных ($n=m$) объектов. При числе емкостей $n>1$ в переходной характеристике появляется точка перегиба $П$. С ростом n начальный участок переходной характеристики всё больше тяготеет к оси абсцисс, в результате чего и образуется емкостное запаздывание τ_e .

Между чистым и емкостным запаздываниями существует принципиальное различие. При чистом запаздывании регулируемая переменная равна нулю на протяжении всего времени запаздывания. При емкостном запаздывании она изменяется, хотя и очень мало. Во временной области транспортное и емкостное запаздывание проявляются приблизительно одинаково, а в частотной области поведение этих звеньев существенно различается.

Реальные объекты обычно содержат оба типа запаздывания, в результате чего общее запаздывание τ равно их сумме:

$$\tau = \tau_0 + \tau_e$$

Отделить на экспериментальной характеристике емкостное запаздывание от чистого практически невозможно. Поэтому, если чистое запаздывание определяется по экспериментальной кривой разгона, его величина всегда субъективна, т.е. зависит от исследователя.

Запаздывание резко ухудшает качество регулирования в АСР.

1.2. Методы математического описания объектов регулирования

Методы математического описания объектов регулирования можно разделить на аналитические (т.е. не требующие проведения эксперимента

на промышленном объекте) и экспериментальные (т.е. основанные на результатах эксперимента).

Аналитическими называются методы получения математических моделей объектов, основанные на анализе физико-химических процессов, происходящих в объекте, с учётом его конструкции и характеристик перерабатываемых веществ.

Достоинства аналитических моделей объектов

1. Не требуется проведение промышленных экспериментов на объекте. Поэтому эти методы пригодны для нахождения моделей объектов на стадии их проектирования или при невозможности экспериментального исследования характеристик объектов регулирования.
2. В аналитические модели входят конструктивные характеристики объектов и показатели технологического режима их функционирования. Поэтому такие модели могут использоваться для выбора оптимальной конструкции аппарата и оптимизации его технологического режима.
3. Аналитические модели можно использовать для подобных объектов. Вместе с тем, аналитические модели достаточно сложны. В реальных объектах могут одновременно происходить процессы трёх типов: химические превращения, тепло- и массообмен. Одновременный учёт всех этих процессов – достаточно сложная задача.

Экспериментальные методы получения моделей включают получение временных или частотных характеристик в результате проведения промышленного эксперимента и их аппроксимацию, т.е. подбор аналитического соотношения, с требуемой точностью описывающего экспериментальные данные.

При снятии временных характеристик объект находится в переходном режиме от одного установившегося состояния к другому. При снятии частотных характеристик объект вводится в установившийся режим гармонических колебаний. Поэтому получение частотных

характеристик, в принципе, позволяет получить более представительную информацию об объекте, в гораздо меньшей степени зависящую от случайных возмущений, действующих на объект. Но эксперимент по снятию частотных характеристик является более трудоёмким по сравнению с экспериментом по снятию временных характеристик и требует специальной аппаратуры. Поэтому наиболее доступным в реальных условиях является получение временных характеристик. Следует однако отметить, что экспериментальные модели объектов можно использовать только для тех объектов и тех условий их функционирования, для которых проводился эксперимент.

1.3. Получение и аппроксимация временных характеристик объектов регулирования

Подготовка и проведение эксперимента

При разработке схемы эксперимента по снятию временных характеристик объектов регулирования решаются вопросы, связанные с измерением и регистрацией испытательного воздействия и регулируемой переменной. Планирование эксперимента сводится к выбору вида испытательного воздействия, величины его амплитуды и количества опытов.

Для получения кривой разгона в качестве испытательного воздействия используют ступенчатую функцию. Если ступенчатое воздействие недопустимо (объект регулирования без самовыравнивания или недопустимо длительное отклонение регулируемой переменной от номинала), используется воздействие типа прямоугольный импульс. Полученная таким образом импульсная переходная характеристика в соответствии с принципом суперпозиции для линейных объектов может быть перестроена в кривую разгона.

При выборе амплитуды испытательного воздействия ищут компромисс между следующими противоречивыми требованиями. С одной стороны, амплитуда входного воздействия должна быть достаточно большой для уверенного выделения полезного сигнала на фоне шумов измерения. С другой стороны, слишком большие отклонения регулируемой переменной могут привести к нарушениям режима работы объекта, приводящим к снижению качества продукции или возникновению аварийного режима. Кроме того, при больших возмущениях сказывается нелинейность статических характеристик объекта.

При определении количества опытов полезно учесть следующие факторы: линейность статической характеристики объекта, степень зашумлённости характеристик, величину колебаний нагрузки, нестационарность характеристик во времени.

Перед проведением эксперимента объект должен быть застabilизирован в окрестности номинального режима его функционирования. Эксперимент по снятию временной характеристики продолжается до тех пор, пока не установится новое значение регулируемой переменной.

При зашумлённости объекта экспериментальные характеристики сглаживаются по времени при высокочастотном шуме или по множеству при низкочастотном шуме.

Аппроксимация переходных характеристик объектов регулирования.

Задача аппроксимации включает три этапа.

1. Выбор аппроксимирующей передаточной функции.

Переходные характеристики объектов с самовыравниванием и сосредоточенными параметрами аппроксимируют дробно-рациональной передаточной функцией в общем случае с чистым запаздыванием вида:

$$W_{об}(p) = K_{об} \frac{b_m p^m + \dots + 1}{a_n p^n + \dots + 1} e^{-p\tau} \quad (7)$$

Для объектов без самовыравнивания в знаменателе передаточной функции (7) множителем добавляется переменная преобразования Лапласа p – признак интегрирующего звена.

Как показывает практика, удовлетворительная точность аппроксимации достигается при использовании моделей, для которых $n=1,2,3$, а $n-m=1$ при отсутствии точки перегиба в кривой разгона и $n-m \geq 2$ при её наличии.

2. Определение коэффициентов аппроксимирующей передаточной функции. (См. ниже)
3. Оценка точности аппроксимации.

Для оценки точности аппроксимации необходимо построить расчётную характеристику и определить максимальную ошибку аппроксимации. Выражения для переходных характеристик, соответствующих некоторым аппроксимирующим передаточным функциям, приведены в табл.1. При расчётах на ЭВМ в выражениях для переходных характеристик следует перейти к дискретному времени $t=i\Delta t$ (Δt – интервал дискретности отсчётов), а при наличии в модели (7) чистого запаздывания $\tau = k\Delta t$ к аргументу

$$t = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leq k \\ (i - k) & \text{при } i > k \end{cases}$$

*Аппроксимация переходных характеристик объектов
с самовыравниванием инерционным звеном первого порядка с
запаздыванием*

а) Графический способ (метод касательной)

Передаточная функция ищется в виде:

$$W(p) = \frac{K}{Tp+1} e^{-p\tau} \quad (8)$$

Для определения τ и T к переходной характеристике (рис.15) проводят касательную AB в точке перегиба C (точке перегиба соответствует максимальный угол α между касательной и осью абсцисс)

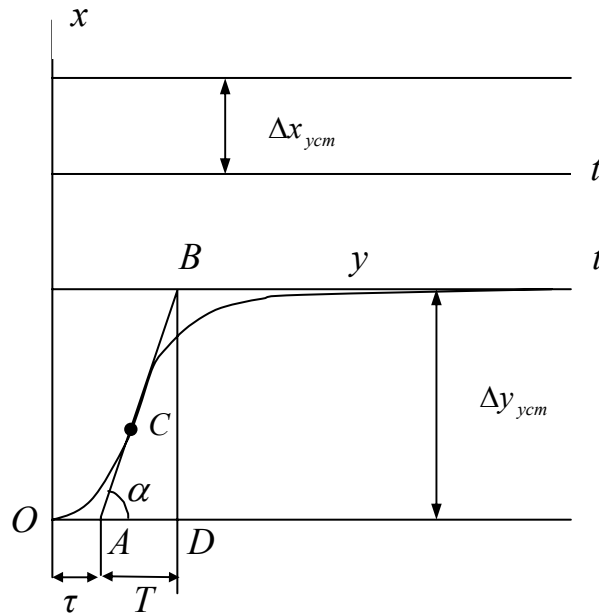


Рис. 15.

Отрезок OA , отсекаемый касательной на оси абсцисс, принимается за время чистого запаздывания τ :

$$\tau = OA$$

Длина подкасательной (проекция отрезка AB на ось абсцисс) принимается за T :

$$T = AD$$

Коэффициент передачи K находится как отношение приращений выходной и входной величин в установившемся режиме:

$$K \approx \frac{\Delta y_{уст}}{\Delta x_{уст}} \quad (9)$$

Таблица 1.

№ модели	Передаточная функция	Корни характеристического уравнения	Переходная характеристика
1	$\frac{K}{a_1 p + 1}$	$p_1 = -\frac{1}{a_1}$	$y(t) = Kx(1 - e^{-\frac{t}{a_1}})$, x - амплитуда ступенчатого воздействия
2	$\frac{K}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_1 = \alpha$ $p_2 = \beta$	$y(t) = Kx(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{\alpha t} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} e^{\beta t})$
3	$\frac{K}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$	$y(t) = Kx \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)} e^{\alpha t} \sin \left[\omega t + \arctg \left(-\frac{\omega}{\alpha} \right) \right] \right\}$
4	$\frac{K(bp + 1)}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_1 = \alpha$ $p_2 = \beta$	$y(t) = Kx \left[1 + \frac{\beta(\alpha b + 1)}{\alpha - \beta} e^{\alpha t} + \frac{\alpha(\beta b + 1)}{\beta - \alpha} e^{\beta t} \right]$
5	$\frac{K(bp + 1)}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$	$y(t) = kx \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right) [(1 + \alpha b)^2 + b^2 \omega^2]} \cdot e^{\alpha t} \sin \left[\omega t + \arctg \left(-\frac{\omega}{\alpha + b(\alpha^2 + \omega^2)} \right) \right] \right\}$
6	$\frac{K}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_1 = \alpha$ $p_2 = \beta$ $p_3 = \gamma$	$y(t) = Kx \left[1 - \frac{\beta\gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} e^{\alpha t} - \frac{\alpha\gamma}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} e^{\beta t} - \frac{\alpha\beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} e^{\gamma t} \right]$
7	$\frac{K}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ $p_3 = \gamma$	$y(t) = kx \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega^2 + (\alpha - \gamma)^2}} e^{\alpha t} \sin \left[\omega t + \arctg \frac{\omega(\gamma - 2\alpha)}{\alpha(\alpha - \gamma) - \omega^2} \right] - \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\omega^2 + (\alpha - \gamma)^2} e^{\gamma t} \right\}$
	$\frac{K(bp + 1)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}$	$p_1 = \alpha$ $p_2 = \beta$ $p_3 = \gamma$	$y(t) = Kx \left[1 - \frac{\beta\gamma(\alpha b + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} e^{\alpha t} - \frac{\alpha\gamma(\beta b + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} e^{\beta t} - \frac{\alpha\beta(\gamma b + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} e^{\gamma t} \right]$

	$\frac{K(bp+1)}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1}$	$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ $p_3 = \gamma$	$y(t) = Kx \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \omega^2)[(1+ab)^2 + b^2\omega^2]}{(\alpha - \gamma)^2 + \omega^2}} e^{\alpha t} \sin[\omega t + \right.$ $\left. + \operatorname{arctg} \frac{\omega[(\gamma - 2\alpha) - b(\alpha^2 + \omega^2)]}{[\alpha(\alpha - \gamma) - \omega^2] + b(\alpha - \gamma)(\alpha^2 + \omega^2)} \right] + \frac{(\alpha^2 + \omega^2)(\gamma b + 1)}{\omega^2 + (\alpha - \gamma)^2} e^{\gamma t} \left. \right\}$
--	--	---	---

б) Интерполяционный способ

Кривая разгона предварительно нормируется от 0 до 1 по формуле

$$\tilde{y}(t) = \frac{y(t) - y(0)}{y(\infty) - y(0)}; \quad 0 \leq \tilde{y}(t) \leq 1 \quad (10)$$

На нормированной кривой (рис.16) выбираются две точки A и B (узлы интерполяции), через которые должна проходить расчётная кривая.

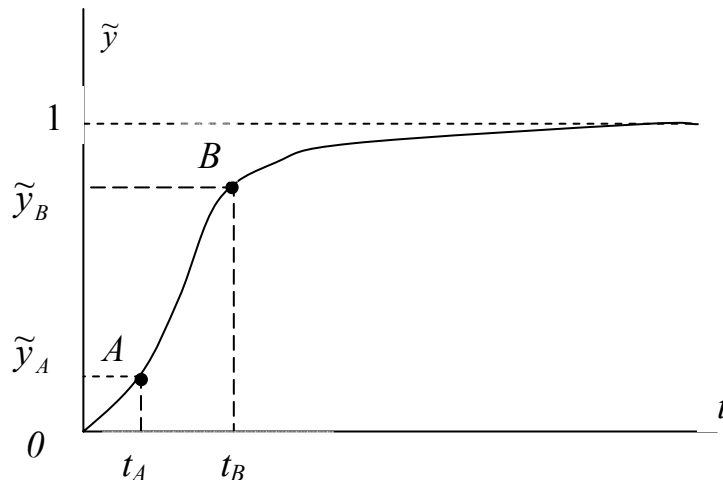


Рис. 16.

Нормированная переходная характеристика звена с передаточной функцией (8) равна

$$\tilde{y}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right) \quad (11)$$

Записывая выражение (11) для точек A и B получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_A &= 1 - e^{-\frac{t_A - \tau}{T}} \\ \tilde{y}_B &= 1 - e^{-\frac{t_B - \tau}{T}} \end{aligned} \right\}$$

Разрешая эту систему относительно τ и T , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{t_B \ln(1 - \tilde{y}_A) - t_A \ln(1 - \tilde{y}_B)}{\ln(1 - \tilde{y}_A) - \ln(1 - \tilde{y}_B)} \\ T &= -\frac{t_A - \tau}{\ln(1 - \tilde{y}_A)} = -\frac{t_B - \tau}{\ln(1 - \tilde{y}_B)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Аппроксимация переходных характеристик объектов регулирования без самовыравнивания интегрирующим звеном с запаздыванием или реальным интегрирующим звеном

Аппроксимирующая передаточная функция ищется в виде:

$$W(p) = \frac{K_a}{p} e^{-p\tau} \quad (13)$$

$$\text{или } W(p) = \frac{K_a}{p(Tp+1)} \quad (14)$$

Параметры моделей (13), (14) можно легко определить, проведя асимптоту BC к установившемуся участку кривой разгона (рис.16.):

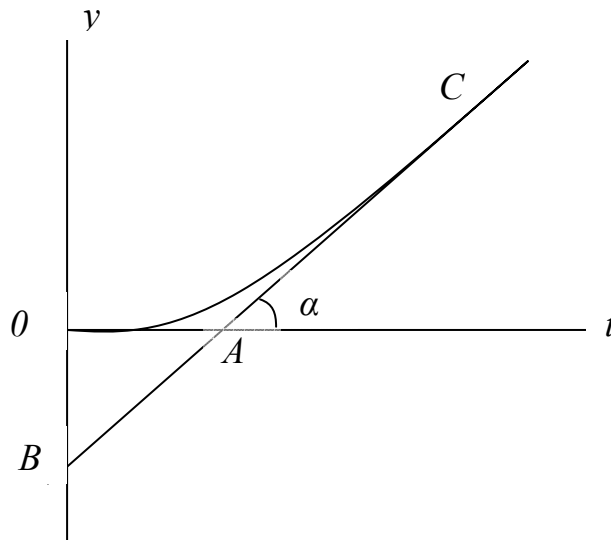


Рис. 16.

$$K_a = \frac{dy/dt}{\Delta x_{уст}} = \frac{tg\alpha}{\Delta x_{уст}} = \frac{OB}{OA \cdot \Delta x_{уст}} \quad (15)$$

$$\tau = OA \text{ (для модели (13))}$$

$T=OA$ (для модели (14))

*Аппроксимация переходных характеристик объектов регулирования
звеном n -ного порядка*

Поскольку рассматриваемый ниже метод предназначен для аппроксимации переходных характеристик объектов без чистого запаздывания и с самовыравниванием, то из кривой разгона необходимо предварительно исключить составляющие, соответствующие звеньям чистого запаздывания и интегрирующему, если таковые имеются.

Для исключения составляющей, обусловленной чистым запаздыванием, следует все абсциссы кривой разгона уменьшить на величину чистого запаздывания τ (т.е. перенести начало координат вправо на τ). При этом в передаточной функции объекта с чистым запаздыванием

$$W_{об}(p) = W'_{об}(p) \cdot e^{-p\tau}$$

Участку AB переходной характеристики без запаздывания (рис.17) соответствует переходная функция $W'_{об}(p)$.

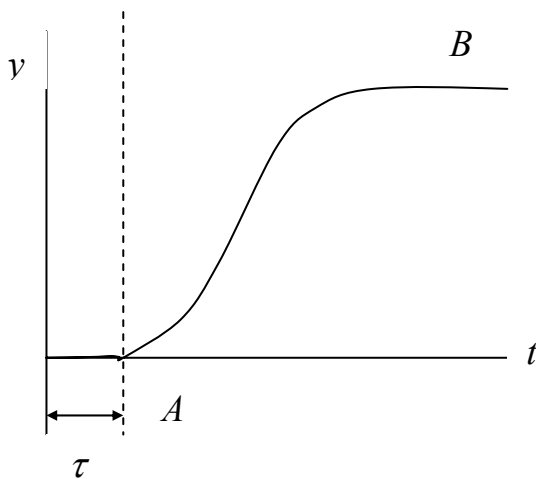


Рис.17.

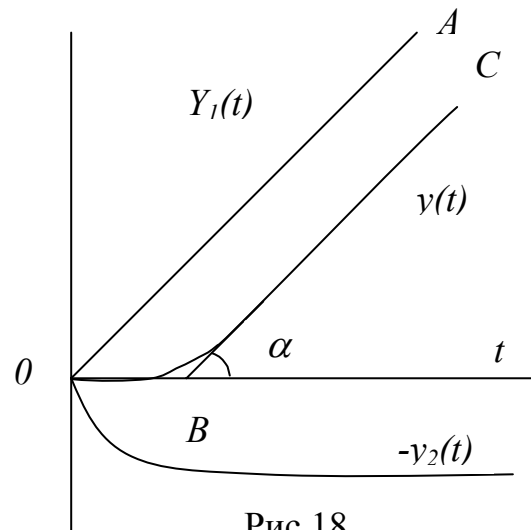


Рис.18.

При аппроксимации переходной характеристики объекта без самовыравнивания она представляется в виде разности двух характеристик (рис.18):

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

Для этого проведём асимптоту BC к установившемуся участку характеристики и луч OA параллельный BC . Вычитая $y_1(t)$ из $y(t)$, находим $-y_2(t)$. $y_1(t)$ - переходная характеристика интегрирующего звена с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{K_a}{p}$$

Коэффициент K_a по-прежнему находится по формуле (15):

$$K_a = \frac{tg \alpha}{\Delta x_{уст}}$$

$y_2(t)$ – переходная характеристика объекта с самовыравниванием. Ей соответствует передаточная функция $W_2(p)$. В силу линейности преобразования Лапласа передаточная функция объекта, соответствующая характеристике $y(t)$, равна:

$$W_{об}(p) = W_1(p) - W_2(p) = \frac{K_a}{p} - W_2(p)$$

Коэффициенты передаточной функции $W_2(p)$ могут быть найдены описываемым ниже методом.

Приводя выражение для $W_{об}(p)$ к общему знаменателю, получаем искомую передаточную функцию объекта без самовыравнивания.

Определение коэффициентов передаточной функции объекта методом площадей Симою

Метод предназначен для определения коэффициентов дробно-рациональной передаточной функции объекта вида

$$W_{об}(p) = K_{об} \frac{b_m p^m + \dots + 1}{a_n p^n + \dots + 1} \quad (16)$$

На практике, как отмечалось, $n=1,2,3$; $m=0,1$. Коэффициент передачи $K_{об}$, как всегда, определяется по формуле (9).

Для упрощения расчётов нормируем кривую разгона объекта в диапазоне 0-1 по формуле (10). Для нормированной кривой $\tilde{y}(t)$ при единичном входном воздействии $K_{об} = 1$.

Запишем выражение обратное передаточной функции (16) и разложим его в бесконечный ряд по степеням p :

$$\frac{1}{W_{об}(p)} = \frac{1 + \sum_{k=1}^n a_k p^k}{1 + \sum_{k=1}^m b_k p^k} = 1 + S_1 p + S_2 p^2 \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k p^k \quad (17)$$

Приводя (17) к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p , находим:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= b_1 + S_1 \\ a_2 &= b_2 + b_1 S_1 + S_2 \\ a_3 &= b_3 + b_1 S_1 + b_1 S_2 + S_3 \\ &\dots \\ a_k &= b_k + b_{k-1} S_1 + \dots + b_1 S_{k-1} + S_k \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

в частном случае при $m=0$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= S_1 \\ a_2 &= S_2 \\ &\dots \\ a_k &= S_k \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Числитель и знаменатель искомой передаточной функции (16) содержат $(n+m)$ неизвестных коэффициентов, поэтому для их нахождения нужно, чтобы система (18) (или в частном случае (19)) содержала столько же уравнений.

Итак, система (18) (или (19)) позволяет определить коэффициенты передаточной функции (16) через неизвестные пока коэффициенты разложения S_k .

Для определения последних рассмотрим изображение по Лапласу отклонения нормированной переходной характеристики от установившегося значения:

$$L\{1 - \tilde{y}(t)\} = L\{1\} - L\{\tilde{y}(t)\} = \frac{1}{p} [1 - W_{o\delta}(p)] \quad (20)$$

Из (20) находим

$$\frac{1}{W_{o\delta}(p)} \{1 - pL[1 - \tilde{y}(t)]\} = 1,$$

или с учётом определения преобразования Лапласа (3):

$$\frac{1}{W_{o\delta}(p)} \left\{ 1 - p \int_0^{\infty} [1 - \tilde{y}(t)] e^{-pt} dt \right\} = 1 \quad (21)$$

Раскладывая функцию e^{-pt} в ряд по степеням pt :

$$e^{-pt} = 1 - p \frac{t}{1!} + p^2 \frac{t^2}{2!} - p^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + (-1)^k p^k \frac{t^k}{k!} + \dots,$$

можем представить интеграл в выражении (21) в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) dt - p \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) \frac{t}{1!} dt + p^2 \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) \frac{t^2}{2!} dt + \dots + \\ &+ (-1)^k p^k \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) \frac{t^k}{k!} dt \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя разложения (17) и (22) в (21), перемножая степенные ряды от p и приравнивая в результирующем соотношении коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем следующие выражения для коэффициентов S_k .

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) dt, \\
 S_2 &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y})(S_1 - t) dt, \\
 S_3 &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y})(S_2 - S_1 t + \frac{t^2}{2}) dt \\
 S_4 &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) \left(S_3 - S_2 t + S_1 \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) dt, \\
 &\dots\dots\dots \\
 S_k &= \int_0^{\infty} (1 - \tilde{y}) \left[\sum_{i=0}^{k-2} S_{k-1-i} \frac{(-t)^i}{i!} + \frac{(-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] dt
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

При практических расчётах интегралы (23) определяются численными методами. Например, при использовании метода трапеций выражения для коэффициентов S_k приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= \Delta t \left[\sum_{i=0}^N (1 - \tilde{y}_i) - 0,5 \right] \\
 S_2 &= \Delta t \left[\sum_{i=0}^N (1 - \tilde{y}_i)(S_1 - i\Delta t) - 0,5S_1 \right] \\
 S_3 &= \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^N (1 - \tilde{y}_i) \left[S_2 - S_1 i\Delta t + \frac{(i\Delta t)^2}{2} \right] - 0,5S_2 \right\} \\
 S_4 &= \Delta t \left\{ \sum_{i=0}^N (1 - \tilde{y}_i) \left[S_3 - S_2 i\Delta t + S_1 \frac{(i\Delta t)^2}{2} - \frac{(i\Delta t)^3}{6} \right] - 0,5S_3 \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где Δt - интервал дискретности отсчётов нормированной переходной характеристики,

N - число точек переходной характеристики .

С геометрической точки зрения коэффициент S_1 есть площадь , ограниченная кривой $\tilde{y}(t)$ и линией установившихся значений. S_2 - есть площадь, взвешенная с весовой функцией $(S_1 - t)$ и т. д. Таким образом,

коэффициенты S_k есть некоторые взвешенные площади, что и определяет название метода.

Если при расчётах k -тый коэффициент S_k оказался отрицательным, необходимо в модели (16) уменьшить n на единицу или увеличить m (т.е. уменьшить разность $(n-m)$).

2. Промышленные регуляторы АСР [1 ÷ 4]

2.1. Функциональная схема автоматического регулятора

Автоматическим регулятором называется совокупность элементов, служащих для регулирования технологических процессов.

Функциональная схема замкнутой АСР имеет вид (рис.19)

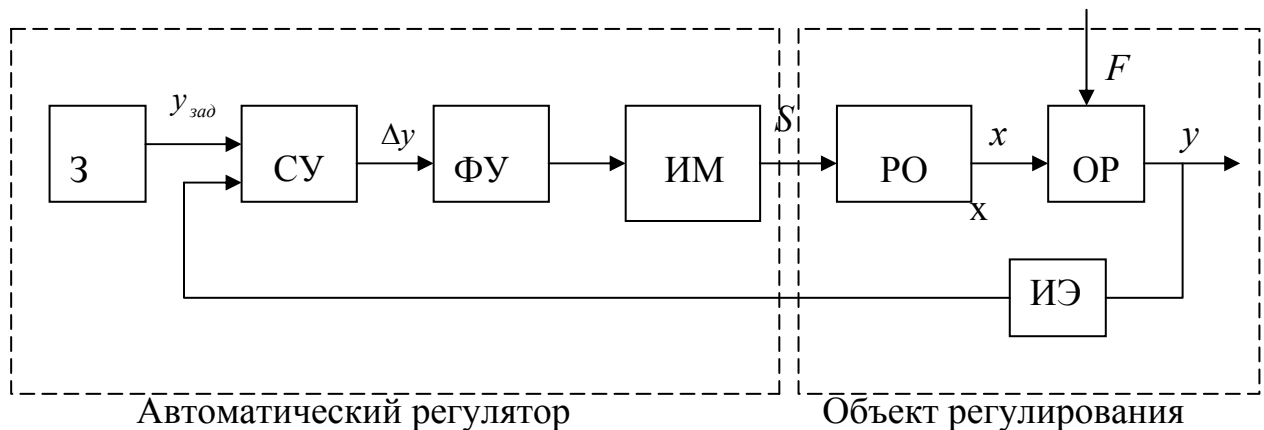


Рис. 19.

На рис. 19 обозначено:

З - задатчик регулируемой переменной – служит для установки её заданного (желаемого) значения;

СУ - сравнивающее устройство, вырабатывает сигнал рассогласования $\Delta y = y_{зад} - y$;

ФУ - формирующее устройство, служит для формирования закона регулирования (в электрических регуляторах совместно с ИМ);

ИМ - исполнительный механизм, приводит в действие РО;

РО - регулирующий (рабочий) орган, служит для изменения регулирующего воздействия x ;

ОР – собственно объект регулирования;

ИЭ – измерительный элемент, служит для измерения регулируемой переменной y и преобразования её в унифицированный сигнал.

Рабочий орган (вместе с приводом, если таковой имеется) принято относить к объекту регулирования. Измерительный элемент можно относить как к объекту, так и к регулятору. В тех случаях когда, измерительный элемент используется для снятия временной характеристики, его относят к объекту.

Таким образом, автоматический регулятор включает в себя задатчик регулируемой величины, сравнивающее устройство, формирующее устройство и исполнительный механизм.

2.2. Классификация регуляторов по потреблению энергии внешнего источника

По этому признаку регуляторы делятся на регуляторы прямого и непрямого действия.

В регуляторах прямого действия для перестановки рабочего органа используется энергия самой регулируемой среды. Например, в регуляторе уровня жидкости прямого действия для перестановки рабочего органа используется энергия жидкости, уровень которой регулируется.

Регуляторы прямого действия просты, дешевы, однако не обеспечивают высокого качества регулирования. Их недостатками также являются трудность реализации сложных законов регулирования и получения больших усилий для перестановки рабочего органа.

В регуляторах непрямого действия для перестановки рабочего органа используется энергия внешнего источника, по виду которой

различают электрические (электронные), пневматические, гидравлические, комбинированные регуляторы. Электрические регуляторы обладают целым рядом достоинств. Их основной недостаток (в обычном исполнении) - невозможность применения в пожаро- и взрывоопасных средах. Этому недостатка лишены пневматические регуляторы. Основное преимущество гидравлических регуляторов – повышенная мощность исполнительного механизма при сравнительно небольших габаритах. Комбинированные регуляторы позволяют сочетать достоинства регуляторов различного типа. Например, электропневматические системы сочетают достоинства электрических регуляторов с возможностью работы пневматических исполнительных механизмов в пожаро- и взрывоопасных средах. В последние годы повсеместное применение для реализации локальных систем автоматики находят программируемые контроллеры.

Выбор типа регулятора диктуется различными соображениями: характером окружающей среды, условиями работы, специальными требованиями.

2.3. Классификация регуляторов по закону регулирования

Под законом регулирования понимают уравнение динамики регулятора.

Известны пять типовых законов регулирования: пропорциональный (П), интегральный (И), пропорционально-интегральный (ПИ), пропорционально - дифференциальный (ПД) и пропорционально - интегрально- дифференциальный (ПИД) .

Пропорциональные (статические) регуляторы

Уравнение динамики П- регулятора

$$x = K_p \Delta y \quad (25)$$

где $\Delta y = y_{зад} - y$ - рассогласование регулируемой величины,

x - регулирующее воздействие (точнее, приращение регулирующего воздействия относительно постоянной составляющей x_0 , поэтому правильнее в (25) вместо x писать $x - x_0$, но x_0 обычно опускают),

K_p - коэффициент передачи П-регулятора.

Как видим из (25), регулирующее воздействие П-регулятора пропорционально рассогласованию, т.е. П-регулятор является безинерционным звеном с передаточной функцией $W_p(p) = K_p$.

Поскольку П-регулятор не вносит в систему отрицательный фазовый сдвиг (ФЧХ П-регулятора $\varphi_p(\omega) = 0$), АСР с П-регулятором имеет хорошие динамические свойства.

Недостатком систем с П-регулятором является наличие статической ошибки. Для отдельно взятого регулятора величина этой ошибки определяется из уравнения регулятора:

$$\Delta y = \frac{1}{K_p}$$

При работе П-регулятора в системе (рис.20)

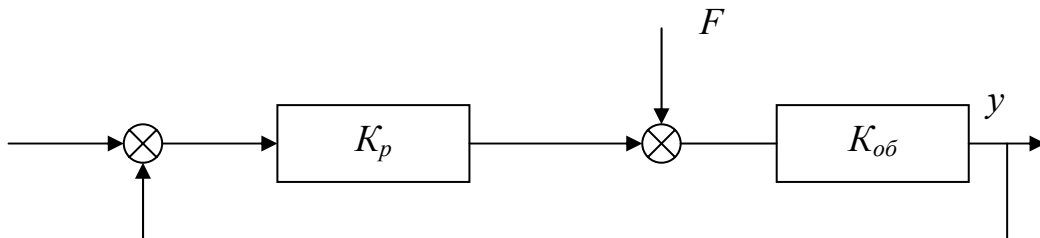


Рис. 20.

величина ошибки от возмущения F составляет

$$\Delta y = FK_{3CF} = F \frac{K_{об}}{1 + K_{об}K_p},$$

где K_{3CF} - коэффициент передачи замкнутой системы по возмущению.

Как видим, статическая ошибка в системе с П-регулятором обратно пропорциональна его коэффициенту передачи, предельное значение которого определяется требуемой величиной запаса устойчивости замкнутой АСР.

Пропорциональные регуляторы применяют при автоматизации малоинерционных объектов регулирования, когда значение K_p может быть выбрано достаточно большим с целью уменьшения статической ошибки.

Интегральные (астатические) регуляторы

Закон регулирования:

$$x = K_0 \int_0^t \Delta y dt, \quad (26)$$

т.е. регулирующее воздействие в этом случае пропорционально интегралу от рассогласования.

Коэффициент передачи И-регулятора

$$K_0 = \frac{dx/dt}{\Delta y}$$

имеет смысл скорости изменения регулирующего воздействия, приходящейся на единицу рассогласования.

Передаточная функция:

$$W_p(p) = \frac{K_0}{p}$$

Частотная передаточная функция:

$$W_p(j\omega) = -j \frac{K_0}{\omega} = \frac{K_0}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Достоинством И – регулятора является нулевая статическая ошибка. Из (26) следует, что эта ошибка равна

$$\Delta y = \frac{dx / dt}{K_0}$$

и в статике обращается в ноль.

В то же время, поскольку ФЧХ И – регулятора $\varphi(\omega) = -\pi/2$, система с И – регулятором имеет очень плохие динамические свойства, т.к. этот регулятор вносит в систему отрицательный фазовый сдвиг по фазе $-\pi/2$.

Интегральные регуляторы могут применяться только при автоматизации практически безинерционных объектов. АСР с И–регулятором и объектом без самовыравнивания структурно неустойчива, т.е. неустойчива при любых настройках регулятора.

Пропорционально – интегральные регуляторы

Закон регулирования ПИ–регулятора может быть записан в двух формах:

$$x = K_1 \Delta y + K_0 \int_0^t \Delta y dt = K_1 \left(\Delta y + \frac{1}{T_I} \int_0^t \Delta y dt \right) \quad (27)$$

Регулирующее воздействие ПИ–регулятора представляет сумму П– и И-составляющих с коэффициентами пропорциональности K_1 и K_0 .

Из сопоставления двух форм записи закона регулирования, получаем:

$$K_0 = \frac{K_1}{T_I},$$

где T_{II} – время изодрома.

Передаточная функция и частотная передаточная функция:

$$W_p(p) = K_1 + \frac{K_0}{p} = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_{II} p}\right),$$

$$W_p(j\omega) = \sqrt{K_1^2 + \left(\frac{K_0}{\omega}\right)^2} e^{-j \arctg \frac{K_0}{\omega K_1}}$$

Из последнего выражения видно, что в области малых частот при $\frac{K_0}{\omega} \gg K_1$ ПИ-регулятор ведёт себя как И-регулятор. При больших частотах $K_1 \gg \frac{K_0}{\omega}$, т.е. ПИ-регулятор ведёт себя как П-регулятор. Это даёт возможность ПИ-регулятору сочетать достоинства И-регулятора в статике и П-регулятора в динамике.

Физический смысл времени изодрома можно пояснить по переходной характеристике ПИ-регулятора (рис.21)

Как видно из этого рисунка, T_{II} – это время удвоения П-составляющей регулирующего воздействия ПИ-регулятора, или, что то же, время, на которое регулирующее воздействие ПИ-регулятора опережает регулирующее воздействие И-регулятора. Величина T_{II} характеризует скорость интегрирования. Чем больше T_{II} , тем меньше скорость интегрирования. При $T_{II} \rightarrow \infty$ ПИ-регулятор превращается в П-регулятор.

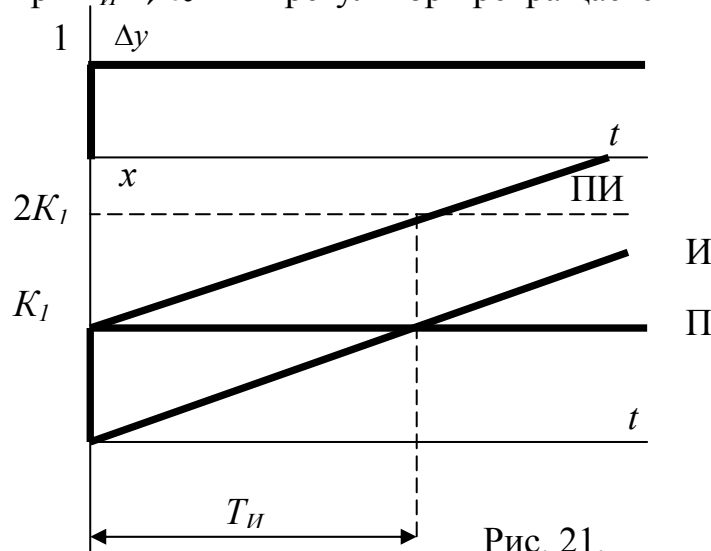


Рис. 21.

Итак, АСР с ПИ–регулятором имеет нулевую статическую ошибку за счёт наличия И–составляющей в законе регулирования. (Это справедливо для всех регуляторов с И–составляющей).

Как видно из ФЧХ ПИ–регулятора (рис.22), в области рабочих

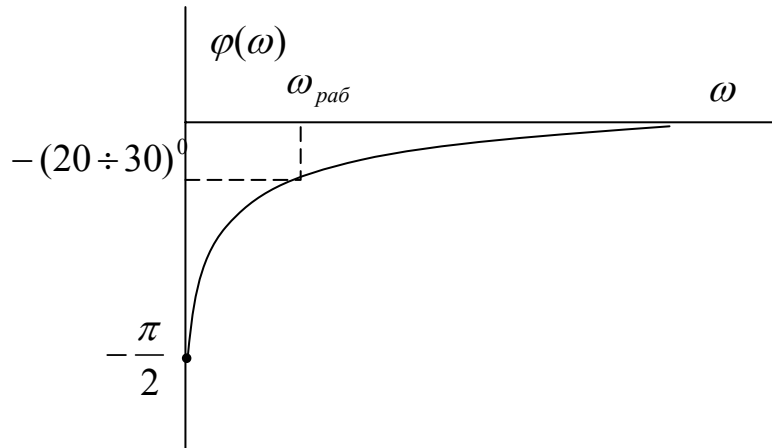


Рис. 22.

частот $\omega_{раб}$ ПИ–регулятор вносит в систему отрицательный фазовый сдвиг приблизительно $-(20-30)^\circ$. Это значительно меньше, чем И–регулятор, но больше, чем П–регулятор. Поэтому динамические свойства АСР с ПИ– регулятором значительно лучше, чем с И–регулятором, но хуже, чем с П– регулятором.

Пропорционально - дифференциальные регуляторы

Закон регулирования идеального ПД–регулятора:

$$x = K_1 \Delta y + K_2 \frac{d\Delta y}{dt} = K_1 \left(1 + T_{II} \frac{d\Delta y}{dt} \right), \quad (28)$$

где K_1, K_2 - коэффициенты пропорциональности П- и Д-составляющих закона регулирования. T_{II} – время предварения.

Передаточная и частотная передаточная функции:

$$W_p(p) = K_1 + K_2 p = K_1 (1 + T_{II} p),$$

$$W_p(j\omega) = \sqrt{K_1^2 + (K_2 \omega)^2} e^{j \arctg \frac{\omega K_2}{K_1}}$$

Из последнего выражения видно, что при малых частотах ПД-регулятор ведёт себя как П-регулятор, а при больших – как дифференциатор.

Поскольку идеальное дифференцирующее звено физически нереализуемо, в реальных ПД-регуляторах используется реальное (инерционное) дифференцирующее звено. Передаточная функция такого регулятора имеет вид

$$W_p(p) = K_1 + K_2 \frac{p}{T_0 p + 1}$$

Чем меньше постоянная времени T_0 , тем ближе характеристики идеального и реального регуляторов.

В статике передаточная функция ПД-регулятора совпадает с передаточной функцией П-регулятора, следовательно, АСР с ПД-регулятором также присуща статическая ошибка. Как видно из ФЧХ (рис.23),

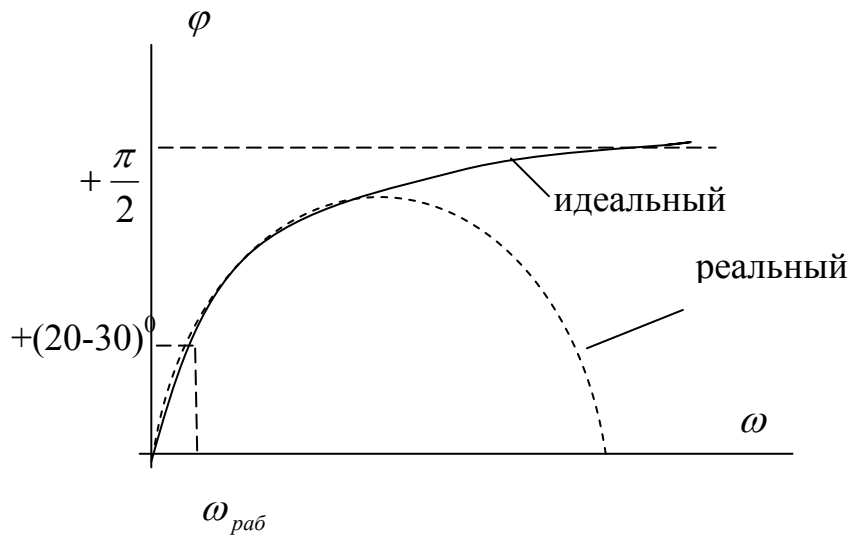


Рис. 23.

в области рабочих частот ПД-регулятор вносит положительный сдвиг по фазе в систему, увеличивая её запас устойчивости. Поэтому АСР с ПД-регулятором имеет наилучшие динамические свойства. По этой же причине значение K_1 может быть выбрано больше чем в случае П-

регулятора. Поэтому статическая ошибка в АСР с ПД регулятором меньше, чем в системе с П–регулятором. Тем не менее, ПД–регуляторы практически не применяются, т.к. при наличии высокочастотных помех, наложенных на низкочастотный полезный сигнал, операция дифференцирования резко ухудшает соотношение сигнал/шум, в результате чего амплитуда производной шума может существенно превысить амплитуду производной полезного сигнала.

Относительно физического смысла времени предварения можно сказать, что T_{II} - это время, на которое регулирующее воздействие ПД–регулятора опережает регулирующее воздействие П–регулятора при линейном входном воздействии (рис.24)

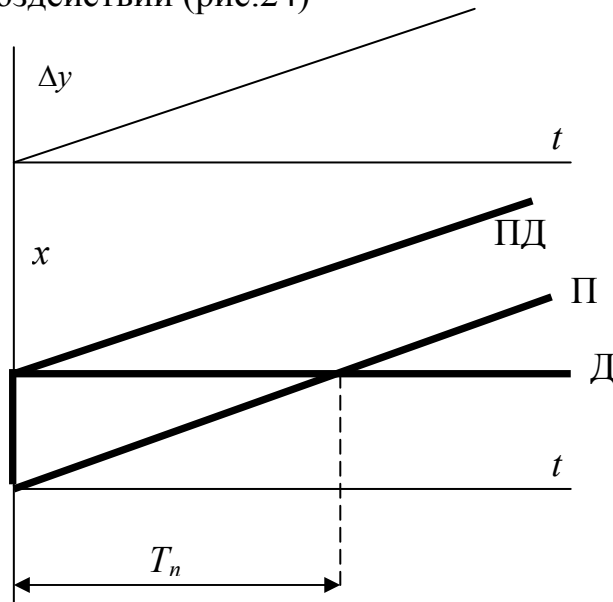


Рис. 24.

Пропорционально - интегрально – дифференциальные регуляторы

Уравнение динамики:

$$x = K_1 \Delta y + K_0 \int_0^t \Delta y dt + K_2 \frac{d\Delta y}{dt} = K_1 \left(\Delta y + \frac{1}{T_{II}} \int_0^t \Delta y dt + T_{II} \frac{d\Delta y}{dt} \right) \quad (29)$$

Передаточные функции идеального и реального ПИД–регуляторов:

$$W_p(p) = K_1 + \frac{K_0}{p} + K_2 p = K_1 \left(1 + \frac{1}{T_I p} + T_D p\right),$$

$$W_p(p) = K_1 + \frac{K_0}{p} + K_2 \frac{p}{T_0 p + 1}$$

Частотная передаточная функция идеального ПИД–регулятора:

$$W_p(j\omega) = \sqrt{K_1^2 + \left(\omega K_2 - \frac{K_0}{\omega}\right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega^2 K_2 - K_0}{\omega K_1}}$$

Системы с ПИД–регуляторами совмещают нулевую статическую ошибку с хорошей динамикой, поскольку как видно из ФЧХ ПИД–регулятора (рис.25) в области рабочих частот ПИД–регулятор так же, как

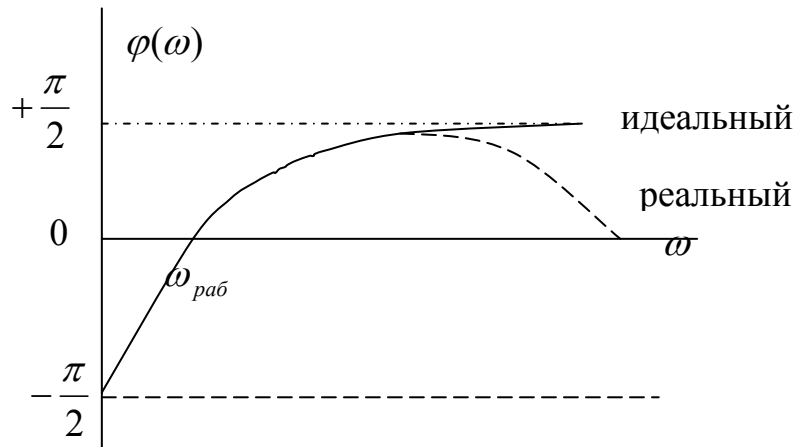


Рис. 25.

и П–регулятор, не вносит отрицательный фазовый сдвиг в систему.

Для повышения помехоустойчивости ПИД–регулятора на практике соотношение время предварения/время издрорма ограничивается сверху неравенством

$$T_D / T_I < 0,25, \quad (30)$$

поэтому помехоустойчивость ПИД–регулятора выше, чем ПД–регулятора.

При выборе закона регулирования учитывают следующие соображения.

Если статическая ошибка недопустима, регулятор должен содержать И–составляющую. В порядке ухудшения динамических свойств законы регулирования располагаются в следующем порядке: ПД, ПИД, П, ПИ, И.

Регуляторы с Д–составляющей обладают плохой помехозащищённостью. По этой причине ПД–регуляторы практически не применяются, а ПИ–регуляторы применяются при ограничении (30). Наибольшее применение находят на практике ПИ– и ПИД–законы регулирования.

3. Расчёт настроек регуляторов в линейных непрерывных системах [1÷4]

3.1. Качество регулирования

Будем определять качество регулирования совокупностью показателей, характеризующих форму кривой переходного процесса в замкнутой АСР (рис. 26).

Основные показатели качества

1. Максимальное динамическое отклонение $\Delta y_{дин}$ – наибольшее отклонение регулируемой переменной от её заданного значения в переходном процессе

$$\Delta y_{дин} = y_{max} - y_{зад}$$

В устойчивой АСР максимальным является первое отклонение. Показатель $\Delta y_{дин}$ характеризует динамическую точность регулирования.

2. Остаточное отклонение (остаточная неравномерность) $\Delta y_{ст}$ – абсолютная статическая ошибка регулирования, определяемая как разность между установившимся значением регулируемой величины и её заданным значением:

$$\Delta y_{cm} = y_{уст} - y_{зад}$$

Показатель Δy_{cm} характеризует точность регулирования в статическом режиме.

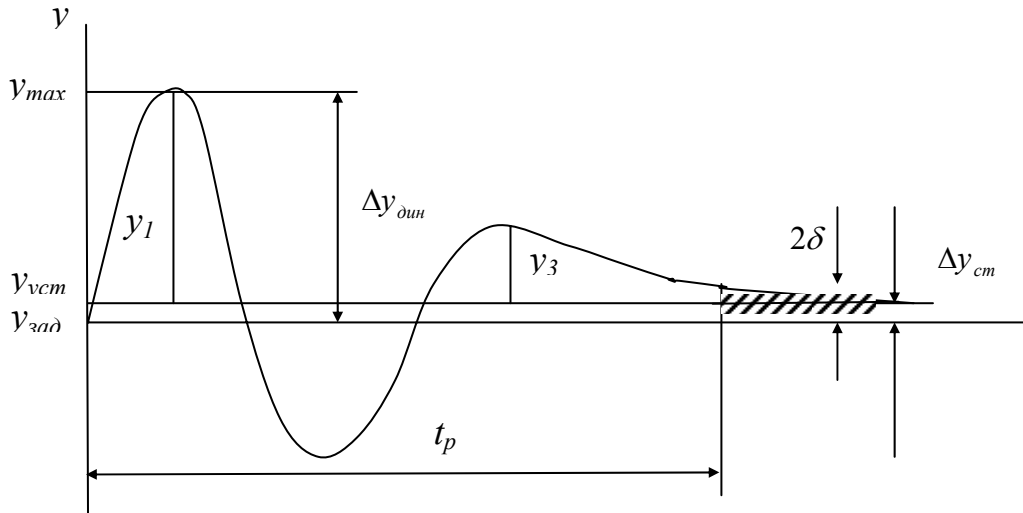


Рис. 26.

3. Степень затухания ψ - отношение разности двух соседних амплитуд колебаний, направленных по одну сторону от линии установившегося значения, к большей из них

$$\psi = \frac{y_1 - y_3}{y_1} = 1 - \frac{y_3}{y_1}; \quad 0 < \psi < 1 \quad (31)$$

Показатель ψ характеризует колебательность переходных процессов и запас устойчивости системы. Значение $\psi=0$ соответствует незатухающим колебаниям на границе устойчивости системы. При $\psi=1$ имеем апериодический переходной процесс.

4. Время регулирования t_p – промежуток времени от момента нанесения возмущающего воздействия до момента, начиная с которого отклонение регулируемой переменной от установившегося значения становится и остается меньше наперед заданного значения δ .

Показатель t_p характеризует быстродействие системы.

Рассмотренные показатели качества относятся к группе прямых показателей, т.е. показателей, позволяющих оценить качество непосредственно по кривой переходного процесса, для получения которой необходимо решить дифференциальное уравнение системы.

Помимо прямых, существуют косвенные критерии, позволяющие судить о качестве регулирования, не имея в распоряжении кривой переходного процесса. К таким критериям, в частности, относятся интегральные критерии качества, представляющие интегралы по времени от отклонения регулируемой переменной от установившегося значения $\Delta y = y - y_{уст}$, либо от некоторой функции этого отклонения и её производных. Простейшим является линейный интегральный критерий определяемый соотношением:

$$I_{лин} = \int_0^{\infty} (y - y_{уст}) dt$$

С геометрической точки зрения критерий $I_{лин}$ есть площадь между кривой $y(t)$ и линией $y_{уст}$. Величина $I_{лин}$ зависит от всех показателей качества, кроме $\Delta y_{уст}$. При этом с уменьшением $\Delta y_{дин}$ и t_p (т.е. улучшением качества регулирования) величина $I_{лин}$ падает, а с увеличением колебательности переходного процесса $I_{лин}$ также уменьшается, хотя качество регулирования при этом ухудшается. Итак, уменьшение $I_{лин}$ свидетельствует об улучшении качества регулирования только для хорошо затухающих переходных процессов. Поэтому критерий $I_{лин}$ применим для апериодических или слабоколебательных процессов. Для таких процессов наилучшими можно считать такие настройки регулятора, при которых значение $I_{лин}$ достигает минимума. Критерий $I_{лин}$ может быть вычислен через коэффициенты дифференциального уравнения замкнутой АСР.

Можно показать, что для объекта регулирования с самовыравниванием и ПИ–регулятора

$$I_{лин} = \frac{1}{K_0} \quad , \quad (32)$$

т.е. минимум $I_{лин}$ достигается при максимуме интегральной составляющей регулирующего воздействия, или, что то же, наилучшее качество переходного процесса достигается при максимуме K_0 .

Для колебательных переходных процессов применяют другие интегральные критерии, например,

$$I_{мод} = \int_0^{\infty} |y - y_{уст}| dt \quad ,$$

но данный критерий нельзя вычислить через коэффициенты дифференциального уравнения. Этого недостатка лишен квадратичный интегральный критерий $I_{кв}$:

$$I_{кв} = \int_0^{\infty} (y - y_{уст})^2 dt$$

3.2. Типовые оптимальные процессы

Требования к показателям качества противоречивы. Например, уменьшение динамической ошибки достигается за счёт увеличения колебательности и длительности переходных процессов. Наоборот, процессы с малым временем регулирования удаётся получить за счёт увеличения динамической ошибки. Поэтому относительно желаемых значений показателей качества в замкнутой АСР приходится принимать компромиссное решение. Переходные процессы с определёнными показателями качества рекомендуются при расчёте АСР в качестве типовых. В рассматриваемом ниже методе расширенных частотных

характеристик основным показателем качества считается степень затухания ψ , т.е. колебательность переходного процесса, поскольку этот показатель характеризует запас устойчивости АСР. В качестве типовых рекомендуются процессы, для которых

$$\psi = 0,75 \div 0,9,$$

т.е. третья амплитуда колебаний в 4-10 раз меньше первой.

В тех случаях, когда ставится задача выбора настроек регулятора, минимизирующей какой-либо показатель качества, соответствующий переходный процесс, а также значения настроек регулятора называются оптимальными в смысле указанного критерия. Например, в методе расширенных частотных характеристик ставится задача выбора настроек регулятора таким образом, чтобы помимо заданной колебательности переходного процесса, обеспечивалось минимальное значение критерия $I_{лин}$. Такой процесс является оптимальным в смысле критерия $I_{лин}$.

3.3. Упрощенные формулы для расчёта настроек регуляторов

В табл.2 приведены упрощённые формулы для определения настроек регуляторов, обеспечивающих заданную колебательность переходного процесса. Формулы получены по результатам моделирования АСР. Статические объекты представлены моделью инерционного звена с чистым запаздыванием (8), астатические объекты – моделью интегрирующего звена с запаздыванием (13)

Таблица 2

Регулятор Объект	П	И	ПИ	ПИД
$\frac{K_{об}}{Tp+1} e^{-p\tau}$	$\frac{0,7}{K_{об}\tau/T}$	$\frac{1}{2,7K_{об}T}$	$K_1 = \frac{0,7}{K_{об}\tau/T}$ $T_{II} = \tau + 0,3E$	$K_1 = \frac{1,2}{K_{об}\tau/T}$ $T_{II} = 2\tau \quad T_{II} = 0,4\tau$
$\frac{K_a}{p} e^{-p\tau}$	$\frac{0,7}{K_a\tau}$	—	$K_1 = \frac{0,7}{K_a\tau}$ $T_{II} = 3\tau$	$K_1 = \frac{1,1}{K_a\tau}$ $T_{II} = 2\tau; \quad T_{II} = 0,37\tau$

В табл. 3 приведены упрощённые формулы для расчёта регуляторов по методу Циглера –Никольса в частотной области. В этих формулах $\omega_{кр}$ - критическая частота, при которой система находится в режиме незатухающих колебаний на границе устойчивости. Частоту $\omega_{кр}$ можно определить экспериментально или по ФЧХ объекта как частоту, соответствующую фазовому сдвигу $-\pi$: $\varphi_{об}(\omega_{кр}) = -\pi$

$K_{Iкр}$ – критическое значение коэффициента передачи П-регулятора, при котором система находится на границе устойчивости. Значение $K_{Iкр}$ можно определить экспериментально или по АЧХ объекта регулирования:

$$K_{Iкр} = \frac{1}{A_{об}(\omega_{кр})}$$

Таблица 3

Регулятор	П	ПИ	ПИД
Настройки	$K_1 = 0.5K_{Iкр}$	$K_1 = 0.45K_{Iкр}$ $K_0 = 0.086K_{Iкр}\omega_{кр}$	$K_1 = 0.6K_{Iкр}$ $K_0 = 0.192K_{Iкр}\omega_{кр}$ $K_2 = \frac{0.471K_{Iкр}}{\omega_{кр}}$

Упрощенные формулы просты, но не обеспечивают высокой точности расчета настроек регуляторов, поэтому применяются при грубых прикидочных расчетах и требуют экспериментального уточнения.

3.4. Расчет настроек регуляторов методом расширенных частотных характеристик (РЧХ)

Метод разработан Е.Г.Дудниковым. В качестве типового используется процесс с заданной степенью затухания $\Psi = 0.75 \div 0.9$.

Степень колебательности m . Граница заданной колебательности в плоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы

Для устойчивости АСР корни её характеристического уравнения должны быть «левыми». При этом каждому вещественному корню - α_i соответствует аperiodическая составляющая переходного процесса вида:

$$y_i = A_i e^{-\alpha_i t},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней $-\alpha_i \pm j\omega_i$ - колебательная составляющая.

$$y_i = A_i e^{-\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Чем больше по абсолютной величине вещественная часть корня - α_i , т.е. чем дальше корень удален от мнимой оси, тем меньше вклад соответствующей ему составляющей в результирующий переходной процесс. Поэтому при выводе основных расчетных соотношений метода РЧХ делается допущение: вид кривой переходного процесса, в основном, определяется ближайшим к мнимой оси комплексным корнем, а влиянием остальных корней можно пренебречь. Другими словами, это означает, что

система n -го порядка заменяется системой второго порядка (колебательным звеном).

Обозначим ближайший к мнимой оси корень через $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$. Степенью колебательности m называется тангенс угла γ между лучом OA , проведенным через ближайший к мнимой оси корень и осью ординат (рис.27):

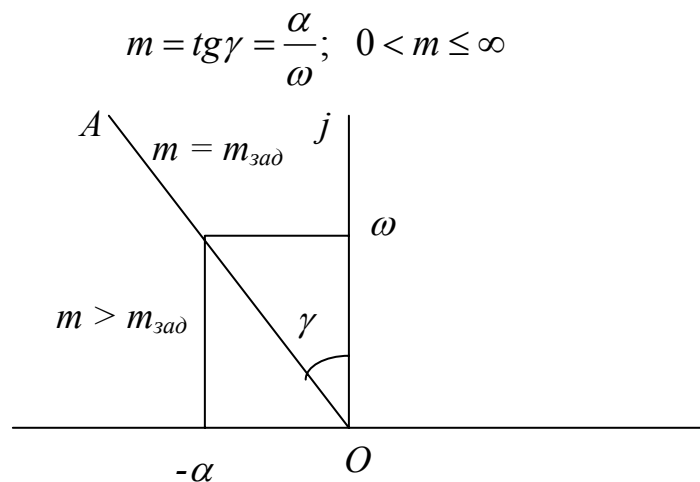


Рис. 27.

При $m = 0$ имеем незатухающий переходной процесс на границе устойчивости системы, а при $m = \infty$ - апериодический процесс.

Для колебательного звена между показателями m и ψ существует однозначная связь. Записывая выражение для переходной функции колебательного звена для моментов времени t_2 и t_3 (рис. 28):

$$y_1 = Ae^{-\alpha t_1}, \quad y_3 = Ae^{-\alpha t_3}.$$

Учитывая определение ψ (31), а также, что

$$t_3 - t_1 = T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ получаем}$$

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m} \quad (33)$$

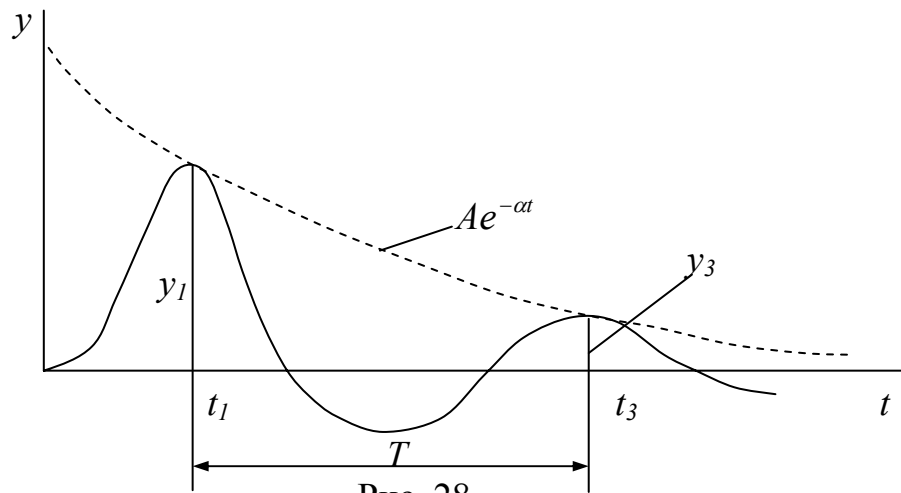


Рис. 28.

В таблице 4 приведены некоторые значения ψ и соответствующие им значения m .

Таблица 4

ψ	0	0.75	0.9	1
m	0	0.221	0.336	∞

Наиболее употребительными при расчетах являются значения $m = 0.221 \div 0.336$, соответствующие значениям $\psi = 0.75 \div 0.9$.

Для обеспечения заданной степени колебательности $m_{\text{зад}}$ ближайший к мнимой оси корень должен располагаться на луче, проведенном под углом $\gamma = \arctg m_{\text{зад}}$ к мнимой оси. Следовательно, луч OA (рис. 27) является границей области заданной колебательности, а сама область расположена слева от этой границы.

Уравнение луча OA :

$$j\omega - m\omega = \omega(j - m).$$

Понятие о расширенных частотных характеристиках.

РЧХ типовых звеньев АСР

Обычные частотные характеристики применяются для исследования устойчивости АСР и получаются при переходе в передаточной функции от переменной p к переменной $j\omega$. Уравнение

$$p = j\omega, \quad 0 \leq \omega \leq \infty$$

есть уравнение мнимой оси, т.е. границы области устойчивости – левой полуплоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы. Таким образом, в случае обычных частотных характеристик переменная p изменяется вдоль границы устойчивости.

Расширенными частотными характеристиками называются выражения для передаточной функции, для которых переменная p заменяется уравнением границы заданной колебательности. Для получения РЧХ следует заменить переменную p в передаточной функции уравнением границы заданной колебательности:

$$p = \omega(j - m), \quad 0 \leq \omega \leq \infty.$$

Будем обозначать РЧХ символом $W(m, j\omega)$.

РЧХ типовых звеньев приведены в таблице 5. Следует обратить внимание на то, что при записи выражений для расширенных ФЧХ частотный диапазон разбит на поддиапазоны так, чтобы для каждого поддиапазона в выражение для расширенной РЧХ входило главное значение функции \arctg , что особенно важно при использовании для вычислений машинных подпрограмм. Отдельно выделены характерные точки расширенных ФЧХ.

Таблица 5

N	Передаточная функция	Расширенные АЧХ и ФЧХ
1	$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	$A(m, \omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - Tm\omega)^2 + (T\omega)^2}}$

		$\varphi(m, \omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{T\omega}{1-Tm\omega} & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{Tm} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \frac{1}{Tm} \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{Tm\omega-1}{T\omega} & \frac{1}{Tm} < \omega \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m \end{cases}$
2	$W(p) = \frac{K_a}{p}$	$A(m, \omega) = \frac{K_a}{\omega \sqrt{m^2 + 1}}$ $\varphi(m, \omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m$
3	$W(p) = \frac{K}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$ $\frac{a_1}{2\sqrt{2}} < 1$	$A(m, \omega) = \frac{K}{\sqrt{(1-Q\omega - R\omega^2) + \omega^2(a_1 - S\omega)^2}}$ $Q = a_1 m; \quad R = a_2(1 - m^2); \quad S = 2a_2 m$ $\varphi(m, \omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{\omega(a_1 - S\omega)}{1 - Q\omega - R\omega^2} & 0 < \omega < \omega_{\frac{\pi}{2}} \\ -\frac{\pi}{2} & \omega = \omega_{\frac{\pi}{2}} \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{R\omega^2 + Q\omega - 1}{\omega(a_1 - S\omega)} & \omega_{\frac{\pi}{2}} < \omega < \omega_{\pi} \\ -\pi & \omega = \omega_{\pi} \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{\omega(a_1 - S\omega)}{1 - Q\omega - R\omega^2} & \omega_{\pi} < \omega \\ -\pi - \operatorname{arctg} \frac{2m}{1 - m^2} & \omega = \infty \end{cases}$ $\omega_{\frac{\pi}{2}} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 + 4R}}{2R} \quad \omega_{\pi} = \frac{a_1}{S}$
4	$W(p) = e^{-p\tau}$	$A(m, \omega) = e^{m\omega\tau}; \quad \varphi(m, \omega) = -\omega\tau$

Критерии Найквиста и Михайлова для РЧХ.

Понятие о линии равного затухания (ЛРЗ)

Обычные частотные характеристики используются для исследования устойчивости АСР с помощью критериев Найквиста и Михайлова. Эти же критерии можно сформулировать для РЧХ, что позволяет исследовать АСР на заданную колебательность переходного процесса. Критерий Найквиста для РЧХ формулируется следующим образом. Если разомкнутая система

имеет степень колебательности не меньше заданной ($m \geq m_{зад}$), то степень колебательности замкнутой системы не меньше заданной, если расширенная АФХ разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами $-1, j0$.

Формулировка критерия Михайлова для РЧХ. Замкнутая АСР имеет степень колебательности не меньше заданной, если расширенная АФХ характеристического уравнения замкнутой системы при изменении частоты от 0 до ∞ проходит последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль (n – порядок характеристического уравнения).

С помощью критериев Найквиста или Михайлова для РЧХ может быть построена линия равного затухания системы, по которой определяются оптимальные настройки регулятора.

Линией равного затухания называется геометрическое место точек в плоскости настроечных параметров регулятора, для которых величина степени колебательности m постоянна. ЛРЗ изображают в плоскости двух настроечных параметров. Для ПИ-регулятора в плоскости K_0-K_1 , для ПД-регулятора в плоскости K_1-K_2 . Настройкам П- и И-регуляторов соответствуют точки пересечения ЛРЗ, построенной в плоскости K_0-K_1 с координатными осями. При $K_0 = 0$ получаем настройку П-регулятора, а при $K_1 = 0$ – настройку И-регулятора (рис. 29).

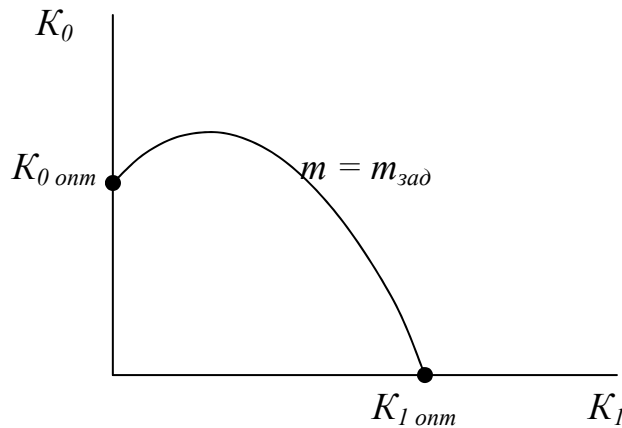


Рис. 29.

Наконец, в случае ПИД-регулятора ЛРЗ в плоскости K_0 - K_1 может считаться сечением трехмерной поверхности в координатах K_0 - K_1 - K_2 для фиксированного значения K_2 . Давая различные значения K_2 , можно построить семейство ЛРЗ, характеризующее поверхность равного затухания.

Расчет ЛРЗ

Для получения уравнения ЛРЗ необходимо записать условие нахождения системы на границе заданной колебательности. Согласно критерию Найквиста для РЧХ условием заданной колебательности в замкнутой АСР является прохождение расширенной АФХ разомкнутой системы через точку $-1, j0$, т.е.

$$W_{раз}(m, j\omega) = -1. \quad (34)$$

Если

$$W_{об}(m, j\omega) = A_{об}(m, \omega)e^{j\varphi_{об}(m, \omega)}$$

и

$$W_{рез}(m, j\omega) = A_{рез}(m, \omega)e^{j\varphi_{рез}(m, \omega)}$$

расширенные характеристики объекта и регулятора, то условие (34) принимает вид

$$W_{раз}(m, j\omega) = W_{об}(m, j\omega)W_{рез}(m, j\omega) = -1 \quad (35)$$

Векторному условию (35) соответствуют следующие скалярные амплитудное и фазовое условия заданной колебательности:

$$\left. \begin{aligned} A_{об}(m, \omega)A_{рез}(m, \omega) &= 1 \\ \varphi_{об}(m, \omega) + \varphi_{рез}(m, \omega) &= -\pi \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Условия (36) называют условиями баланса амплитуд и фаз.

Эквивалентные условиям (36) соотношения могут быть получены и из критерия Михайлова.

Если

$$W_{zc}(p) = \frac{G(p)}{H(p)}$$

передаточная функция замкнутой системы,

$$H(m, j\omega) = \operatorname{Re}[H(m, j\omega)] + jI_m[H(m, j\omega)] -$$

расширенная АФХ знаменателя передаточной функции замкнутой системы, то условия заданной колебательности переходного процесса, вытекающие из критерия Михайлова для РЧХ и эквивалентные условиям (36), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[H(m, j\omega)] &= 0 \\ I_m[H(m, j\omega)] &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ниже для построения ЛРЗ будут использоваться условия (36) как более удобные в вычислительном отношении.

Подставляя в (36) выражения для РЧХ объекта регулирования и регулятора, разрешая систему (36) относительно настроечных параметров регулятора, можем получить уравнение ЛРЗ в параметрическом виде (параметром является частота ω).

Например для широко распространенных моделей объекта регулирования в виде инерционного или интегрирующего звеньев с чистым запаздыванием (8), (13) и ПИ-регулятора уравнения ЛРЗ имеют вид:

Для модели (8):

$$\left. \begin{aligned} K_1(\omega) &= \frac{1}{K_{об} e^{m\omega\tau}} \left\{ [T\omega(1-m^2) + m] \sin \omega\tau - (1-2Tm\omega) \cos \omega\tau \right\} \\ K_o(m, \omega) &= \frac{\omega(1+m^2)}{K_{об} e^{m\omega\tau}} [T\omega \cos \omega\tau + (1-Tm\omega) \sin \omega\tau] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Для модели (13):

$$\left. \begin{aligned} K_1(\omega) &= \frac{\omega}{K_a e^{m\omega\tau}} [2m \cos \omega\tau + (1 - m^2) \sin \omega\tau] \\ K_o(\omega) &= \frac{\omega^2 (1 + m^2)}{K_a e^{m\omega\tau}} [\cos \omega\tau - m \sin \omega\tau] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Поскольку модели объектов регулирования могут быть различными, то для того, чтобы не решать систему (36) для каждой модели заново, получим выражение для ЛРЗ в виде функции от расширенных АЧХ и ФЧХ объекта регулирования. Уравнения ЛРЗ в такой форме универсальны и пригодны для объекта с любой передаточной функцией.

Итак, считая $A_{o\sigma}(m, \omega)$ и $\varphi_{o\sigma}(m, \omega)$ известными, получим расчетные формулы для ЛРЗ для типовых законов регулирования.

П-регулятор. (поскольку П-регулятор имеет один настроечный параметр, ЛРЗ вырождается в точку)

РЧХ П-регулятора:

$$W_{pez}(m, j\omega) = K_1; \quad A_{pez}(m, \omega) = K_1; \quad \varphi_{pez}(m, \omega) = 0 \quad (39)$$

С учетом (39) условия (36) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} A_{o\sigma}(m, \omega_1) K_1 &= 1 \\ \varphi_{o\sigma}(m, \omega_1) &= -\pi \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где ω_1 – частота, при которой выполняется фазовое условие системы (36), т.е. расширенная ФЧХ объекта достигает сдвига по фазе $-\pi$.

Из (40) находим, что оптимальное значение настроечного параметра П-регулятора определяется следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{A_{o\sigma}(m, \omega_1)} \\ \omega_1 &= \arg[\varphi_{o\sigma}(m, \omega_1) = -\pi] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Определение ω_1 и $A_{o\sigma}(m, \omega_1)$ иллюстрируется на рис.30.

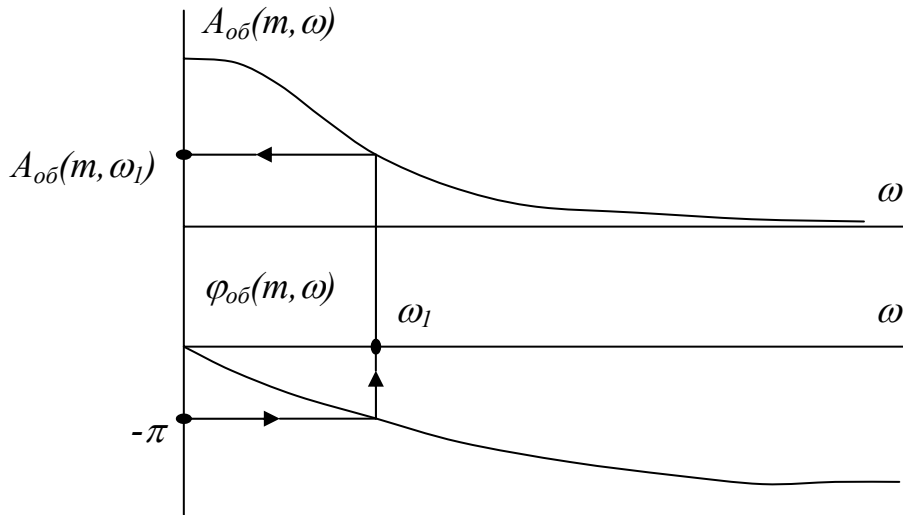


Рис.30

I-регулятор. (ЛРЗ также вырождается в точку).

Расширенные характеристики *I*-регулятора:

$$W_{pez}(m, j\omega) = \frac{K_0}{j\omega - m\omega}$$

$$A_{pez}(m, \omega) = \frac{K_0}{\omega\sqrt{1+m^2}}; \quad \varphi_{pez}(m, \omega) = -j\left(\frac{\pi}{2} + \arctg m\right) \quad (42)$$

Условия заданной колебательности (36) с учетом (42):

$$\left. \begin{aligned} A_{oo}(m, \omega_0) \frac{K_0}{\omega_0\sqrt{1+m^2}} &= 1 \\ \varphi_{oo}(m, \omega_0) - \arctg m &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\},$$

откуда расчетные формулы для определения оптимальной настройки *I*-регулятора принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{\omega_0\sqrt{1+m^2}}{A_{oo}(m, \omega_0)} \\ \omega_0 &= \arg\left[\varphi_{oo}(m, \omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \arctg m\right] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

ПИ-регулятор

РЧХ ПИ-регулятора:

$$W_{pez}(m, j\omega) = \frac{K_0 - K_1 m \omega + j(K_1 \omega)}{-m\omega + j\omega}$$

Обозначим

$$K_1 \omega = x; \quad K_0 - K_1 m \omega = y \quad (44)$$

С учетом обозначений (44) расширенные АЧХ и РЧХ ПИ-регулятора можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} A_{pez}(m, \omega) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + m^2}} \\ \varphi_{pez}(m, \omega) &= \arctg \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} - \arctg m \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Условия заданной колебательности (36) с учетом (45):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + m^2}} &= \frac{1}{A_{об}(m, \omega)} \\ \varphi_{об}(m, \omega) + \arctg \frac{x}{y} - \arctg m &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Обозначим

$$\gamma_{ПИ}(m, \omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg m - \varphi_{об}(m, \omega) \quad (47)$$

$\gamma_{ПИ}(m, \omega)$ - вспомогательная ФЧХ с точностью до знака и константы равная расширенной ФЧХ объекта.

С учетом (47) фазовое условие в системе (46) принимает вид:

$$\arctg \frac{x}{y} = \gamma_{ПИ}(m, \omega),$$

откуда

$$\operatorname{tg} \gamma_{ПИ}(m, \omega) = \frac{x}{y}$$

и

$$x = y \operatorname{tg} \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega) \quad (48)$$

Подставляя (48) в амплитудное условие системы (46), получаем решение этой системы в виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\omega \sqrt{1+m^2}}{A_{o\delta}(m, \omega)} \cos \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega) \\ x &= \frac{\omega \sqrt{1+m^2}}{A_{o\delta}(m, \omega)} \sin \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Возвращаясь с помощью обозначений (44) к исходным переменным, окончательно получаем выражения для ЛРЗ системы с ПИ-регулятором в форме:

$$\left. \begin{aligned} K_1(\omega) &= \frac{x}{\omega} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{A_{o\delta}(m, \omega)} \sin \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega) \\ K_0(\omega) &= y + mx = \frac{\omega \sqrt{1+m^2}}{A_{o\delta}(m, \omega)} [\cos \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega) + m \sin \gamma_{\text{ПИ}}(m, \omega)] \\ \omega_0 &\leq \omega \leq \omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Граничные частоты ω_0 , ω_1 для построения ЛРЗ по-прежнему определяются соотношениями (41), (43).

ПД-регулятор

Расширенные характеристики ПД-регулятора:

$$W_{\text{рег}}(m, j\omega) = (K_1 - K_2 m \omega) + jK_2 \omega.$$

Обозначим

$$K_2 \omega = x; \quad K_1 - K_2 m \omega = y \quad (51)$$

Тогда

$$A_{\text{рег}}(m, \omega) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi_{\text{рег}}(m, \omega) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (52)$$

Условия заданной колебательности (36) с учетом (52):

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{1}{A_{o\delta}(m, \omega)} \\ \varphi_{o\delta}(m, \omega) + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} &= -\pi \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Обозначим

$$\varphi_{\PiД}(m, \omega) = -\pi - \varphi_{o\delta}(m, \omega), \quad (53)$$

тогда из фазового условия системы (52)

$$x = y \operatorname{tg} \gamma_{\PiД}(m, \omega) \quad (54)$$

Подставляя (54) в амплитудное условие системы (52), получаем её решение в виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\cos \gamma_{\PiД}(m, \omega)}{A_{o\delta}(m, \omega)} \\ x &= \frac{\sin \gamma_{\PiД}(m, \omega)}{A_{o\delta}(m, \omega)} \end{aligned} \right\}$$

Возвращаясь с помощью обозначений (51) к исходным переменным, получаем уравнения ЛРЗ в параметрическом виде для системы с ПД-регулятором:

$$\left. \begin{aligned} K_2(\omega) &= \frac{x}{\omega} = \frac{\sin \gamma_{\PiД}(m, \omega)}{\omega \cdot A_{o\delta}(m, \omega)} \\ K_1(\omega) &= y + mx = \frac{1}{A_{o\delta}(m, \omega)} [\cos \gamma_{\PiД}(m, \omega) + m \sin \gamma_{\PiД}(m, \omega)] \\ \omega_1 &\leq \omega \leq \omega_2 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Значение граничной частоты ω_2 получаем, подставляя выражение для расширенной ФЧХ дифференциатора

$$\varphi_{\delta}(m, \omega) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} m$$

в фазовое условие системы (36):

$$\varphi_{об}(m, \omega_2) + \operatorname{arctg} m = -\frac{3}{2}\pi$$

откуда

$$\omega_2 = \arg \left[\varphi_{об}(m, \omega_2) = -\frac{3}{2}\pi - \operatorname{arctg} m \right] \quad (56)$$

ПИД-регулятор

Расширенные характеристики ПИД-регулятора

$$W_{рез}(m, \omega) = \frac{[-K_1 m \omega + K_0 - (1 - m^2)K_2 \omega^2] + j[K_1 \omega - 2mK_2 \omega^2]}{-m\omega + j\omega}$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} x &= \omega(K_1 - 2mK_2 \omega) \\ y &= -K_1 m \omega + K_0 - (1 - m^2)K_2 \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} A_{рез}(m, \omega) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + m^2}} \\ \varphi_{рез}(m, \omega) &= \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} m \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Сравнивая (58) и (45), убеждаемся, что выражения для расширенных АЧХ и ФЧХ ПИД- и ПИ- регуляторов имеют одинаковый вид, но с разными обозначениями для x и y : соответственно (57) и (44). Это и не удивительно, поскольку ПИ-регулятор можно считать частным случаем ПИД-регулятора при $K_2=0$.

Поскольку выражения для РЧХ ПИД- и ПИ-регуляторов совпадают с точностью до обозначений x и y , система уравнений (46) и в этом случае имеет решение (49). Возвращаясь с помощью обозначений (57) к исходным переменным, получаем уравнения ЛРЗ для системы с ПИД-регулятором:

$$\left. \begin{aligned}
 K_1(\omega) &= \frac{x + 2mK_2\omega^2}{\omega} = \frac{\sqrt{1+m^2}}{A_{o\sigma}(m, \omega)} \sin \gamma_{\text{III}}(m, \omega) + 2mK_2\omega \\
 K_0(\omega) &= y + K_1m\omega + (1-m^2)K_2\omega^2 = \\
 &= \frac{\omega\sqrt{1+m^2}}{A_{o\sigma}(m, \omega)} [\cos \gamma_{\text{III}}(m, \omega) + m \sin \gamma_{\text{III}}(m, \omega)] + (1+m^2)K_2\omega^2 \\
 \omega_0 &\leq \omega \leq \omega_2
 \end{aligned} \right\} (59)$$

Выбор оптимальных настроек регулятора на ЛРЗ

Примерный вид ЛРЗ для статического объекта регулирования и ПИ-регулятора показан на рис. 31.

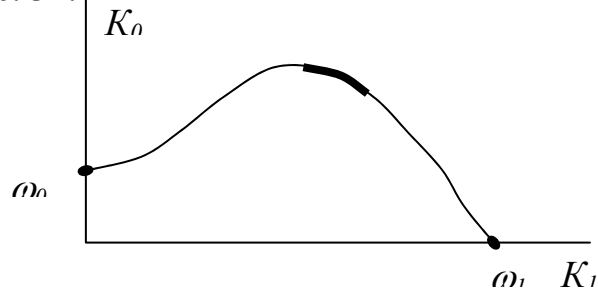


Рис. 31.

При изменении частоты от 0 до ∞ ЛРЗ представляет раскручивающуюся спираль. Нас интересует только её участок, первый раз проходящий через первый квадрант в диапазоне частот $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$ и соответствующий положительным значениям настроечных параметров регулятора, т.е. отрицательной обратной связи. (Участок ЛРЗ во втором квадранте соответствует положительной обратной связи по K_1 , в четвертом квадранте – положительной обратной связи по K_0 , в третьем квадранте – положительной обратной связи по обеим составляющим закона регулирования).

Каждой точке ЛРЗ соответствуют настройки регулятора, обеспечивающие заданную колебательность переходного процесса и определенную частоту колебаний. При движении вдоль ЛРЗ слева направо частота колебаний растет, а амплитуда колебаний и время переходного процесса уменьшаются.

Выбор оптимальных настроек ПИ-регулятора

Поскольку все точки ЛРЗ обеспечивают заданную колебательность переходного процесса, при выборе оптимальных настроек регулятора можно учесть еще одно требование, в качестве которого принимают минимум интегрального критерия качества. Как следует из соотношения (32) минимальное значение интегрального критерия качества $I_{лин}$ достигается при максимуме K_0 , т.е. настройки регулятора, соответствующие максимуму ЛРЗ по K_0 , обеспечивают минимум $I_{лин}$. Практически рекомендуется выбирать оптимальные настройки регулятора несколько правее максимума ЛРЗ (выделенный участок ЛРЗ на рис. 31), что при незначительной потере в величине $I_{лин}$ позволяет повысить быстродействие системы, так как при движении по ЛРЗ слева направо частота колебаний в переходном процессе, а, следовательно, и быстродействие системы увеличиваются. Кроме того, выбирая оптимальные настройки справа от максимума ЛРЗ, мы исключаем возможность попадания оптимальных настроек на левую ветвь ЛРЗ (слева от максимума) при колебаниях параметров объекта и регулятора. Это важно, так как слева от максимума ЛРЗ мы приближаемся к области настроек, в которой преобладает И-составляющая закона регулирования, что приводит к резкому возрастанию $I_{лин}$ и ухудшению качества переходного процесса.

Если ЛРЗ разомкнута по K_I (физически это означает, что частота ω_I не существует, так как максимальное значение расширенной ФЧХ объекта при $\omega=\infty$ не достигает величины $-\pi$, как того требует соотношение (41)), в качестве оптимальных выбираются настройки, соответствующие максимально возможному по технической характеристике регулятора значению K_0 .

Выбор оптимальных настроек ПД-регулятора

В случае ПД-регулятора в качестве оптимальных также рекомендуются настройки в области максимума ЛРЗ по K_1 , так как при этом обеспечивается минимальная статическая ошибка регулирования (Если ЛРЗ разомкнута по K_2 , т.е. частота ω_2 не существует, выбирается максимально допустимое по технической характеристике регулятора значение K_1).

Выбор оптимальных настроек ПИД-регулятора

С ростом K_2 максимальное значение K_0 обычно растет, следовательно, значение $I_{лин}$ уменьшается. В то же время с ростом K_2 увеличивается вклад дифференциальной составляющей в регулирующее воздействие и, следовательно, ухудшается помехозащищенность регулятора. В разделе 2.3 отмечалось, что для удовлетворительной работы ПИД-регулятора соотношение между И- и Д-составляющими должно удовлетворять ограничению (30). Поэтому значение параметра $K_2=K_1 \cdot T_n$ выбирается так, чтобы удовлетворялось неравенство (30).

Выбор параметров K_1 и K_0 осуществляется так же, как в случае ПИ-регулятора, т.е. несколько правее максимума по K_0 линии равного затухания, соответствующей выбранному значению K_2 .

3.5. Построение переходных процессов в замкнутых АСР методом Акульшина

После определения настроечных параметров регулятора следует построить переходной процесс в замкнутой системе, чтобы оценить фактические значения показателей качества. Метод Акульшина, который может использоваться для этой цели, обладает следующими

достоинствами: хорошо сочетается с методом РЧХ; легко поддается алгоритмизации; позволяет исследовать системы с чистым запаздыванием.

Пусть на вход АСР подается воздействие типа прямоугольная волна с амплитудой x_0 и периодом T_0 (рис. 32).

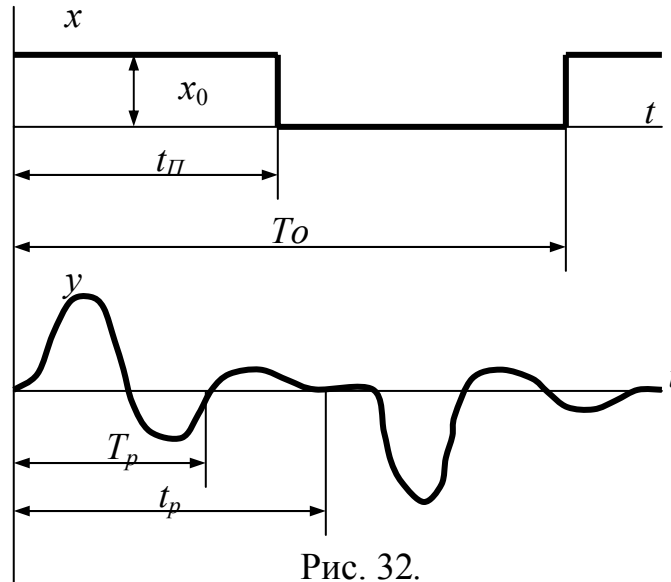


Рис. 32.

Предположим, что длительность полуволны t_{Π} превышает время переходного процесса в замкнутой АСР t_p :

$$t_{\Pi} = 0.5T_0 \geq t_p \approx 3T_p \quad (60)$$

(T_p – период колебаний переходного процесса).

При $\psi = 0.75 \div 0.9$ за $3T_p$ амплитуда колебаний уменьшается в 12÷30 раз.

Переходя в (60) к частотам, получаем:

$$\omega_0 \leq \frac{\omega_p}{6}, \quad (61)$$

где $\omega_p = 2\pi/T_p$ – рабочая частота системы (частота колебаний в переходном процессе),

$\omega_0 = 2\pi/T_0$ – частота прямоугольной волны.

При расчете настроек регуляторов методом РЧХ рабочая частота ω_p определяется в точке ЛРЗ, которой соответствуют оптимальные настройки регулятора.

Воздействие типа прямоугольная волна можно разложить в ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{x_0}{2} + \frac{2x_0}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right] \quad (62)$$

Напомним, что при подаче на вход АСР с АЧХ $A_{3C}(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_{3C}(\omega)$ гармонического сигнала

$$x(t) = x_{\max} \sin(\omega_0 t)$$

на её выходе также возникает гармонический сигнал

$$y(t) = A_{3C}(\omega_0) x_{\max} \sin[\omega_0 t + \varphi_{3C}(\omega_0)].$$

Тогда согласно принципу суперпозиции реакция АСР на воздействие (62) может быть записана в виде

$$y(t) = A_{3C}(0) \frac{x_0}{2} + \frac{2x_0}{\pi} \left\{ A_{3C}(\omega_0) \sin[\omega_0 t + \varphi_{3C}(\omega_0)] + A_{3C}(3\omega_0) \frac{1}{3} \sin[3\omega_0 t + \varphi_{3C}(3\omega_0)] + A_{3C}(5\omega_0) \frac{1}{5} \sin[5\omega_0 t + \varphi_{3C}(5\omega_0)] + \dots \right\} \quad (63)$$

Приемлемая точность расчетов достигается при использовании в формуле (63) 15÷25 слагаемых (Практически вычисления продолжают до тех пор, пока очередное слагаемое не становится достаточно малым).

Выражение (63) справедливо в пределах

$$0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

и позволяет определить переходной процесс в замкнутой АСР. Из этого выражения следует, что для построения переходной характеристики АСР необходимо знать массив значений АЧХ и ФЧХ замкнутой системы для частот $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0$ и т.д. (т.е. нечетных гармоник разложения).

4. Анализ АСР с релейными регуляторами [4]

Системы с релейными регуляторами относятся к классу нелинейных АСР. Их точный расчет возможен лишь в простейших случаях. В общем случае расчет нелинейных АСР производится приближенно в два этапа: линеаризация статической характеристики нелинейного элемента и расчет линеаризованной АСР.

Установившимся режимом работы АСР с релейными регуляторами (релейных АСР) чаще всего является режим автоколебаний. Поэтому в отличие от непрерывных линейных АСР основными показателями качества регулирования в этом случае являются параметры автоколебаний: период T_a или частота ω_a и амплитуда A_a . В качестве установившегося значения регулируемой величины условно можно принять среднее значение $y_{cp} = y_{уст}$. Тогда ошибка регулирования в установившемся режиме равна разности между заданным значением регулируемой величины и её средним значением:

$$\Delta y_{уст} = y_{cp} - y_{зад}.$$

Целью расчета релейных АСР является выбор настроечных параметров релейного регулятора, обеспечивающих заданные требования к показателям качества T_a , A_a , $\Delta y_{уст}$.

Структурная схема релейной АСР приведена на рис. 33.

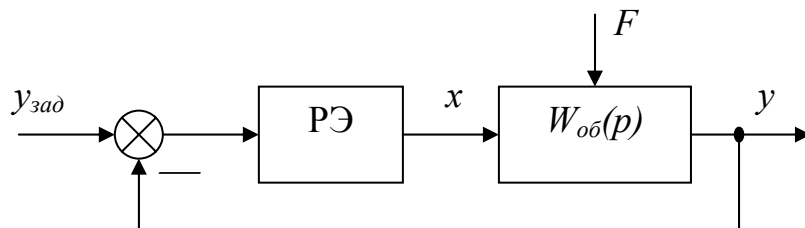


Рис. 33.

Здесь: РЭ – релейный элемент (регулятор).

4.1. Анализ АСР с двухпозиционным релейным регулятором

Статическая характеристика двухпозиционного релейного регулятора приведена на рис. 34а,б. Отличие рис. 34а от рис. 34б заключается в том, что на рис. 34а по оси абсцисс отложено значение регулируемой переменной y , а на рис. 34б – рассогласование $\Delta y = y_{зад} - y$.

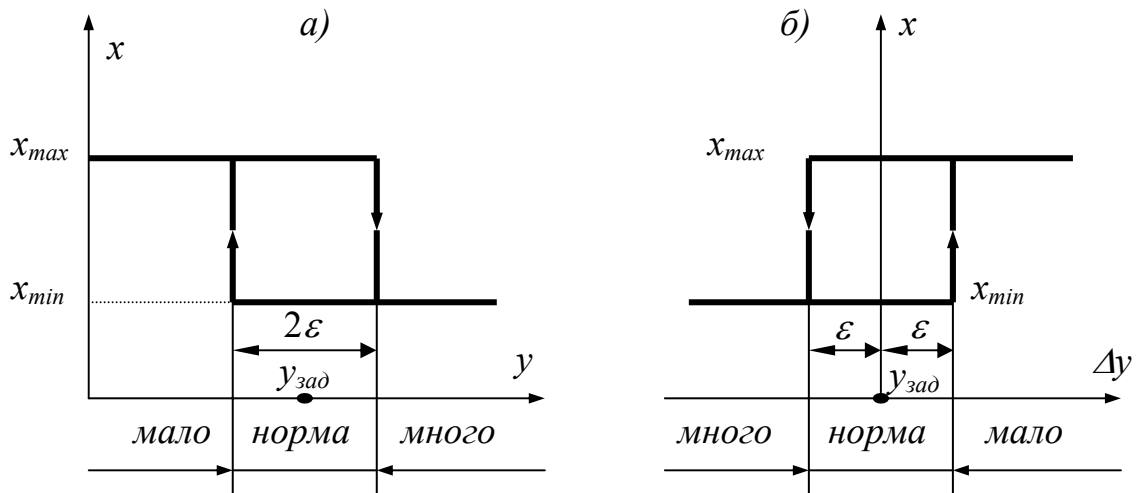


Рис.34.

Как видно из характеристики двухпозиционного регулятора, регулирующее воздействие в зависимости от величины рассогласования Δy может принимать два фиксированных значения: x_{max} и x_{min} (В частном случае $x_{min}=0$). Диапазон изменения регулируемой переменной (рассогласования) можно разбить на три зоны: мало, нормально, много. Будем считать, что величина зоны нормально (называемой также зоной возврата или дифференциалом) составляет 2ε .

Уравнение статической характеристики двухпозиционного регулятора:

$$x = \begin{cases} x_{\max} & \text{при } \Delta y > \varepsilon \\ & \text{или } -\varepsilon < \Delta y < \varepsilon \text{ и } y < 0 \\ x_{\min} & \text{при } \Delta y < -\varepsilon \\ & \text{или } -\varepsilon < \Delta y < \varepsilon \text{ и } y > 0 \end{cases}$$

Настроечными параметрами двухпозиционного релейного регулятора являются: ε , а также x_{\max} и x_{\min} , если они не заданы.

Будем считать, что объект регулирования описывается моделью инерционного звена первого порядка с чистым запаздыванием (8).

Рассмотрим вначале частный случай при отсутствии чистого запаздывания в объекте регулирования.

На рис. 35 изображены графики автоколебаний и изменения регулирующего воздействия.

Здесь y_{\max} и y_{\min} – максимальное и минимальное установившееся значение регулируемой переменной, соответствующие максимальному x_{\max} и минимальному x_{\min} значениям регулирующего воздействия и связанные с ним через коэффициент передачи объекта регулирования:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= Kx_{\max} \\ y_{\min} &= Kx_{\min} \end{aligned}$$

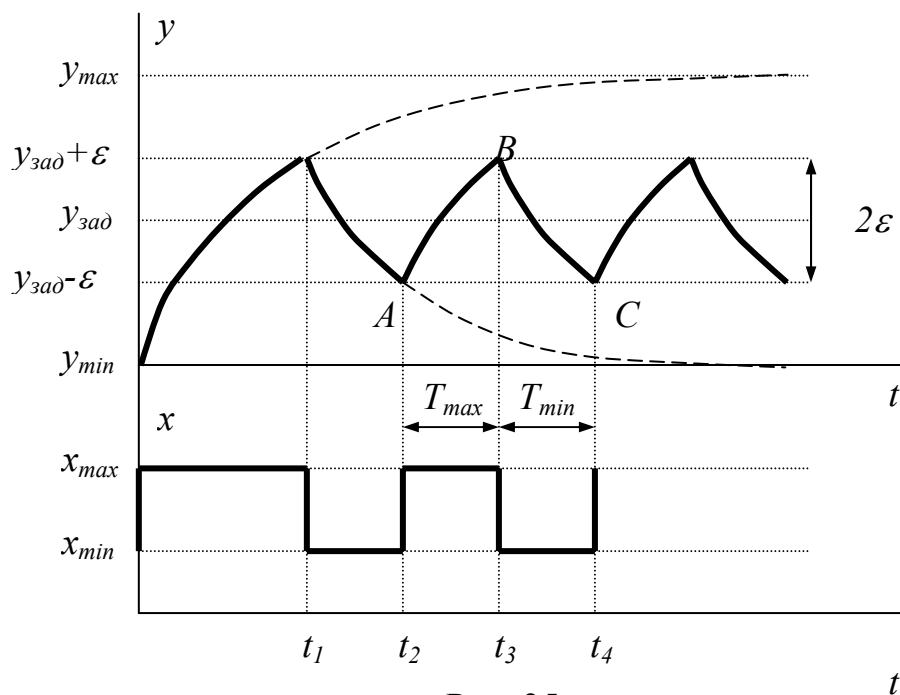


Рис. 35..

Разность

$$D = y_{\max} - y_{\min}$$

будем называть диапазоном регулирования.

Пусть начальное значение регулируемой величины $y(0) = y_{\min}$. Поскольку при этом $\Delta y > \varepsilon$, регулирующее воздействие принимает максимальное значение ($x = x_{\max}$), и объект начинает разгоняться по кривой разгона – экспоненте. При достижении регулируемой переменной значения $y_{\text{зад}} + \varepsilon$ ($\Delta y = -\varepsilon$) в момент t_1 регулирующее воздействие переключается на x_{\min} , и регулируемая переменная начинает уменьшаться. При $t = t_2$ $\Delta y = \varepsilon$ и регулирующее воздействие снова переключается на x_{\max} . Далее система входит в режим установившихся колебаний. Амплитуда автоколебаний равна половине зоны возврата статической характеристики регулятора:

$$A_a = \varepsilon. \quad (64)$$

Среднее значение автоколебаний равно заданному значению: $y_{\text{ср}} = y_{\text{зад}}$, следовательно, ошибка $\Delta y_{\text{уст}}$ в установившемся режиме равна нулю.

Найдем теперь период автоколебаний T_a .

$$T_a = T_{\min} + T_{\max}, \quad (65)$$

где T_{\min} и T_{\max} – промежутки времени, в течение которых регулирующее воздействие имеет соответственно минимальное и максимальное значения.

Уравнение участка экспоненты от произвольной точки $t = t_0$, $y_0 = y(t_0)$:

$$y(t - t_0) = y_0 + (y_{\infty} - y_0) \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{T}} \right), \quad (66)$$

где y_{∞} - установившееся значение при $t \rightarrow \infty$.

С учетом (66) для переднего фронта автоколебаний AB (рис. 35) можно записать:

$$y(t-t_2) = (y_{зад} - \varepsilon) + (y_{max} - y_{зад} + \varepsilon)(1 - e^{-\frac{t-t_2}{T}}) \quad (67)$$

Записывая (67) для моментов t_2 и t_3 и вычитая полученные выражения друг из друга, находим:

$$2\varepsilon = (y_{max} - y_{зад} + \varepsilon)(1 - e^{-\frac{T_{max}}{T}}), \quad (68)$$

откуда

$$T_{max} = T \ln \frac{y_{max} - y_{зад} + \varepsilon}{y_{max} - y_{зад} - \varepsilon}. \quad (69)$$

Аналогично для заднего фронта автоколебаний BC справедливо выражение:

$$y(t-t_3) = (y_{зад} + \varepsilon) - (y_{зад} + \varepsilon - y_{min})(1 - e^{-\frac{t-t_3}{T}}). \quad (70)$$

Поступая с выражением (70) так же, как с (67), получаем

$$2\varepsilon = (y_{зад} - y_{min} + \varepsilon)(1 - e^{-\frac{T_{min}}{T}}), \quad (71)$$

откуда

$$T_{min} = T \ln \frac{y_{зад} - y_{min} + \varepsilon}{y_{зад} - y_{min} - \varepsilon} \quad (72)$$

Подставляя (69) и (72) в (65), находим

$$T_a = T \left[\ln \frac{y_{max} - y_{зад} + \varepsilon}{y_{max} - y_{зад} - \varepsilon} + \ln \frac{y_{зад} - y_{min} + \varepsilon}{y_{зад} - y_{min} - \varepsilon} \right] \quad (73)$$

При приближенных расчетах формулу (73) можно упростить, линеаризуя функцию $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ разложением в степенной ряд:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \approx 2x \text{ (при } x \ll 1) \quad (74)$$

С учетом (74) (73) можно записать в виде:

$$T_a \approx 2T \left[\frac{\varepsilon}{y_{\max} - y_{\text{зад}}} + \frac{\varepsilon}{y_{\text{зад}} - y_{\min}} \right]$$

или окончательно

$$T_a \approx 2T\varepsilon \frac{y_{\max} - y_{\min}}{(y_{\max} - y_{\text{зад}})(y_{\text{зад}} - y_{\min})} \quad (75)$$

При $y_{\text{зад}} \geq y_{\max} - \varepsilon T_{\max}$, как видно из (69), а следовательно, и $T_a = \infty$. Аналогично, при $y_{\text{зад}} \leq y_{\min} + \varepsilon T_{\min}$ на основании (72), а значит, и T_a также становятся бесконечными. Это объясняется тем, что для возникновения автоколебаний рассогласование должно попеременно изменять свой знак на противоположный и превышать по амплитуде половину зоны возврата. При выполнении же приведённых выше условий знак рассогласования остаётся постоянным (регулятору как бы не хватает запаса регулирующего воздействия). Поэтому для обеспечения нормальной работы двухпозиционного регулятора заданное значение регулируемой величины должно лежать в средней части диапазона регулирования:

$$y_{\min} + 0,25D \leq y_{\text{зад}} \leq y_{\max} - 0,25D \quad (76)$$

Поскольку неравенство (76) должно выполняться при любых значениях возмущений, влияющих на величину y_{\min} и y_{\max} , значения x_{\min} и x_{\max} должны быть выбраны с определённым запасом.

В случае, когда задание точно соответствует середине диапазона регулирования:

$$y_{\text{зад}} = y_{\min} + \frac{D}{2} = \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2},$$

период автоколебаний достигает своего минимального значения

$$T_{a \min} = 2T \ln \frac{1 + 2\varepsilon/D}{1 - 2\varepsilon/D} \approx 8T \frac{\varepsilon}{D}.$$

При этом

$$T_{\max} = T_{\min} = T_{a \min} / 2,$$

т.е. имеют место симметричные автоколебания (длительность переднего фронта равна длительности заднего фронта). При смещении $y_{зад}$ вправо или влево от середины диапазона регулирования период автоколебаний растёт за счёт роста T_{max} или T_{min} соответственно. При этом T_a зависит только от величины приращения заданного значения относительно середины диапазона регулирования и не зависит от его знака.

Перейдём теперь к общему случаю при наличии чистого запаздывания в модели объекта регулирования. Графики автоколебаний и регулирующего воздействия для этого случая приведены на рис. 36. Наличие запаздывания в передаточной функции объекта приводит к отставанию регулируемой переменной на величину τ (штриховая и сплошная линии на рис. 36). Вследствие этого моменты переключения регулирующего воздействия также сдвигаются на τ , что приводит к возрастанию амплитуды и периода автоколебаний.

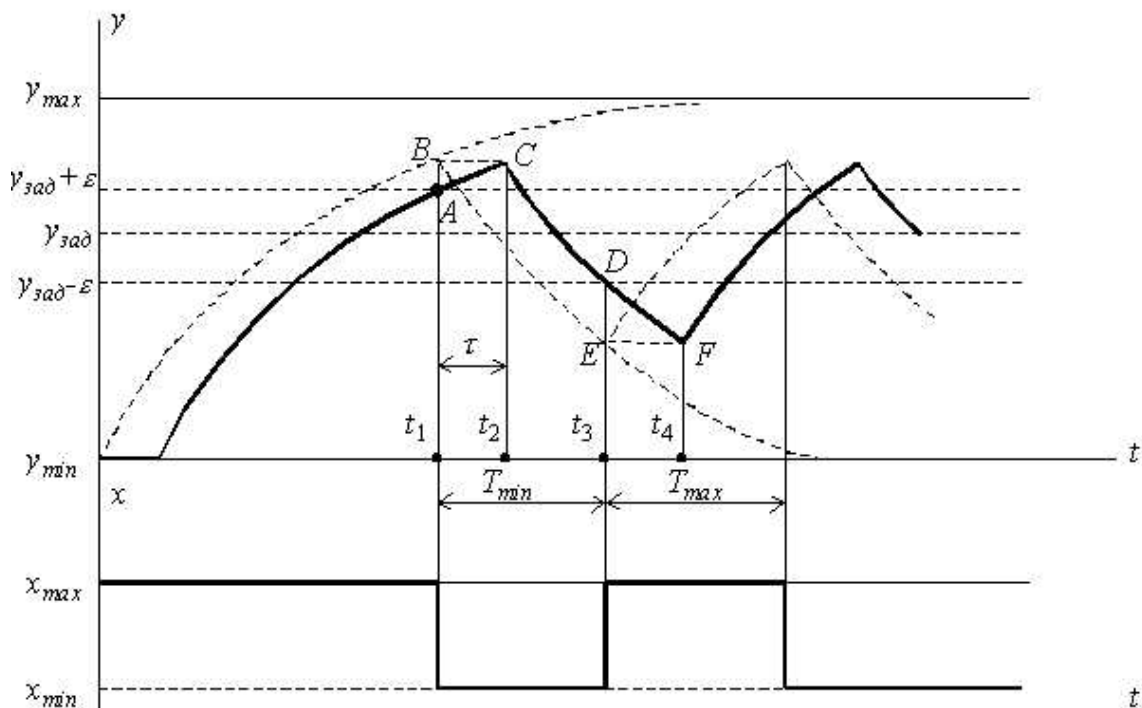


Рис. 36.

Уравнение участка AC переходной характеристики:

$$y(t-t_1) = (y_{зад} + \varepsilon) + (y_{\max} - y_{зад} - \varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T}} \right)$$

Поступая так же, как и выше, находим

$$AB = (y_{\max} - y_{зад} - \varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \quad (77)$$

Уравнение участка DF :

$$y(t-t_3) = (y_{зад} - \varepsilon) - (y_{зад} - y_{\min} - \varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{t-t_3}{T}} \right),$$

откуда

$$DE = (y_{зад} - y_{\min} - \varepsilon) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \quad (78)$$

Амплитуда автоколебаний:

$$A_a = \varepsilon + \frac{AB + DE}{2} = \varepsilon + \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \left(\frac{y_{\max} - y_{\min} - 2\varepsilon}{2} \right),$$

или после преобразований:

$$A_a = \varepsilon e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{D}{2} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \quad (79)$$

Отметим, что при $\tau=0$ выражение (79), как и следовало ожидать, вырождается в (64).

Упрощённую формулу для амплитуды автоколебаний (79) можно получить, используя линейную аппроксимацию экспоненциальной функции ($e^x \approx 1 + x$):

$$A_a \approx \varepsilon + \frac{D}{2} \frac{\tau}{T} \quad (80)$$

Как видим из (79), амплитуда A_a не зависит от $y_{зад}$ (так как приращения AB и DE при изменении $y_{зад}$ компенсируют друг друга, т.е. $AB+DE=const$) и пропорциональна ε и D .

Поскольку $AB \neq DE$, появляется смещение среднего значения автоколебаний относительно заданного на $\Delta y_{уст}$:

$$\Delta y_{уст} = \frac{AB - DE}{2} = \left(\frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} - y_{зад} \right) \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \quad (81)$$

Тогда из определения ошибки $\Delta y_{уст}$ находим:

$$y_{cp} = y_{зад} + \Delta y_{уст} = y_{зад} e^{-\frac{\tau}{T}} + \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right) \quad (82)$$

При $\tau=0$ или $y_{зад} = (y_{\max} + y_{\min})/2$ (заданное значение регулируемой величины точно в центре диапазона регулирования) $y_{cp} = y_{зад}$.

T_{\max} и T_{\min} найдём, подставляя в (69) и (72) вместо минимального и максимального значений амплитуды автоколебаний $(y_{зад} - \varepsilon)$ и $(y_{зад} + \varepsilon)$ их новые значения $(y_{зад} - \varepsilon - DE)$ и $(y_{зад} + \varepsilon + AB)$:

$$T_{\max} = T \ln \frac{y_{\max} - (y_{зад} - \varepsilon - DE)}{y_{\max} - (y_{зад} + \varepsilon + AB)} \quad (83)$$

$$T_{\min} = T \ln \frac{(y_{зад} + \varepsilon + AB) - y_{\min}}{(y_{зад} - \varepsilon - DE) - y_{\min}} \quad (84)$$

Подставляя в (83) и (84) выражения (77) и (78), находим:

$$T_{\max} = T \ln \frac{(y_{\max} - y_{\min}) - (y_{зад} - y_{\min} - \varepsilon) e^{-\frac{\tau}{T}}}{(y_{\max} - y_{зад} - \varepsilon) e^{-\frac{\tau}{T}}} \quad (85)$$

$$T_{\min} = T \ln \frac{(y_{\max} - y_{\min}) - (y_{\max} - y_{зад} - \varepsilon) e^{-\frac{\tau}{T}}}{(y_{зад} - y_{\min} - \varepsilon) e^{-\frac{\tau}{T}}} \quad (86)$$

При $\tau=0$ формулы (85) и (86) переходят в (69), (72).

Подставляя (85), (86) в (65) и обозначая

$$(y_{зад} - y_{\min} - \varepsilon) e^{-\frac{\tau}{T}} = a,$$

$$(y_{max} - y_{зад} - \varepsilon)e^{-\frac{\tau}{T}} = b.$$

получаем

$$T_a = T \left(\ln \frac{D-a}{b} + \ln \frac{D-b}{a} \right) \quad (87)$$

Упрощённую формулу для T_a можно получить, подставляя в формулу (75) вместо ε (амплитуда колебаний при $\tau=0$) приближённое значение амплитуды (80).

$$T_a \approx \frac{2T(y_{max} - y_{min})}{(y_{max} - y_{зад})(y_{зад} - y_{min})} \left(\varepsilon + \frac{D\tau}{2T} \right) \quad (88)$$

С помощью полученных соотношений (79), (80), (81), (82), (87), (88) можно выбрать настройки ε , x_{max} и x_{min} (если они не заданы), а также значение $y_{зад}$, обеспечивающие заданные требования к параметрам автоколебаний.

4.2. Анализ релейных АСР частотно-амплитудным методом Гольдфарба

Данный метод применяется для анализа более сложных систем, чем рассмотренная в разделе 4.1 и основан на гармонической линеаризации нелинейного элемента.

Метод гармонической линеаризации нелинейного элемента

Метод предложен советскими учёными Крыловым, Боголюбовым и заключается в замене реального нелинейного элемента эквивалентным ему линейным, выходной сигнал которого равен первой гармонике разложения в ряд Фурье выходного сигнала нелинейного элемента.

Гармоническая линеаризация справедлива при выполнении гипотезы о том, что линейная часть системы представляет фильтр низких частот,

подавляющий все гармоники выходного сигнала нелинейного элемента порядка выше первой. Обычно эта гипотеза выполняется, поскольку линейная часть - объект регулирования включает инерционные и интегрирующие звенья, обладающие хорошими фильтрующими свойствами.

Свойства линеаризованного нелинейного элемента описываются эквивалентным комплексным коэффициентом передачи нелинейного элемента, представляющим отношение изображения Фурье первой гармоники разложения выходного сигнала в ряд Фурье $y_1(j\omega)$ к изображению Фурье входного гармонического сигнала $x(j\omega)$. Эквивалентный комплексный коэффициент передачи зависит от амплитуды входного сигнала A , является функцией комплексной переменной и обозначается $W_{нэ}(jA)$.

$$W_{нэ}(jA) = \frac{y_1(j\omega)}{x(j\omega)} \quad (89)$$

Пусть

$$x(t) = A \sin(\omega t) = A \sin \alpha,$$

$\omega = 2\pi/T$ - круговая частота,

T - период гармонических колебаний,

$\alpha = \omega t$ - угловая координата.

$$x(j\omega) = Ae^{j\omega t} = Ae^{j\alpha} \quad (90)$$

$$y_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha$$

$$y_1(j\omega) = b_1 e^{j\alpha} + a_1 e^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (91)$$

Коэффициенты первой гармоники разложения в ряд Фурье определяются по формулам:

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \cos \alpha d\alpha,$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \sin \alpha d\alpha$$

С учётом (90), (91) выражение (89) принимает вид:

$$W_{нэ}(jA) = \frac{b_1}{A} + \frac{a_1}{A} e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{b_1}{A} + j \frac{a_1}{A},$$

Обозначим

$$\frac{b_1}{A} = q_1(A); \quad \frac{a_1}{A} = q_2(A),$$

тогда выражение для эквивалентного комплексного коэффициента передачи нелинейного элемента окончательно можно записать в форме:

$$W_{нэ}(jA) = q_1(A) + jq_2(A), \quad (92)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_1(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \sin \alpha d\alpha, \\ q_2(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} y(\alpha) \cos \alpha d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Для кососимметричных нелинейностей первая гармоника выходного сигнала совпадает по фазе с входным сигналом, следовательно, косинусоидальная составляющая $q_2(A) = 0$.

После линеаризации квазилинейное уравнение нелинейного элемента принимает вид:

$$y = W_{нэ}(jA)x$$

Годограф вектора $W_{нэ}(jA)$ называется эквивалентной АФХ нелинейного элемента.

Формулы (92), (93) позволяют получить выражение эквивалентного комплексного коэффициента передачи релейных регуляторов.

Эквивалентный комплексный коэффициент передачи двухпозиционного релейного регулятора с характеристикой (рис. 34.) при $x_{min}=0$ и входном гармоническом сигнале $\Delta y = A \sin \alpha$, $A > \varepsilon$ равен:

$$W_{pz}(jA) = \frac{2x_{max}}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{A}\right)^2} - j \left(\frac{\varepsilon}{A}\right) \right] = A_{pz}(A) e^{j\varphi_{pz}(A)} \quad (94)$$

$$A_{pz}(A) = \frac{2x_{max}}{\pi A} \quad ; \quad \varphi_{pz}(A) = -\arcsin \frac{\varepsilon}{A} \quad (95)$$

Как видно из формул (95), с ростом амплитуды входного сигнала коэффициент передачи релейного элемента падает, поскольку выходной сигнал релейного регулятора остаётся постоянным и равным x_{max} , следовательно, их отношение стремится к нулю. При изменении амплитуды входного сигнала от ε до ∞ значение фазового сдвига в двухпозиционном регуляторе изменяется от $-\pi/2$ до 0.

Характеристика трёхпозиционного релейного регулятора приведена на рис. 37, где обозначено: Δy_{cp}^+ , Δy_{cp}^- (Δy_{om}^+ , Δy_{om}^-)- пороги срабатывания (отпускания) регулятора в сторону соответственно увеличения и уменьшения регулирующего воздействия.

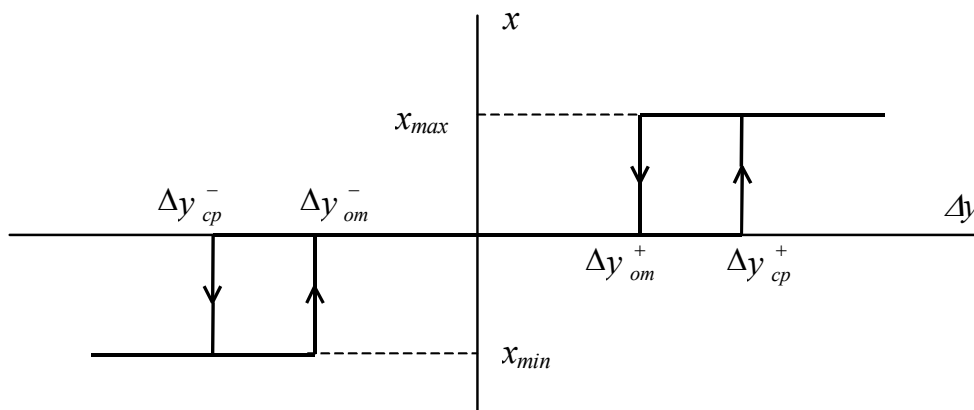


Рис. 37.

Обозначив $|x_{max}| = |x_{min}| = C$,

$$|\Delta y_{cp}^+| = |\Delta y_{cp}^-| = B ,$$

$$|\Delta y_{om}^+| = |\Delta y_{om}^-| = mB ; \quad 0 \leq m \leq 1$$

и считая, что на входе релейного регулятора действует гармонический сигнал с амплитудой $A > B$, можем получить следующее выражение для эквивалентного комплексного коэффициента передачи трёхпозиционного релейного регулятора:

$$W_{pз}(jA) = \frac{2C}{\pi A} \left\{ \left[\sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{mB}{A}\right)^2} \right] - j \frac{B}{A} (1 - m) \right\} \quad (96)$$

Нахождение параметров автоколебаний

В результате гармонической линеаризации нелинейного элемента мы получаем линеаризованную АСР. При этом автоколебаниям в исходной нелинейной АСР соответствуют незатухающие колебания на границе устойчивости в линеаризованной АСР. Параметры этих колебаний будут тем ближе друг к другу, тем точнее выполняется гипотеза низкочастотного фильтра. Поскольку эта гипотеза, как отмечалось, выполняется практически всегда в силу инерционности объекта регулирования, можно считать, что параметры автоколебаний в нелинейной АСР приближённо равны параметрам незатухающих колебаний в линеаризованной АСР.

Для нахождения параметров незатухающих колебаний в линеаризованной АСР может быть использован критерий Найквиста, согласно которому условие возникновения незатухающих колебаний в линеаризованной АСР, т. е. условие её нахождения на границе устойчивости имеет вид:

$$W_{pз}(jA, j\omega) = -1$$

или

$$W_{pз}(jA)W_{об}(j\omega) = -1 \quad (97)$$

Аналитическое решение уравнения (97) в общем случае невозможно, поэтому Гольдфарб предложил решать это уравнение графически.

Запишем уравнение (97) в виде:

$$W_{об}(j\omega) = -\frac{1}{W_{пэ}(jA)} \quad (98)$$

Обозначим

$$Z_{пэ}(jA) = \frac{1}{W_{пэ}(jA)} \quad (99)$$

$Z_{пэ}(jA)$ - эквивалентный обратный комплексный коэффициент передачи релейного элемента (ногограф $Z_{пэ}(jA)$ называют эквивалентной обратной АФХ релейного элемента).

С учётом (98) (99) принимает вид:

$$W_{об}(j\omega) = -Z_{пэ}(jA) \quad (100)$$

Корни уравнения (100) соответствуют значениям частоты ω АФХ объекта регулирования и амплитуды A эквивалентной обратной АФХ релейного элемента. Для нахождения корней уравнения (100) необходимо построить характеристики $W_{об}(j\omega)$ в функции от частоты и $-Z_{пэ}(jA)$ в функции от амплитуды и определить точку их пересечения (рис. 38). Значение характеристики $W_{об}(j\omega)$ в точке пересечения определяет частоту автоколебаний ω_a в исходной нелинейной системе. Значение характеристики $-Z_{пэ}(jA)$ в точке пересечения определяет амплитуду A_a автоколебаний.

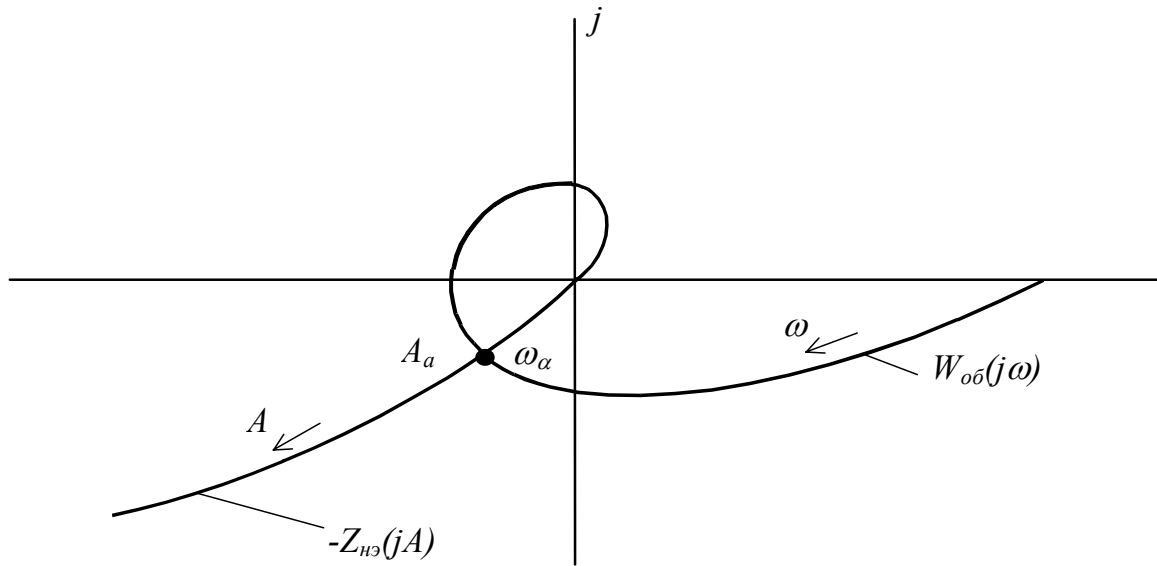


Рис. 38.

Исследование устойчивости автоколебаний

Для суждения об устойчивости автоколебаний дадим приращение ΔA амплитуде автоколебаний в точке пересечения (стрелками на рис.38 показаны направления роста частоты и амплитуды).

Если имеет место неравенство

$$|-Z_{нэ}[j(A_a + \Delta A)]| > |W_{об}(j\omega_a)| \quad (101)$$

(такой случай изображён на рис. 38), то

$$|W_{об}(j\omega_a)W_{пэ}[j(A_a + \Delta A)]| < 1,$$

т.е. при приращении амплитуды автоколебаний АФХ разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$, следовательно, система устойчива, колебания будут затухать и их амплитуда опять уменьшится до значения, соответствующего точке пересечения. Точно так же при уменьшении амплитуды колебаний, система становится неустойчивой, и амплитуда колебаний в ней увеличивается и возвращается к значению в точке пересечения.

Итак, неравенство (101) является условием устойчивости автоколебаний в нелинейной АСР.

5. АСР с усложнённой структурой [1÷4]

При автоматизации сложных объектов, характеризующихся большой инерционностью и значительными возмущениями, одноконтурные АСР с типовыми законами регулирования не всегда в состоянии обеспечить требуемое качество регулирования. Одним из способов повышения качества регулирования является усложнение структуры АСР, что позволяет при автоматизации сложных объектов регулирования обойтись стандартным ассортиментом средств автоматизации.

Рассмотрим наиболее применяемые схемы АСР с усложнённой структурой, позволяющие повысить качество регулирования по сравнению с одноконтурными.

5.1. Каскадные АСР

Структурная схема и принцип действия

Структурная схема каскадной АСР приведена на рис. 39.

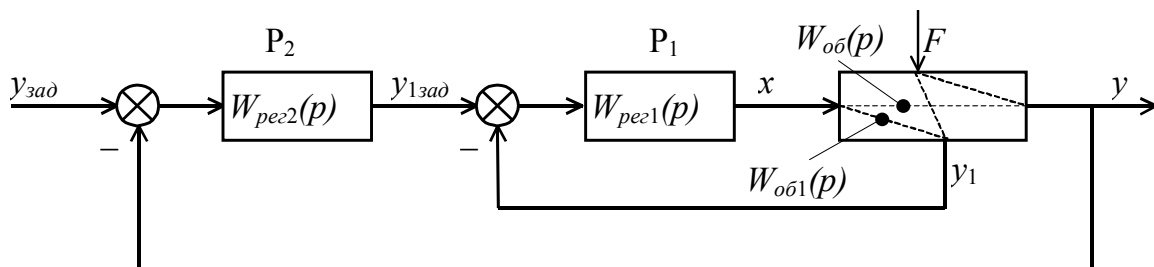


Рис. 39.

В частном случае структурная схема объекта регулирования в каскадной АСР может иметь вид (рис. 40).

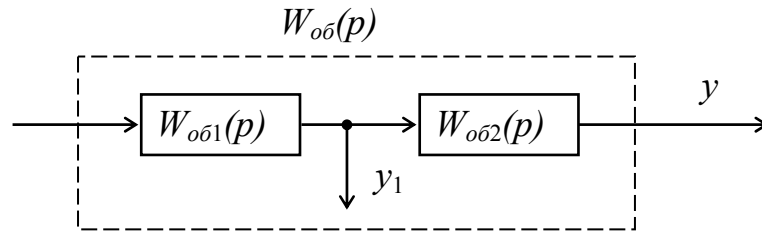


Рис. 40.

Каскадная АСР является двухконтурной, содержащей внешний контур регулирования основной регулируемой переменной y с корректирующим (основным) регулятором P_2 и внутренний контур регулирования промежуточной регулируемой переменной y_1 со стабилизирующим (вспомогательным) регулятором P_1 .

$W_{ob1}(p)$ и $W_{ob}(p)$ - передаточные функции объекта регулирования соответственно по каналу промежуточной и основной регулируемой переменной. Для структурной схемы объекта на рис. 40 справедливо:

$$W_{ob}(p) = W_{ob1}(p)W_{ob2}(p)$$

Регуляторы P_2 и P_1 включены последовательно, что и обусловило название "каскадная".

Стабилизирующий регулятор воздействует непосредственно на рабочий орган объекта, изменяя регулирующее воздействие, а корректирующий регулятор воздействует на задатчик стабилизирующего регулятора, изменяя задание на промежуточную регулируемую величину. Промежуточная регулируемая величина должна удовлетворять двум требованиям. Во-первых, промежуточная регулируемая величина должна реагировать на то же основное возмущение, которое действует на основную регулируемую величину. Во-вторых, инерционность объекта регулирования по каналу промежуточной регулируемой величины должна

быть много меньше, чем по каналу основной. При выполнении этих условий внутренний контур со стабилизирующим регулятором P_1 быстро реагирует на основное возмущение (так как инерционность объекта регулирования по каналу $x-u_1$ невелика), что позволяет скомпенсировать его действие, не дожидаясь отклонения основной регулируемой переменной (как это было бы в одноконтурной АСР). Для компенсации оставшихся небольших по величине возмущений, на которые y_1 не реагирует, а y реагирует, служит внешний контур с корректирующим регулятором P_2 .

Таким образом, основные возмущающие воздействия компенсируются быстродействующим стабилизирующим регулятором P_1 , а оставшиеся небольшие возмущения компенсируются корректирующим регулятором P_2 изменением задания регулятору P_1 .

За счёт того, что вспомогательная регулируемая величина быстро откликается на основное возмущение, качество регулирования в каскадной АСР может быть существенно повышено по сравнению с одноконтурной.

В качестве стабилизирующего регулятора обычно используется П-регулятор, позволяющий обеспечить высокое быстродействие внутреннего контура. При малой инерционности объекта по каналу промежуточной регулируемой величины коэффициент передачи этого регулятора не ограничивается соображениями устойчивости, что позволяет обеспечить малую статическую ошибку регулирования величины y_1 .

В качестве корректирующего регулятора обычно используются ПИ-, ПИД- регуляторы для того, чтобы обеспечить высококачественное регулирование основной регулируемой величины.

Пример: Каскадная АСР температуры в кубе ректификационной колонны (рис. 41.).

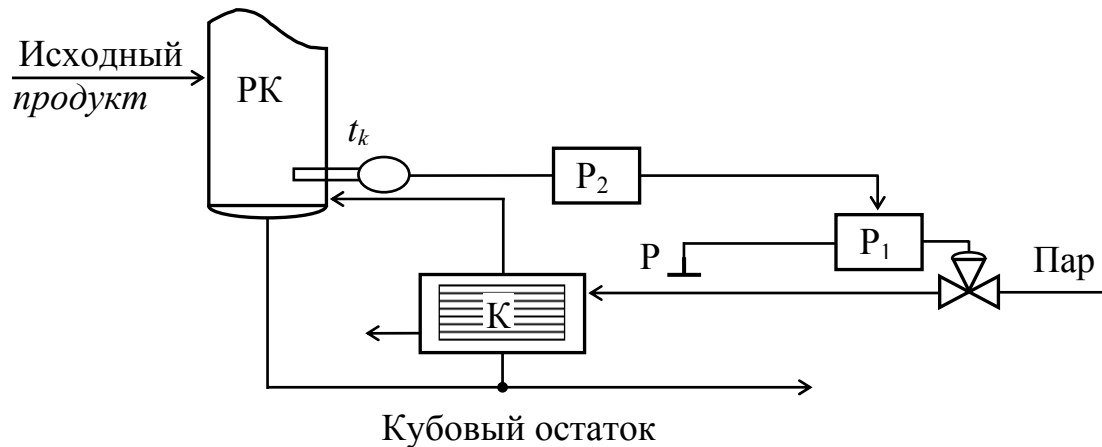


Рис. 41.

Обозначения на рис. 41

- РК- ректификационная колонна,
- К- кипятильник кубового продукта,
- t_k - температура кубового остатка,
- Р- давление пара на входе кипятильника.

Температура кубового остатка регулируется подачей пара в кипятильник. Однако, если давление в коллекторе питающего пара часто и значительно меняется, целесообразно применить каскадную АСР со стабилизирующим контуром давления пара и корректирующим контуром температуры в нижней части (кубе) колонны.

Расчёт настроек регуляторов в каскадных АСР

Поскольку настройки одного регулятора в общем случае зависят от настроек другого регулятора, расчёт оптимальных настроек регуляторов в каскадных АСР представляет достаточно сложную задачу, решаемую итеративными способами.

Последовательность расчёта настроек регуляторов

1) Определяется эквивалентная передаточная функция $W_{\text{экв1}}(p)$ для расчёта стабилизирующего регулятора:

$$W_{\text{экв1}}(p) = W_{\text{об1}}(p) + W_{\text{об}}(p)W_{\text{рез2}}(p) \quad (102)$$

На первом шаге итеративной процедуры, когда $W_{\text{рез2}}(p)$ ещё неизвестна, полагают

$$W_{\text{экв1}}(p) \approx W_{\text{об1}}(p) \quad (103)$$

(Если быстродействие внутреннего контура много больше, чем внешнего, внутренний контур практически не зависит от внешнего и допущение (103) оказывается справедливым, что позволяет рассчитывать стабилизирующий регулятор без учёта настроек корректирующего).

2) Определяется настройка стабилизирующего регулятора по структурной схеме (рис. 42.).

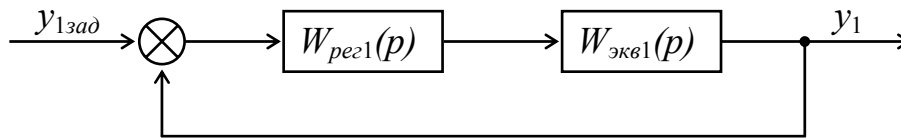


Рис. 42.

3) Определяется передаточная функция эквивалентного объекта $W_{\text{экв2}}(p)$ для расчёта настроек корректирующего регулятора:

$$W_{\text{экв2}}(p) = \frac{W_{\text{рез1}}(p)}{1 + W_{\text{рез1}}(p)W_{\text{об1}}(p)} W_{\text{об}}(p) \quad (104)$$

4) Определяются настройки корректирующего регулятора по структурной схеме (рис. 43.).

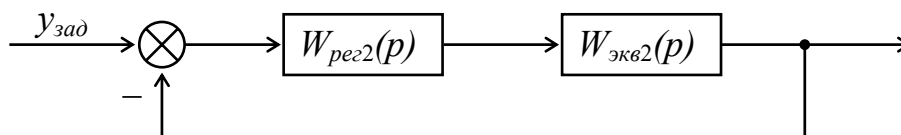


Рис. 43.

5) Начиная со второго шага, проверяется правило останова: близость настроек регуляторов на соседних шагах. При его выполнении- останов, иначе- вернуться к п.1.

На практике обычно ограничиваются одним шагом итерационной процедуры.

5.2. АСР со скоростным импульсом от промежуточной регулируемой величины

Структурная схема и принцип действия

Системы со скоростным импульсом обычно применяют при автоматизации объектов, в которых регулируемый технологический параметр распределён по пространственной координате (аппараты колонного и трубчатого типа).

Структурная схема такой системы имеет вид (рис. 44.).

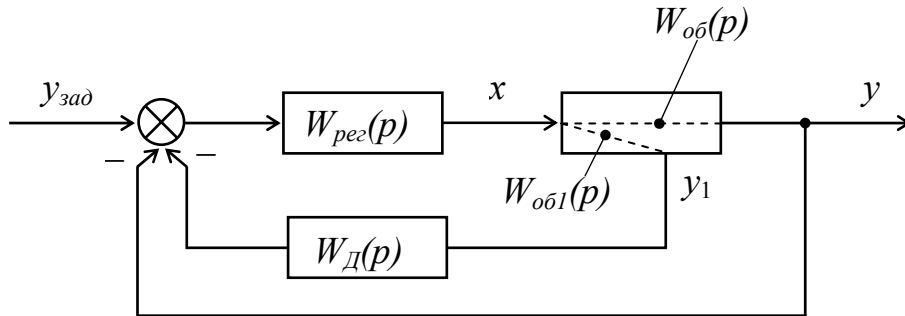


Рис. 44.

На рис. 44:

$$W_{д}(p) = K_{д} \frac{T_{д}p}{T_{д}p + 1} \quad (105)$$

- передаточная функция дифференциатора.

Промежуточная регулируемая величина y_I должна удовлетворять тем же требованиям, что и в каскадной АСР.

В отличие от каскадных АСР в данной системе используется один регулятор, а вместо второго - дифференциатор, служащий для получения производной промежуточной регулируемой величины. Наличие дифференциатора является принципиальным. Он нужен для получения исчезающего в статике сигнала. При использовании вместо дифференциатора любого другого динамического звена в статике на вход регулятора, помимо сигнала основной регулируемой величины, будет поступать сигнал промежуточной величины, что приведёт к возникновению статической ошибки регулирования даже при наличии астатического регулятора. Дифференциатор же работает только в динамике, поскольку в статике производная сигнала равна нулю и влияние промежуточной регулируемой величины на регулятор исчезает.

Принцип действия системы со скоростным импульсом аналогичен каскадной АСР: качество регулирования по сравнению с одноконтурной системой удаётся повысить за счёт высокого быстродействия внутреннего контура.

Расчёт АСР со скоростным импульсом

Один из методов расчёта систем со скоростным импульсом основан на том, что структурную схему системы со скоростным импульсом можно преобразовать к структурной схеме каскадной АСР. Для этого перенесём дифференциатор из обратной связи в прямую (рис. 45.).

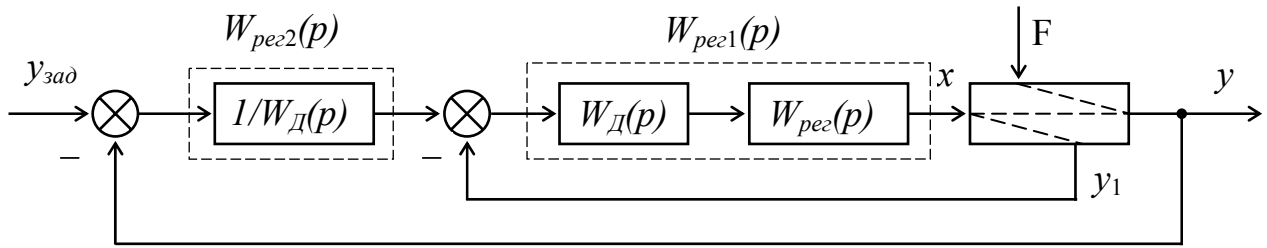


Рис. 45.

(Для того чтобы не изменилась передаточная функция внешнего контура, необходимо добавить в него передаточную функцию $1/W_{\text{д}}(p)$).

Обозначив

$$W_{\text{pez2}}(p) = 1/W_{\text{д}}(p) \quad (106)$$

и

$$W_{\text{pez1}}(p) = W_{\text{д}}(p)W_{\text{pez}}(p) \quad (107)$$

получаем каскадную АСР.

Пусть в АСР со скоростным импульсом из промежуточной точки используется ПИ- регулятор

$$W_{\text{pez}}(p) = K_{\text{pez}}(1 + 1/T_{\text{И}}p)$$

и дифференциатор (105), причём

$$T_{\text{д}} = T_{\text{И}} \quad (108)$$

Тогда, на основании (106) для эквивалентной каскадной АСР можно записать:

$$W_{\text{pez2}}(p) = \frac{T_{\text{д}}p + 1}{K_{\text{д}}T_{\text{д}}p}$$

Обозначив

$$(1/K_{\text{д}}) = K_{\text{pez2}}, \quad T_{\text{д}} = T_{\text{И2}},$$

получаем

$$W_{pez2}(p) = K_{pez2} (1 + 1/T_{И2} p).$$

Далее на основании (107) и (108)

$$W_{pez1}(p) = \frac{K_{pez} (T_{И} p + 1)}{T_{И} p} \cdot \frac{K_{Д} T_{Д} p}{T_{Д} p + 1} = K_{pez} K_{Д}$$

Обозначая

$$K_{pez} K_{Д} = K_{pez1},$$

получаем

$$W_{pez1}(p) = K_{pez1}.$$

Таким образом, ПИ- регулятору и дифференциатору в системе со скоростным импульсом при условии (108) в эквивалентной каскадной АСР соответствуют корректирующий ПИ- регулятор и стабилизирующий П- регулятор.

Итак, поскольку структурная схема АСР со скоростным импульсом может быть преобразована в структурную схему каскадной АСР, для её расчёта может быть использован рассмотренный в п.5.1. метод расчёта каскадной АСР.

5.3. Системы с компенсацией возмущения.

Комбинированные АСР

Структурная схема и принцип действия

Рассматривавшиеся выше замкнутые АСР являются системами регулирования по отклонению регулируемой величины. Поводом для регулирования в таких системах является отклонение регулируемой переменной от заданного значения. Поэтому в таких системах принципиально невозможно достичь полной ликвидации отклонений

регулируемой величины. Правда, величина отклонений уменьшается с ростом коэффициента передачи регулятора, однако максимально возможная величина коэффициента передачи регулятора ограничена соображениями устойчивости АСР (с ростом коэффициента передачи регулятора запас устойчивости АСР уменьшается).

Итак, замкнутые АСР реагируют на любое возмущение, приводящее к отклонению регулируемой величины от заданного значения. В то же время таким системам принципиально присуща ошибка и при определённых условиях они могут становиться неустойчивыми.

Существует ещё один принцип регулирования - разомкнутые системы с компенсацией возмущения. Структурная схема такой системы изображена на рис.46.

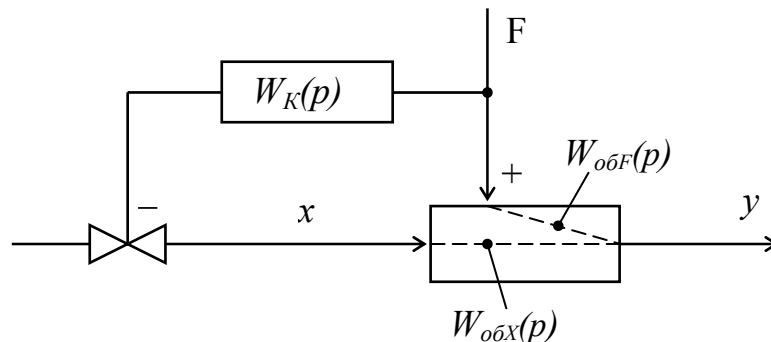


Рис. 46.

Пусть на объект регулирования действует возмущение F с передаточной функцией $W_{обF}(p)$. Можно устранить влияние этого возмущения на регулируемую величину y , не дожидаясь её отклонения. С этой целью вводится устройство компенсации возмущения (регулятор с прямой связью) с передаточной функцией $W_K(p)$. Идея заключается в том, чтобы скомпенсировать влияние возмущения F на регулируемую величину y по каналу с передаточной функцией $W_K(p)W_{обx}(p)$, откуда получаем передаточную функцию идеального устройства компенсации возмущения:

$$W_{Ku\delta}(p) = \frac{W_{\delta F}(p)}{W_{\delta X}(p)}$$

Поскольку система с компенсацией возмущения является разомкнутой, на выбор параметров компенсатора возмущения не накладываются ограничения, связанные с обеспечением запаса устойчивости АСР. Поэтому в некоторых случаях удаётся выбрать настройки компенсатора так, чтобы полностью скомпенсировать возмущение. При этом регулируемая переменная совершенно не реагирует на возмущение и ошибка регулирования по данному возмущению равна нулю.

Поскольку для компенсации каждого возмущения требуется свой компенсатор, данный принцип регулирования применим, когда на объект регулирования действует одно- два возмущения. При большом числе приблизительно одинаковых по величине возмущений скомпенсировать все возмущения технически сложно, поэтому в этом случае целесообразнее использовать замкнутую АСР, поскольку она реагирует на все возмущения, приводящие к отклонению регулируемой величины. Наконец, когда среди большого числа возмущений, действующих на объект, можно выделить одно- два основных по амплитуде, применяются системы, в которых одновременно используются оба принципа регулирования. Такие системы называются комбинированными.

Структурная схема комбинированной системы дана на рис.47.

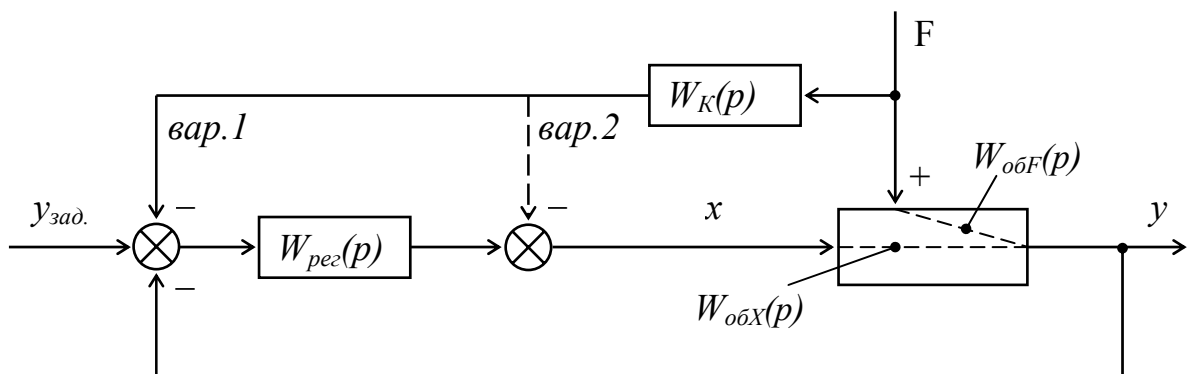


Рис. 47.

Она отличается от обычной одноконтурной тем, что через устройство компенсации вводится воздействие с целью компенсации возмущения. При этом возможны два варианта ввода компенсирующего воздействия: на вход регулятора (вариант 1) или на его выход (вариант 2). Технически проще вариант 1 (так как при его реализации складываются маломощные сигналы на входе регулятора), но в этом случае передаточная функция идеального компенсатора сложнее.

Пример комбинированной АСР: система регулирования уровня жидкости с компенсацией изменений нагрузки (с коррекцией по нагрузке) (рис.48.).

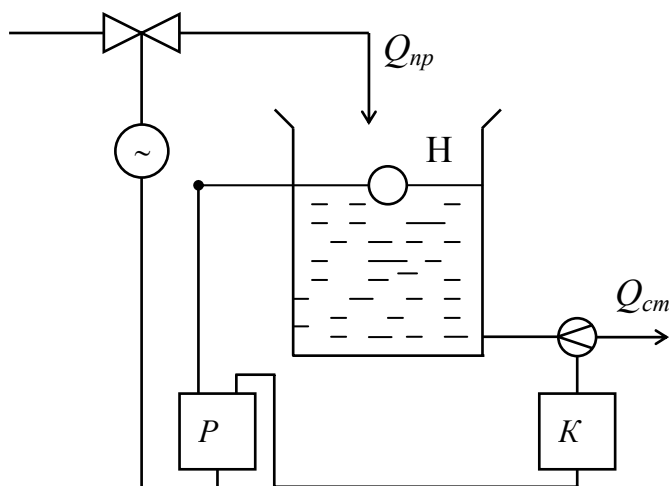


Рис. 48.

На рис.48 обозначено:

P- регулятор уровня изменением притока $Q_{пр}$,

K- компенсатор колебаний нагрузки $Q_{ст}$.

Изображенная на рис.48 комбинированная АСР реагирует на изменения нагрузки, не дожидаясь, пока изменение нагрузки приведёт к отклонению регулируемой величины.

Расчёт настроек устройства компенсации возмущения

Расчёт настроек устройства компенсации возмущения производится из условий компенсации возмущения регулирующим воздействием.

Для варианта 1 включения компенсатора это условие имеет вид:

$$W_{обF}(p) = W_K(p)W_{pez}(p)W_{обX}(p), \quad (109)$$

откуда передаточная функция идеального компенсатора равна:

$$W_{Kид}(p) = \frac{W_{обF}(p)}{W_{обX}(p)W_{pez}(p)} \quad (110)$$

Для варианта 2 условие компенсации возмущения выглядит так:

$$W_{обF}(p) = W_K(p)W_{обF}(p), \quad (111)$$

откуда

$$W_{Kид}(p) = \frac{W_{обF}(p)}{W_{обX}(p)} \quad (112)$$

(Как видим, передаточная функция (112) несколько проще по сравнению со (110)).

Если условия (110), (112) выполняются строго, возмущение F компенсируется точно. В этом случае система не реагирует на возмущение F (т.е. регулируемая величина не меняется при изменении возмущения F). Такая система называется инвариантной (независимой) по отношению к возмущению F . Условия (109), (111) называются условиями абсолютной инвариантности АСР.

Точное выполнение условий абсолютной инвариантности возможно далеко не всегда, так как передаточные функции устройства компенсации, полученные по этим условиям, могут оказаться либо физически нереализуемыми, либо реализация их технически сложна.

Идеальное устройство компенсации возмущения физически реализуемо, если инерционность объекта регулирования по каналу регулирующего воздействия не больше, чем по каналу возмущающего

воздействия, иначе регулирующее воздействие не будет успевать компенсировать возмущение и его компенсацию можно осуществить только приближенно. Поэтому эффективность комбинированной АСР по сравнению с одноконтурной тем выше, чем больше инерционность по каналу $F \rightarrow y$ по сравнению с каналом $x \rightarrow y$. В то же время следует отметить, что если инерционность по каналу возмущающего воздействия много больше, чем по каналу регулирующего воздействия, надобность в компенсаторе возмущения вообще исчезает, так как в силу малой инерционности замкнутого контура регулятор будет успевать оперативно компенсировать возмущение.

Поскольку, как правило, не удаётся реализовать $W_{Kид}(p)$, отвечающую условиям абсолютной инвариантности (109), (111), приходится выбирать $W_K(p)$ так, чтобы осуществлялось наилучшее в определённом смысле приближение передаточной функции реального устройства компенсации к передаточной функции идеального компенсатора.

Один из подходов (метод Ротача) заключается в следующем. Запишем частотную передаточную функцию идеального компенсатора (ниже предполагается, что устройство компенсации включено по первому варианту):

$$W_{Kид}(j\omega) = \frac{W_{обF}(j\omega)}{W_{pez}(j\omega)W_{обX}(j\omega)} \quad (113)$$

Идеальным было бы совпадение АФХ идеального и фактического устройств компенсации во всем частотном диапазоне, что обеспечило бы подавление возмущения на всех частотах. Однако, если это невозможно, потребуем чтобы векторы АФХ идеального и фактического компенсаторов совпадали хотя бы на одной, наиболее важной частоте. Рассмотрим АЧХ замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия $A_{зсF}(\omega)$

(рис. 49). При малых частотах возмущающее воздействие подавляется за счет наличия регулятора (АЧХ замкнутой системы при $\omega = 0$ точно для астатических регуляторов или приближенно (для статических регуляторов) равна нулю). При больших частотах АЧХ также стремится к нулю вследствие инерционности системы. Таким образом, возмущающее воздействие компенсируется на малых частотах за счет регулятора, а на больших частотах фильтруется за счет инерционности системы. Наибольшее влияние на регулируемую величину возмущающее воздействие оказывает в области средних частот, а именно при резонансной частоте $\omega_{рез}$, при которой АЧХ замкнутой системы достигает максимального значения.

Итак, поскольку влияние возмущения на регулируемую величину максимально на резонансной частоте, основная задача компенсатора – компенсация возмущения на резонансной частоте, поэтому потребуем, чтобы векторы частотной передаточной функции идеального и фактического устройств компенсации совпадали на резонансной частоте:

$$W_{КиД}(j\omega_{рез}) = W_{кф}(j\omega_{рез}) \quad (114)$$

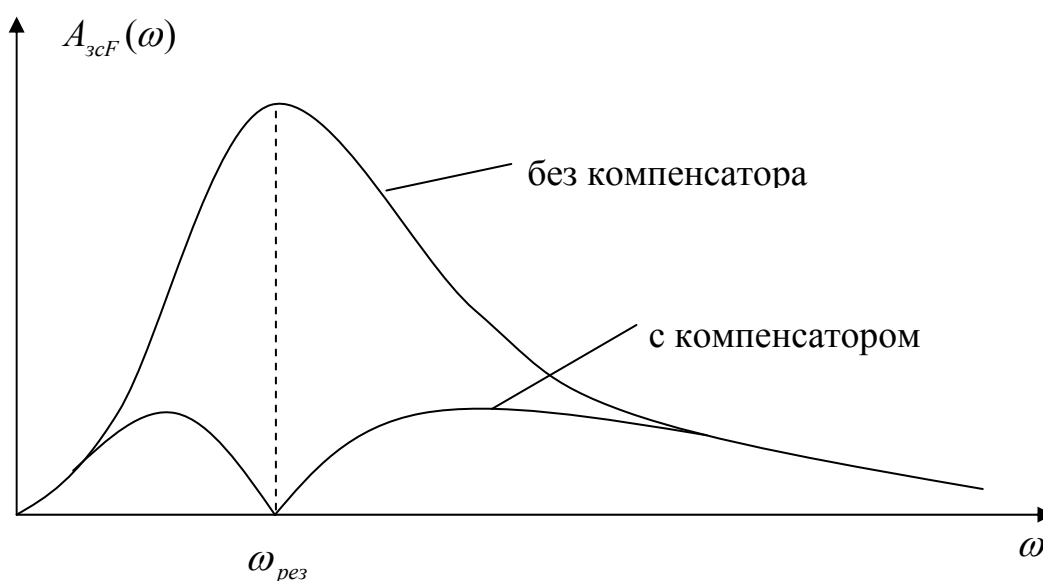


Рис. 49.

При таком выборе параметров компенсатора возмущающее воздействие полностью подавляется на резонансной частоте (рис. 49), а на остальных частотах – частично.

Поскольку для выполнения векторного условия (114) должны выполняться два скалярных условия (равенство модулей и фаз векторов) устройство компенсации должно иметь минимум два настроечных параметра. Часто в качестве компенсатора используют реальное дифференцирующее звено с передаточной функцией:

$$W_{кф}(p) = K_D \frac{T_D p}{T_D p + 1} \quad (115)$$

Частотная передаточная функция компенсатора (115) равна:

$$W_{кф}(j\omega) = K_D \frac{T_D \omega}{\sqrt{1 + (T_D \omega)^2}} e^{j\left[\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T_D \omega)\right]} \quad (116)$$

АФХ компенсатора, построенная по выражению (116), представляет полуокружность в правом квадранте (рис. 50) с центром на положительной вещественной полуоси, проходящую через начало координат.

Диаметр этой полуокружности OC равен коэффициенту передачи дифференциатора:

$$OC = K_D \quad (117)$$

Вещественная часть вектора частотной передаточной функции компенсатора \overrightarrow{OA} для произвольной частоты ω_0 равна:

$$\text{Re}[W_{кф}(j\omega_0)] = OB = K_D \frac{(T_D \omega_0)^2}{1 + (T_D \omega_0)^2} \quad (118)$$

Выберем параметры компенсатора (115) K_D и T_D так, чтобы выполнялось условие (114). При этом точная компенсация возмущения на резонансной частоте возможна при выполнении двух условий: 1) вектор частотной

передаточной функции идеального компенсатора на резонансной частоте находится в первом квадранте и 2) значение коэффициента передачи компенсатора не превышает его максимально возможного значения.

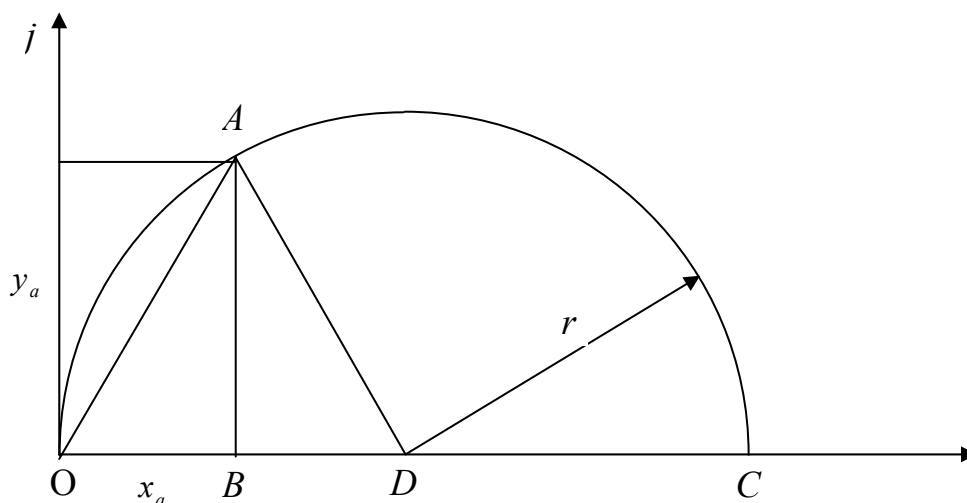


Рис. 50.

Точная компенсация возмущения на резонансной частоте.

Пусть вектор \overrightarrow{OA} на (рис. 50) – это вектор частотной передаточной функции идеального компенсатора на резонансной частоте, определенный по выражению (113) при $\omega = \omega_{рез}$. Проведем через точку A полуокружность OAC радиусом r с центром D на вещественной положительной полуоси. Тогда параметры K_D и T_D компенсатора можно определить по формулам (117), (118).

Согласно (117)

$$K_D = OC \quad (119)$$

а из (118) при $\omega = \omega_{рез}$ находим:

$$T_D = \frac{1}{\omega_{рез}} \sqrt{\frac{OB}{BC}} \quad (120)$$

Обозначим через x_a и y_a соответственно вещественную и мнимую части вектора \overrightarrow{OA} (рис. 50). Тогда из ΔABD , учитывая, что $AB = y_a$, $AD = r$, $BD = r - x_a$, находим:

$$y_a^2 + (r - x_a)^2 = r^2,$$

откуда

$$r = \frac{x_a^2 + y_a^2}{2x_a}, \quad (121)$$

и формулы (119), (120) можно записать в виде:

$$K_D = 2r; \quad T_D = \frac{1}{\omega_{рез}} \sqrt{\frac{x_a}{2r - x_a}} \quad (122)$$

На основании вышеизложенного можно определить следующую последовательность расчета настроек компенсатора при точной компенсации возмущения на резонансной частоте.

1. Определяем резонансную частоту $\omega_{рез}$

а) Точный способ.

Находим передаточную функцию замкнутой системы по каналу возмущающего воздействия:

$$W_{зсF}(p) = \frac{W_{обF}(p)}{1 + W_{обX}(p) W_{рез}(p)} \quad (123)$$

Заменяя в (123) p на $j\omega$, находим частотную передаточную функцию $W_{зсF}(j\omega)$, определяем ее модуль, строим АЧХ замкнутой системы

$$A_{зсF}(\omega) = |W_{зсF}(j\omega)|$$

и определяем резонансную частоту (рис. 49).

б) Приближенный способ.

Определяем значение ФЧХ объекта на резонансной частоте по выражению:

$$\varphi_{об}(\omega_{рез}) = \varphi_{р.с.}(\omega_{рез}) - \varphi_{рез}(\omega_{рез})$$

где $\varphi_{p.c.}(\omega_{рез})$ и $\varphi_{рег}(\omega_{рез})$ - соответственно значения ФЧХ разомкнутой системы и регулятора на резонансной частоте, определяемые из таблиц 6, 7.

Таблица 6

Система	Статическая	Астатическая первого порядка	Астатическая второго порядка
$\varphi_{p.c.}(\omega_{рез})$	-160°	-150°	$-141^\circ 30'$

Таблица 7

Регулятор	П	И	ПИ	ПД	ПИД
$\varphi_{рег}(\omega_{рез})$	0	-90°	$-26^\circ 30'$	$+26^\circ 30'$	0

По ФЧХ объекта определяем значение $\omega_{рез}$, соответствующее фазовому сдвигу $\varphi_{об}(\omega_{рез})$.

- По выражению (113) находим вектор частотной передаточной функции идеального компенсатора при $\omega = \omega_{рез}$ и определяем его вещественную и мнимую части x_a, y_a .
- По формулам (121), (122) определяем параметры настроек компенсатора K_d, T_d .

Приближенная компенсация возмущения на резонансной частоте

В этом случае приходится выбирать параметры настройки устройства компенсации возмущения так, чтобы обеспечить на резонансной частоте минимальную по модулю ошибку \vec{EA} между векторами идеального \vec{OA} и реального \vec{OE} компенсаторов (рис. 51):

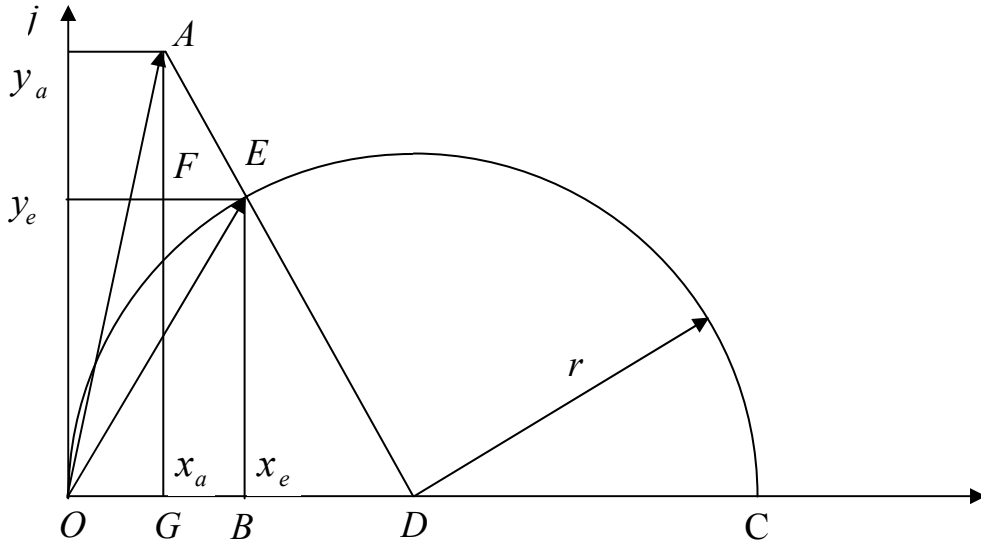


Рис. 51.

$$|\vec{EA}| = |\vec{OA} - \vec{OE}| \rightarrow \min$$

$$\vec{OA} = W_{\text{кюд}}(j\omega_{\text{рез}}); \quad \vec{OE} = W_{\text{кф}}(j\omega_{\text{рез}}).$$

Для уменьшения ошибки \vec{EA} точка E конца вектора \vec{OE} должна принадлежать нормали AD полуокружности OEC , соединяющей точку A с центром D полуокружности, т.к. нормаль - кратчайшее расстояние между точкой и кривой. Кроме того, для уменьшения ошибки \vec{EA} диаметр этой полуокружности должен иметь максимально возможное значение:

$$K_D = K_{\text{Дмакс}}. \quad (124)$$

Пусть точки A и E имеют соответственно координаты: $A(x_a, y_a)$, $E(x_e, y_e)$. Тогда из ΔBED находим:

$$BD^2 + BE^2 = DE^2$$

или

$$(r - x_e)^2 + y_e^2 = r^2. \quad (125)$$

Из подобия треугольников AFE и AGD имеем:

$$\frac{AF}{AG} = \frac{FE}{GD}$$

или

$$\frac{y_a - y_e}{y_a} = \frac{x_e - x_a}{r - x_a} \quad (126)$$

Решая совместно (125), (126), получаем

$$x_e = r \left[1 - \frac{r - x_a}{\sqrt{(r - x_a)^2 + y_a^2}} \right] \quad (127)$$

Подставляя (127) в (120), определяем

$$T_D = \frac{1}{\omega_{рез}} \sqrt{\frac{x_e}{K_{Dmax} - x_e}} \quad (128)$$

Последовательность расчета настроек устройства компенсации возмущения в этом случае.

- 1, 2 – то же, что и в предыдущем случае.
3. По формуле (124) задаёмся значением K_D .
4. По формулам (127), (128) определяем величину T_D .

5.4. Системы связанного регулирования.

Структурная схема

Выше мы рассматривали объекты регулирования с одним входом и выходом (одномерные объекты). Многомерными называются объекты, имеющие несколько регулируемых величин и соответствующее число регулирующих воздействий. При этом регулируемые величины могут зависеть друг от друга. Связь между регулируемыми величинами осуществляется за счет наличия в объекте перекрёстных связей между каналами регулирования, при которых изменение регулирующего воздействия по одному каналу приводит к изменению не только «собственной» регулируемой величины, но и других. Такие объекты и

системы управления и называются объектами и системами связанного регулирования.

Структурная схема многосвязного объекта приведена на рис. 52, где приняты обозначения:

$W_{ii}(p)$ - «собственная» передаточная функция i -го канала регулирования,

$W_{ij}(p)$ - передаточная функция перекрёстной связи от i -го регулирующего воздействия к j -той регулируемой величине.

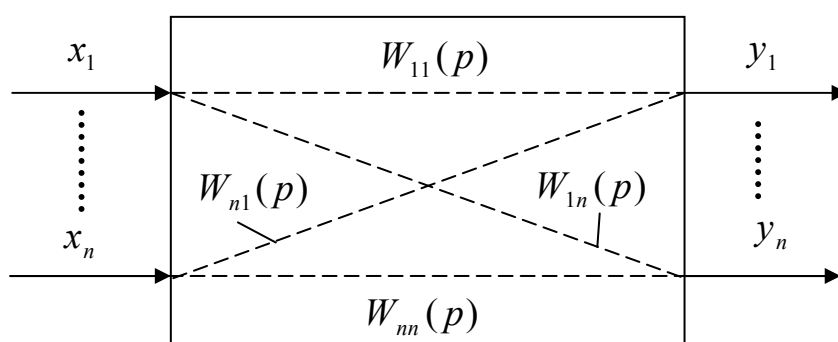


Рис. 52.

Пример: АСР регулирования температуры верха и низа ректификационной колонны (рис. 53).

На рис. 53 обозначено:

РК, Д, К – соответственно ректификационная колонна, дефлегматор, кипятильник кубового остатка,

t_v, t_n - температуры верха и низа ректификационной колонны,

G_ϕ, G_n - расходы флегмы на орошение и пара в кипятильник,

P_1, P_2 - регуляторы температурного режима верха и низа ректификационной колонны.

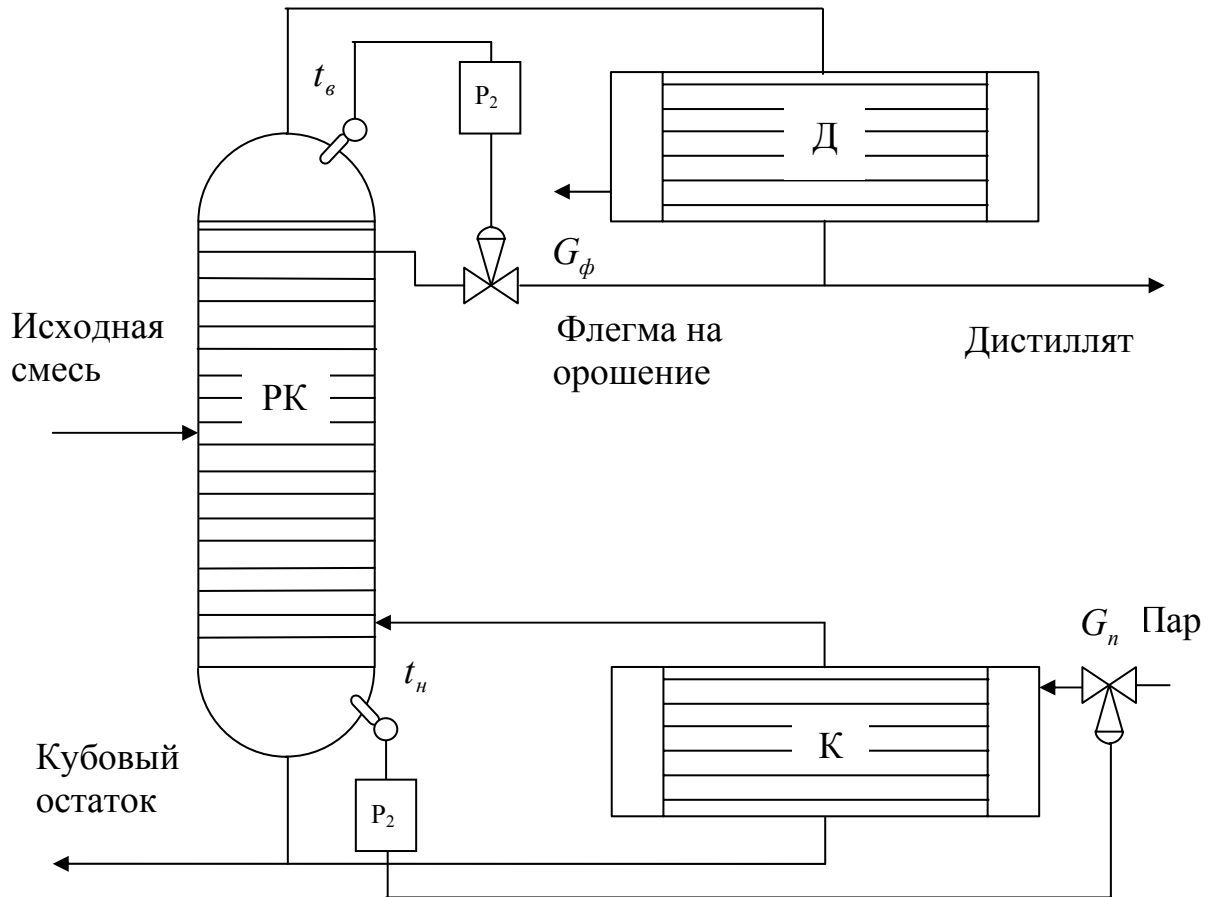


Рис. 53

Если изменения расходов G_ϕ и G_n приводят к изменению не только «своих», но и «чужих» регулируемых величин, то температуры верха и низа колонны оказываются взаимосвязанными.

Расчет систем связанного регулирования

Независимый расчет контуров регулирования (неучет перекрестных связей) может привести к ухудшению качества регулирования в многосвязной системе за счет влияния перекрестных связей вплоть до потери работоспособности системы. Это происходит потому, что каждая пара перекрестных связей между i -тым и j -тым каналами приводит к образованию нового замкнутого контура, который может оказаться неустойчивым.

Рассмотрим в качестве примера АСР с двумерным объектом(рис. 54):

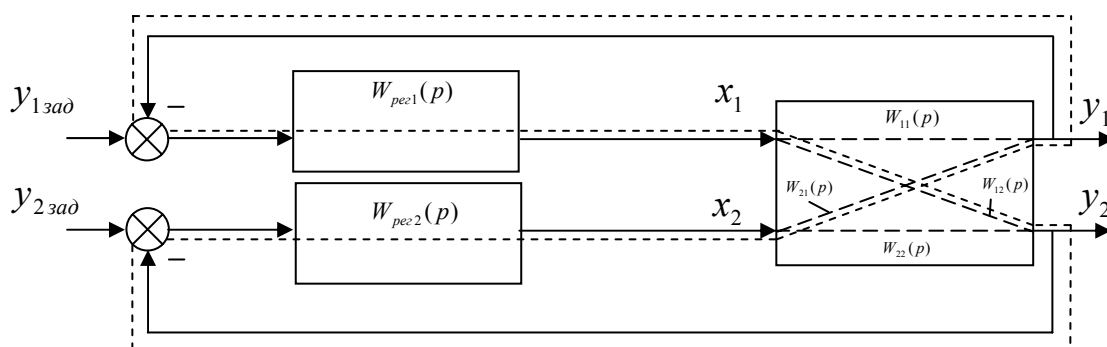


Рис. 54.

Наличие двух перекрёстных связей в объекте приводит к образованию нового замкнутого контура (штриховая линия на рис. 54), который может оказаться неустойчивым, что приведет к неустойчивости всей системы в целом.

Для оценки степени взаимного влияния контуров регулирования вводится понятие комплексного коэффициента связности:

$$W_{св}(j\omega) = \frac{W_{12}(j\omega)W_{21}(j\omega)}{W_{11}(j\omega)W_{22}(j\omega)}$$

Если модуль коэффициента связности на рабочей частоте системы ω_p достаточно мал

$$|W_{св}(j\omega_p)| \ll 1,$$

перекрёстными связями можно пренебречь. При этом объект может быть разбит на несколько независимых регулируемых участков, а система регулирования распадается на n независимых контуров.

Если же $|W_{св}(j\omega_p)| > 1$, целесообразно поменять местами прямые и перекрёстные каналы («перекрёстное регулирование»).

Наконец, при $0 < |W_{св}(j\omega_p)| < 1$, перекрёстные связи необходимо учитывать при расчете.

Один из методов расчета многосвязных систем заключается в введении перекрёстных связей между регуляторами с тем, чтобы скомпенсировать влияние перекрёстных связей в объекте («развязать» контуры регулирования). Такой подход называют принципом автономности Вознесенского. Если эту задачу удаётся решить точно, многосвязная система распадается на ряд независимых друг от друга (автономных) контуров.

Рассмотрим в качестве примера двумерную АСР со структурами объекта и регулятора, в которых каждый вход действует на все выходы, а точки суммирования сигналов расположены на выходах (рис. 55).

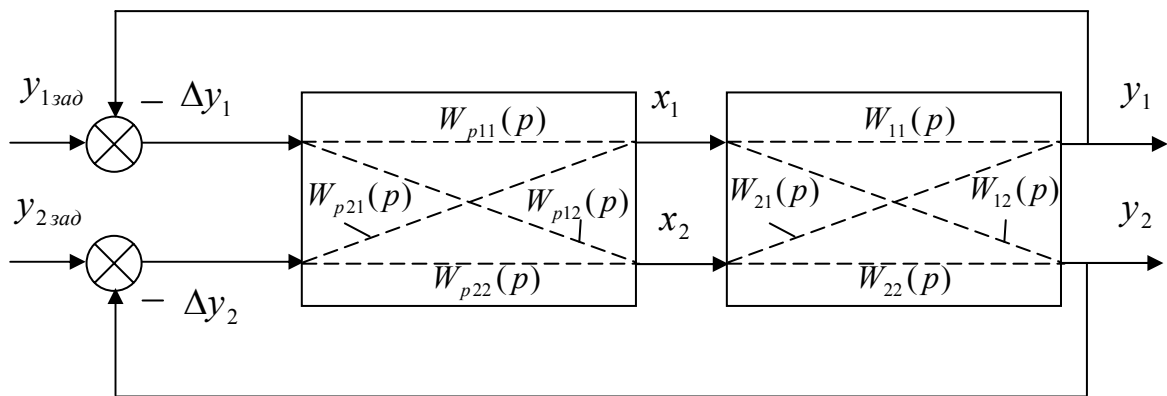


Рис. 55.

Требуется выбрать передаточные функции перекрестных связей в многомерном регуляторе $W_{p12}(p)$ и $W_{p21}(p)$ так, чтобы скомпенсировать перекрёстные связи в объекте $W_{12}(p)$ и $W_{21}(p)$ («развязать» контуры).

Обозначим $\vec{y}_{зад}$, \vec{y} , \vec{x} - соответственно векторы заданных значений регулируемых переменных, их фактических значений и регулирующий воздействий.

$$\Delta \vec{y} = \vec{y}_{зад} - \vec{y} - \text{вектор рассогласований,}$$

$\|W_{об}(p)\|$ - матрица передаточных функций объекта регулирования,

$\|W_p(p)\|$ - матрица передаточных функций многомерного регулятора.

$$\|W_{o\delta}(p)\| = \begin{vmatrix} W_{11}(p) & W_{21}(p) \\ W_{12}(p) & W_{22}(p) \end{vmatrix}; \quad \|W_p(p)\| = \begin{vmatrix} W_{p11}(p) & W_{p21}(p) \\ W_{p12}(p) & W_{p22}(p) \end{vmatrix}$$

Матричное уравнение объекта регулирования:

$$\vec{y} = \|W_{o\delta}(p)\| \vec{x}$$

Матричное уравнение регулятора:

$$\vec{x} = \|W_p(p)\| \Delta \vec{y}$$

Матрица передаточных функций разомкнутой системы:

$$\|W_{pc}(p)\| = \|W_{o\delta}(p)\| \|W_p(p)\|.$$

Очевидно, что если перекрестные связи в объекте $W_{12}(p)$ и $W_{21}(p)$ точно компенсируются перекрёстными связями в регуляторе $W_{p12}(p)$ и $W_{p21}(p)$, матрица передаточных функций разомкнутой системы должна быть диагональной, следовательно, условие компенсации перекрестных связей в объекте имеет вид:

$$\|W_{o\delta}(p)\| \|W_p(p)\| = D, \quad (129)$$

где D – диагональная матрица.

$$D = \begin{vmatrix} W_{11}(p) W_{p1}(p) & 0 \\ 0 & W_{22}(p) W_{p2}(p) \end{vmatrix},$$

$W_{p1}(p), W_{p2}(p)$ - передаточные функции регуляторов контуров, определённые без учета перекрестных связей в объекте.

Из (129) находим

$$\|W_p(p)\| = \|W_{o\delta}(p)\|^{-1} D \quad (130)$$

Матрица обратная передаточной функции объекта равна:

$$\|W_{o\delta}(p)\|^{-1} = \frac{1}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \begin{vmatrix} W_{22}(p) & -W_{12}(p) \\ -W_{21}(p) & W_{11}(p) \end{vmatrix} \quad (131)$$

С учётом (131) (130) принимает вид

$$\|W_p(p)\| = \frac{1}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \left\| \begin{array}{cc} W_{22}(p)W_{11}(p)W_{p1}(p) & -W_{12}(p)W_{22}(p)W_{p2}(p) \\ -W_{21}(p)W_{11}(p)W_{p1}(p) & W_{11}(p)W_{22}(p)W_{p2}(p) \end{array} \right\|,$$

или в скалярной форме

$$\begin{aligned} W_{p11}(p) &= \frac{W_{22}(p)W_{11}(p)W_{p1}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \\ W_{p21}(p) &= \frac{-W_{12}(p)W_{22}(p)W_{p2}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \\ W_{p12}(p) &= \frac{-W_{21}(p)W_{11}(p)W_{p1}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \\ W_{p22}(p) &= \frac{W_{11}(p)W_{22}(p)W_{p2}(p)}{W_{11}(p)W_{22}(p) - W_{12}(p)W_{21}(p)} \end{aligned}$$

Из последних выражений следует, что в частном случае, если перекрестные связи в объекте равны нулю, перекрестные связи в регуляторе также обращаются в ноль. При этом

$$W_{pii}(p) = W_{pi}(p); \quad i = 1, 2.$$

В случае, если передаточные функции $W_{p12}(p)$ и $W_{p21}(p)$ оказываются достаточно сложными или физически нереализуемыми, для их расчета используют приближенные методы и, в частности, с этой целью можно использовать рассмотренную в п. 5.3 методику расчета устройств компенсации возмущения.

5.5. Регулирование объектов с чистым запаздыванием.

Упрядите ль Смита

Наличие существенного чистого запаздывания в объекте регулирования резко ухудшает качество регулирования. Одним из способов повышения качества регулирования в этом случае является охват регулятора местной отрицательной обратной связью.

Пусть
$$W_{об}(p) = W'_{об}(p)e^{-p\tau},$$

где $W'_{об}(p)$ - передаточная функция объекта без учета чистого запаздывания.

Рассмотрим структурную схему АСР (рис. 56)

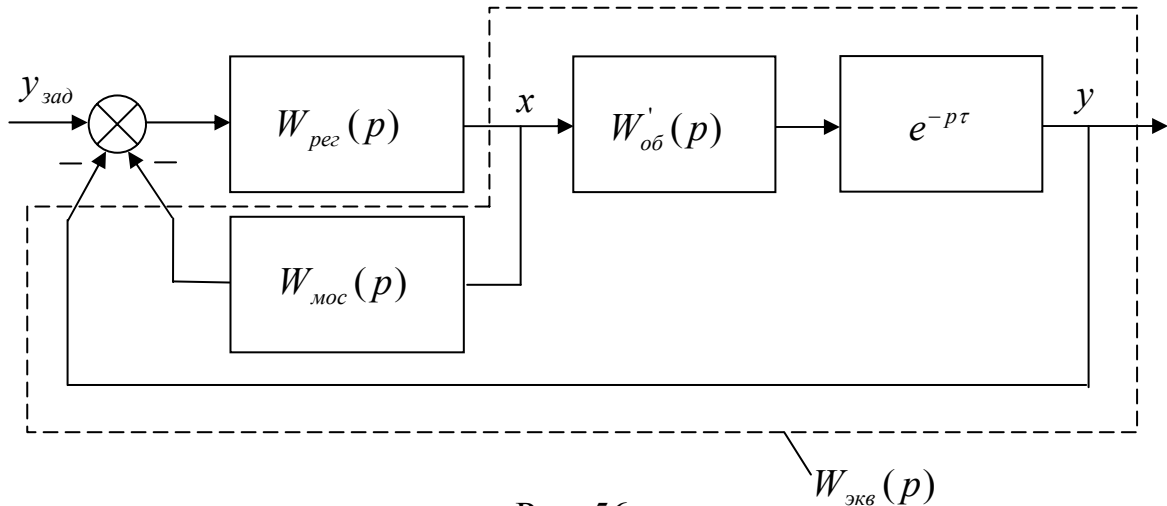


Рис. 56.

Выберем передаточную функцию местной обратной связи $W_{мос}(p)$ так, чтобы эквивалентный объект не содержал чистого запаздывания:

$$W_{экв}(p) = W'_{об}(p). \quad (132)$$

Поскольку

$$W_{экв}(p) = W_{мос}(p) + W'_{об}(p) e^{-p\tau}, \quad (133)$$

приравнивая правые части (132) и (133), находим

$$W_{мос}(p) = W'_{об}(p) [1 - e^{-p\tau}]. \quad (134)$$

Местная обратная отрицательная связь с передаточной функцией (134) называется упредителем Смита. Как видим из (134), упредитель Смита реализуется в виде последовательного соединения звеньев $W'_{об}(p)$ и $[1 - e^{-p\tau}]$. Итак, для реализации упредителя Смита необходимо знание модели объекта регулирования. Если эта модель известна неточно, или ее

параметры изменяются во времени, эффект от введения упредителя Смита снижается.

В установившемся режиме $W_{мос}(p) = 0$, поэтому введение упредителя Смита не приводит к возникновению статической ошибки регулирования. В динамике, поскольку выполняется условие (132) (эквивалентная передаточная функция объекта не содержит чистого запаздывания), качество переходных процессов в замкнутой АСР улучшается.

6. Расчет настроек цифровых регуляторов [2 ÷ 5]

Системы с цифровым вычислительным устройством в контуре называют системами непосредственного или прямого цифрового управления (НЦУ).

Достоинства систем НЦУ по сравнению с аналоговыми системами:

1. Гибкость - простота перенастройки изменением программного обеспечения,
2. Возможность реализации практически любой структуры АСР и самых различных законов регулирования,
3. Возможность построения многоканальных систем (систем обтекающего типа) – один регулятор поочередно подключается к нескольким каналам регулирования,
4. Возможность реализации помимо функции регулирования других функций информационной подсистемы АСУТП (первичная обработка сигналов, косвенная оценка неизмеряемых параметров и т.п.),
5. Возможность управления чрезвычайно инерционными объектами.

Цифровой регулятор характеризуется двумя особенностями, обусловленными принципом работы цифровых устройств: квантованием сигнала по уровню и времени.

Квантование сигналов по уровню в цифровых устройствах происходит вследствие преобразования аналогового сигнала в цифровой код с помощью АЦП. При этом непрерывный сигнал заменяется ступенчатым, который может принимать конечное число фиксированных по уровню значений (уровней квантования) (рис. 57)

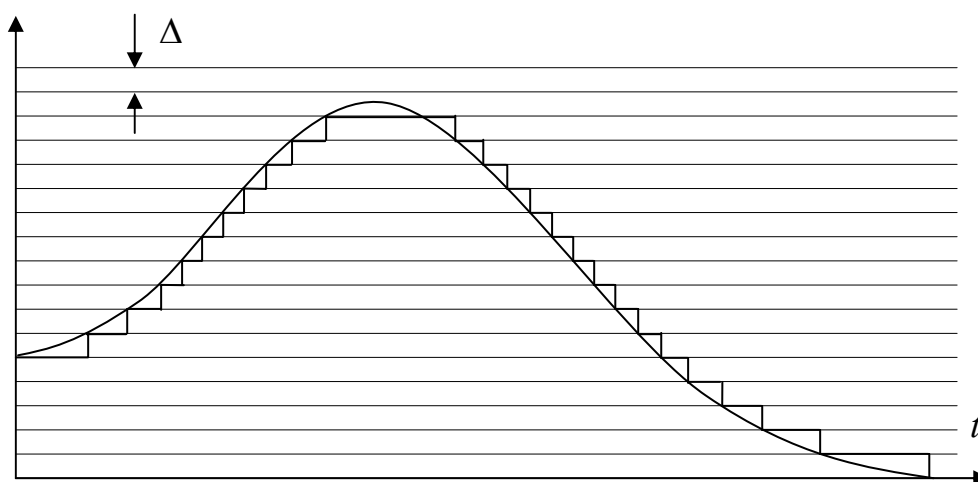


Рис. 57.

При этом число уровней квантования и величина шага квантования Δ зависят от количества разрядов АЦП и диапазона изменения преобразуемого сигнала. Абсолютная ошибка при квантовании по уровню равна шагу квантования, определяемому соотношением:

$$\Delta = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2^{n-1}},$$

где $(U_{\max} - U_{\min})$ - диапазон преобразуемого напряжения, n - количество двоичных разрядов АЦП.

Относительная ошибка равна:

$$\delta = \frac{\Delta}{U_{\max} - U_{\min}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Например, при $n=11$, $2^{10} = 1024$, $1/2^{n-1} \approx 0.001$, $\delta = 0.1\%$. Итак, при $n \geq 11$ ошибка квантования по уровню достаточно мала и ею можно

пренебречь. Поэтому в дальнейшем эффектом квантования по уровню пренебрегаем.

Квантование непрерывного сигнала по времени происходит вследствие периодического опроса датчиков сигналов. При этом непрерывный сигнал преобразуется в последовательность импульсов. Такое преобразование называется импульсной модуляцией, а реализующее его устройство – импульсным модулятором (элементом). В дальнейшем будем рассматривать системы НЦУ с идеальным амплитудно–импульсным модулятором, преобразующим непрерывный сигнал в последовательность равноотстоящих, бесконечно малых по длительности (мгновенных) импульсов с амплитудой равной амплитуде входного непрерывного сигнала (рис. 58). (T – период повторения импульсов, период опроса датчиков, интервал дискретности, период квантования по времени). Такое допущение справедливо, если время аналого-цифрового преобразования достаточно мало по сравнению с периодом опроса.

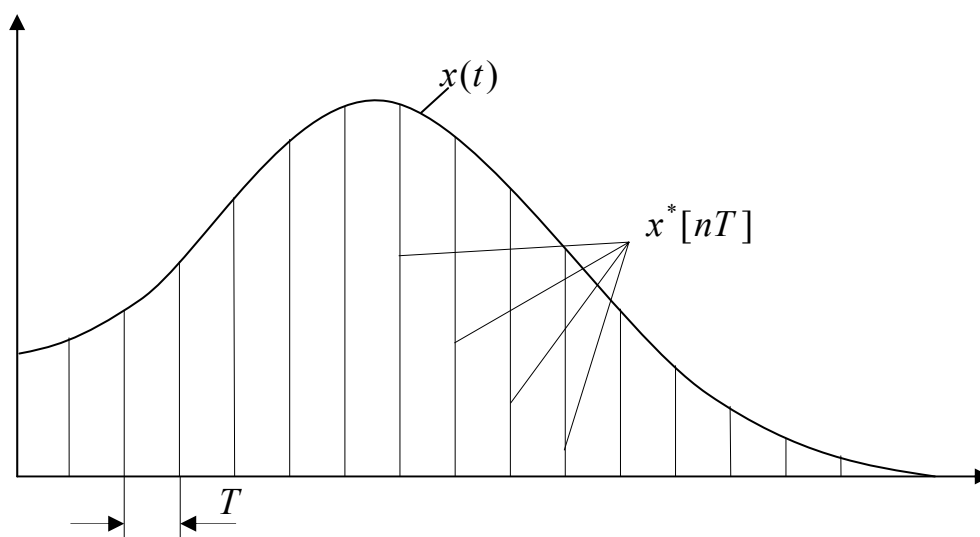


Рис. 58.

Системы, в которых имеет место только квантование сигналов по времени, называются импульсными системами. Поскольку мы пренебрегаем эффектом квантования по уровню, можно считать, что

расчет системы НЦУ сводится к расчету импульсной системы регулирования и в этом смысле отождествлять цифровые и импульсные системы.

6.1. Динамические характеристики цифровых систем регулирования

Конечно-разностное уравнение

Непрерывные системы, в которых сигналы являются непрерывными функциями времени $f(t)$, описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поскольку цифровой регулятор реагирует только на значения сигнала в дискретные моменты времени

$$t = nT, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а промежуточные значения входного сигнала для него безразличны, при описании цифровых систем вводится понятие решетчатой функции $f[nT]$, которая в дискретные моменты времени nT равна исходной непрерывной функции $f(t)$, а в остальные моменты времени равна нулю:

$$f[nT] = \begin{cases} f(t) & \text{при } t = nT \\ 0 & \text{при } t \neq nT \end{cases}.$$

Для выявления характера поведения непрерывной функции внутри периода квантования вводят понятие смещенной решетчатой функции:

$$f[nT \pm \Delta t] = f[(n \pm \varepsilon)T],$$

где $\Delta t = \varepsilon T$ - абсолютное смещение ординат решетчатой функции,

$-1 \leq \varepsilon = \Delta t/T \leq 1$ - относительное смещение ординат.

Изменяя ε от -1 до $+1$, можем получить значение исходной непрерывной функции, соответствующее любому моменту времени внутри предыдущего и последующего периодов квантования.

В качестве характеристики скорости изменения решетчатой функции при фиксированном T принимают первую конечную разность,

определяемую как разность между соседними ординатами решетчатой функции. Различают опережающую (правую) конечную разность (разность между последующей и текущей ординатами решетчатой функции):

$$\Delta^+ f[nT] = f[(n+1)T] - f[nT] \quad (135)$$

и отстающую (левую) конечную разность (разность между текущей и предыдущей ординатами):

$$\Delta^- f[nT] = f[nT] - f[(n-1)T]. \quad (136)$$

Итак, первая конечная разность есть дискретный аналог первой производной непрерывной функции. Аналогом второй производной является конечная разность второго порядка, определяемая как разность конечных разностей первого порядка в соседних ординатах решетчатой функции.

Опережающая конечная разность второго порядка:

$$\Delta^{+2} f[nT] = \Delta^+ f[(n+1)T] - \Delta^+ f[nT],$$

или с учетом (135):

$$\Delta^{+2} f[nT] = f[(n+2)T] - 2f[(n+1)T] + f[nT].$$

Таким образом, конечную разность второго порядка можно представить в виде линейной комбинации трех ординат решетчатой функции, отстоящих на два интервала дискретности. Аналогично, конечную разность k -го порядка можно представить в виде комбинации $(k+1)$ -й ординат решетчатой функции, отстоящих на k интервалов дискретности.

Аналогом дифференциальных уравнений, описывающих непрерывные системы, являются конечно-разностные уравнения, описывающие динамику дискретных систем. Конечно-разностное уравнение можно записать в виде линейной комбинации конечных разностей входа и выхода, однако принято записывать конечно-разностное уравнение в виде линейной комбинации смещенных ординат решетчатой

функции. При этом в зависимости от того, используются опережающие или запаздывающие конечные разности, конечно-разностное уравнение можно записать в двух формах: через опережающие или запаздывающие ординаты.

Конечно-разностное уравнение k -того порядка при использовании опережающих конечных разностей имеет вид:

$$\begin{aligned} a_k y[(n+k)T] + a_{k-1} y[(n+k-1)T] + \dots + a_0 y[nT] = \\ = b_\ell x[(n+\ell)T] + b_{\ell-1} x[(n+\ell-1)T] + \dots + b_0 x[nT] \end{aligned} \quad (137)$$

где k – порядок левой части и всего уравнения в целом,
 ℓ - порядок правой части.

Для инерционных звеньев (систем) $\ell < k$.

Для упрощения записи обозначим

$$y[(n+k)T] = y_{n+k},$$

тогда (137) принимает вид:

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_0 y_n = b_\ell x_{n+\ell} + \dots + b_0 x_n \quad (138).$$

При использовании отстающих конечных разностей конечно-разностное уравнение принимает вид (в этом выражении обозначено $k - \ell = r$):

$$a_k y_n + a_{k-1} y_{n-1} + \dots + a_0 y_{n-k} = b_\ell x_{n-r} + \dots + b_0 x_{n-k} \quad (139).$$

Дискретная передаточная функция

Для получения дискретной передаточной функции используется дискретное преобразование Лапласа (преобразование Лапласа решетчатой функции), определяемое следующим образом:

$$y^*(p) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i e^{-iT p} ; \quad y_i = y[iT] \quad (140)$$

(символ * является признаком характеристик дискретных систем).

Выражение (140) определяет прямое дискретное преобразование Лапласа. Для экономии записи вводят обозначение

$$e^{pT} = z, \quad (141)$$

при этом получается так называемое Z – преобразование:

$$Z\{y[nT]\} = y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i z^{-i}. \quad (142)$$

Подставляя в (142) вместо y_i $y_{i+\xi}$, получаем Z – преобразование смещённой решетчатой функции.

По аналогии с непрерывным преобразованием Лапласа решетчатая функция называется оригиналом, а её Z – преобразование – изображением. Изображения элементарных решетчатых функций табулированы.

Дискретное преобразование Лапласа сохраняет основные свойства непрерывного и, в частности, изображение смещенной решетчатой функции (теорема сдвига): смещению оригинала на $\pm k$ интервалов дискретности соответствует умножение изображения на $z^{\pm k}$:

$$Z\{y[(n \pm k)T]\} = z^{\pm k} y(z) \quad (143)$$

(Напомним, что смещению непрерывной функции на $\pm \tau$ соответствует умножение ее изображения на $e^{\pm p\tau}$. При $\tau = kT$ с учетом (141) $e^{\pm p\tau} = z^{\pm k}$).

Применяя (143) к опережающей (135) и отстающей (136) конечным разностям первого порядка, имеем

$$\begin{aligned} Z\{\Delta^+ f[nT]\} &= (z - 1)f(z), \\ Z\{\Delta^- f[nT]\} &= (1 - z^{-1})f(z) = \frac{z-1}{z} f(z) \end{aligned}$$

Z – изображение опережающей конечной разности k -го порядка:

$$Z\{\Delta^{+k} f[nT]\} = (z - 1)^k f(z). \quad (144)$$

Z – изображение конечной суммы, являющейся дискретным аналогом интеграла непрерывной функции:

$$Z \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} f[iT] \right\} = \frac{1}{z-1} f(z) \quad (145)$$

Как видно из последних выражений, сомножитель $(z-1)$ есть символ взятия конечной разности – дискретного аналога производной, а обратная величина – символ взятия конечной суммы – дискретного аналога интеграла.

Применив (143) к конечно-разностному уравнению (137), получаем его Z -изображение:

$$(a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0) y(z) = (b_\ell z^\ell + b_{\ell-1} z^{\ell-1} + \dots + b_0) x(z)$$

Дискретная передаточная функция так же, как и непрерывная, определяется как отношение изображений выходной и входной величин при нулевых начальных условиях:

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{(b_\ell z^\ell + b_{\ell-1} z^{\ell-1} + \dots + b_0)}{(a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0)} \quad (146)$$

Передаточная функция для уравнения (139) с запаздывающими конечными разностями имеет вид:

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{(b_\ell z^{-r} + b_{\ell-1} z^{r-1} + \dots + b_0 z^{-k})}{(a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_0 z^{-k})} \quad (147)$$

(Здесь по-прежнему $r = k - \ell$).

Таким образом, для получения передаточной функции (147) передаточную функцию (146) необходимо разделить на z^k .

Для смещенной на выходе динамического звена решетчатой функции можно получить передаточную функцию $W(z, \varepsilon)$, используя Z -преобразование смещенной решетчатой функции.

В статике $p = 0$, $z = e^{pT} = 1$, следовательно, статический коэффициент передачи дискретной системы K^* связан с дискретной передаточной функцией соотношением:

$$W^*(1) = \frac{(b_\ell + b_{\ell-1} + \dots + b_0)}{(a_k + a_{k-1} + \dots + a_0)} = K^* \quad (148)$$

В отличие от непрерывных передаточных функций Z -изображения решетчатых функций и дискретные передаточные функции обладают важным свойством, а именно свойством периодичности вдоль мнимой оси в плоскости p , т.е.

$$e^{pT} = e^{pT + j2\pi k} = e^{T(p + j\frac{2\pi k}{T})},$$

т.к.

$$e^{j2\pi k} \equiv 1.$$

Обозначим $\omega_k = 2\pi/T$. ω_k – круговая частота, соответствующая периоду квантования T (частота квантования). Таким образом, Z -изображения решетчатых функций и дискретные передаточные функции периодичны вдоль мнимой оси плоскости p с периодом равным частоте квантования ω_k .

Временные характеристики

Переходной характеристикой цифровой системы регулирования называется реакция на единичную ступенчатую решетчатую функцию, определяемую следующим образом:

$$1[nT] = \begin{cases} 1 & \text{при } nT \geq 0 \\ 0 & \text{при } nT < 0 \end{cases}$$

Z -изображение единичной ступенчатой функции:

$$Z\{1[nT]\} = \frac{z}{z-1}. \quad (149)$$

Дискретная весовая функция $w[nT]$ определяется так же, как и непрерывная – реакция на мгновенный импульс единичной площади.

Частотные характеристики дискретных систем

Так же, как и в случае непрерывных систем, частотные характеристики находятся заменой p на $j\omega$, или с учетом (141) z на $e^{j\omega T}$. Выражение $Y^*(j\omega)$, получаемое при замене $z=e^{j\omega T}$ в Z -изображении $Y(z)$ решетчатой функции называется спектром Фурье или изображением по Фурье решетчатой функции. Отношение спектров Фурье выходного и входного сигналов называется частотной передаточной функцией (комплексной частотной характеристикой) дискретной системы:

$$W^*(j\omega) = \frac{Y^*(j\omega)}{X^*(j\omega)}.$$

АФХ, АЧХ и ФЧХ дискретных систем определяются так же, как и для непрерывных. График частотной передаточной функции называется АФХ цифровой системы. Зависимости модуля и фазы частотной передаточной функции от частоты определяют соответственно АЧХ и ФЧХ цифровой системы.

Спектры решетчатых функций и частотные характеристики цифровых систем так же, как Z -изображения решетчатых функций и передаточных функций дискретных систем, обладают свойством периодичности по частоте, поскольку функция

$$e^{j\omega T} = e^{j\omega T + j2\pi k} = e^{jT(\omega + \frac{2\pi k}{T})}$$

периодична с периодом $\omega_k = 2\pi/T$.

Кроме периодичности, частотные характеристики дискретных систем обладают еще одним свойством: они симметричны в диапазонах частот $0 \div \omega_k/2$ и $\omega_k/2 \div \omega_k$. Другими словами, интервал $\omega_k/2 \div \omega_k$ не содержит новой информации о частотных характеристиках по сравнению с интервалом $0 \div \omega_k/2$. При этом на концах этого интервала частотная передаточная функция принимает вещественные значения, поскольку при $\omega=0$ $e^{j\omega T}=1$ и при $\omega=\omega_k/2$ $e^{j\omega T}=-1$.

Таким образом, частотные характеристики цифровых систем можно изображать в частотном диапазоне от 0 до $\omega_k/2$ (или от 0 до ω_k), причем на концах этих интервалов АФХ принимает вещественные значения.

Итак, в то время как частотные характеристики непрерывных систем изображаются на интервале $0 \div \infty$, частотные характеристики цифровых систем достаточно изображать на интервале $0 \div \omega_k/2$.

В силу периодичности частотных характеристик спектр решетчатой функции с точностью до $1/T$ представляет бесконечную сумму спектров исходного непрерывного сигнала, сдвинутых на $k\omega_k$ (k – любое целое число):

$$Y^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega + k\omega_k)] = \frac{1}{T} \{Y(j\omega) + Y[j(\omega - \omega_k)] + Y[j(\omega + \omega_k)] + Y[j(\omega - 2\omega_k)] + Y[j(\omega + 2\omega_k)] + \dots\}.$$

Поэтому спектры непрерывной и решетчатой функций (а, следовательно, и частотные характеристики непрерывной и дискретной систем) совпадают только в области малых частот (рис. 59)

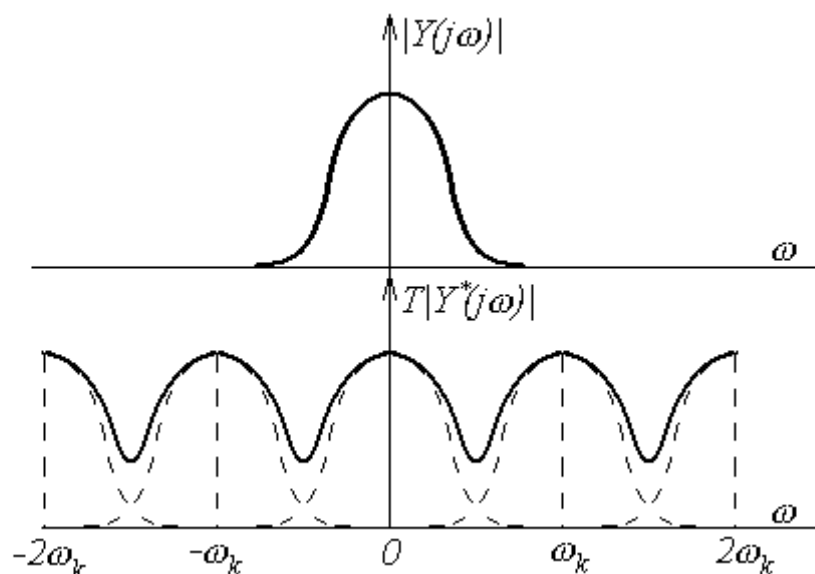


Рис. 59.

Теорема Котельникова (Найквиста)

Позволяет ответить на вопрос: каким должен быть период квантования для того, чтобы по дискретному сигналу можно было точно, без потерь, восстановить исходный непрерывный сигнал.

Поскольку спектр дискретного сигнала есть сумма спектров непрерывного сигнала, сдвинутых на $\pm k\omega_k$, $k=0, 1, 2, \dots$, то восстановить непрерывный сигнал можно только в том случае, если отдельные составляющие спектра дискретного сигнала не накладываются друг на друга (рис. 60). Это условие можно записать в виде:

$$\omega_k/2 > \omega_c, \quad (150)$$

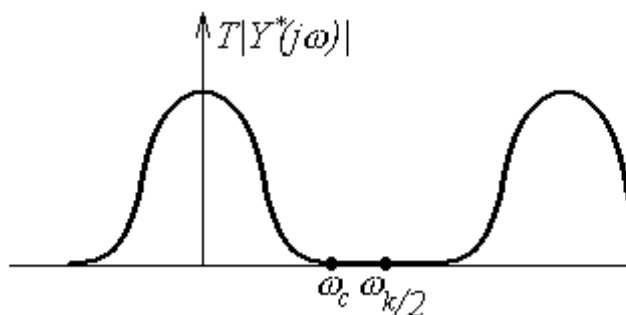


Рис. 60.

где $\omega_k = 2\pi/T$ – частота квантования,

ω_c – частота среза спектра непрерывного сигнала – частота максимальной гармоники, входящей в спектр непрерывного сигнала (Практически ω_c – это частота, при которой модуль спектра $|Y(j\omega)|$ становится достаточно малым:

$$Y(j\omega_c) = \delta Y(j0),$$

δ – малое число.)

При выполнении условия (150), пропустив дискретный сигнал через фильтр с полосой $-\omega_k/2 \div \omega_k/2$ можно выделить неискаженный спектр непрерывного сигнала, т.е. восстановить его без искажений. При невыполнении этого условия отдельные составляющие спектра накладываются друг на друга, и выделить спектр непрерывного сигнала не удастся.

Таким образом, непрерывный сигнал, имеющий ограниченный спектр с частотой среза ω_c , может быть точно восстановлен по дискретному сигналу, если частота квантования ω_k хотя бы в два раза выше частоты среза ω_c (или, что то же, если период квантования T хотя бы в два раза меньше периода самой высокочастотной составляющей спектра T_c :

$$T < T_c/2.$$

На практике рекомендуется, чтобы период квантования был в $(5 \div 20)$ раз меньше периода высокочастотной составляющей спектра:

$$T = (0.2 \div 0.05)T_c. \quad (151)$$

Итак, из теоремы Котельникова следует, что мы можем точно восстановить непрерывный сигнал по дискретному, если на одном периоде самой высокочастотной составляющей сигнала укладывается не менее двух (а лучше $5 \div 20$) ординат дискретного сигнала. Если же период

квантования не удовлетворяет условию (151), восстанавливая непрерывный сигнал по дискретному, мы не сможем различить высокочастотные составляющие этого сигнала.

Теорема Котельникова позволяет правильно выбрать период квантования при проектировании цифровых систем регулирования.

6.2. Структурная схема цифровой системы регулирования (рис. 61)

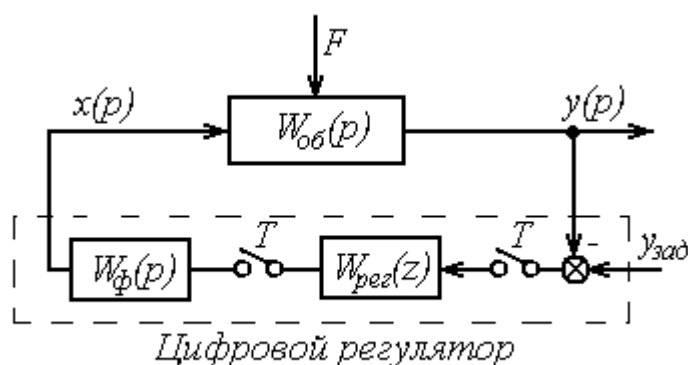



Рис. 61.

На рис. 61 обозначено:

$W_{об}(p)$ – передаточная функция объекта регулирования. Объекты регулирования, как правило, являются непрерывными звеньями, на входе и выходе которых действуют непрерывные во времени сигналы,

 – идеальный амплитудно-импульсный модулятор (импульсный элемент),

$W_{рег}(z)$ – передаточная функция дискретного регулятора,

$W_{ф}(p)$ – передаточная функция фиксирующего элемента (экстраполятора), служащего для преобразования выходной последовательности импульсов регулятора в непрерывный сигнал на входе объекта. Чаще всего используются простейшие экстраполяторы, запоминающие мгновенные значения выходного сигнала дискретного регулятора на весь период квантования, в результате чего

последовательность импульсов преобразуется в непрерывную ступенчатую функцию. Такие экстраполяторы называются экстраполяторами нулевого порядка (ступенчатыми экстраполяторами).

Реакция экстраполятора нулевого порядка на мгновенный импульс представляет прямоугольный импульс длительностью T (рис. 62) и по определению является весовой функцией фиксатора, которую можно представить в виде двух смещенных ступенчатых функций:

$$w_{\phi}(t) = 1[t] - 1[t - T] \quad (152)$$

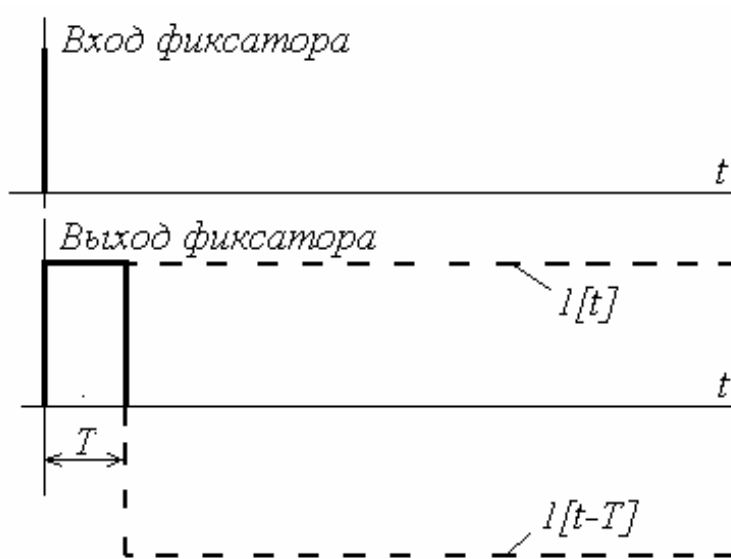


Рис. 62.

Из теории управления известно, что передаточная функция звена есть преобразование Лапласа его весовой функции, следовательно, передаточную функцию фиксатора можно найти, определив преобразование Лапласа весовой функции (152):

$$W_{\phi}(p) = L\{w_{\phi}(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT} \quad (153)$$

В исходной структурной схеме цифровой системы на рис. 61 действуют как непрерывные (на входе и выходе объекта регулирования), так и дискретные (на входе и выходе регулятора) сигналы. Т.е. исходная схема является дискретно-непрерывной. Это создает неудобства при ее

анализе. Поэтому исходную структурную схему преобразуют к эквивалентной непрерывной или эквивалентной дискретной. Поскольку преобразование дискретно-непрерывной системы к эквивалентной непрерывной возможно только при малых значениях периода квантования, рассмотрим преобразование дискретно-непрерывной системы к эквивалентной дискретной. С этой целью вводится понятие приведенной непрерывной части (ПНЧ), к которой относят объект регулирования и экстраполятор:

$$W_{\text{ПНЧ}}(p) = W_{\phi}(p)W_{\text{об}}(p) \quad (154)$$

Введение ПНЧ позволяет перейти от непрерывного сигнала на входе объекта регулирования к дискретному сигналу на входе ПНЧ. Считая условно выходной сигнал ПНЧ или, что то же, объекта регулирования также дискретным, можем преобразовать исходную структурную схему цифровой системы к виду (рис. 63)

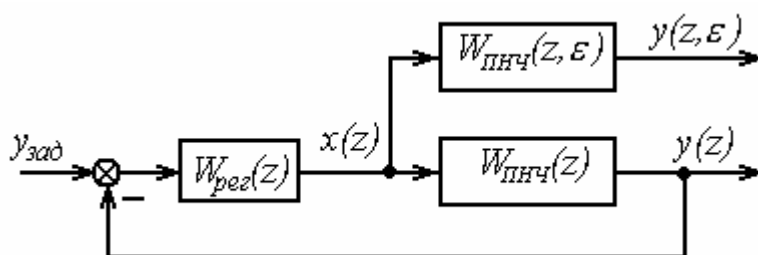


Рис. 63.

В этой структурной схеме действуют только дискретные сигналы. Таким образом, структурная схема цифровой АСР отличается от структурной схемы непрерывной АСР тем, что вместо непрерывных передаточных функций используются дискретные передаточные функции и вместо объекта регулирования используется ПНЧ.

Если нас интересует поведение регулируемой переменной внутри периода квантования, в структурную схему следует дополнительно ввести передаточную функцию ПНЧ для смещенной регулируемой величины

$W_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$. Для ее нахождения используется Z -преобразование смещенной решетчатой функции на выходе ПНЧ $Y(z, \varepsilon)$.

6.3. Нахождение передаточной функции приведенной непрерывной части

Для нахождения дискретной передаточной функции приведенной непрерывной части необходимо определить Z -преобразование непрерывной передаточной функции $W_{\text{ПНЧ}}(p)$:

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = Z\{W_{\text{ПНЧ}}(p)\}$$

Пусть объект регулирования описывается дробно-рациональной передаточной функцией:

$$W_{\text{об}}(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (155)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – полиномы от p .

Тогда (154) с учетом (153) и (155) принимает вид

$$W_{\text{ПНЧ}}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot \frac{B(p)}{A(p)},$$

следовательно,

$$Z\{W_{\text{ПНЧ}}(p)\} = Z\{1 - e^{-pT}\} \cdot Z\left\{\frac{B(p)}{pA(p)}\right\}, \quad (156)$$

Учитывая (141), имеем

$$Z\{1 - e^{-pT}\} = 1 - z^{-1} = \frac{z - 1}{z}. \quad (157)$$

Z -преобразование второго сомножителя в правой части (156) находят по таблицам соответствия непрерывного и дискретного преобразований Лапласа, предварительно при необходимости разложив дробно-рациональную функцию $\frac{B(p)}{pA(p)}$ на простые дроби с помощью формулы

разложения. В данном случае (один нулевой полюс) формула разложения имеет вид:

$$\frac{B(p)}{pA(p)} = \frac{B(0)}{A(0)p} + \sum_{i=1}^n \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} \frac{1}{p - p_i}, \quad (158)$$

где n и p_i соответственно порядок и корни полинома $A(p)$.

По таблицам соответствия P - и Z - преобразований находим

$$Z_{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{p - p_i} \right\} = \frac{z z_i^{\varepsilon}}{z - z_i}, \quad (159)$$

где $z_i = e^{p_i T}$.

(Напомним, что ε – величина относительного смещения ординат решетчатой функции в долях периода квантования, а Z_{ε} – Z -изображение смещенной решетчатой функции.)

Частные случаи (159):

При $\varepsilon = 0$

$$Z \left\{ \frac{1}{p - p_i} \right\} = \frac{z}{z - z_i}, \quad (160)$$

При $\varepsilon = 0$ и $p_i = 0$

$$z_i = 1 \text{ и } Z \left\{ \frac{1}{p} \right\} = \frac{z}{z - 1}. \quad (161)$$

Обозначая

$$\frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} = h_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad \frac{B(0)}{A(0)} = h_0$$

и учитывая (160), (161), получаем выражение для Z -преобразования второго сомножителя в правой части (156) в виде:

$$Z \left\{ \frac{B(p)}{pA(p)} \right\} = h_0 \frac{z}{z - 1} + \sum_{i=1}^n h_i \frac{z}{z - z_i} \quad (162)$$

Подставляя (157) и (162) в (156) и приводя результат к общему знаменателю, получаем искомое выражение для $W_{\text{ПНЧ}}(z)$ (а при необходимости и для $W_{\text{ПНЧ}}(z, \varepsilon)$).

При наличии в передаточной функции объекта чистого запаздывания $\tau = kT$

$$e^{-p\tau} = e^{-pkT} = z^{-k}.$$

Следовательно, для учета чистого запаздывания передаточную функцию приведенной непрерывной части необходимо умножить на z^{-k} .

В качестве примера найдем передаточную функцию приведенной непрерывной части для

$$W_{\text{об}}(p) = \frac{K}{T_{\text{об}}p + 1}.$$

Имеем:

$$B(p) = B(0) = K; \quad A(p) = T_{\text{об}}p + 1; \quad A(0) = 1; \quad n = 1; \quad A'(p) = T_{\text{об}}; \quad p_1 = -\frac{1}{T_{\text{об}}};$$

$$z_1 = e^{p_1 T} = e^{-\frac{T}{T_{\text{об}}}}.$$

Согласно (162)

$$Z \left\{ \frac{B(p)}{pA(p)} \right\} = Kz \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-z_1} \right) = \frac{Kz(1-z_1)}{(z-1)(z-z_1)}$$

Подставляя полученное выражение в (156) с учетом (157), определяем

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = \frac{K(1-z_1)}{z-z_1}; \quad W_{\text{ПНЧ}}(1) = K.$$

6.4. Дискретные аналоги типовых законов регулирования

Существуют дискретные аналоги всех непрерывных законов регулирования. Однако их конкретная форма зависит от способов

численного интегрирования и дифференцирования, используемых при реализации И- и Д- составляющих закона регулирования.

П-регулятор

Уравнение:

$$x_n = K_1^* e_n, \quad (163)$$

где $x_n = x[nT]$ – регулирующее воздействие в текущий момент времени nT ,

$e_n = e[nT] = Y_{зад}[nT] - Y[nT]$ – рассогласование,

K_1^* – коэффициент передачи.

Передаточная функция, частотная передаточная функция, АЧХ, ФЧХ:

$$W(z) = W^*(j\omega) = A^*(\omega) = K_1^*; \varphi^*(\omega) = 0.$$

Характеристики дискретного П-регулятора совпадают с характеристиками непрерывного П-регулятора (поскольку для его реализации не требуется использовать численное интегрирование и дифференцирование). Система с дискретным П-регулятором сохраняет свойства системы с непрерывным П-регулятором: хорошую динамику (т.к. П-регулятор не вносит отрицательного фазового сдвига в систему) и статическую ошибку.

И-регулятор

При использовании при численном интегрировании способа левых прямоугольников уравнение И-регулятора имеет вид

$$x_n = K_0^* T \sum_{i=0}^{n-1} e_i \quad (\text{вариант 1}), \quad (164)$$

где K_0^* – коэффициент передачи И-регулятора.

Как будет видно из дальнейшего, если в формуле (164) производить суммирование не до $(n-1)$, а до n , характеристики интегратора улучшаются

(физически это объясняется тем, что при формировании регулирующего воздействия в последнем случае используется дополнительная более свежая информация – значение рассогласования в момент nT).

Итак, уравнение улучшенного И-регулятора:

$$x_n = K_0^* T \sum_{i=0}^n e_i \text{ (вариант 2),} \quad (165)$$

Уравнения переходных функций для двух вариантов И-регулятора получим, подставляя в (164), (165) $e_n=1[nT]$:

$$x_n = K_0^* T n \text{ (вар. 1)} \quad (166)$$

$$x_n = K_0^* T (n+1) \text{ (вар. 2)} \quad (167)$$

Соответствующие переходные характеристики приведены на рис. 64

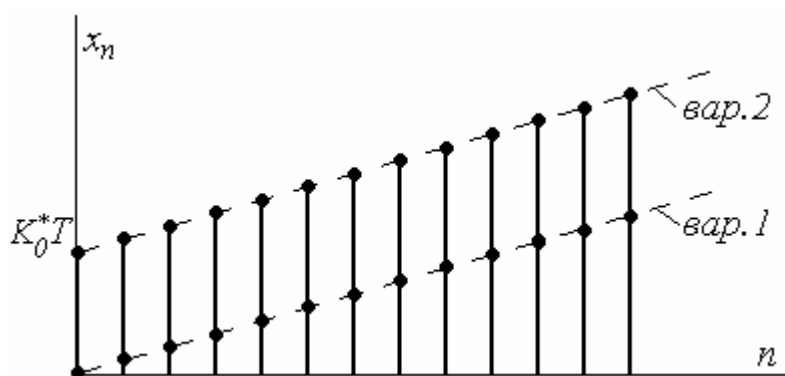


Рис. 64.

Как видим, характеристика для второго варианта И-регулятора по существу является дискретным аналогом переходной характеристики непрерывного ПИ-регулятора (рис. 21), что свидетельствует о преимуществе второго варианта по сравнению с первым.

На основании (145) передаточная функция, соответствующая уравнению (164), равна:

$$W(z) = K_0^* T \frac{1}{z-1} \text{ (вар. 1)} \quad (168)$$

Разлагая сумму в уравнении (165) на два слагаемых

$$\sum_{i=0}^n e_i = \sum_{i=0}^{n-1} e_i + e_n,$$

можем получить передаточную функцию, соответствующую этому уравнению, в виде:

$$W(z) = K_0^* T \frac{z}{z-1} \quad (\text{вар. 2}) \quad (169)$$

В случае, когда в закон регулирования входит И-составляющая (И-, ПИ-, ПИД- законы), удобнее перейти к рекуррентной форме записи уравнений (164), (165), чтобы избавиться в них от сумм. (Напомним, что рекуррентным называется выражение, в котором текущее значение выхода выражается через его прошлые значения). Для перехода к рекуррентной форме записи необходимо из уравнения, записанного для текущего момента времени nT , вычесть уравнение, записанное для предыдущего момента времени $(n-1)T$. Поступая так, получаем для уравнений (164), (165):

$$x_n = x_{n-1} + K_0^* T e_{n-1} \quad (\text{вар. 1}) \quad (170)$$

$$x_n = x_{n-1} + K_0^* T e_n \quad (\text{вар. 2}) \quad (171)$$

Подставляя в передаточные функции (168), (169) $z=e^{j\omega T}$, можем получить выражения для частотных характеристик И-регулятора:

$$W^*(j\omega) = \mp \frac{K_0^* T}{2} \left(1 - j \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right) \quad (172)$$

$$A^*(\omega) = \frac{K_0^* T}{2} \frac{1}{\sin(\omega T/2)} \quad (173)$$

$$\varphi^*(\omega) = -\frac{\pi}{2} \mp \frac{\omega T}{2} \quad (174)$$

В формулах (172), (174) знак "-" соответствует первому варианту интегратора, а "+" – второму.

АФХ, АЧХ и ФЧХ дискретного И-регулятора приведены на рис. 65, 66. Для сравнения на этих рисунках показаны характеристики непрерывного (идеального) И-регулятора.

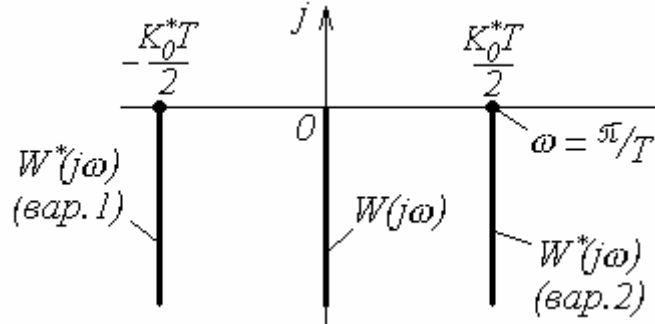


Рис. 65.

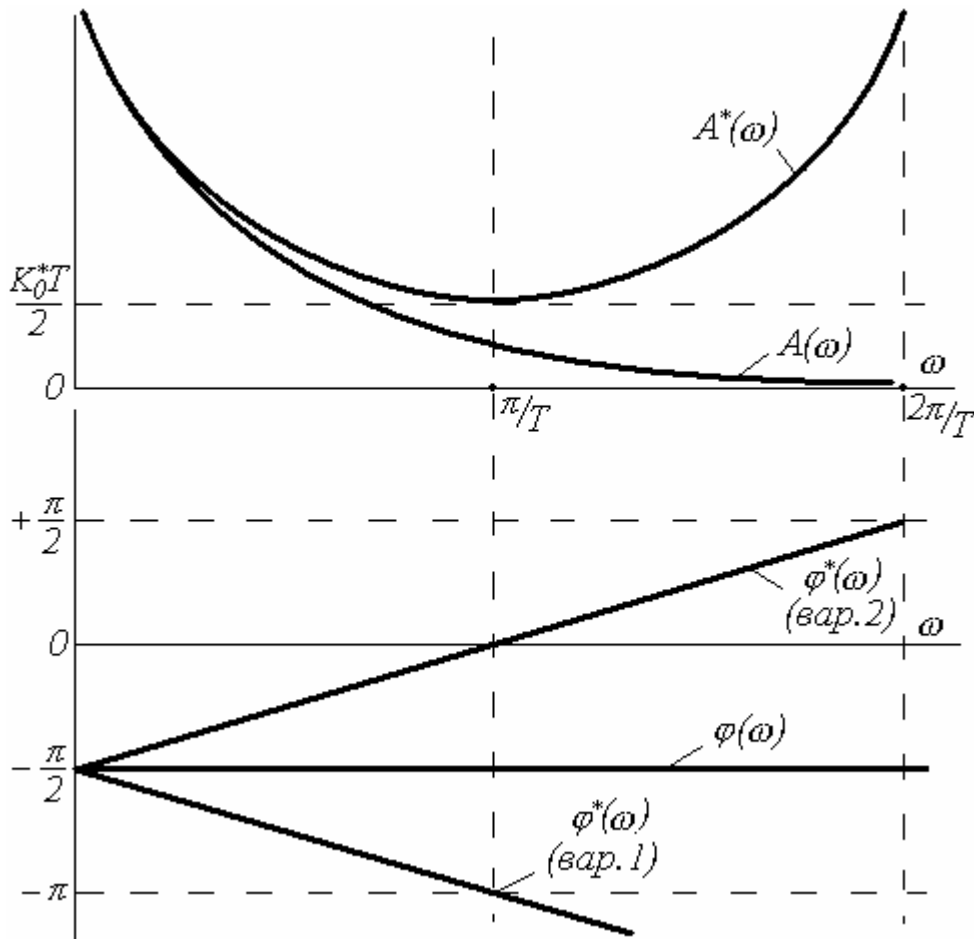


Рис. 66.

Так же, как и непрерывный, дискретный И-регулятор обеспечивает нулевую статическую ошибку, но худшие по сравнению с П-регулятором динамические свойства системы, поскольку вносит в систему

отрицательный фазовый сдвиг. При этом, как видно из формулы (174), И-регулятор (165) вносит отрицательный фазовый сдвиг на ωT меньше по сравнению с регулятором (164) и на $\omega T/2$ меньше по сравнению с непрерывным И-регулятором. В связи с вышеизложенным далее будем рассматривать только И-регулятор с уравнением (165).

ПИ-регулятор

Конечно-разностное уравнение ПИ-регулятора так же, как и непрерывного, можно записать в двух формах:

$$x_n = K_1^* e_n + K_0^* T \sum_{i=0}^n e_i = K_1^* \left[e_n + \frac{T}{T_H^*} \sum_{i=0}^n e_i \right]. \quad (175)$$

T_H^* – по-прежнему время изодрома.

Переходная функция:

$$x_n = K_1^* + K_0^* T (n+1) = K_1^* \left[1 + \frac{T}{T_H^*} (n+1) \right]$$

Передаточная функция:

$$W(z) = K_1^* + K_0^* T \frac{z}{z-1} = \frac{b_1 z + b_0}{z-1}, \quad (176)$$

где

$$b_1 = K_1^* + K_0^* T = K_1^* \left(1 + \frac{T}{T_H^*} \right);$$

$$b_0 = -K_1^*.$$

ПИ-закон в рекуррентной форме:

$$x_n = x_{n-1} + b_1 e_n + b_0 e_{n-1}$$

Выражение для частотной передаточной функции ПИ-регулятора получаем, суммируя вещественные и мнимые части частотных передаточных функций П- и И- регуляторов:

$$W^*(j\omega) = \left(K_1^* + \frac{K_0^* T}{2} \right) - j \frac{K_0^* T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}. \quad (177)$$

Выражения для АЧХ и ФЧХ находим, заменяя в (176) z на $e^{j\omega T}$.

$$A^*(\omega) = \sqrt{\frac{b_1^2 + 2b_1 b_0 + b_0^2}{2(1 - \cos \omega T)}} \quad (178)$$

$$\varphi^*(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2} + \operatorname{arctg} \frac{b_1 \sin \omega T}{b_1 \cos \omega T + b_0} \quad (179)$$

АФХ и АЧХ ПИ- и И- регуляторов имеют схожий характер изменения. Примерный вид ФЧХ ПИ-регулятора в сравнении с ФЧХ И-регулятора изображен на рис. 67.

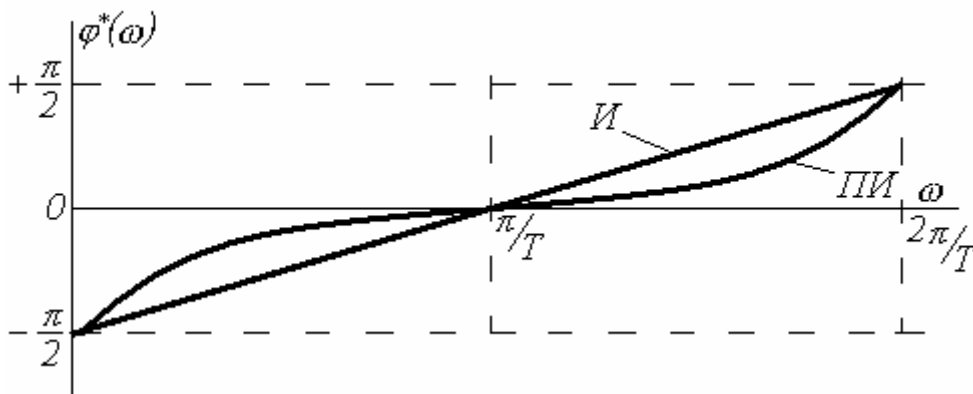


Рис. 67.

Как видим, ПИ-регулятор вносит меньший отрицательный фазовый сдвиг в сравнении с И-регулятором, поэтому цифровая АСР с ПИ-регулятором имеет несколько лучшие динамические свойства по сравнению с И-регулятором при нулевой статической ошибке. Вообще же следует отметить, что характеристики дискретного ПИ-регулятора значительно меньше отличаются от характеристик дискретного И-регулятора, чем соответствующие характеристики непрерывных регуляторов.

ПД-регулятор

Предварительно рассмотрим характеристики дискретного дифференциатора. Считая, что скорость изменения решетчатой функции приблизительно равна отношению приращения соседних ординат к величине периода квантования, получаем уравнение дискретного дифференциатора:

$$x_n = K_2^* \frac{e_n - e_{n-1}}{T}.$$

K_2^* – коэффициент передачи дифференциатора.

Переходная функция:

$$x_n = \begin{cases} \frac{K_2^*}{T} & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n > 0 \end{cases}.$$

Передаточная функция

$$W(z) = \frac{K_2^*}{T} \frac{z-1}{z} \quad (180)$$

Сравнивая передаточную функцию (180) с передаточной функцией (169) убеждаемся, что передаточная функция дифференциатора с точностью до сомножителя обратна передаточной функции интегратора. Это вполне закономерно, поскольку операции дифференцирования и интегрирования обратны по отношению друг к другу. Поэтому АЧХ дифференциатора и интегратора обратны с точностью до сомножителя, а ФЧХ – противоположны по знаку:

$$A^*(\omega) = \frac{2K_2^*}{T} \sin \frac{\omega T}{2} \quad (181)$$

$$\varphi^*(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T}{2} \quad (182)$$

Частотную передаточную функцию дифференциатора находим, переходя из полярных координат в декартовые:

$$W^*(j\omega) = A^*(\omega) \cos \varphi^*(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi^*(\omega) = \frac{K_2^*}{T} \left[2 \sin^2 \frac{\omega T}{2} + j \sin \omega T \right] \quad (183)$$

Частотные характеристики непрерывного и дискретного дифференциаторов приведены на рис. 68, 69.

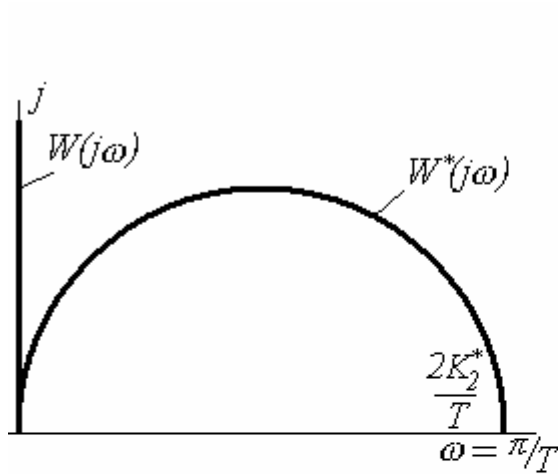


Рис. 68.

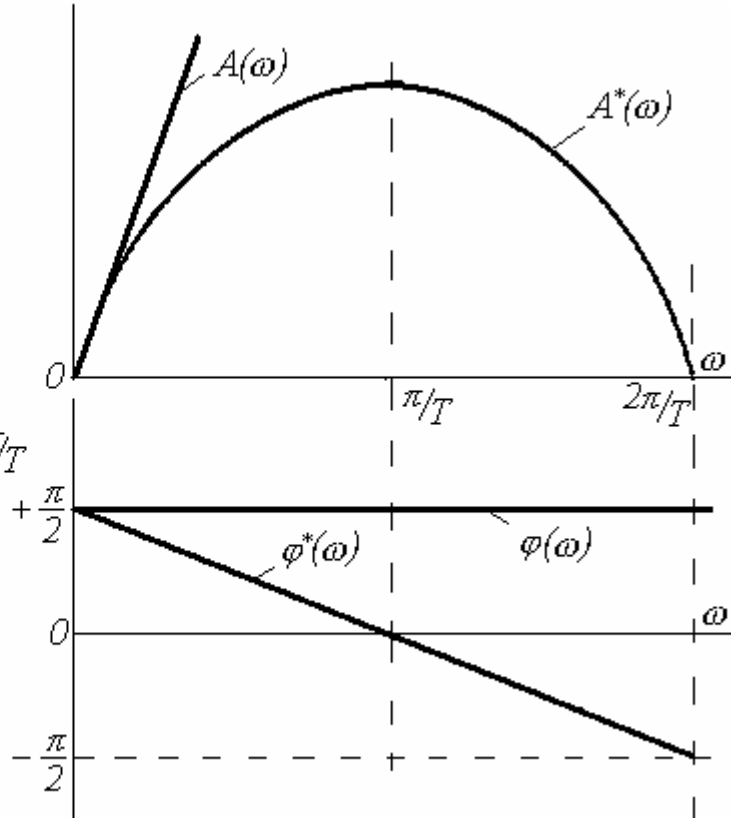


Рис. 69.

Перейдем теперь к рассмотрению характеристик ПД-регулятора.

Конечно-разностное уравнение:

$$x_n = K_1^* e_n + \frac{K_2^*}{T} (e_n - e_{n-1}) = K_1^* \left[e_n + \frac{T_{\Pi}^*}{T} (e_n - e_{n-1}) \right].$$

Передаточная функция:

$$W(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z}, \quad (184)$$

где

$$b_1 = K_1^* + \frac{K_2^*}{T} = K_1^* \left(1 + \frac{T_{\Pi}^*}{T} \right); \quad b_0 = -\frac{K_2^*}{T},$$

T_{Π}^* – время предварения.

Переходная характеристика:

$$x_n = \begin{cases} K_1^* + \frac{K_2^*}{T} n & \text{при } n = 0 \\ K_1^* & \text{при } n > 0 \end{cases}$$

Частотную передаточную функцию получаем, складывая вещественные и мнимые части частотных передаточных функций П-регулятора и дифференциатора:

$$W^*(j\omega) = K_1^* + \frac{2K_2^*}{T} \sin^2 \frac{\omega T}{2} + j \frac{K_2^*}{T} \sin \omega T \quad (185)$$

АЧХ и ФЧХ находим из (184)

$$A^*(\omega) = \sqrt{b_1^2 + 2b_1b_0 \cos \omega T + b_0^2} \quad (186)$$

$$\varphi^*(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b_1 \sin \omega T}{b_1 \cos \omega T + b_0} - \omega T \quad (187)$$

Частотные характеристики непрерывного и дискретного ПД-регуляторов изображены на рис. 70, 71.

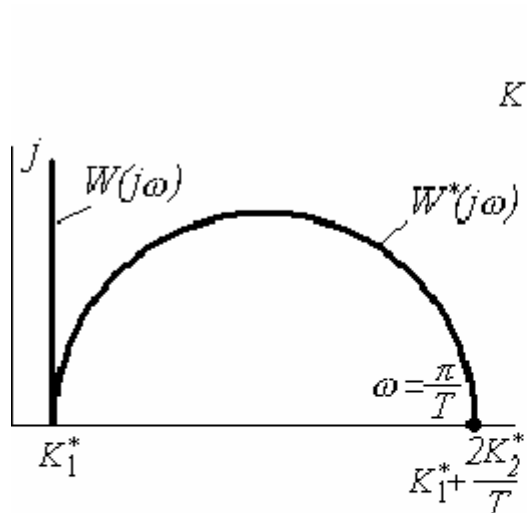


Рис. 70.

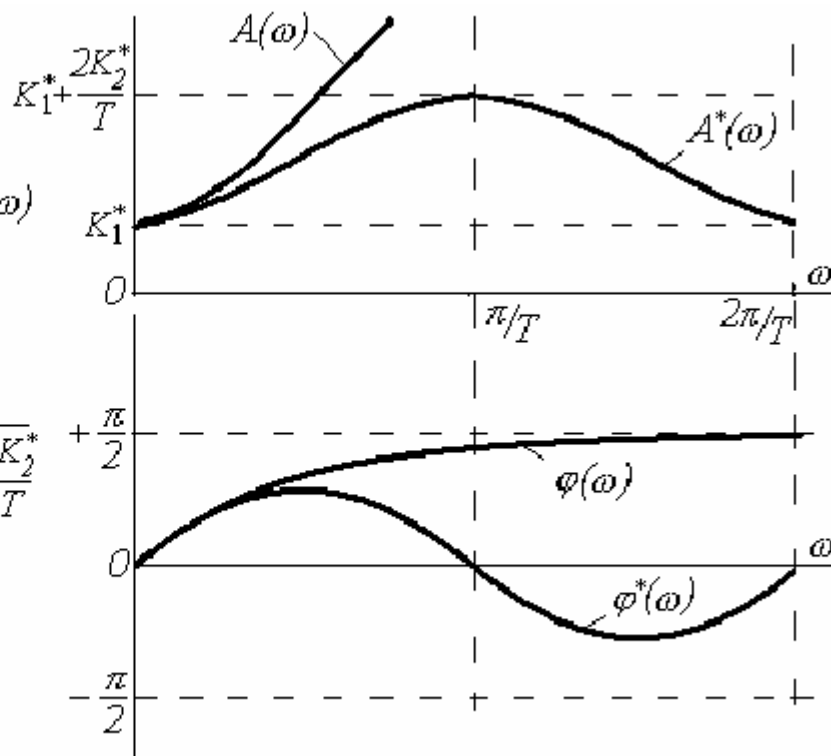


Рис. 71.

Система с дискретным ПД-регулятором сохраняет свойства системы с непрерывным ПД-регулятором (хорошая динамика, статическая ошибка, плохая помехозащищенность).

ПИД-регулятор

Закон регулирования

$$x_n = K_1^* e_n + K_0^* T \sum_{i=0}^n e_i + \frac{K_2^*}{T} (e_n - e_{n-1}) = K_1^* \left[e_n + \frac{T}{T_{II}} \sum_{i=0}^n e_i + \frac{T_{II}^*}{T} (e_n - e_{n-1}) \right].$$

Передаточная функция:

$$W(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z(z-1)}, \quad (188)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= K_1^* + K_0^*T + \frac{K_2^*}{T} = K_1^* \left(1 + \frac{T}{T_{II}^*} + \frac{T_{II}^*}{T} \right), \\ b_1 &= - \left(K_1^* + 2 \frac{K_2^*}{T} \right) = -K_1^* \left(1 + 2 \frac{T_{II}^*}{T} \right), \\ b_0 &= \frac{K_2^*}{T} = K_1^* \frac{T_{II}^*}{T}. \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

ПИД-закон в рекуррентной форме:

$$x_n = x_{n-1} + b_2 e_n + b_1 e_{n-1} + b_0 e_{n-2}.$$

Переходная характеристика

$$x_n = \begin{cases} K_1^* + K_0^*T + \frac{K_2^*}{T} & \text{при } n = 0 \\ K_1^* + K_0^*T(n+1) & \text{при } n > 0 \end{cases}$$

Частотная передаточная функция:

$$W^*(j\omega) = \left(K_1^* + \frac{K_0^*T}{2} + \frac{2K_2^*}{T} \sin^2 \frac{\omega T}{2} \right) + j \left(\frac{K_2^*}{T} \sin \omega T - \frac{K_0^*T}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right) \quad (190)$$

АЧХ и ФЧХ:

$$A^*(\omega) = \sqrt{\frac{b_2^2 + b_1^2 + b_0^2 + 2(b_2 b_1 + b_1 b_0) \cos \omega T + 2b_2 b_0 \cos 2\omega T}{2(1 - \cos \omega T)}} \quad (191)$$

$$\varphi^*(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b_2 \sin 2\omega T + b_1 \sin \omega T}{b_2 \cos 2\omega T + b_1 \cos \omega T + b_0} - \frac{3}{2} \omega T - \frac{\pi}{2} \quad (192)$$

Частотные характеристики непрерывного и дискретного ПИД-регуляторов приведены на рис. 72, 73.

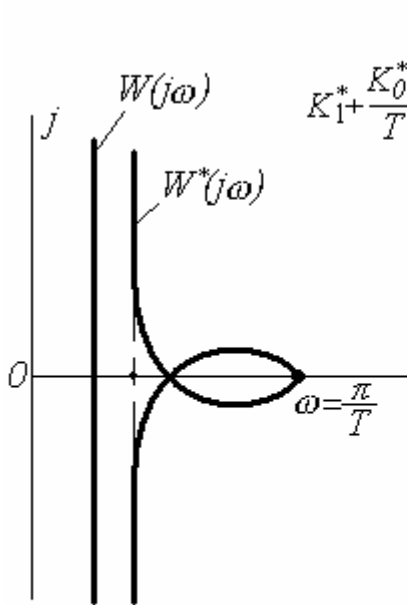


Рис. 72.

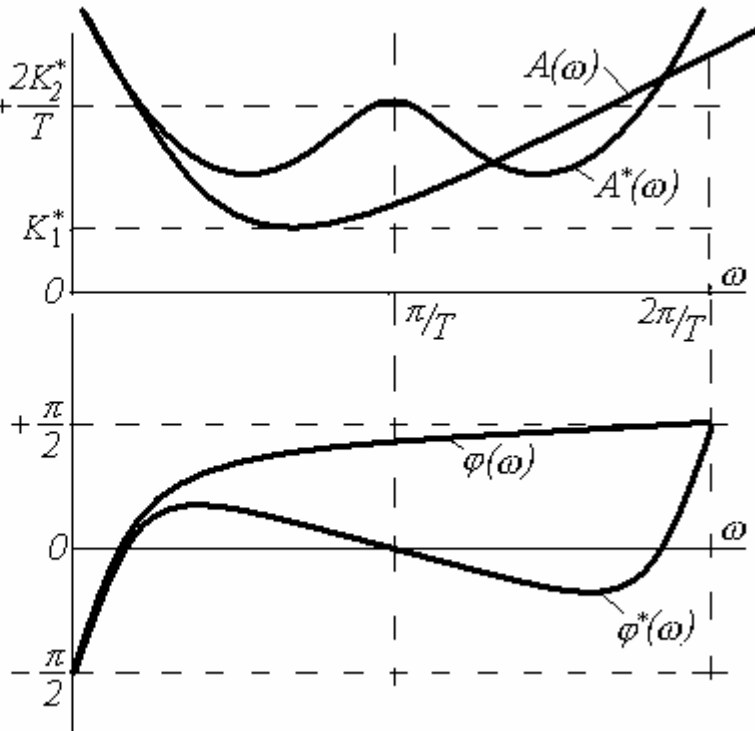


Рис. 73.

Цифровая система с ПИД-регулятором также сохраняет все свойства непрерывной.

Модификации цифровых регуляторов

Они определяются, в основном, способами численного интегрирования и дифференцирования, используемыми для реализации И- и Д- составляющих закона регулирования. Например, выше приведены выражения (189) для коэффициентов передаточной функции (188) ПИД-регулятора, полученные при использовании для реализации И-составляющей модифицированного метода прямоугольников. Если же для реализации И-составляющей использовать метод трапеций, выражения для коэффициентов b_2, b_1 трансформируются следующим образом:

$$b_2 = K_1^* + \frac{K_0^* T}{2} + \frac{K_2^*}{T},$$

$$b_1 = -\left(K_1^* + 2 \frac{K_2^*}{T} - \frac{K_0^* T}{2} \right).$$

Формулы численного дифференцирования обычно получают дифференцированием интерполяционных формул, используемых для описания временных последовательностей. Наиболее распространенными являются интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона. Например, при использовании интерполяционной формулы Лагранжа для полинома второго порядка, построенной по трем узлам интерполяции, можно получить следующее уравнение дифференциатора [6, 7]:

$$x_n = \frac{K_2^*}{2T} [3e_n - 4e_{n-1} + e_{n-2}],$$

которому соответствует следующая передаточная функция:

$$W(z) = \frac{K_2^*}{2T} [3 - 4z^{-1} + z^{-2}]$$

(сравните с передаточной функцией (180)).

6.5. Расчет настроек цифровых регуляторов

Упрощенные формулы для расчета настроек цифровых регуляторов

Предполагается, что объект регулирования представлен моделью инерционного звена первого порядка с чистым запаздыванием (8) с параметрами $K_{об}$, $T_{об}$, $\tau_{об}$.

В качестве примера приведем упрощенные формулы для определения параметров настройки одной из модификаций цифрового ПИД-регулятора, описываемого уравнением [5]:

$$x_n = x_{n-1} + K_1^* (y_{n-1} - y_n) + K_0^* T e_n + \frac{K_2^*}{T} (2y_{n-1} - y_{n-2} - y_n)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1^* &= \frac{1}{K_{об}} \left[\frac{1,2T_{об}}{\tau_{об} + T} - \frac{0,3T_{об}T}{(\tau_{об} + 0,5T)^2} \right] \\ K_0^* &= \frac{0,6T_{об}}{(\tau_{об} + 0,5T)^2} \\ K_2^* &= 0,5T_{об} \end{aligned} \right\}$$

Цифровые системы регулирования с конечной длительностью переходных процессов (Системы с апериодическими регуляторами)

Специфической особенностью цифровых систем регулирования является то, что при определенных условиях переходной процесс заканчивается в них за конечное минимальное время и носит при этом апериодический характер. Регуляторы, обеспечивающие такой переходной процесс, называются регуляторами конечной длительности или апериодическими регуляторами (А-регуляторами). Ниже рассматривается расчет систем, переходной процесс в которых длится число периодов квантования k равное порядку передаточной функции замкнутой системы:

$$t_p = kT$$

(t_p – время переходного процесса)

Рассмотрим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(z) = \frac{b_\ell z^\ell + b_{\ell-1} z^{\ell-1} + \dots + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0}. \quad (193)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$A(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (194)$$

содержит k корней z_i и по формуле Виета может быть представлено в виде:

$$A(z) = a_k (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k) = 0 \quad (195)$$

Предположим, что все корни равны нулю:

$$z_i = 0, \quad i = \overline{1, k},$$

тогда (195) принимает вид:

$$A(z) = a_k z^k = 0 \quad (196)$$

Сравнивая (196) и (194) убеждаемся, что для перехода от (195) к (196) необходимо все коэффициенты a_i , кроме a_k , приравнять нулю:

$$a_i = 0, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

При этом передаточная функция (193) преобразуется к так называемой желаемой передаточной функции замкнутой системы:

$$W_{\text{жел}}(z) = \frac{1}{a_k} [b_\ell z^{-r} + b_{\ell-1} z^{-(r+1)} + \dots + b_0 z^{-k}] \quad (197)$$

где

$$r = k - \ell.$$

Пусть, например, $k = 5$, $\ell = 3$, $r = 2$. Взяв обратное Z-преобразование от передаточной функции (197), получаем следующее выражение для нахождения выходной величины:

$$y_n = \frac{1}{a_5} [b_3 x_{n-2} + b_2 x_{n-3} + \dots + b_0 x_{n-5}] \quad (198)$$

Строим по выражению (198) переходной процесс

$$y_0 = y_1 = 0$$

$$y_2 = b_3/a_5$$

$$y_3 = (b_3 + b_2)/a_5$$

$$y_4 = (b_3 + b_2 + b_1)/a_5$$

$$y_5 = y_6 = y_7 = \dots = (b_3 + b_2 + b_1 + b_0)/a_5.$$

Таким образом, начиная с $n=k=5$, переходная характеристика принимает постоянное значение, следовательно, переходной процесс заканчивается за пять интервалов квантования.

В общем случае переходной процесс при нулевых корнях характеристического уравнения замкнутой системы (195) заканчивается за k периодов квантования (k – порядок характеристического уравнения). Такие

системы и называются системами с конечной длительностью переходного процесса. При этом оказывается, что переходной процесс в системе конечной длительности является в то же время минимальным по длительности по сравнению с любыми другими значениями корней z_i и апериодическим.

Запишем теперь условия конечной длительности переходного процесса. Как отмечалось, для получения такого процесса все коэффициенты характеристического уравнения (194), кроме a_k , должны быть равны нулю:

$$\left. \begin{array}{l} a_{k-1} = 0 \\ a_{k-2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (199)$$

Разрешая систему уравнений (199) относительно настроечных параметров регулятора, получаем значения искомым параметров.

В качестве А-регулятора используется регулятор с дробно-рациональной передаточной функцией. Для того, чтобы число уравнений для определения параметров настройки регулятора было не меньше числа параметров регулятора, порядок передаточной функции А-регулятора должен быть равен порядку приведенной непрерывной части. Если, кроме того, мы хотим иметь астатический регулятор, обеспечивающий нулевую статическую ошибку в замкнутой системе, знаменатель передаточной функции регулятора должен содержать сомножитель $(z-1)$ (как и все астатические регуляторы: И-, ПИ-, ПИД)

Отметим, что цифровая АСР с А-регулятором имеет конечный, апериодический и оптимальный по длительности переходной процесс только при ступенчатом воздействии.

К недостаткам систем с А-регуляторами можно отнести следующие:

1. Передаточная функция А-регулятора зависит от передаточной функции приведенной непрерывной части и усложняется с ростом порядка последней.
2. С уменьшением периода квантования возрастают максимальное значение регулирующего воздействия и значения параметров настройки регулятора.

В качестве примера рассмотрим цифровую АСР с объектом регулирования в виде инерционного звена первого порядка и ПИ-регулятором.

Напомним (см. раздел 6.3), что передаточная функция приведенной непрерывной части, соответствующая данному объекту, равна

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = \frac{d}{z - z_1}, \quad (200)$$

где $d = K(1 - z_1)$; $z_1 = e^{-T/T_{00}}$,

K, T_{00} – параметры инерционного звена первого порядка.

Тогда с учетом передаточной функции ПИ-регулятора (176) передаточная функция замкнутой системы равна:

$$W_{\text{зс}}(z) = \frac{\frac{d}{z - z_1}}{1 + \frac{d}{z - z_1} \frac{b_1 z + b_0}{z - 1}}$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$(z - z_1)(z - 1) + d(b_1 z + b_0) = z^2 + z(-z_1 - 1 + db_1) + (z_1 + db_0) = 0$$

Условия конечной длительности переходного процесса (199):

$$\left. \begin{aligned} -z_1 - 1 + db_1 &= 0 \\ z_1 + db_0 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

или с учетом обозначений для b_1 и b_0 :

$$\left. \begin{aligned} d(K_1^* + K_0^* T) &= 1 + z_1 \\ dK_1^* &= z_1 \end{aligned} \right\}.$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие конечную длительность переходного процесса:

$$K_1^* = \frac{z_1}{K(1-z_1)} = \frac{e^{-T/T_{об}}}{K(1-e^{-T/T_{об}})},$$

$$K_0^* = \frac{1}{TK(1-z_1)} = \frac{1}{TK(1-e^{-T/T_{об}})}.$$

При $T \rightarrow 0$ $K_1^*, K_0^* \rightarrow \infty$.

Желаемая передаточная функция замкнутой системы (197):

$$W_{жел}(z) = d(z^{-1} - z^{-2}),$$

т.е. переходной процесс в рассматриваемой системе действительно заканчивается за $2T$.

Расчет настроек цифровых регуляторов методом расширенных частотных характеристик

Нахождение расширенных частотных характеристик

Для нахождения расширенных частотных характеристик следует в выражение для передаточной функции подставить

$$z = e^{pT} = e^{(-m\omega + j\omega)T} = e^{-m\omega T} (\cos \omega T + j \sin \omega T).$$

Обозначив для упрощения записи

$$e^{-m\omega T} = e; \quad \cos \omega T = c_1; \quad \sin \omega T = s_1,$$

получаем

$$z = e(c_1 + s_1). \quad (201)$$

Приведем в качестве примеров выражения для расширенных частотных характеристик приведенной непрерывной части (200) и ПИ-регулятора (176).

РЧХ приведенной непрерывной части (200):

$$A^*(\omega) = \frac{d}{\sqrt{e^2 - 2ec_1z_1 + z_1^2}},$$

$$\varphi^*(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{es_1}{ec_1 - z_1}.$$

РЧХ ПИ-регулятора (176):

$$A^*(\omega) = \sqrt{\frac{b_1^2 e^2 + 2b_1 b_0 ec_1 + b_0^2}{e^2 - 2ec_1 + 1}},$$

$$\varphi^*(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b_1 es_1}{b_1 ec_1 + b_0} - \operatorname{arctg} \frac{es_1}{ec_1 - 1}.$$

Нахождение ЛРЗ

Для нахождения уравнения линии равного затухания используются дискретные аналоги условий заданной колебательности переходного процесса в замкнутой системе (36):

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega) A_{\text{рег}}^*(m, \omega) &= 1 \\ \varphi_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega) + \varphi_{\text{рег}}^*(m, \omega) &= -\pi \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Поступая так же, как при выводе уравнений ЛРЗ для непрерывных систем, можно получить дискретные аналоги этих уравнений.

Дискретный аналог выражений (41) для П-регулятора:

$$\left. \begin{aligned} K_1^* &= \frac{1}{A_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega_1)} \\ \omega_1 &= \arg[\varphi_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega_1)] = -\pi \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

Дискретный аналог выражений (43) для И-регулятора:

$$\left. \begin{aligned} K_0^* &= \left[\frac{\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1}}{Te A_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega)} \right]_{\omega=\omega_0} \\ \omega_0 &= \arg \left\{ \left[\varphi_{\text{ПНЧ}}^*(m, \omega) + \omega T - \operatorname{arctg} \frac{es_1}{ec_1 - 1} \right]_{\omega=\omega_0} \right\} = -\pi \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Дискретный аналог уравнений (47), (50) ЛРЗ для ПИ-регулятора:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{III}^*(m, \omega) &= -\pi - \varphi_{III}^*(m, \omega) + \operatorname{arctg} \frac{es_1}{ec_1 - 1} \\ K_1^*(\omega) &= \frac{\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1}}{s_1 A_{III}^*(m, \omega)} \sin(\gamma_{III}^* - \omega T) \\ K_0^*(\omega) &= \frac{\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1}}{Tes_1 A_{III}^*(m, \omega)} \left[\sin \gamma_{III}^* - e \sin(\gamma_{III}^* - \omega T) \right] \end{aligned} \right\} (205)$$

Дискретный аналог уравнений (59) для ПИД-регулятора:

$$\left. \begin{aligned} K_1^*(\omega) &= \frac{\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1}}{s_1 A_{III}^*(m, \omega)} \sin(\gamma_{III}^* - \omega T) + 2 \frac{K_2^*}{T} \left(\frac{c_1}{e} - 1 \right) \\ K_0^*(\omega) &= \frac{\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1}}{Tes_1 A_{III}^*(m, \omega)} \left[\sin \gamma_{III}^* - e \sin(\gamma_{III}^* - \omega T) + \frac{K_2^*}{T^2} \left(1 - 2 \frac{c_1}{e} + \frac{1}{e^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} (206)$$

Особые прямые

Специфической особенностью ЛРЗ для дискретных систем является то, что при $\omega = \pi/T$ ЛРЗ вырождается в особую прямую (рис. 74)

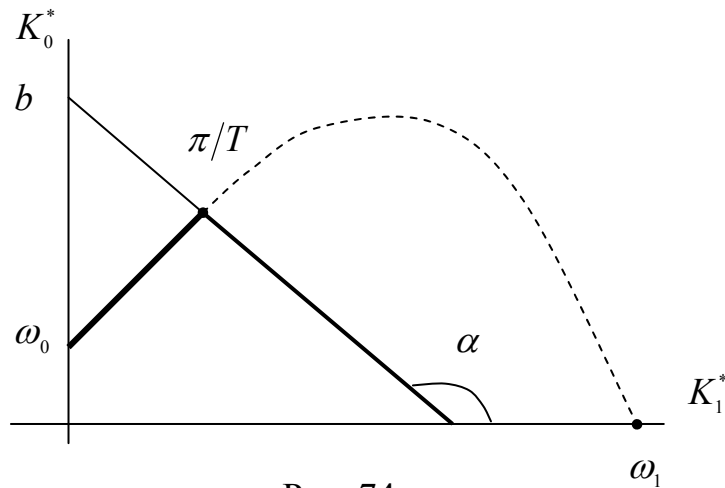


Рис. 74.

Запишем уравнение особой прямой для ЛРЗ для системы с ПИД-регулятором.

При $\omega = \pi/T$ $e = e^{-\pi m}$, $c_1 = -1$, $s_1 = 0$, $\sqrt{e^2 - 2ec_1 + 1} = 1 + e^{-\pi m}$,

$\gamma_{\text{ПН}}^* \left(m, \frac{\pi}{T} \right) = -\varphi_{\text{ПНЧ}}^* \left(m, \frac{\pi}{T} \right) = \pi$ и уравнения (206) вырождаются в особую прямую с уравнением:

$$\left. \begin{aligned} K_0^* \left(\frac{\pi}{T} \right) &= aK_1^* \left(\frac{\pi}{T} \right) + b, \\ a &= -1/T \\ b &= \frac{1}{T} \left[\frac{1 + e^{-\pi m}}{e^{-\pi m} A_{\text{ПНЧ}}^* \left(m, \frac{\pi}{T} \right)} + \frac{K_2^*}{T} \left(\frac{1 + e^{-2\pi m}}{e^{-2\pi m}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

(На рис. 74 $\text{tg} \alpha = a$).

Следует заметить, что если $\omega_1 \ll \pi/T$, т.е. период квантования достаточно мал и выбран правильно, частота π/T оказывается за пределами частотного диапазона, в котором строится ЛРЗ, поэтому наличие особой прямой не сказывается на форме ЛРЗ. Если же период квантования слишком велик и выбран неправильно, т.е. $\omega_1 > \pi/T$, ЛРЗ вырождается в особую прямую.

7. Анализ и синтез цифровых АСР при случайных воздействиях

При использовании детерминированных методов расчета АСР в качестве входного воздействия мы использовали ступенчатое возмущение, а настройки регулятора выбирались так, чтобы обеспечить заданный запас устойчивости (степень демфирования) системы, который можно оценить по форме кривой переходного процесса в замкнутой АСР с помощью показателей качества регулирования, например, степени затухания Ψ (31), характеризующей колебательность переходного процесса.

Поскольку в реальных условиях на АСР действуют случайные возмущения, более правомерным является расчет АСР на реальные, т.е. случайные возмущения, представляющие случайные процессы. При этом в качестве показателя качества функционирования АСР обычно используются дисперсия выходной величины σ_y^2 или отношение дисперсии выхода к дисперсии входного возмущения σ_y^2/σ_x^2 , характеризующее степень подавления системой случайного возмущения, а целью расчета системы является минимизация σ_y^2 или отношения σ_y^2/σ_x^2 .

Задача анализа цифровых АСР при случайных воздействиях заключается в нахождении σ_y^2 (σ_y^2/σ_x^2) при заданных параметрах настройки регулятора. При решении задачи синтеза требуется определить параметры настройки регулятора, минимизирующие σ_y^2 при ограничениях на запас устойчивости системы.

7.1. Основные характеристики случайных процессов [8, 9, 7]

Случайной функцией времени (случайным, стохастическим процессом) $x(t)$ называется функция, в любой момент времени представляющая случайную величину. Дискретным аналогом случайного процесса является временная последовательность (временной ряд)

$$x_i = x(iT), i = 0, 1, 2, \dots,$$

где T – по-прежнему период отсчетов сигнала (интервал дискретности, период квантования).

Если случайная величина $x(t_0)$ в произвольный момент времени t_0 (или произвольный член временного ряда x_i) имеет нормальное распределение, то статистические свойства случайного процесса (временного ряда) полностью определяют четыре характеристики:

математическое ожидание, дисперсия, ковариационная (корреляционная) функция, спектральная плотность мощности. Причем две последние характеристики содержат одну и ту же информацию о случайном процессе во временной и частотной областях, а дисперсию можно получить из корреляционной функции.

Будем считать случайные процессы (временные ряды) стационарными (т.е. процессами, указанные характеристики которых не зависят от астрономического времени) и эргодическими (для которых усреднение одной характеристики по времени дает такие же результаты, как усреднение по множеству характеристик).

Математическое ожидание

Математическое ожидание случайного процесса характеризует его истинное среднее значение:

$$M_x = M\{x(t)\}$$

(M – символ операции нахождения математического ожидания)

Математическое ожидание временного ряда:

$$M_x = M\{x_i\}$$

Оптимальной оценкой математического ожидания стационарного эргодического временного ряда является среднее арифметическое отсчетов:

$$\bar{x} = M_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (208)$$

N – число членов временного ряда.

Рекуррентная оценка среднего арифметического:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{N} (x_n - \bar{x}_{n-1}), \quad (209)$$

\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1} – значения среднего арифметического в текущий и предыдущий моменты времени.

Дисперсия

Дисперсия случайного процесса (временного ряда) – это математическое ожидание квадрата отклонения случайного процесса (временного ряда) от его математического ожидания. Другими словами, дисперсия – это средний квадрат отклонения случайного процесса (временного ряда) от его математического ожидания:

$$D_x = \sigma_x^2 = M \{ [x(t) - M_x]^2 \}, \quad (210)$$

или для временного ряда

$$D_x = M \{ [x_i - M_x]^2 \}$$

Оптимальной оценкой дисперсии временного ряда является среднее арифметическое квадратов отклонений измеренных значений от оценки математического ожидания:

$$s_x^2 = \mathcal{D}_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \bar{x}^2) \quad (211)$$

Рекуррентная формула для оценки дисперсии:

$$s_n^2 = \frac{N-2}{N-1} s_{n-1}^2 + \frac{1}{N} (x_n - \bar{x}_{n-1})^2$$

Итак, математическое ожидание характеризует истинное среднее значение случайного процесса (временного ряда), а дисперсия – его случайный разброс относительно математического ожидания.

Поскольку дисперсия имеет размерность квадрата случайного процесса, вводят дополнительную характеристику – среднеквадратическое отклонение (СКО) случайного процесса, определяемое как положительное значение корня квадратного из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Корреляционная (ковариационная) функция

Случайные процессы могут иметь одинаковые математические ожидания и дисперсии и отличаться скоростью изменения. Медленно изменяющиеся процессы называют низкочастотными, быстро изменяющиеся – высокочастотными. Для характеристики скорости изменения случайного процесса (или, что то же, степени связи соседних значений случайного процесса) вводится понятие корреляционной функции случайного процесса. Корреляционная функция $R_x(\tau)$ есть математическое ожидание произведения двух значений случайного процесса, сдвинутых относительно друг друга на промежуток времени (сдвиг, лаг) τ :

$$R_x(\tau) = M\{x(t+\tau)x(t)\} \quad (212)$$

Данное определение предложено Н. Винером (инженерное определение корреляционной функции).

Если, вместо абсолютных значений случайного процесса в определении корреляционной функции использовать их отклонения от математического ожидания (центрированный случайный процесс), получаем ковариационную функцию $C_x(\tau)$:

$$C_x(\tau) = M\{[x(t+\tau) - M_x][x(t) - M_x]\} \quad (213)$$

Ковариационная функция связана с корреляционной через квадрат математического ожидания случайного процесса:

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - M_x^2 \quad (214)$$

Для центрированных процессов, математическое ожидание которых равно нулю:

$$M[x(t) - M_x] = 0,$$

ковариационная функция равна корреляционной.

Сопоставляя (210), (213), (214), получаем

$$C_x(0) = D_x = R_x(0) - M_x^2, \quad (215)$$

или

$$R_x(0) = D_x + M_x^2.$$

Таким образом, дисперсия есть значение ковариационной функции при $\tau = 0$, а начальное значение корреляционной функции равно сумме дисперсии и квадрата математического ожидания.

Корреляционные функции вещественных стационарных процессов являются четными функциями τ , т.е.

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau),$$

т.к. знак (направление) сдвига τ не имеет значения, поэтому их можно строить только при $\tau > 0$. Кроме того, корреляционная функция стационарного процесса является функцией, убывающей от $D_x + M_x^2$ до M_x^2 и имеющей при этом монотонный или колебательный характер. Физически это означает, что степень связи между двумя сечениями случайного процесса с ростом τ падает и при определенном значении τ эти сечения не зависят друг от друга (не связаны или не коррелированы между собой). Если же корреляционная функция не стремится к установившемуся значению, это признак нестационарности процесса. Корреляционная функция периодического (осциллирующего) процесса также имеет осциллирующий характер. Чем медленнее убывает корреляционная функция, тем сильнее связь между соседними значениями случайного процесса. Предельные случаи (рис.75): корреляционная функция постоянной величины (линия 1) – прямая линия параллельная оси абсцисс (т.е. степень связи между двумя значениями, отстоящими на любой промежуток времени, постоянна), и корреляционная функция белого шума (линия 4).

Белым шумом называется процесс, текущее значение которого не зависит от предыдущих, т.е. значения белого шума не коррелированы между собой. Дисперсия непрерывного белого шума бесконечна. Белый шум есть математическая абстракция, к которой процессы, происходящие

в реальных инерционных системах, могут лишь приближаться в той или иной степени.

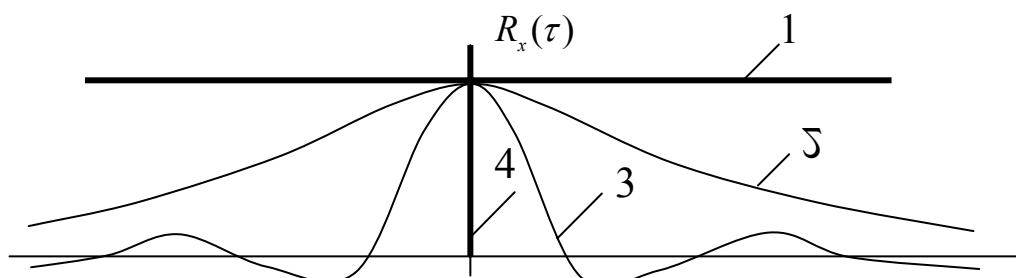


Рис. 75.

Линиям 2 и 3 на рис. 75 соответствуют корреляционные функции низкочастотного и высокочастотного процессов.

Корреляционная функция временного ряда определяется следующим образом:

$$R_x(kT) = M[x_{i+k} \cdot x_i],$$

где k – число периодов квантования во временном сдвиге (лаге) τ :

$$\tau = kT.$$

Экспериментальная оценка корреляционной функции находится по выражению:

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=0}^{N-k-1} x_{i+k} \cdot x_i, \quad (216)$$

где N – число членов временного ряда.

С ростом лага k точность вычисления оценки (216) падает, т.к. уменьшается число членов ряда, по которому считается оценка. При $k=0$ оценка $\hat{R}_x(0)$ считается как среднее арифметическое N отсчетов, а при $k=N-2$ среднее арифметическое считается всего по двум точкам, т.е. весьма неточно. Поэтому для того, чтобы оценка корреляционной функции была достаточно точной, должно выполняться условие $k_{max} \ll N$, например,

$$k_{max} = (0.01-0.05)N.$$

Спектральная плотность мощности

Корреляционная функция характеризует случайный процесс во временной области. Спектральная плотность мощности (спектр мощности) описывает поведение случайного процесса в частотной области.

Спектральная плотность мощности $S_x(\omega)$ есть предел отношения мощности ΔN случайного процесса на выходе узкополосного фильтра с полосой $\Delta\omega$ к величине этой полосы при $\Delta\omega \rightarrow 0$:

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta\omega}$$

Таким образом, физический смысл спектра мощности – это скорость изменения (плотность распределения) мощности сигнала по частоте.

Спектр мощности есть неотрицательная функция частоты: $S_x(\omega) \geq 0$. Чем более низкочастотным является случайный сигнал, тем быстрее затухает его спектральная плотность. На рис. 76 кривая спектральной плотности 2 соответствует более низкочастотному сигналу, чем кривая 3.

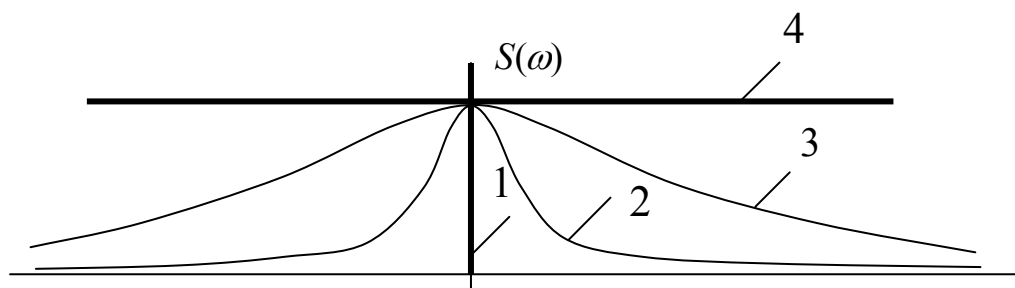


Рис. 76.

Спектральная плотность белого шума – прямая параллельная оси абсцисс (линия 4), т.е. мощность белого шума распределяется равномерно по всему частотному диапазону. Спектральная плотность мощности постоянной величины (линия 1) есть импульс в начале координат, т.к. вся мощность этого сигнала сосредоточена на нулевой частоте.

Наиболее часто для определения спектральной плотности мощности используются два описываемых ниже способа.

*Коррелограммный способ (Преобразование Фурье
корреляционной функции)*

В англоязычной литературе корреляционная функция называется коррелограммой, что и объясняет название способа.

Спектральная плотность мощности и корреляционная функция связаны парой прямого и обратного преобразования Фурье:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Экспериментальная оценка спектра мощности рассчитывается на интервале конечной длительности t_p , поэтому бесконечные пределы интегрирования в формулах следует заменить конечными:

$$\mathfrak{S}_x(\omega) = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \mathfrak{R}_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (217)$$

С учетом формулы Эйлера:

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

получаем для (217):

$$\mathfrak{S}_x(\omega) = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \mathfrak{R}_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau - j \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \mathfrak{R}_x(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (218)$$

Второй интеграл в правой части (218) равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, следовательно,

$$\mathfrak{S}_x(\omega) = \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \mathfrak{R}_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

или для вещественных данных

$$\mathfrak{S}_x(\omega) = 2 \int_0^{t_p/2} \mathfrak{R}_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

При вычислении оценки спектральной плотности мощности на ЦВМ дискретным аналогом формулы (217) является выражение

$$\mathfrak{F}_x(\omega) = \sum_{i=-L}^L w(i) \mathfrak{K}_x(i) e^{-j\omega i T},$$

где L – максимальный лаг при вычислении оценки корреляционной функции;

$w(i)$ – корреляционное окно – специальная функция, с помощью которой осуществляется «взвешивание» ординат корреляционной функции с целью улучшения оценки спектральной плотности мощности. В частном случае при $w(i) = 1$ имеем прямоугольное корреляционное окно.

Считая, что $\omega = k\Delta\omega$, $k = \overline{0, N-1}$

(k – номер ординаты оценки спектра мощности, N – количество отсчетов временного ряда), окончательно получаем следующую формулу для вычисления оценки спектральной плотности мощности:

$$\mathfrak{F}_x(k\Delta\omega) = \sum_{i=-L}^L w(i) \mathfrak{K}_x(i) e^{-j\frac{2\pi}{N}ik}, k = \overline{0, N-1} \quad (219)$$

Определение спектральной плотности мощности преобразованием Фурье параметрической модели временного ряда

Многие встречающиеся на практике временные ряды удовлетворительно описываются следующим конечно-разностным уравнением, называемым моделью авторегрессии – скользящего среднего (АРСС):

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_p x_{n-p} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_q u_{n-q},$$

$$\text{или } x_n = -\sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} + \sum_{i=0}^q b_i u_{n-i} \quad (220)$$

Первая сумма в правой части (220) называется авторегрессионной частью модели АРСС и характеризует зависимость временного ряда в текущий момент x_n от прошлых значений временного ряда x_{n-1} , взвешенных с коэффициентами a_i .

p – порядок авторегрессии (АР).

Вторая сумма в правой части (220) соответствует модели скользящего среднего.

u_n – белый шум, возбуждающий модель АРСС, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_u^2 .

q – порядок модели скользящего среднего (СС).

Модель скользящего среднего представляет взвешенную с коэффициентами b_i сумму текущего u_n и прошлых u_{n-1} значений шума (коэффициент b_0 без потери общности можно считать равным единице).

Модель (220) можно представить как выход некоторого динамического звена (формирующего фильтра), на входе которого действует белый шум.

Взяв Z -преобразование модели АРСС (220), можем найти дискретную передаточную функцию формирующего фильтра:

$$W_\phi(z) = \frac{x(z)}{u(z)} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

где

$$B(z) = 1 + \sum_{i=1}^q b_i z^{-i}$$

$$A(z) = 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i},$$

полиномы от z^{-i} порядков q и p соответственно.

Частными случаями модели АРСС являются модели авторегрессии ($q = 0$) и скользящего среднего ($p = 0$).

Учитывая, что, как известно из теории управления, спектры мощности выходного и входного сигналов динамического звена связаны через квадрат его АЧХ, а также, что спектр мощности дискретного белого шума на входе формирующего фильтра равен

$$S_u(\omega) = \sigma_u^2 T,$$

получаем для спектральной плотности мощности временного ряда, описываемого моделью АРСС (220), следующее выражение:

$$S_x(\omega) = \sigma_u^2 T \left| \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right|^2 = \sigma_u^2 T \frac{B(-j\omega) \cdot B(j\omega)}{A(-j\omega) \cdot A(j\omega)}, \quad (221)$$

где $A(j\omega), B(j\omega)$ - изображения Фурье полиномов $A(z), B(z)$.

7.2. Определение дисперсии выходной величины в цифровой АСР [10, 11]

Считаем, что возмущающее воздействие в цифровой системе представляет случайную временную последовательность, описываемую моделью АРСС (220). Спектральная плотность мощности этого воздействия определяется соотношением (221).

Для удобства дальнейших выводов перейдем из частотной плоскости в плоскость z . Аналогом соотношения (221) в плоскости z является выражение:

$$S_x(z) = \sigma_u^2 T \frac{B(z) \cdot B(z^{-1})}{A(z) \cdot A(z^{-1})} \quad (222)$$

(Напомним, что такой переход осуществляется с помощью подстановки $z = e^{j\omega T}$).

Например, для модели авторегрессии первого порядка АР1 ($p = 1, q = 0$):

$$x_n = -a_1 x_{n-1} + u_n,$$

имеем:

$$\begin{aligned} B(j\omega) &= 1; \quad A(j\omega) = 1 + a_1 e^{-j\omega T}, \\ A(z) &= 1 + a_1 z^{-1}, \quad A(z^{-1}) = 1 + a_1 z. \end{aligned}$$

Тогда согласно (221) и (222)

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_u^2 T}{1 + 2a_1 \cos \omega T + a_1^2}, \quad (223)$$

$$S_x(z) = \frac{\sigma_u^2 T}{1 + 2a_1(z + z^{-1}) + a_1^2}$$

Как отмечалось, спектральные плотности выходной и входной случайных последовательностей динамической системы связаны через квадрат её АЧХ. Переходя в плоскость z выражение для спектра мощности выхода системы, можно записать следующим образом:

$$S_y(z) = |W_{zc}(z)|^2 S_x(z) = W_{zc}(z)W_{zc}(z^{-1})S_x(z), \quad (224)$$

где $S_y(z), S_x(z)$ - спектральные плотности временных рядов на выходе и входе системы,

$W_{zc}(z)$ - дискретная передаточная функция замкнутой системы.

В разделе 7.1. также отмечалось, что корреляционная функция и спектр мощности связаны парой преобразований Фурье (или при переходе в выражении (222) в плоскость z – парой Z -преобразования). Поэтому корреляционная функция выходной величины цифровой системы может быть найдена с помощью обратного Z -преобразования спектральной плотности выходной величины, которое определяется следующим образом:

$$R_y(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_y(z) z^{k-1} dz$$

или с учетом (224)

$$R_y(k) = \oint_{|z|=1} |W_{zc}(z)|^2 S_x(z) z^{k-1} dz, \quad (225)$$

где \oint - круговой интеграл по контуру $|z|=1$, т.е. интеграл, в котором интегрирование осуществляется по замкнутому контуру, т.к. при изменении частоты от 0 до $2\pi/T$ конец вектора $z = e^{j\omega T}$ описывает в плоскости z окружность с единичным радиусом.

Согласно (215) дисперсия выходной величины равна

$$\sigma_y^2 = R_y(0) - M_y^2$$

или с учетом (225) окончательно получаем:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} |W_{zc}(z)|^2 S_x(z) z^{-1} dz - M_y^2 \quad (226)$$

(Ниже для простоты считаем $M_y = 0$).

Для нахождения интеграла (226) можно использовать два способа: численное интегрирование и использование итерационной процедуры.

Численное вычисление интеграла (226) в частотной области

Для перехода в частотную область опять воспользуемся подстановкой $z = e^{j\omega T}$.

Тогда учитывая, что

$$dz = e^{j\omega T} jT d\omega$$

и

$$z^{-1} dz = jT d\omega,$$

а также то, что в силу периодичности подинтегральной функции интеграл в пределах периода $0 \div 2\pi/T$ равен удвоенному интегралу в пределах полупериода $0 \div \pi/T$, получаем:

$$\sigma_y^2 = \frac{T}{\pi} \int_0^{\pi/T} |W_{zc}^*(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (227)$$

В частности, при численном интегрировании методом прямоугольников, обозначая

$$\omega = i\Delta\omega; \quad \pi/T = N\Delta\omega,$$

откуда $\Delta\omega = \pi/NT$ ($\Delta\omega$ – шаг квантования по частоте, N – число интервалов дискретности), сводим интеграл (227) к сумме:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |W_{zc}^*(ji\Delta\omega)|^2 S_x(i\Delta\omega). \quad (228)$$

В качестве примера запишем выражение (228) для системы второго порядка, на входе которой действует случайная последовательность, описываемая моделью AP1.

При $\omega = i\Delta\omega$, $\Delta\omega = \pi/NT$, $\omega T = i\pi/N$,

поэтому модель (223) принимает форму

$$S_x(i\Delta\omega) = \frac{\sigma_u^2 T}{1 + 2a_1 \cos(i\pi/N) + a_1^2} \quad (229)$$

Пусть

$$W_{zc}(z) = \frac{c_1 z + c_0}{d_2 z^2 + d_1 z + d_0},$$

$$C(z) = c_1 z + c_0,$$

$$D(z) = d_2 z^2 + d_1 z + d_0.$$

Тогда

$$|D(z)|^2 = D(z)D(z^{-1}) = (d_0^2 + d_1^2 + d_2^2) + (d_0 d_1 + d_1 d_2)(z + z^{-1}) + d_0 d_2 (z^2 + z^{-2})$$

Переходя в последнем выражении с помощью подстановки

$$z^k + z^{-k} = 2 \cos(k\omega T) = 2 \cos(ki\pi/N)$$

в частотную область, получаем

$$|D(ji\Delta\omega)|^2 = (d_0^2 + d_1^2 + d_2^2) + 2(d_0 d_1 + d_1 d_2) \cos(i\pi/N) + 2d_0 d_2 \cos(2i\pi/N). \quad (230)$$

Действуя аналогично, находим

$$|C(ji\Delta\omega)|^2 = (c_0^2 + c_1^2) + 2c_0 c_1 \cos(i\pi/N) \quad (231)$$

и

$$|W_{zc}^*(ji\Delta\omega)|^2 = \frac{|D(ji\Delta\omega)|^2}{|C(ji\Delta\omega)|^2} \quad (232)$$

В общем случае для полинома p -го порядка

$$D(z) = \sum_{k=0}^p d_k z^k$$

квадрат его модуля можно определить по выражению:

$$|D(ji\Delta\omega)|^2 = \sum_{k=0}^p d_k^2 + 2\left(\sum_{k=0}^{p-1} d_k d_{k+1}\right) \cos(i\pi/N) + 2\left(\sum_{k=0}^{p-2} d_k d_{k+2}\right) \cos(2i\pi/N) + \dots$$

$$+ 2d_0 d_p \cos(pi\pi/N) = \sum_{k=0}^p d_k^2 + 2\sum_{k=1}^p \cos(ki\pi/N) \sum_{s=0}^{p-k} d_s d_{s+k}$$

Подставляя, (230) и (231) в (232), а (229) и (232) в (228), получаем искомое выражение для дисперсии выходной величины σ_y^2 .

Вычисление интеграла (226) с использованием итеративной процедуры

Определение дисперсии σ_y^2 по выражению (226) сводится к решению интеграла вида:

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} z^{-1} dz, \quad (233)$$

где полиномы $A(z)$ и $B(z)$ имеют вид

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$B(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_0$$

Обозначим

$$A^*(z) = z^n A(z^{-1}), \quad (234)$$

$$\left. \begin{aligned} A_k(z) &= a_0^k z^k + a_1^k z^{k-1} + \dots + a_k^k \\ B_k(z) &= b_0^k z^k + b_1^k z^{k-1} + \dots + b_k^k \end{aligned} \right\} \quad (235)$$

$$A_n(z) = A(z); \quad B_n(z) = B(z)$$

Полиномы $A_k(z), B_k(z)$ определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} A_{k-1}(z) &= z^{-1} [A_k(z) - \alpha_k A_k^*(z)] \\ B_{k-1}(z) &= z^{-1} [B_k(z) - \beta_k A_k^*(z)] \end{aligned} \right\} \quad k = \overline{1, n}, \quad (236)$$

где

$$\alpha_k = \frac{a_k^k}{a_0^k}; \quad \beta_k = \frac{b_k^k}{a_0^k}.$$

Из выражений (234)÷(236) следует, что коэффициенты многочленов $A_k(z), B_k(z)$ задаются следующими рекуррентными формулами:

$$\left. \begin{aligned} a_i^{k-1} &= a_i^k - \alpha_k a_{k-i}^k \\ b_i^{k-1} &= b_i^k - \beta_k a_{k-i}^k, \quad i = \overline{0, k-1} \end{aligned} \right\} \quad (237)$$

с начальными условиями

$$a_i^n = a_i; \quad b_i^n = b_i.$$

Уравнения (237) имеют смысл, если $a_0^k \neq 0$. Коэффициент a_0^n всегда можно выбрать ненулевым.

Интеграл (233) можно вычислить по рекуррентным формулам, используя последовательность интегралов:

$$I_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{B_k(z)B_k(z^{-1})}{A_k(z)A_k(z^{-1})} z^{-1} dz, \quad k = \overline{0, n}, \quad (238)$$

$$I_n = I$$

Рекуррентная формула для определения I_k имеет вид

$$I_k = \beta_k^2 + I_{k-1}(1 - \alpha_k^2),$$

$$I_0 = \beta_0^2.$$

Используя формулы 237, можно получить следующее выражение для интеграла (238):

$$I_k = \frac{1}{a_0^k} \sum_{i=0}^k \frac{(b_i^i)^2}{a_0^i} \quad (239)$$

Для удобства вычислений по формуле (239) можно использовать таблицу 8.

Таблица 8

	Коэффициенты a_i^n	Коэффициенты b_i^n
*	$(a_0) a_1 \dots a_{n-1} a_n$	$b_0 b_1 \dots b_{n-1} (b_n)$
	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$	$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$
*	$(a_0^{n-1}) a_1^{n-1} \dots a_{n-1}^{n-1}$	$b_0^{n-1} b_1^{n-1} \dots (b_{n-1}^{n-1})$
	$a_{n-1}^{n-1} a_{n-2}^{n-1} \dots a_0^{n-1}$	$a_{n-1}^{n-1} a_{n-2}^{n-1} \dots a_0^{n-1}$
	\vdots	\vdots
*	$(a_0^1) a_1^1$	$b_0^1 (b_1^1)$
	$a_1^1 a_0^1$	$a_1^1 a_0^1$
*	(a_0^0)	(b_0^0)

В табл. 8 кружками помечены коэффициенты, входящие в выражение (239).

Каждая четная строка коэффициентов a_i^k получается путем записи коэффициентов предыдущей строки (отмечены знаком *) в обратном порядке. Четные строки коэффициентов a_i^k и b_i^k совпадают. Элементы нечетных строк коэффициентов a_i^k и b_i^k вычисляются с помощью соотношений (237)

7.3. Синтез регулятора с минимальной дисперсией [5]

Целью расчета регуляторов с минимальной дисперсией (МД – регуляторов) является минимизация дисперсии выходной величины цифровой системы или равного ей с точностью до M_y^2 математического ожидания квадрата выходной величины:

$$\min \sigma_y^2 = \min M\{y_k^2\}$$

Поскольку решение этой задачи имеет смысл только при ограничениях на управления (иначе, увеличивая управляющее воздействие, дисперсию выходной величины можно сделать сколь угодно малой) в критерий управления I следует ввести ещё одно слагаемое – средний квадрат управления с весовым коэффициентом r :

$$I = M\{y_{k+1}^2 + rx_k^2\} \rightarrow \min \quad (240)$$

В критерии (240) используется последующее значение выхода y_{k+1} (а не текущее y_k), т.к. текущее значение управления x_k определяет в силу запаздывания в объекте управления последующее значение выхода y_{k+1} .

Рассмотрим в качестве примера структурную схему цифровой АСР со случайным воздействием F , приведенным к выходу приведенной непрерывной части (рис. 77)

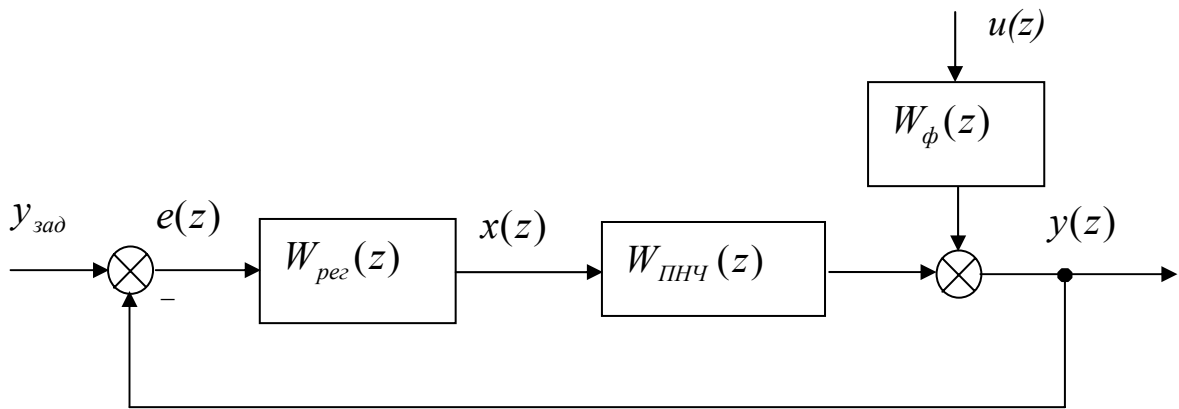


Рис. 77.

Пусть для простоты передаточная функция приведенной непрерывной части имеет первый порядок:

$$W_{\text{ПНЧ}}(z) = \frac{b_0 z^{-1}}{a_1 + a_0 z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

$$B(z) = b_0 z^{-1},$$

$$A(z) = a_1 + a_0 z^{-1},$$

а случайное воздействие описывается моделью AP1:

$$F_k = -cF_{k-1} + u_k.$$

Передаточная функция формирующего фильтра для этой модели:

$$W_\phi(z) = \frac{F(z)}{u(z)} = \frac{1}{1 + cz^{-1}} = \frac{1}{C(z)},$$

$$C(z) = 1 + cz^{-1}.$$

Передаточную функцию МД-регулятора будем также искать в виде дробно-рациональной функции от z :

$$W_{\text{рег}}(z) = \frac{x(z)}{e(z)},$$

или, считая $y_{\text{зад}} = 0$ и $e_k = y_{\text{зад}} - y_k = -y_k$,

$$W_{\text{рег}}(z) = \frac{x(z)}{-y(z)} \quad (241)$$

Для нахождения выражения для выходной величины y_{k+1} , входящей в критерий (240), запишем её Z -изображение:

$$\begin{aligned} zy(z) &= W_{\text{ПНЧ}}(z)zx(z) + W_\phi(z)zu(z) = \\ &= \frac{B(z)}{A(z)}zx(z) + \frac{1}{C(z)}zu(z) \end{aligned} \quad (242)$$

Подставляя в (242) выражения для полиномов $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$, приводя результаты к общему знаменателю и совершая обратное Z -преобразование, получаем:

$$a_1 y_{k+1} + (a_0 + a_1 c) y_k + a_0 c y_{k-1} = b_0 x_k + b_0 c x_{k-1} + a_1 u_{k+1} + a_0 u_k \quad (243)$$

Определяя из последнего выражения y_{k+1} и подставляя его в критерий (240), имеем:

$$I = M \left\{ \left[-\frac{a_0 + a_1 c}{a_1} y_k - \frac{a_0 c}{a_1} y_{k-1} + \frac{b_0}{a_1} x_k + \frac{b_0 c}{a_1} x_{k-1} + u_{k+1} + \frac{a_0}{a_1} u_k \right]^2 + rx_k^2 \right\} \rightarrow \min \quad (244)$$

В текущий момент времени k известны текущее u_k и прошлые значения возбуждающего шума u_{k-i} . Неизвестно будущее значение u_{k+1} . Известные значения шума являются неслучайными и их математическое ожидание равно их значениям, т.е.

$$M[u_{k-i}] = u_{k-i}, \quad i \geq 0,$$

т.к. математическое ожидание неслучайной величины равно самой этой величине. В то же время математическое ожидание последующего значения шума $M[u_{k+1}]$ равно нулю, поскольку возбуждающий шум по предположению имеет нулевое математическое ожидание.

Если a – константа, а x – случайная величина с нулевым математическим ожиданием, имеет место очевидное соотношение:

$$M[(a + x)^2] = a^2 + M[x^2]$$

Поэтому после нахождения математического ожидания выражения в фигурных скобках (244) получаем:

$$I = \left[-\frac{a_0 + a_1 c}{a_1} y_k - \frac{a_0 c}{a_1} y_{k-1} + \frac{b_0}{a_1} x_k + \frac{b_0 c}{a_1} x_{k-1} + \frac{a_0}{a_1} u_k \right]^2 + M[u_{k+1}^2] + rx_k^2 \rightarrow \min$$

Оптимальное значение управления x_k определяем из необходимого условия экстремума критерия оптимальности:

$$\frac{\partial I}{\partial x_k} = 2 \left[-\frac{a_0 + a_1 c}{a_1} y_k - \frac{a_0 c}{a_1} y_{k-1} + \frac{b_0}{a_1} x_k + \frac{b_0 c}{a_1} x_{k-1} + \frac{a_0}{a_1} u_k \right] \cdot \frac{b_0}{a_1} + 2rx_k = 0 \quad (245)$$

Для нахождения передаточной функции МД-регулятора запишем Z – преобразование соотношения (245). Выражение в квадратных скобках (245) есть, как следует из (243), y_{k+1} за вычетом u_{k+1} , поэтому его Z – преобразование равно:

$$zy(z) - zu(z),$$

следовательно, Z – преобразование (245) принимает вид

$$\left[zy(z) - zu(z) \right] \frac{b_0}{a_1} + rx(z) = 0 \quad (246)$$

Найдем из (242) $zu(z)$ и подставим в (246).

$$zu(z) = C(z)zy(z) - \frac{B(z)C(z)}{A(z)}zx(z) \quad (247)$$

После подстановки (247) в (246), имеем

$$\left[zy(z) - C(z)zy(z) + C(z) \frac{B(z)}{A(z)}zx(z) \right] \frac{b_0}{a_1} + rx(z) = 0$$

Передаточную функцию МД-регулятора получим разрешив последнее равенство относительно отношения $x(z)/y(z)$, как того требует определение (241):

$$W_{pez}(z) = \frac{zA(z)[C(z) - 1] b_0/a_1}{rA(z) - zC(z)B(z) b_0/a_1},$$

или с учетом выражений для полиномов $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$:

$$W_{pez}(z) = \frac{(a_1 + a_0z^{-1})cb_0/a_1}{(ra_1 - b_0^2/a_1) + (ra_0 - cb_0^2/a_1)z^{-1}} \quad (248)$$

8. Синтез многомерных дискретных регуляторов в пространстве состояния [12, 13, 14]

8.1. Формулировка задачи оптимального управления

Задача синтеза многомерного регулятора в пространстве состояния формализуется обычно в виде задачи о максимальной точности с интегральным квадратичным функционалом J :

$$\min_u J = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt, \quad (249)$$

где t_0, t_1 – соответственно начальное и конечное время,

$(t_1 - t_0)$ – интервал управления (при $t_1 \rightarrow \infty$ имеем бесконечный интервал управления),

\vec{x} – вектор переменных состояния системы размерностью n (n – вектор);

$\vec{u} - r$ – вектор переменных управления;

$Q - (n \times n)$ – квадратная положительно определенная диагональная матрица весовых коэффициентов состояния;

$R - (r \times r)$ – квадратная положительно полуопределенная диагональная матрица весовых коэффициентов управления.

Вообще говоря, в критерии задачи (249) вместо вектора состояния \vec{x} следовало бы писать отклонение вектора состояния от его заданного значения $\vec{x}_{зад}$. Однако для упрощения записи полагаем $\vec{x}_{зад} = 0$.

Размерность вектора состояния равна порядку дифференциального уравнения (системы уравнений), которыми описывается данная динамическая система.

Первое слагаемое (квадратичная форма матрицы Q) вводится в критерий задачи (249) с целью минимизации суммы интегральных

квадратичных критериев для переменных состояния взятых с весовыми коэффициентами равными элементам матрицы Q .

Второе слагаемое в критерии задачи (249) (квадратичная форма матрицы R) позволяет минимизировать сумму квадратичных интегральных критериев для переменных управления взятых с весами равными элементам матрицы R и таким образом ввести ограничения на управление.

Поскольку многомерные регуляторы проще всего реализовать с помощью цифровых вычислительных устройств, перейдем к дискретному аналогу задачи (249):

$$\min I = \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{x}_{i+1}^T Q \bar{x}_{i+1} + \bar{u}_i^T R \bar{u}_i), \quad (250)$$

где N – число периодов квантования по времени в интервале управления (Как в задаче (240), последующее состояние и предыдущее управление в силу запаздывания в объекте управления отнесены к одному шагу).

8.2. Уравнения состояния и измерения

При решении задачи оптимального управления (249) уравнения динамики объекта (системы) управления записывают в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в матричной форме записи и называют матричным уравнением состояния.

Для линейных стационарных систем уравнение состояния имеет вид:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (251)$$

где $\dot{\bar{x}}$ – n – вектор первых производных переменных состояния,

A и B – соответственно $(n \times n)$ – и $(n \times r)$ – матрицы состояния и управления.

В реальных условиях измерению доступны только отдельные элементы вектора состояния или их линейные комбинации, поэтому уравнение состояния дополняется матричным уравнением измерения (выхода), связывающим ℓ – вектор выходных переменных \vec{y} с вектором состояния:

$$\vec{y} = C \cdot \vec{x}, \quad (252)$$

где $C - (\ell \times n)$ – матрица выхода.

В качестве примера рассмотрим получение матричного уравнения состояния для одномерного по управлению объекта, описываемого дифференциальным уравнением n – го порядка (2), которое перепишем в виде

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u \quad (253)$$

Пусть для определенности $m = n - 1$.

Запишем преобразование Лапласа уравнения (253)

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) y(p) = (b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_0) u(p), \quad (254)$$

или

$$A(p) y(p) = B(p) u(p), \quad (255)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – полиномы от p порядков n и $(n-1)$ соответственно.

Из (255) следует, что

$$y(p) = B(p) u(p) / A(p), \quad (256)$$

Обозначим

$$u(p) / A(p) = x(p), \quad (257)$$

тогда выражения (256), (257) можно записать в виде:

$$y(p) = B(p) x(p) \quad (258)$$

$$A(p) x(p) = u(p) \quad (259)$$

Запишем оригиналы выражений (258), (259)

$$y = b_{n-1} x^{(n-1)} + b_{n-2} x^{(n-2)} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x \quad (260)$$

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = u \quad (261)$$

Введем переменные состояния

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \ddot{x} \\ &\dots \\ x_{n-1} &= x^{(n-2)} \\ x_n &= x^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (262)$$

Тогда уравнение (261) с учетом обозначений (262) можно записать в виде следующей системы уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \frac{1}{a_n} (u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n) \end{aligned} \right\} \quad (263)$$

По существу первые $(n-1)$ уравнений системы (263) являются обозначениями, а n -ое уравнение получено из уравнения (261).

Вводя обозначения

$$A_{n \times n} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}; \quad B_{n \times 1} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ a_n \end{vmatrix},$$

получаем матричное уравнение состояния в форме (251).

Матрица A имеет в данном случае так называемую форму Фробениуса.

Уравнение (260) с учетом обозначений (262) можно записать в виде:

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n. \quad (264)$$

Обозначая

$$C_{1 \times n} = \| b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1} \|,$$

получаем уравнение выхода в форме (252). В данном случае y – скалярная переменная, являющаяся линейной комбинацией переменных состояния.

Матричная форма записи уравнений состояния – выхода является удобным инструментом при анализе многосвязных систем. Например, для двумерного объекта, структурная схема которого изображена на рис. 78 ($n = 5$, $r = 2$, $\ell = 2$),

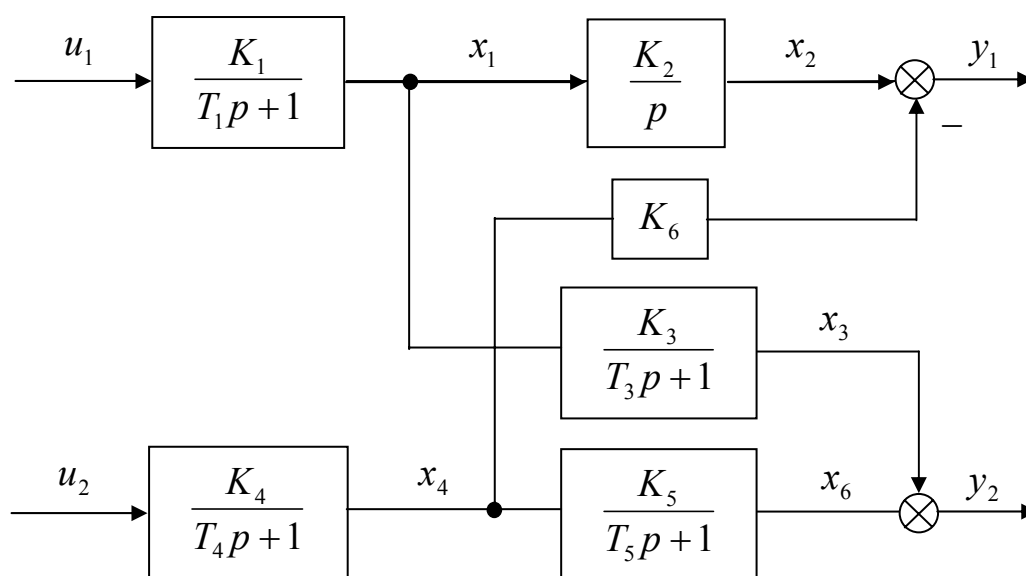


Рис. 78.

описываемого следующими системами уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1/T_1)x_1 + (K_1/T_1)u_1 \\ \dot{x}_2 &= K_2x_1 \\ \dot{x}_3 &= -(1/T_3)x_3 + (K_3/T_3)x_1 \\ \dot{x}_4 &= -(1/T_4)x_4 + (K_4/T_4)u_2 \\ \dot{x}_5 &= -(1/T_5)x_5 + (K_5/T_5)x_4 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_2 - K_6x_4 \\ y_2 &= x_3 + x_5 \end{aligned} \right\},$$

матрицы состояния, управления и выхода выглядят следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -1/T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_3/T_3 & 0 & -1/T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_5/T_5 & -1/T_5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} K_1/T_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & K_4/T_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -K_6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для перехода к дискретному уравнению состояния рассмотрим решение уравнения состояния (251) при постоянных матрицах A , B , начальном состоянии \vec{x}_0 и ступенчатом управлении \vec{u}_0 :

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + A^{-1}[e^{A(t-t_0)} - E]B\vec{u}_0 \quad (265)$$

Матричная экспонента $e^{A(t-t_0)}$ определяется разложением в степенной ряд

$$e^{A(t-t_0)} \approx E + A(t-t_0) + A^2(t-t_0)^2/2! + \dots + A^k(t-t_0)^k/k! + \dots \quad (266)$$

Обозначим

$$F_{t-t_0} = e^{A(t-t_0)} \quad (267)$$

$$G_{t-t_0} = A^{-1}[e^{A(t-t_0)} - E]B = A^{-1}(F - E)B \quad (268)$$

Матрицы F и G называются переходными матрицами состояния и управления соответственно.

Если матрица A плохо обусловлена, нахождение матрицы B вызывает определенные трудности, поэтому желательно определить матрицу G так, чтобы избежать операции обращения матрицы A .

Введем в рассмотрение матрицу Ψ :

$$\Psi_{t-t_0} = A^{-1}(F_{t-t_0} - E)$$

С учетом (266), (267) выражение для матрицы Ψ принимает вид:

$$\Psi_{t-t_0} = E(t-t_0) + A(t-t_0)^2/2! + \dots + A^{k-1}(t-t_0)^k/k! + \dots \quad (269)$$

Тогда матрицы G и F могут быть выражены через матрицу Ψ следующим образом:

$$G_{t-t_0} = \Psi_{t-t_0} B \quad (270)$$

$$F_{t-t_0} = A\Psi_{t-t_0} + E \quad (271)$$

Как видим, для вычисления матрицы G по формуле (270) не требуется обращать матрицу A .

С учетом обозначений (267), (268) выражение (265) для переходной функции приобретает вид:

$$\vec{x}(t) = F_{t-t_0} \vec{x}_0 + G_{t-t_0} \vec{u}_0$$

Положив в последнем соотношении

$$t_0 = kT; \quad \vec{x}_0 = \vec{x}[kT]; \quad \vec{u}_0 = \vec{u}[kT]; \quad t = (k+1)T; \quad t - t_0 = T,$$

получаем дискретное уравнение состояния:

$$\vec{x}[(k+1)T] = F(T)\vec{x}[kT] + G(T)\vec{u}[kT]$$

или в упрощенной форме записи:

$$\vec{x}_{k+1} = F\vec{x}_k + \vec{G}u_k \quad (272)$$

Матрицы $F(T)$ и $G(T)$ можно найти из выражений (269) ÷ (271), заменив в них $(t-t_0)$ на T :

$$\Psi(T) = ET + AT^2/2! + A^2T^3/3! + \dots + A^{k-1}T^k/k! + \dots \quad (273)$$

$$F(T) = A\Psi(T) + E \quad (274)$$

$$G(T) = \Psi(T)B \quad (275)$$

Дискретным аналогом уравнения выхода (252) является уравнение

$$\vec{y}_k = C\vec{x}_k \quad (276)$$

8.3. Синтез дискретного П-регулятора состояния

Решаем задачу (250) при условии, что объект управления описывается уравнением (272).

Предположим, что в процессе решения мы находимся на k -том от начала или j -том от конца шаге управления ($k = N - j$). Обозначим минимальное значение целевого функционала на оставшихся шагах управления (функцию оптимального поведения) через I_k^* :

$$I_k^* = \min_{u_k \dots u_{N-1}} \sum_{k=N-j}^{N-1} (\vec{x}_{k+1}^T Q \vec{x}_{k+1} + \vec{u}_k^T R \vec{u}_k) \quad (277)$$

Уравнение дискретного П-регулятора будем искать в виде:

$$\vec{u}_k = K_{p,k} \vec{x}_k, \quad (278)$$

где $K_{p,k} - (r \times n)$ – матрица коэффициентов передачи оптимального регулятора на k -том шаге.

Последовательно выражая \vec{x}_{k+1} через \vec{x}_k и \vec{u}_k через \vec{x}_k с помощью уравнений объекта (272) и регулятора (278) для $k = \overline{N-1, N-j}$, функцию оптимального поведения (277) можно представить в виде квадратичной формы некоторой матрицы P_k^* :

$$I_k^* = \vec{x}_k^T P_k^* \vec{x}_k \quad (279)$$

или для момента времени $(k+1)$:

$$I_{k+1}^* = \vec{x}_{k+1}^T P_{k+1}^* \vec{x}_{k+1} \quad (280)$$

P_k^* – квадратная симметричная $(n \times n)$ – матрица.

В соответствии с принципом оптимальности Беллмана, каково бы ни было состояние системы перед очередным k -тым шагом, управление \vec{u}_k на этом шаге выбирается так, чтобы минимизировать сумму функции в круглых скобках (250) на k -том шаге и функции оптимального поведения на оставшихся $(k-1)$ -м шагах, т.е.

$$I_k^* = \min_{u_k} (\vec{x}_{k+1}^T Q \vec{x}_{k+1} + \vec{u}_k^T R \vec{u}_k + I_{k+1}^*),$$

или с учетом (280):

$$I_k^* = \min_{u_k} [\vec{x}_{k+1}^T (Q + P_{k+1}^*) \vec{x}_{k+1} + \vec{u}_k^T R \vec{u}_k] \quad (281)$$

Поскольку состояние \vec{x}_{k+1} в момент k ещё неизвестно, его можно определить из уравнения объекта (272). При этом выражение (281), в котором для краткости обозначено

$$P_{k+1} = Q + P_{k+1}^*, \quad (282)$$

принимает вид:

$$I_k^* = \min_{u_k} [\vec{x}_k^T F^T P_{k+1} F \vec{x}_k + 2\vec{x}_k^T F^T P_{k+1} G \vec{u}_k + \vec{u}_k^T (G^T P_{k+1} G + R) \vec{u}_k] \quad (283)$$

Оптимальное управление на k -том шаге находим из условия стационарности I_k^* :

$$\frac{\partial I_k^*}{\partial \vec{u}_k} = 2[G^T P_{k+1} F \vec{x}_k + (G^T P_{k+1} G + R) \vec{u}_k] = 0,$$

откуда

$$\vec{u}_k = -(G^T P_{k+1} G + R)^{-1} G^T P_{k+1} F \vec{x}_k \quad (284)$$

Сопоставляя (284) с (278), убеждаемся, что

$$K_{p,k} = -(G^T P_{k+1} G + R)^{-1} G^T P_{k+1} F. \quad (285)$$

Для определения матрицы P_{k+1} подставим (284) в (283). После преобразований получаем

$$I_k^* = \bar{x}_k^T F^T P_{k+1} \left[E - G (G^T P_{k+1} G + R)^{-1} G^T P_{k+1} \right] F \bar{x}_k \quad (286)$$

Сопоставляя (286) с (279), а также учитывая (282), находим:

$$P_k = Q + F^T P_{k+1} \left[E - G (G^T P_{k+1} G + R)^{-1} G^T P_{k+1} \right] F \quad (287)$$

Уравнение (287) есть конечно-разностный аналог дифференциального уравнения Риккати. При бесконечном интервале управления ($N \rightarrow \infty$) оно вырождается в алгебраическое уравнение:

$$P = Q + F^T P \left[E - G (G^T P G + R)^{-1} G^T P \right] F \quad (288)$$

а выражение (285) для матрицы коэффициентов передачи регулятора принимает вид:

$$K_p = - (G^T P G + R)^{-1} G^T P F \quad (289)$$

Выражения (289), (288) позволяют рассчитать матрицу коэффициентов оптимального по точности П – регулятора состояния.

Уравнение (288) является нелинейным и в общем случае его решение в явном виде получить не удастся. Однако его можно рассматривать как рекуррентное соотношение:

$$P_i = f(P_{i-1}), \quad P_0 = E$$

и использовать для его решения итерационные методы. В качестве критерия останова можно использовать, например, близость евклидовых норм матриц на соседних шагах.

Структурная схема многомерной дискретной системы с объектом управления (272) и оптимальным по точности П – регулятором состояния (289) приведена на рис. 79.

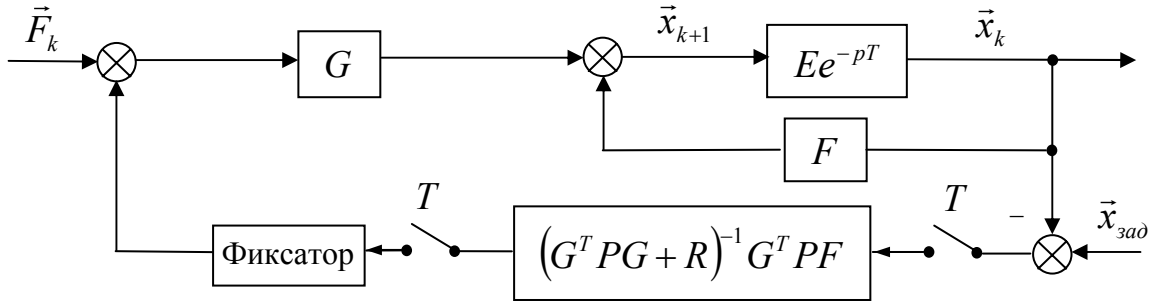


Рис. 79.

8.4. Синтез дискретного ПИ-регулятора состояния – выхода

Поскольку система с П-регулятором, как отмечалось в разделе 2.3, характеризуется статической ошибкой, рассмотрим теперь систему с ПИ-регулятором, описываемым уравнением:

$$\vec{u}_k = K_0 \sum_{i=1}^k \vec{e}_i + K_1 \vec{x}_k \quad (290)$$

где $\vec{e}_i = \vec{y}_{зад} - \vec{y}_i$ – ℓ -вектор рассогласования выхода относительно его заданного значения (для простоты считаем $\vec{y}_{зад} = 0$);

K_0 и K_1 – соответственно $(r \times \ell)$ – и $(r \times n)$ – матрицы коэффициентов передачи И-составляющей и П-оставляющей закона регулирования.

Регулятор, описываемый уравнением (290), является пропорциональным по состоянию и интегральным по выходу и называется поэтому ПИ-регулятором состояния – выхода.

Для того, чтобы избавиться в (290) от суммы, запишем уравнение ПИ-регулятора в приращениях:

$$\vec{u}_k = \vec{u}_{k-1} + K_0 \vec{e}_k + K_1 (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) \quad (291)$$

Будем решать задачу:

$$\min_{u_k} I = \sum_{k=0}^{N-1} (\vec{e}_{k+1}^T Q \vec{e}_{k+1} + \Delta \vec{u}_k^T R \Delta \vec{u}_k), \quad (292)$$

где $\Delta \vec{u}_k = \vec{u}_k - \vec{u}_{k-1}$ – приращение вектора управления. (Считаем, что объект управления по–прежнему описывается уравнением (272)).

Поскольку, как видно из (290), управление зависит теперь не только от состояния, как в регуляторе (278), но и от суммы рассогласований выхода, введем расширенный вектор состояния \vec{x}_k^p :

$$\vec{x}_k^p = \left\| \begin{array}{c} \sum_{i=1}^k \vec{e}_i \\ \dots\dots \\ \vec{x}_k \end{array} \right\|$$

Для того, чтобы избавиться от суммы в определении расширенного вектора состояния, перейдем к его приращению:

$$\Delta \vec{x}_k^p = \left\| \begin{array}{c} \vec{e}_k \\ \dots\dots \\ \Delta \vec{x}_k \end{array} \right\|,$$

где $\Delta \vec{x}_k = \vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}$.

Определим теперь конечно – разностное уравнение для вектора $\Delta \vec{x}_k^p$.

Учитывая, что $\vec{y}_{зад} = 0$, приращение вектора рассогласования равно:

$$\Delta \vec{e}_{k+1} = -\Delta \vec{y}_{k+1},$$

или с учетом уравнения выхода (276)

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{e}_k - C\Delta \vec{x}_{k+1} \quad (293)$$

Подставляя в (293) конечно – разностное уравнение объекта (272), записанное в приращениях

$$\Delta \vec{x}_{k+1} = F\Delta \vec{x}_k + G\Delta \vec{u}_k, \quad (294)$$

получаем

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{e}_k - CF\Delta \vec{x}_k - CG\Delta \vec{u}_k \quad (295)$$

Вводя обозначения

$$F^p = \left\| \begin{array}{ccc} E & \vdots & -CF \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & F \end{array} \right\|, \quad G^p = \left\| \begin{array}{c} -CG \\ \cdots \\ G \end{array} \right\|,$$

можем объединить уравнения (295), (294) в конечно – разностное уравнение эквивалентного объекта (расширенное уравнение состояния):

$$\Delta \vec{x}_{k+1}^p = F^p \Delta \vec{x}_k^p + G^p \Delta \vec{u}_k \quad (296)$$

Теперь задачу (292) можно свести к задаче (250), записав её в виде:

$$\min_{u_k} I = \sum_{k=0}^{N-1} \left((\Delta \vec{x}_{k+1}^p)^T Q^p \Delta \vec{x}_{k+1}^p + \Delta \vec{u}_k^T R \Delta \vec{u}_k \right) \quad (297)$$

Поскольку в исходной задаче (292) весовые коэффициенты относились только к вектору рассогласования выхода, расширенная матрица весовых коэффициентов состояния в задаче (297) определяется следующим образом

$$Q^p = \left\| \begin{array}{ccc} Q & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{array} \right\|,$$

Таким образом, задача синтеза ПИ–регулятора состояния – выхода (291) сведена к задаче (297) эквивалентной задаче синтеза П–регулятора с расширенным вектором состояния и эквивалентным объектом (296). Решая эту задачу с помощью соотношений, аналогичных (289), (288), получаем $r \times (\ell + n)$ – матрицу коэффициентов ПИ–регулятора K_{PII} , которую можно расчленить на подматрицы коэффициентов П– и И– составляющих регулятора K_1 и K_0 :

$$K_{PII} = \left\| K_0 \quad \vdots \quad K_1 \right\|$$

8.5. Синтез дискретного наблюдателя состояния

Поскольку реализация регуляторов (278) или (291) требует знания вектора состояния, возникает задача восстановления состояния по выходным переменным. Эта задача решается с помощью устройств, называемых наблюдателями состояния. Одним из возможных вариантов реализации наблюдателя является наблюдатель Люенбергера, описываемый в дискретном случае уравнением:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F\hat{\mathbf{x}}_k + G\bar{u}_k + K_H[\bar{y}_k - C\hat{\mathbf{x}}_k], \quad (298)$$

или

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (F - K_H C)\hat{\mathbf{x}}_k + G\bar{u}_k + K_H\bar{y}_k, \quad (299)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_k$ – оценка вектора состояния,

K_H – $(n \times \ell)$ – матрица коэффициентов передачи наблюдателя, в определении которой и заключается задача синтеза наблюдателя.

Уравнению (298) соответствует структурная схема на рис. 80.

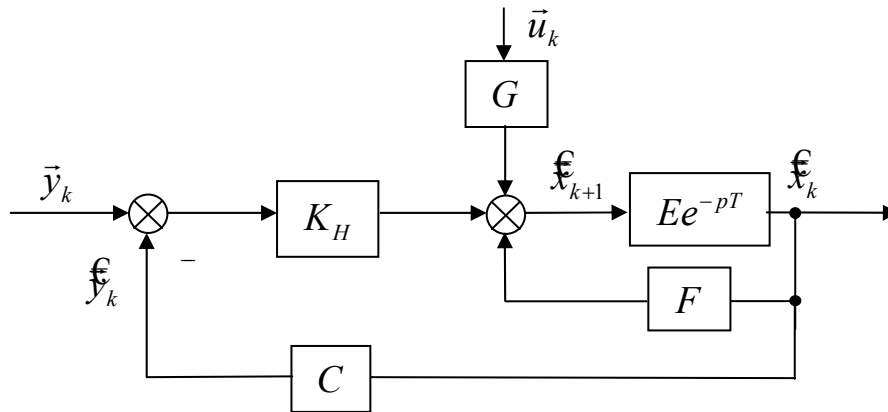


Рис. 80.

Как видно из рис. 80, наблюдатель состояния представляет замкнутую систему с двумя входами \bar{y}_k и \bar{u}_k . Если эта система устойчива и обладает малой статической ошибкой, то по окончании переходного процесса $\hat{\mathbf{y}}_k$ стремится к \bar{y}_k и, следовательно, $\hat{\mathbf{x}}_k$ стремится к $\bar{\mathbf{x}}_k$.

Задача определения матрицы коэффициентов наблюдателя состояния так же, как и задача синтеза ПИ–регулятора, может быть сведена к задаче, эквивалентной задаче синтеза П–регулятора (250).

Рассмотрим ещё раз систему с объектом (272) и стационарным регулятором (278). Подставляя (278) в (272), получаем уравнение замкнутой системы:

$$\vec{x}_{k+1} = F\vec{x}_k + GK_p\vec{x}_k,$$

или

$$\vec{x}_{k+1} = (F + GK_p)\vec{x}_k,$$

которому соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$\det[zE - (F + GK_p)] = 0 \quad (300)$$

Характеристическое уравнение наблюдателя состояния (299):

$$\det[zE - (F - K_H C)] = 0,$$

или после транспонирования выражения в квадратных скобках:

$$\det[zE - (F^T - C^T K_H^T)] = 0$$

Введем обозначения

$$F^\ominus = F^T; \quad G^\ominus = G^T; \quad K_p^\ominus = -K_H^T.$$

Тогда характеристическое уравнение наблюдателя принимает вид:

$$\det[zE - (F^\ominus + G^\ominus K_p^\ominus)] = 0 \quad (301)$$

Сравнивая (300) и (301), убеждаемся, что задача синтеза наблюдателя состояния эквивалентна задаче синтеза эквивалентного П–регулятора:

$$\vec{u}_k^\ominus = K_p^\ominus \vec{x}_k^\ominus$$

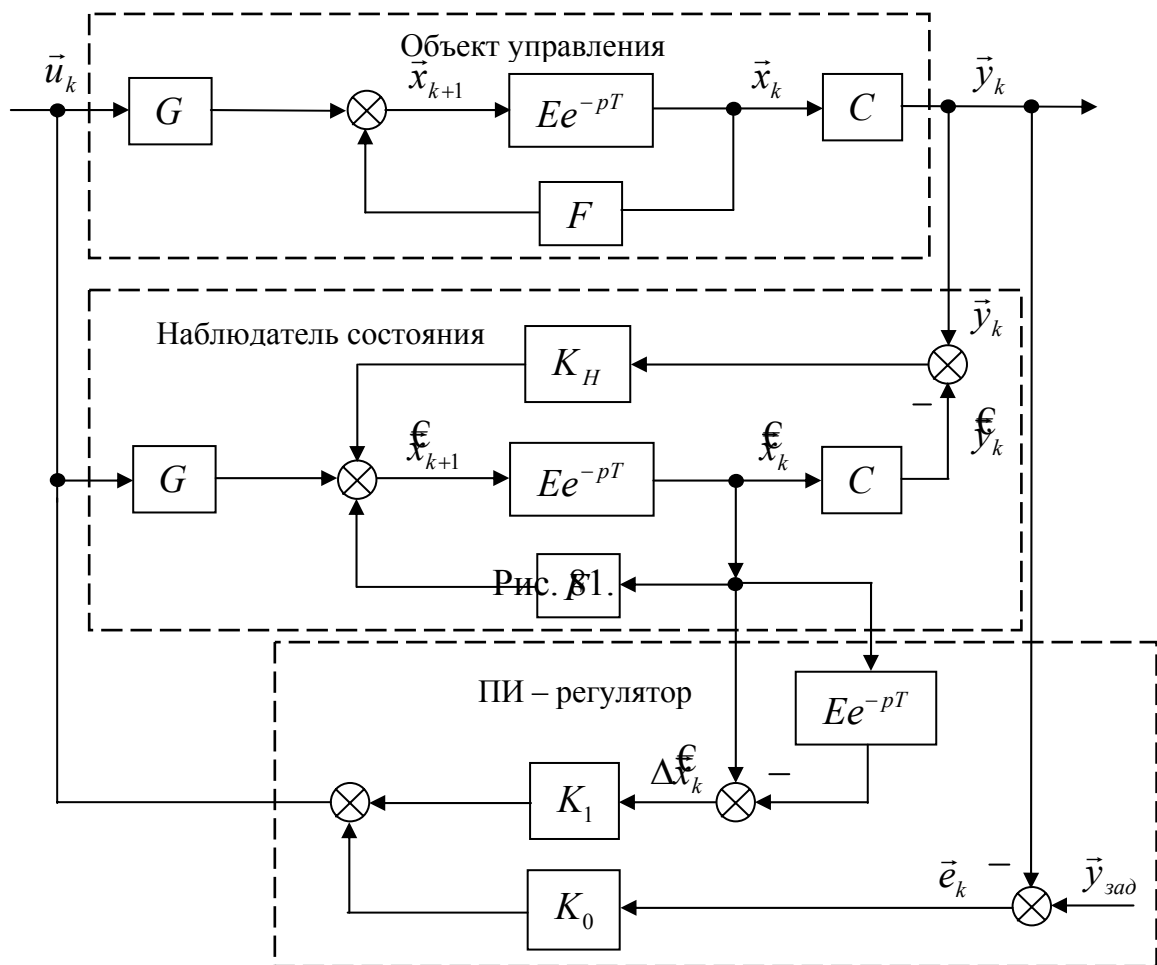
для эквивалентного объекта управления

$$\vec{x}_{k+1}^\ominus = F^\ominus \vec{x}_k^\ominus + G\vec{u}_k^\ominus.$$

Решая эквивалентную задачу с помощью соотношений (289), (288), определяем матрицу коэффициентов передачи эквивалентного регулятора K_p^\ominus и, следовательно, искомую матрицу коэффициентов передачи наблюдателя

$$K_H = -K_p^\ominus.$$

Структурная схема многомерной дискретной АСР с ПИ – регулятором состояния – выхода и наблюдателем состояния приведена на рис. 81.



9. Многомерные дискретные АСР с прогнозом регулируемых переменных

Перспективным способом решения дискретной задачи оптимального управления, рассмотренной в предыдущем разделе, является сведение её к последовательности задач математического программирования. Этот подход, в частности, позволяет:

- упростить вычислительную процедуру (вместо моделей объекта управления в пространстве состояния можно использовать более простые модели «вход – выход»; не требуется решать уравнение Риккати);
- учитывать в явном виде ограничения на управления;
- варьировать длительность произвольного шага управления.

9.1. Структурная схема системы с прогнозом регулируемых переменных и его минимизацией [15]

Структурная схема описываемой системы приведена на рис. 82. Математическая модель многомерного объекта управления представлена в ней $(m \times n)$ – матрицей переходных функций $H(t)$, связывающей n – вектор регулируемых переменных \vec{y}_t с m – вектором кусочно–постоянных управлений \vec{u}_t .

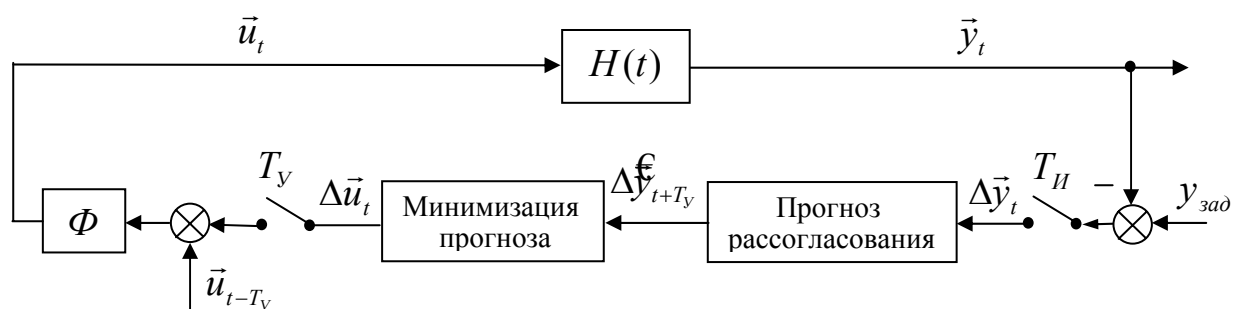


Рис. 82.

Регулируемые переменные измеряются дискретно с интервалом дискретности T_H . Управления представляют собой кусочно–постоянные функции времени с периодом постоянства управления T_V . Предполагается, что $T_V \gg T_H$.

Управляющее устройство системы включает два алгоритмических блока. В начале каждого шага управления первый блок осуществляет прогноз вектора рассогласования $\Delta \vec{u}_t$ между заданными и текущими значениями регулируемых переменных на величину текущего шага управления T_V . Второй блок осуществляет расчет изменения вектора управлений на данном шаге $\Delta \vec{u}_t$, минимизирующего прогноз вектора рассогласования $\Delta \vec{u}_{t+T_V}$.

На изменение вектора управлений на каждом шаге могут быть наложены ограничения:

$$\Delta \vec{u}_t^- < \Delta \vec{u}_t < \Delta \vec{u}_t^+ \quad (302)$$

Итак, допустимое изменение вектора управлений на каждом шаге определяется в результате решения двух задач: прогноза рассогласования регулируемых переменных на текущий шаг управления и минимизации прогноза рассогласования в общем случае при наличии ограничений (302).

Для получения результирующего управления на текущем шаге, найденное изменение вектора управлений складывается со значением вектора управлений на предыдущем шаге:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_{t-T_V} + \Delta \vec{u}_t.$$

Найденное управление поддерживается неизменным до начала следующего шага управления фиксирующим элементом Φ .

9.2. Прогнозирование рассогласования [15, 16]

Прогноз рассогласования $\Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}$ может быть представлен суммой прогноза свободного (неуправляемого) рассогласования $\Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}^{св}$, вызванного действием на объект управления неконтролируемых возмущений, а также предыдущих управлений, и прогноза управляемого рассогласования $\Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}^{ynp}$, обусловленного ступенчатым изменением управления в начале текущего шага управления:

$$\Delta \mathfrak{F}_{t+T_y} = \Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}^{св} + \Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}^{ynp} \quad (303)$$

Для прогноза свободного рассогласования регулируемых переменных применяются методы прогнозирования временных рядов. В частности, для получения краткосрочного прогноза в качестве прогнозируемой функции могут использоваться модели тренда временных рядов, для описания которого используют линейные или линеаризуемые относительно параметров функции. Например, в случае линейной прогнозирующей функции расчетные соотношения для прогноза, определяемые методом наименьших квадратов имеют вид:

$$\Delta \mathfrak{F}_{t+T_y}^{св} = b_0(t) + b_1(t)T_y$$

$$b_0(t) = \frac{2}{n(n+1)} \left[(2n-1) \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \bar{y}_{t-i} - 3 \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \Delta \bar{y}_{t-i} \right],$$

$$b_1(t) = \frac{6}{n(n+1)} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \Delta \bar{y}_{t-i} - \frac{2}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \Delta \bar{y}_{t-i} \right],$$

где n – «память» прогнозатора – число членов временного ряда прогнозируемой переменной, используемых для прогнозирования.

Для повышения точности прогноза предыдущие наблюдения временного ряда разбиваются на обучающий и экзаменующий временные

ряды. Обучающий ряд используется для определения параметров прогнозирующей функции. Оптимизация прогноза достигается поиском оптимальной длины обучающего ряда (основания прогноза), минимизирующей ошибку прогноза на экзаменующем ряду при заданном времени (горизонте) прогнозирования.

В более совершенных алгоритмах для повышения точности прогноза используют ансамбль прогнозирующих функций, сформированный по результатам предварительных исследований. При этом результирующий (комбинированный) прогноз находят как линейную комбинацию частных прогнозов по отдельным прогнозирующим функциям.

Прогноз управляемого рассогласования определяется по выражению

$$\Delta \mathbf{y}_{t+T_y}^{ypr} = H(T_y) \Delta \bar{\mathbf{u}}_t \quad (304)$$

9.3. Минимизация прогноза рассогласования [15]

В частном случае при отсутствии ограничений на управления (302) задача минимизации прогноза рассогласования может быть решена в явном виде. Максимальная точность регулирования достигается, если управления изменяются на каждом шаге так, чтобы обеспечить нулевое значение прогноза рассогласования:

$$\Delta \mathbf{y}_{t+T_y}^{ce} = 0. \quad (305)$$

Подставляя в (305) выражения (303), (304) и разрешая полученное матричное уравнение, получаем выражения для оптимального управления при отсутствии ограничений:

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_t = \begin{cases} -[H(T_y)^T H(T_y)]^{-1} H(T_y)^T \Delta \mathbf{y}_{t+T_y}^{ce} & \text{при } t < n \\ -H(T_y)^{-1} \Delta \mathbf{y}_{t+T_y}^{ce} & \text{при } t = n \\ -H(T_y)^T [H(T_y) H(T_y)^T]^{-1} \Delta \mathbf{y}_{t+T_y}^{ce} & \text{при } t > n \end{cases}$$

Решения при $m \neq n$ (число управлений не равно числу регулируемых переменных) получены с использованием понятия обобщенной обратной матрицы и обладают минимальной нормой.

При наличии ограничений (302) решения уравнения (305) в общем случае не существует (физически это означает, что при наложенных ограничениях нельзя добиться точной компенсации прогноза рассогласования). Поэтому от задачи компенсации прогноза рассогласования в общем случае следует перейти к задаче его минимизации:

$$\|\Delta \vec{y}_{t+T_y}\| \rightarrow \min_{\Delta u_t}. \quad (306)$$

К сожалению, задача (306) с ограничениями (302) допускает только алгоритмическое решение. Одной из возможных постановок является решение задачи (306) как задачи с квадратичным критерием качества:

$$\Delta \vec{y}_{t+T_y}^T Q \Delta \vec{y}_{t+T_y} + \Delta \vec{u}_t^T R \Delta \vec{u}_t \rightarrow \min_{\Delta u_t}, \quad (307)$$

где Q и R – соответственно $(n \times n)$ – и $(m \times m)$ – диагональные весовые матрицы.

Первое слагаемое вводится в критерий задачи (307) для минимизации прогноза рассогласования, а второе – для минимизации изменения вектора управления.

Подставляя в (307) выражения (303), (304) и вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \Delta \vec{u}_t - \Delta \vec{u}_t^-; \quad \vec{b} = \Delta \vec{u}_t^+ - \Delta \vec{u}_t^-; \\ D &= H(T_y)^T Q H(T_y) + R \\ \vec{c} &= 2 \left[H(T_y)^T Q \Delta \vec{y}_{t+T_y}^{ce} + D \Delta \vec{u}_t \right] \end{aligned} \right\},$$

можно преобразовать задачу (307) с ограничениями (302) к виду:

$$\left. \begin{aligned} \vec{c}^T \vec{v} + \vec{v}^T D \vec{v} &\rightarrow \min_v \\ 0 \leq \vec{v} \leq \vec{b} & \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Задача (308) есть частный случай задачи квадратичного программирования, в которой требуется отыскать экстремум квадратичной целевой функции многих переменных при линейных ограничениях-неравенствах и условиях неотрицательности переменных:

$$\left. \begin{aligned} \min Z = \bar{c}^T \bar{x} + \bar{x}^T D \bar{x} \\ A \bar{x} \leq \bar{b}; \quad \bar{x} \geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (309)$$

где \bar{x} - n -вектор переменных задачи;

\bar{c} - n -вектор коэффициентов линейных членов целевой функции Z ;

D - $(n \times n)$ - симметрическая матрица коэффициентов квадратичных членов целевой функции;

A - $(m \times n)$ - матрица коэффициентов ограничений-неравенств;

\bar{b} - m -вектор свободных членов ограничений.

9.4. Сведение задачи квадратичного программирования к задаче о линейной дополнителности [17, 14]

Одним из широко распространённых в настоящее время способов решения задачи квадратичного программирования является сведение этой задачи к задаче о линейной дополнителности.

Задачей о линейной дополнителности называется задача об отыскании векторов \bar{w} и \bar{z} таких, что выполняются условия:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= M \bar{z} + \bar{q} \\ \bar{w}^T \bar{z} &= 0 \\ \bar{w}, \bar{z} &\geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad \begin{array}{l} (310.a) \\ (310.б) \\ (310.в) \end{array}$$

Условия (310.a) есть ограничения-равенства. Входящие в них p -векторы \bar{w} , \bar{z} , \bar{q} называются соответственно векторами базисных, свободных переменных и свободных членов ограничений.

M - $(p \times p)$ - квадратная матрица коэффициентов ограничений.

Свободные переменные всегда равны нулю. Базисные переменные положительны. Значения базисных переменных при равенстве нулю свободных называют базисным решением системы (310.a).

Условие (310.б) называют условием дополняющей нежёсткости. Согласно этому условию произведение любой пары переменных w_i и z_i должно быть равно нулю, для чего одна из этих переменных всегда должна быть равна нулю, а вторая больше нуля. Поэтому, если не равная нулю переменная w_i входит в число базисных, то равная нулю переменная z_i должна быть свободной и наоборот. Переменные w_i, z_i называются парой взаимодополняющих (дополнительных) переменных.

Условия (310.в) называются условиями неотрицательности переменных.

Для того чтобы свести задачу квадратичного программирования (309) к задаче о линейной дополнителности (310), запишем необходимые условия экстремума (условия Куна-Таккера) для задачи (309):

$$\left. \begin{aligned} \vec{\lambda}_2 &= 2D\vec{x} + A^T \vec{\lambda}_1 + \vec{c}, \\ \vec{s} &= -A\vec{x} + \vec{b}, \\ \vec{\lambda}_2^T \vec{x} &= 0, \\ \vec{s}^T \vec{\lambda}_1 &= 0, \\ \vec{x}, \vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{s} &\geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (311)$$

где $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2$ - соответственно m - и n - векторы неопределённых множителей Лагранжа для ограничений-неравенств и условий неотрицательности переменных в задаче квадратичного программирования,

\vec{s} - m -вектор дополнительных неотрицательных переменных, вводимых в ограничения-неравенства для преобразования их в равенства.

Вводя обозначения

$$\vec{w} = \left\| \begin{array}{c} \vec{\lambda}_2 \\ \vec{s} \end{array} \right\|; \quad \vec{z} = \left\| \begin{array}{c} \vec{x} \\ \vec{\lambda}_1 \end{array} \right\|; \quad M = \left\| \begin{array}{c|c} 2D & A^T \\ \hline - & - \\ -A & 0 \end{array} \right\|; \quad \vec{q} = \left\| \begin{array}{c} \vec{c} \\ \vec{b} \end{array} \right\|,$$

можем записать (311) в форме (310) и тем самым свести задачу квадратичного программирования к задаче о линейной дополнителности.

9.5. Решение задачи о линейной дополнителности методом Лемке

При $\vec{q} \geq 0$ задача (310) имеет тривиальное базисное решение: $\vec{w} = \vec{q}$. Если же вектор \vec{q} содержит хотя бы один отрицательный элемент, начальное базисное решение оказывается недопустимым, т.к. нарушается условие (310.в). Для получения допустимого решения введём во все уравнения системы (310.а) искусственную положительную переменную z_0 , равную максимальному абсолютному значению среди всех отрицательных элементов вектора \vec{q} . Пусть для определённости

$$\min_i q_i = q_s,$$

тогда

$$z_0 = -q_s.$$

При этом задача (310) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} - M \cdot \vec{z} - \vec{e} \cdot z_0 &= \vec{q}, & (312.a) \\ w_i \cdot z_i &= 0; \quad i = \overline{1, p}, & (312.б) \\ w_i, z_i, z_0 &\geq 0 & (312.в) \end{aligned} \right\},$$

где \vec{e} - единичный вектор.

Для решения задачи (312) к системе ограничений-неравенств (312.а) применяют последовательность симплексных преобразований. Каждое симплексное преобразование позволяет поменять местами базисную и свободную переменные, т.е. базисную переменную вывести из базиса и превратить её в свободную, а свободную переменную ввести на её место в базис.

Симплексное преобразование легко формализовать при использовании симплексных таблиц. Начальная симплексная таблица для задачи (312) имеет вид (таблица 9)

Таблица 9.

Базис	w_1	...	w_s	...	w_ℓ	...	w_p	z_1	...	z_r	...	z_p	z_0	q
w_1	1							$-m_{11}$		$-m_{1r}$		$-m_{1p}$	-1	q_1
\vdots														
w_s			1					$-m_{s1}$		$-m_{sr}$		$-m_{sp}$	-1	q_s
\vdots														
w_ℓ					1			$-m_{\ell 1}$		$-m_{\ell r}$		$-m_{\ell p}$	-1	q_ℓ
\vdots														
w_p							1	$-m_{p1}$		$-m_{pr}$		$-m_{pp}$	-1	q_p

В первом столбце таблицы записаны базисные переменные. Остальные столбцы соответствуют базисным, свободным переменным и искусственной переменной. Последний столбец содержит свободные члены ограничений-неравенств. На пересечении строк и столбцов, соответствующих базисным переменным, ставятся единицы, остальные элементы этих столбцов равны нулю. В столбцы, соответствующие свободным переменным, вписываются коэффициенты ограничений. Элементы столбца, соответствующего искусственной переменной, полагаются равными минус единице.

Для того, чтобы свободную переменную z_r ввести в базис, а базисную переменную w_ℓ вывести из базиса, необходимо осуществить симплексное преобразование относительно элемента $m_{\ell r}$, находящегося на пересечении строки w_ℓ и столбца z_r . Этот элемент и порождающие его строка и столбец называются разрешающими.

В результате симплексного преобразования получаем новые значения коэффициентов и свободных членов ограничений (312.а), определяемые по выражениям.

$$m_{ij}^{\Pi} = m_{ij} - \frac{m_{ir}}{m_{er}} m_{ej}; \quad q_i^{\Pi} = q_i - \frac{m_{ir}}{m_{er}} q_e$$

(индексом « Π » снабжены значения коэффициентов и свободных членов ограничений после симплексного преобразования).

На первом шаге в базис вводится искусственная переменная z_0 вместо базисной переменной w_s (разрешающий элемент обозначен в таблице 9 кружком). После первого симплексного преобразования симплексная таблица принимает вид (таблица 10).

Таблица 10.

Базис	w_1	...	w_s	...	w_p	z_1	...	z_s	...	z_p	z_0	q
w_1	1		-1			m_{11}^{Π}		m_{1s}^{Π}		m_{1p}^{Π}		q_1^{Π}
⋮												
z_0			-1			m_{s1}^{Π}		m_{ss}^{Π}		m_{sp}^{Π}	1	q_s^{Π}
⋮												
w_k			-1			m_{k1}^{Π}		m_{ks}^{Π}		m_{kp}^{Π}		q_k^{Π}
⋮												
w_p			-1		1	m_{p1}^{Π}		m_{ps}^{Π}		m_{pp}^{Π}		q_p^{Π}

В результате начального симплексного преобразования базисная переменная w_s превратилась в свободную, имеющую нулевое значение. В соответствии с условием дополняющей нежёсткости (312.б) дополнительная для переменной w_s переменная z_s должна иметь ненулевое значение, поэтому на втором шаге эту переменную следует ввести в базис. Таким образом, получаем простое правило выбора переменной, вводимой

в базис (правило выбора разрешающего столбца): на каждом шаге в базис вводится переменная, дополнительная к базисной переменной, выведенной из базиса на предыдущем шаге.

В качестве переменной, выводимой из базиса, выбирается переменная w_k , для которой отношение свободного члена ограничения q_k к коэффициенту ограничения в разрешающем столбце m_{ks} минимально для всех положительных коэффициентов (правило выбора разрешающей строки):

$$\frac{q_k}{m_{ks}} = \min_i \left(\frac{q_i}{m_{is}}, \forall m_{is} > 0 \right).$$

На третьем шаге согласно правилу выбора разрешающего столбца в базис вводится переменная z_k и т.д.

Решение достигается тогда, когда при очередном симплексном преобразовании оказывается, что $k=s$, т.е. номер разрешающей строки становится равным номеру строки с максимальным по модулю отрицательным свободным членом ограничений (условие последнего перед остановом симплексного преобразования). При этом переменная z_0 выводится из базиса, принимает нулевое значение, что и свидетельствует о нахождении допустимого решения задачи о линейной дополнительной.

10. Автоматизация типовых технологических процессов [3, 18]

10.1. Регулирование основных параметров технологических процессов

Регулирование расхода жидкости или газа

Объектом регулирования является трубопровод. Скорость жидкости в трубопроводе определяется уравнением Бернулли:

$$v = c \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} = c \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}, \quad (313)$$

где v – скорость жидкости,

$c < 1$ – коэффициент расхода,

g – ускорение силы тяжести,

$\gamma, \rho = \gamma/g$ – соответственно удельный вес и плотность жидкости,

Δp – перепад давления на трубопроводе.

Объёмный расход жидкости находим умножая скорость v на площадь сечения трубопровода f :

$$Q = vf \quad (314)$$

Уравнение статики трубопровода (баланс движущей силы потока $F_{\text{дв}}$ и силы сопротивления трубопровода $F_{\text{сопр}}$):

$$F_{\text{дв}} = F_{\text{сопр}},$$

или с учётом (313), (314)

$$f\Delta p = \frac{Q^2 \rho}{2fc^2}. \quad (315)$$

Из уравнения (315) можно найти коэффициент расхода

$$c = \frac{Q}{f} \sqrt{\frac{\rho}{2\Delta p}}.$$

Если приложенная к потоку сила $F_{\text{дв}}$ превышает гидродинамическое сопротивление трубопровода, возникает ускорение потока dv/dt и, вместо уравнения статики, получаем уравнение

$$m \frac{dv}{dt} + F_{\text{сопр}} = F_{\text{дв}},$$

или с учётом (315), (314)

$$\frac{m}{f} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q^2 \rho}{2fc^2} = f\Delta p,$$

где $m = V\rho$ – масса жидкости в трубопроводе,

$V = Lf$ – объём трубопровода,

L – длина трубопровода.

Подставляя в уравнение динамики выражение для массы, имеем:

$$L\rho \frac{dQ}{dt} + \frac{Q\rho}{2fc^2} Q = f\Delta p.$$

Наконец, приводя последнее уравнение к стандартному виду для инерционного звена первого порядка:

$$T \frac{dQ}{dt} + Q = k\Delta p$$

(T – постоянная времени, k – статический коэффициент передачи по каналу $\Delta p \rightarrow Q$), окончательно получаем:

$$T = \frac{2Lfc^2}{Q}; \quad k = \frac{2f^2c^2}{Q\rho}.$$

Как видим из выражения для постоянной времени, инерционность трубопровода пропорциональна его длине, площади сечения и обратно пропорциональна расходу жидкости.

Например, для $L=60$ м, диаметра трубопровода $D=28$ мм ($f=0,00062$ м²), $Q=40$ л/мин ($0,00066$ м³/с), $\Delta p=1,3$ кгс/см², $\gamma=1000$ кгс/м³, $g=9,8$ м/с² постоянная времени трубопровода $T=0,5$ с.

На практике находят применение три способа регулирования расхода.

1) Дросселирование потока на линии нагнетания (рис. 83)

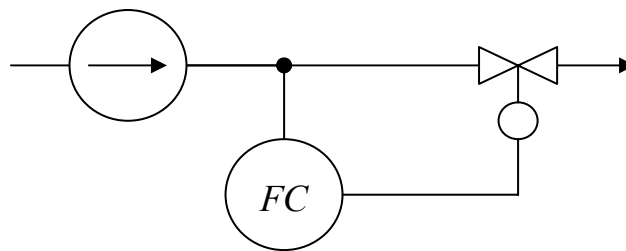


Рис. 83.

На рис. 83 обозначено:



- насос (компрессор),

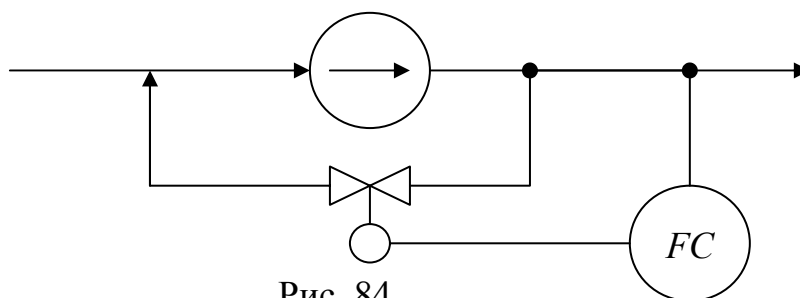


- рабочий орган с исполнительным механизмом,

FC - регулятор (C) расхода (F).

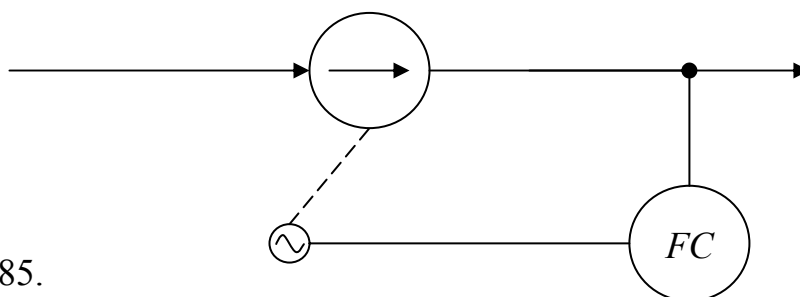
Данный способ является наиболее простым. Поток дросселируется именно на линии нагнетания, т.к. дросселирование потока на линии всасывания может привести к кавитации (срыву) потока и разрушению насоса.

2) Байпасирование – перепуск части потока из основного трубопровода в обводную линию (рис. 84).



Этот способ применяется для насосов с большим внутренним сопротивлением, производительность которых мало зависит от проходного сечения линии нагнетания (например, поршневых, шестерёнчатых насосов). Для таких насосов закрытие регулирующего органа на линии нагнетания приводит к повышению давления в трубопроводе, что может привести к его разрыву.

3). Изменение напора в трубопроводе изменением числа оборотов вала насоса (рис. 85).



Здесь $\textcircled{\sim}$ - регулируемый электропривод скорости вращения вала насоса.

Данный способ позволяет исключить потери давления на регулирующем органе. Однако этот способ технически более сложен, т.к. требует применения регулируемого электропривода двигателя насоса.

Регулирование давления

Объект регулирования – ёмкость с газом. Поведение идеальных газов описывается уравнением Менделеева-Клайперона:

$$p \cdot V = M \cdot R \cdot T_a, \quad (316)$$

где p – давление,

V – объём,

$M = m/\mu$ – число молей газа,

m – масса газа,

μ – грамм/моль – число граммов равное молекулярному весу,

R – универсальная газовая постоянная, равная работе, совершаемой единицей массы идеального газа при изобарном нагревании его на один градус,

T_a – абсолютная температура.

Рассмотрим ёмкость с идеальным перемешиванием (Рис. 86):

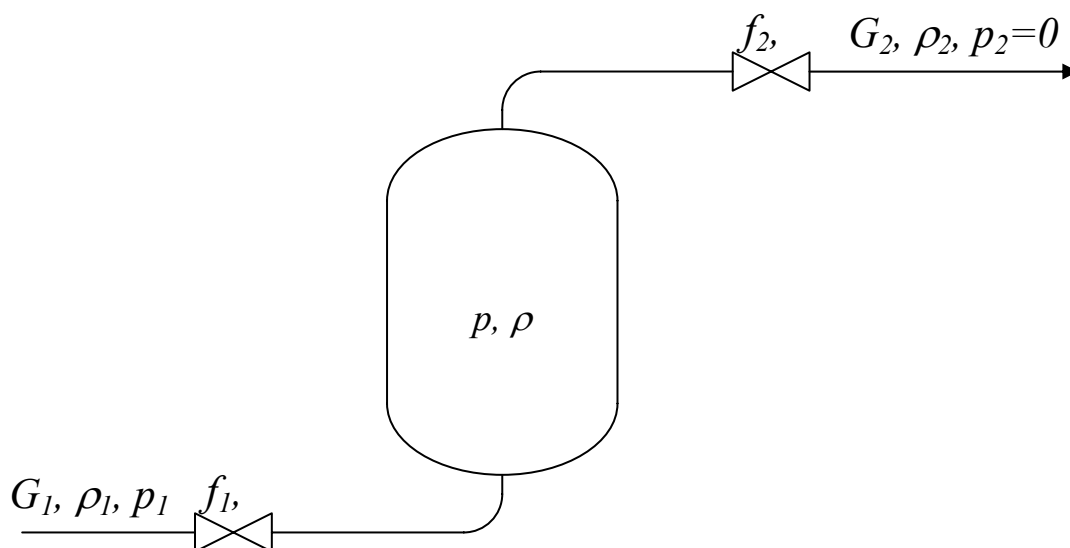


Рис. 86.

Здесь G_1, G_2 – массовые расходы на линиях притока и расхода;
 f_1, f_2 – проходные сечения клапанов,
 p_1, p_2, p – избыточные давления на входе, выходе и внутри ёмкости
(считаем, что выходное давление p_2 равно атмосферному);

ρ_1, ρ_2, ρ – плотности газа на входе, выходе и внутри ёмкости (в силу гипотезы об идеальном перемешивании $\rho_2 = \rho$).

Уравнение статики ёмкости:

$$G_1 = G_2 .$$

Уравнение динамики:

$$\frac{dm}{dt} = G_1 - G_2 ,$$

или в приращениях:

$$\frac{d\Delta m}{dt} = \Delta G_1 - \Delta G_2 . \quad (317)$$

Из уравнения (316)

$$m = \frac{pV\mu}{RT_a} .$$

При $V, T_a = const$ имеем

$$\frac{d\Delta m}{dt} = \frac{V\mu}{RT_a} \frac{d\Delta p}{dt} . \quad (318)$$

Согласно уравнениям (313), (314) объёмный расход газа равен

$$Q = cf \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} ,$$

следовательно, массовый расход определяется выражением

$$G = Q\rho = cf \sqrt{2\rho\Delta p} .$$

В частности, расход на выходе ёмкости задаётся соотношением:

$$G_2 = c_2 f_2 \sqrt{2 p \rho_2} \quad (319)$$

(поскольку $p_2 = 0$).

Находя $\rho_2 = \rho$ из уравнения Менделеева-Клайперона (316)

$$\rho_2 = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT_a},$$

подставляя последнее выражение в (319) и линеаризуя результирующее соотношение, находим

$$\Delta G_2 = c_2 f_2 \sqrt{2 \frac{\mu}{RT_a}} \Delta p. \quad (320)$$

Подставляя (318) и (320) в (317), имеем

$$\frac{V\mu}{RT_a} \frac{d\Delta p}{dt} + c_2 f_2 \sqrt{\frac{2\mu}{RT_a}} \Delta p = \Delta G_1,$$

или в стандартной форме

$$T \frac{d\Delta p}{dt} + \Delta p = k \Delta G_1,$$

где $T = \frac{V}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{\mu}{2RT_a}}; \quad k = \frac{1}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{RT_a}{2\mu}}.$

Как видим, инерционность ёмкости пропорциональна её объёму, обратно пропорциональна проходному сечению f_2 и корню квадратному из абсолютной температуры.

Например, при $V=50 \text{ м}^3$, $T_a=20 \text{ }^\circ\text{C}$, $R=150 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, $p=1000 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$, $f_2=0,002 \text{ м}^2$, $C_2=0,75$ параметры модели объекта имеют значения: $T=115\text{с}$, $k=10^5 \frac{\text{Н}/\text{м}^2}{\text{кг}/\text{с}}.$

Способы регулирования давления аналогичны способам регулирования уровня жидкости (см. ниже). При наличии в технологической установке нескольких сообщающихся аппаратов достаточно стабилизировать давление в одном из них (как правило, в конечном), а в остальных оно устанавливается само в соответствии гидравлическим сопротивлением линии аппаратов.

Регулирование уровня жидкости

Объект регулирования – ёмкость с идеальным перемешиванием жидкости (рис. 87).

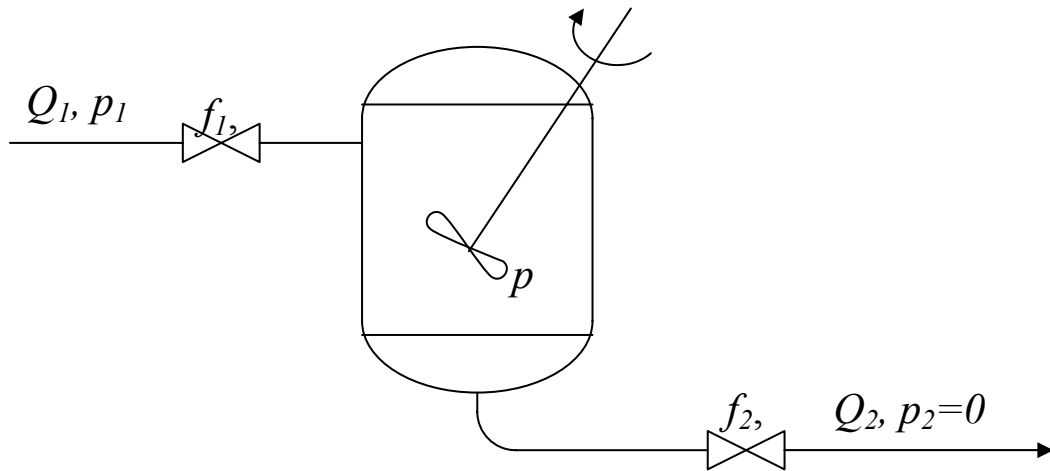


Рис. 87.

Уравнение статики:

$$Q_1 = Q_2.$$

Уравнение динамики в приращениях:

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta Q_1 - \Delta Q_2, \quad (321)$$

где $V = SH$ - объём жидкости.

При $S = const$

$$\frac{d\Delta V}{dt} = S \frac{d\Delta H}{dt}. \quad (322)$$

Расход Q_2 по-прежнему определяется уравнением Бернулли:

$$Q_2 = c_2 f_2 \sqrt{2 \frac{p - p_2}{\rho}},$$

или при $p_2 = 0$ и $p = \rho g H$:

$$Q_2 = c_2 f_2 \sqrt{2 g H},$$

следовательно,

$$\Delta Q_2 = c_2 f_2 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \Delta H. \quad (323)$$

(Индексом «0» помечены значения переменных, в окрестности которых осуществляется линеаризация нелинейных характеристик).

Подставляя (322), (323) в (321), имеем

$$S \frac{d\Delta H}{dt} + c_2 f_2 \sqrt{\frac{g}{2H_0}} \Delta H = \Delta Q_1,$$

или в стандартном виде:

$$T \frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = k \Delta Q_1,$$

$$\text{где } T = \frac{S}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}; \quad k = \frac{1}{c_2 f_2} \sqrt{\frac{2H_0}{g}}.$$

Как видим, постоянная времени пропорциональна площади сечения, корню квадратному из уровня и обратно пропорциональна сечению сливного клапана.

Например, для ёмкости с характеристиками $S=8 \text{ м}^2$, $f_2=0,002 \text{ м}^2$, $c_2=0,6$, $H_0=2 \text{ м}$ параметры модели равны: $T=4000\text{с} \approx 1,1 \text{ час}$, $k=500 \frac{\text{м}}{\text{м}^3/\text{с}}$.

На практике находят применение следующие способы регулирования уровня.

1) Изменением расхода жидкости на входе в аппарат – регулирование на притоке (рис. 88)

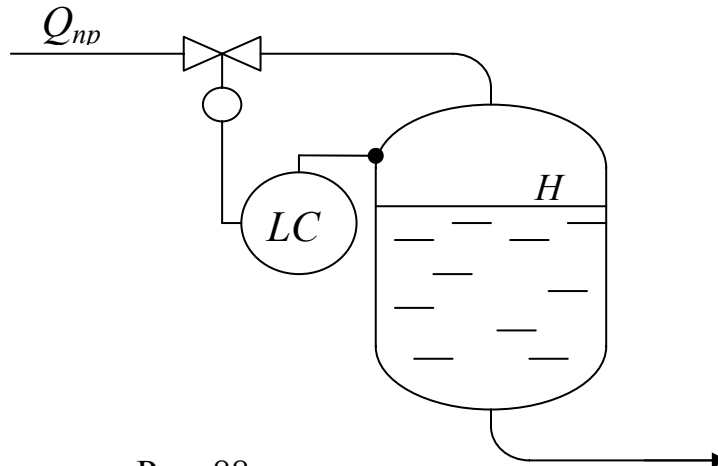


Рис. 88.

Здесь LC – регулятор уровня.

2) Изменением расхода на выходе аппарата – регулирование на стоке (рис. 89).

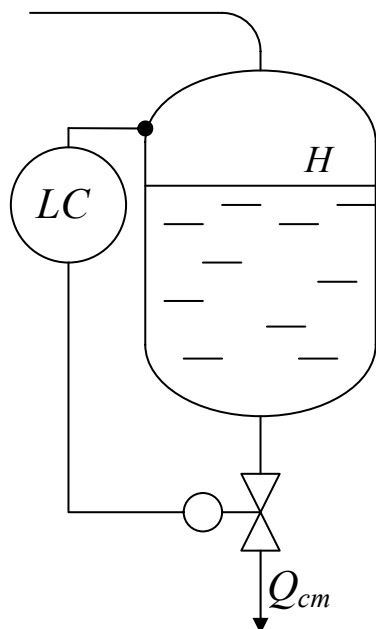


Рис. 89.

Очевидно, что указанные два способа применимы, когда по условиям работы аппарата в технологической схеме имеется возможность изменения расходов на притоке или стоке.

3) Соотношением расходов на притоке и стоке (рис. 90)

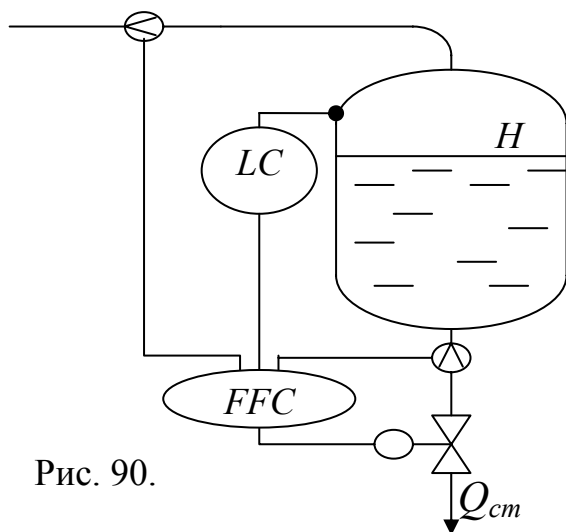


Рис. 90.

В данном случае для регулирования уровня используется каскадная АСР с промежуточной величиной – соотношением расходов на притоке и стоке (*FFC* – стабилизирующий регулятор соотношения расходов). Каскадная АСР позволяет повысить качество регулирования уровня по сравнению с одноконтурными.

В случае, когда гидродинамические процессы в аппарате сопровождаются тепловыми с фазовыми превращениями (жидкости в пар), можно регулировать уровень изменением подачи теплоносителя.

Например, АСР уровня жидкости в испарителе (рис. 91). Регулирующее воздействие – подача теплоносителя в змеевик испарителя.

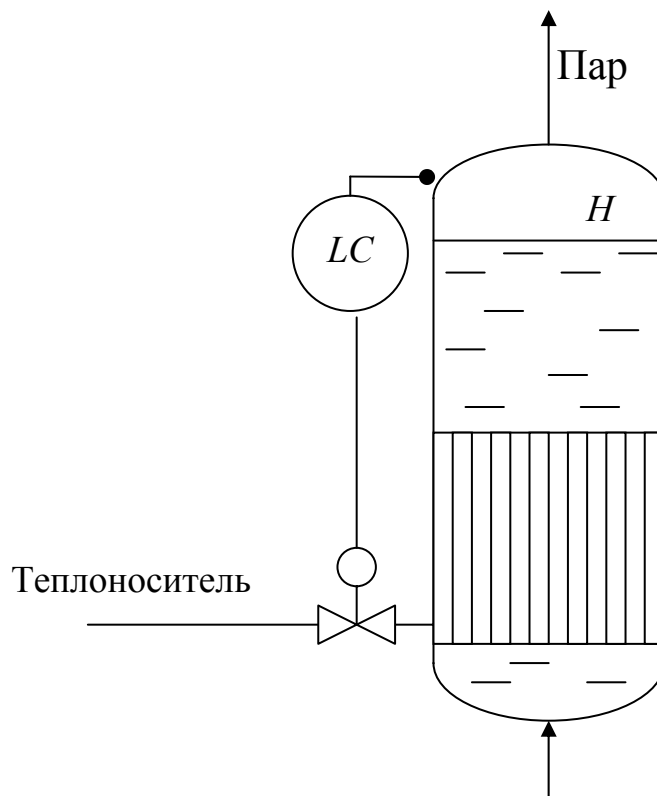


Рис. 91.

Регулирование температуры

Рассмотрим два примера построения моделей тепловых объектов.

Экзотермический реактор с рубашкой (рис. 92)

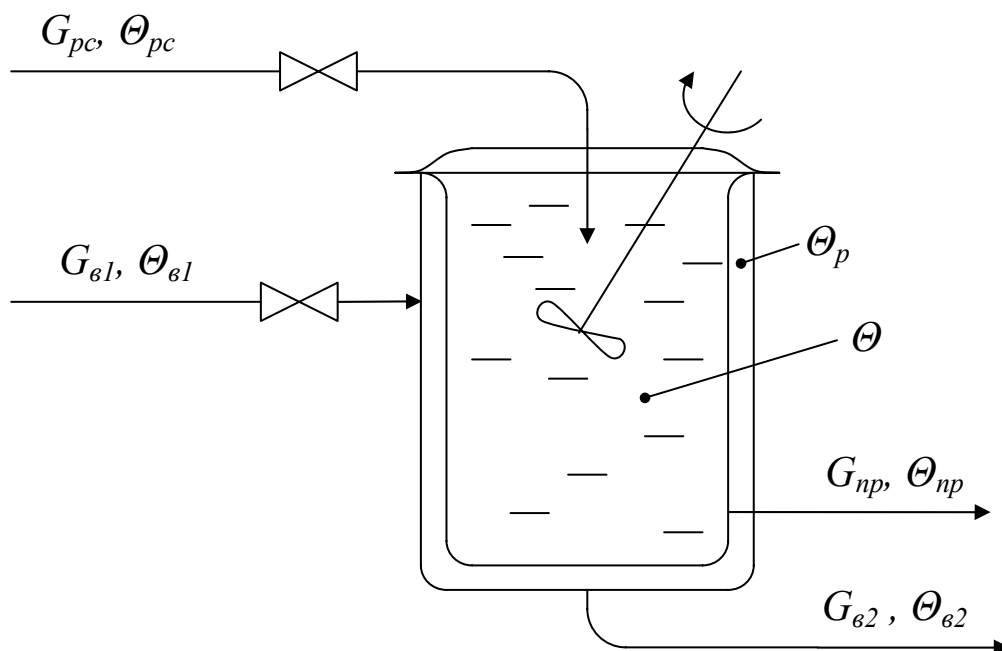


Рис. 92.

Обозначения:

G_{pc} , G_{np} – массовые расходы реакционной смеси и продукта,

G_{ϵ_1} , G_{ϵ_2} – массовые расходы охлаждающей воды на входе и на выходе рубашки,

Θ_{pc} , Θ_{np} , Θ_{ϵ_1} , Θ_{ϵ_2} , Θ , Θ_p – температуры соответственно реакционной смеси, продукта, воды на входе и выходе рубашки, в реакторе и рубашке.

Допущения:

1) В реакторе и рубашке идеальное перемешивание:

$$\Theta_{np} = \Theta; \Theta_{\epsilon_2} = \Theta_p.$$

2) Потери тепла в окружающую среду отсутствуют.

3) Тепловая ёмкость стенки между реактором и рубашкой пренебрежимо мала.

4) Не учитывается динамика материальных потоков, т.е.

$$G_{p.c} = G_{np}; G_{\epsilon_1} = G_{\epsilon_2} = G_{\epsilon}.$$

5) Не учитывается тепловой эффект перемешивания.

6) Температура реакционной смеси и воды на входе в рубашку постоянны:

$$\Theta_{p.c} = const; \quad \Theta_{e_1} = const.$$

С учётом допущения 3) объект является двухёмкостным.

Уравнение теплового баланса реактора:

$$\rho_{pc} V_{pc} c_{pc} \frac{d\Theta}{dt} = G_{pc} c_{pc} (\Theta_{pc} - \Theta) + \frac{R_0}{\mu} G_{pc} - \alpha s (\Theta - \Theta_p). \quad (324)$$

Уравнение теплового баланса рубашки:

$$\rho_e V_e c_e \frac{d\Theta_p}{dt} = \alpha s (\Theta - \Theta_p) - G_e c_e (\Theta_p - \Theta_{e_1}), \quad (325)$$

где ρ_{pc}, ρ_e – плотности реакционной смеси и воды,

V_{pc}, V_e – объёмы реакционной зоны реактора и рубашки,

c_{pc}, c_e – удельные теплоёмкости реакционной смеси и воды,

R_0 – количество тепла выделяемое в процессе реакции одного моля реакционной смеси,

μ – молярный вес реакционной смеси,

α – коэффициент теплопередачи через стенку между реактором и рубашкой,

s – поверхность теплопередачи.

Записывая уравнения (324), (325) в приращениях и приводя их к стандартному виду, получаем систему двух уравнений первого порядка, описывающих рассматриваемый объект:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{d\Delta\Theta}{dt} + \Delta\Theta &= K_1 \Delta G_{pc} + K_2 \Delta\Theta_p \\ T_2 \frac{d\Delta\Theta_p}{dt} + \Delta\Theta_p &= K_3 \Delta\Theta + K_y \Delta G_e \end{aligned} \right\}, \quad (326)$$

где постоянные времени и коэффициенты передачи определяются соотношениями:

$$T_1 = \frac{\rho_{pc} V_{pc} c_{pc}}{G_{pc,0} c_{pc} + \alpha s}; \quad T_2 = \frac{\rho_e V_e c_e}{G_{e,0} c_e + \alpha s};$$

$$K_1 = \frac{c_{pc}(\Theta_{pc} - \Theta_0) + R_0/\mu}{G_{pc,0}c_{pc} + \alpha s}; \quad K_2 = \frac{\alpha s}{G_{pc,0}c_{pc} + \alpha s};$$

$$K_3 = \frac{\alpha s}{G_{e,0}c_e + \alpha s}; \quad K_4 = -\frac{c_e(\Theta_{p,0} - \Theta_{e1})}{G_{e,0}c_e + \alpha s}.$$

Передаточная функция объекта по каналу $\Delta G_e \rightarrow \Delta \Theta_p$:

$$W_1(p) = \frac{K_4}{T_2 p + 1}.$$

Передаточная функция объекта по каналу $\Delta \Theta_p \rightarrow \Delta \Theta$:

$$W_2(p) = \frac{K_2}{T_1 p + 1}.$$

Основной задачей регулирования теплового режима реактора является поддержание температуры в реакционной зоне реактора изменением расхода воды в рубашку. Передаточная функция объекта по каналу регулирующего воздействия $\Delta G_e \rightarrow \Delta \Theta$:

$$W_x(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{K_2 K_4}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Передаточная функция объекта по каналу возмущающего воздействия (колебаний расхода реакционной смеси) $\Delta G_{pc} \rightarrow \Delta \Theta$:

$$W_F(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}.$$

Теплообменник типа «труба в трубе»

Рассмотренные выше примеры относятся к объектам с сосредоточенными параметрами, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ниже рассматривается пример объекта с распределёнными параметрами, описываемого уравнением в частных производных.

Теплообменник представляет две концентрические трубы (рис. 93). Нагреваемая жидкость подаётся во внутреннюю трубу, теплоноситель – во внешнюю.

Обозначения:

x – координата (длина трубы),

D_e – диаметр внутренней части внутренней трубы,

δ - толщина стенки внутренней трубы,

$D_e + 2\delta$ - диаметр внешней части внутренней трубы,

D_n – внутренний диаметр наружной трубы,

$L_1 = \pi D_e$ – длина внешней окружности внутренней трубы,

$L_2 = \pi(D_e + 2\delta)$ – длина внешней окружности внутренней трубы,

$L_3 = \pi D_n$ – длина внутренней окружности наружной трубы,

$S_e = \pi D_e^2/4$ – сечение внутренней трубы,

$S_{cm} = \pi[(D_e + 2\delta)^2 - D_e^2]/4 = \pi\delta(D_e + \delta)$ – сечение стенки внутренней трубы,

$S_k = \pi[D_n^2 - (D_e + 2\delta)^2]/4$ – сечение кольца между внутренней и внешней трубами.

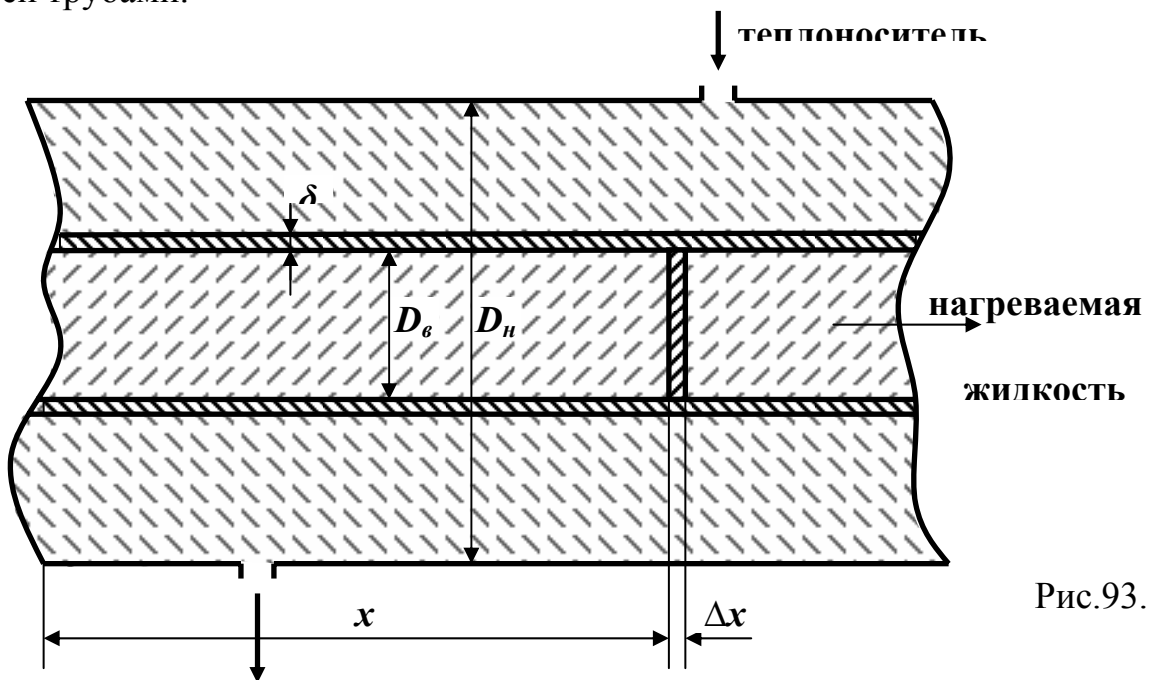


Рис.93.

Объект содержит три тепловые ёмкости: тепловая ёмкость нагреваемой жидкости во внутренней трубе, ёмкость стенки внутренней трубы, ёмкость нагревателя в межтрубном пространстве.

Для получения уравнения динамики изменения температуры материала во внутренней трубе рассмотрим элемент объёма жидкости внутренней трубы $S_6 \cdot \Delta x$ (Δx – приращение длины трубы относительно значения x).

Количество тепла в элементарном объёме $S_6 \Delta x$:

$$S_6 \Delta x \rho_{жс} c_{жс} \Theta_{жс} ,$$

где $\rho_{жс}$, $c_{жс}$, $\Theta_{жс}$ – соответственно плотность, удельная теплоёмкость и температура нагреваемой жидкости.

Поскольку температура жидкости изменяется как во времени, так и по длине теплообменника, общее изменение тепла, запасённого элементарным объёмом жидкости равно сумме изменений тепла за счёт приращений времени Δt и координаты Δx .

Приращение тепла в элементе $S_6 \Delta x$ за промежуток Δt :

$$\frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial t} S_6 \Delta x \rho_{жс} c_{жс} \Delta t . \quad (327)$$

Найдём приращение тепла в элементе объёма за счёт приращения координаты Δx . Поток тепла через сечение внутренней трубы S_6 за счёт перемещения жидкости:

$$\rho_{жс} c_{жс} \Theta_{жс} v_{жс} S_6 ,$$

где $v_{жс}$ – скорость движения жидкости.

Количество тепла через сечение S_6 за промежуток Δt :

$$\rho_{жс} c_{жс} \Theta_{жс} v_{жс} S_6 \Delta t .$$

Приращение тепла по длине теплообменника:

$$\frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial x} \rho_{жс} c_{жс} v_{жс} S_6 \Delta t \Delta x . \quad (328)$$

Сумма (327) и (328) есть общее приращение тепла в элементе объёма $S_6 \Delta x$ за промежуток времени Δt .

Тепло, отдаваемое стенкой трубы элементу $S_6 \Delta x$ за время Δt :

$$\alpha_1 L_1 (\Theta_{cm} - \Theta_{жс}) \Delta x \Delta t,$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от стенки трубы нагреваемому материалу,

$L_1 \Delta x$ – поверхность теплоотдачи,

Θ_{cm} – температура стенки.

Уравнение теплового баланса для нагреваемой жидкости:

$$\frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial t} S_6 \rho_{жс} c_{жс} + \frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial x} \rho_{жс} c_{жс} S_6 v_{жс} = \alpha_1 L_1 (\Theta_{cm} - \Theta_{жс}) \quad (329)$$

Разделим левую и правую части уравнения (329) на $S_6 \rho_{жс} c_{жс}$ и запишем его в виде:

$$\frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial t} + v_{жс} \frac{\partial \Theta_{жс}}{\partial x} + c_1 \Theta_{жс} = c_1 \Theta_{cm}, \quad (330)$$

где

$$c_1 = \frac{\alpha_1 L_1}{S_6 \rho_{жс} c_{жс}}.$$

Динамика изменения температуры теплоносителя во внешней трубе описывается уравнением аналогичным (330):

$$\frac{\partial \Theta_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial \Theta_m}{\partial x} + c_2 \Theta_m = c_2 \Theta_{cm}, \quad (331)$$

где ρ_m , c_m , Θ_m – параметры теплоносителя,

v_m – скорость теплоносителя,

$$c_2 = \frac{\alpha_2 L_2}{S_k \rho_m c_m},$$

α_2 – коэффициент теплопередачи от теплоносителя к стенке.

Для описания динамики изменения температуры стенки рассмотрим элементарный объём стенки $S_{cm}\Delta x$. Изменение количества тепла, запасённого элементом объёма стенки:

$$S_{cm}\Delta x\rho_{cm}\frac{\partial\Theta_{cm}}{\partial t},$$

где ρ_{cm} , c_{cm} , Θ_{cm} – параметры стенки.

Уравнение теплового баланса стенки:

$$S_{cm}c_{cm}\rho_{cm}\frac{\partial\Theta_{cm}}{\partial t} = \alpha_2 L_2 (\Theta_m - \Theta_{cm}) - \alpha_1 L_1 (\Theta_{cm} - \Theta_{жс}),$$

или

$$\frac{\partial\Theta_{cm}}{\partial t} + (c_3 + c_4)\Theta_{cm} = c_3\Theta_m - c_4\Theta_{жс}, \quad (332)$$

где

$$c_3 = \frac{\alpha_2 L_2}{S_{cm}\rho_{cm}c_{cm}}; \quad c_4 = \frac{\alpha_1 L_1}{S_{cm}\rho_{cm}c_{cm}}.$$

Уравнения (330), (331), (332) образуют систему трёх уравнений, описывающих динамику теплообменника «труба в трубе». Для получения зависимости температуры нагреваемой жидкости от температуры теплоносителя необходимо решить эту систему уравнений при заданных начальных условиях.

Уравнения в частных производных могут быть преобразованы в систему обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Один из способов решения этой задачи заключается в том, что, применяя к уравнению в частных производных преобразование Лапласа по пространственной переменной x , получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых соответствует фиксированному значению пространственной переменной.

10.2. Типовые схемы автоматизации технологических процессов

Автоматизация насосов и компрессоров

Насосы и компрессоры предназначены для перемещения соответственно жидкостей и газов.

Объект регулирования – трубопровод (газопровод) между двумя аппаратами длиной обычно несколько метров. Особенность объекта регулирования – малая инерционность от долей секунд (для газов) до нескольких секунд (для жидкостей). Основной показатель качества процесса – расход жидкости (газа) или их давление. Основные возмущения: колебания давления в аппаратах, между которыми расположен трубопровод; изменение вязкости и плотности перемещаемой жидкости.

Схема автоматизации насоса (компрессора) показана на рис. 94.

Обозначения:

I, R, C – показывающий, регистрирующий, регулирующий приборы;

A – световая и звуковая сигнализация;

H – ручное управление;

J – многоточечный (обегающий) прибор;

P, F (в первой позиции), *T, E* – соответственно давление, расход, температура, электрические показатели.

Как отмечалось в разделе 10.1, наиболее простым способом регулирования расхода является дросселирование потока жидкости (газа) на линии нагнетания (позиция 1). Схема автоматизации также предусматривает: контроль давления на всасывающей и нагнетающей линиях (поз. 2, 3) и сигнализацию на нагнетающей линии; контроль и сигнализацию температуры хладагента, подшипников и обмоток электродвигателя насоса (поз. 4); контроль и сигнализацию давления хладагента и смазки (поз. 5, 6) и расхода хладагента и смазки (поз. 7, 8);

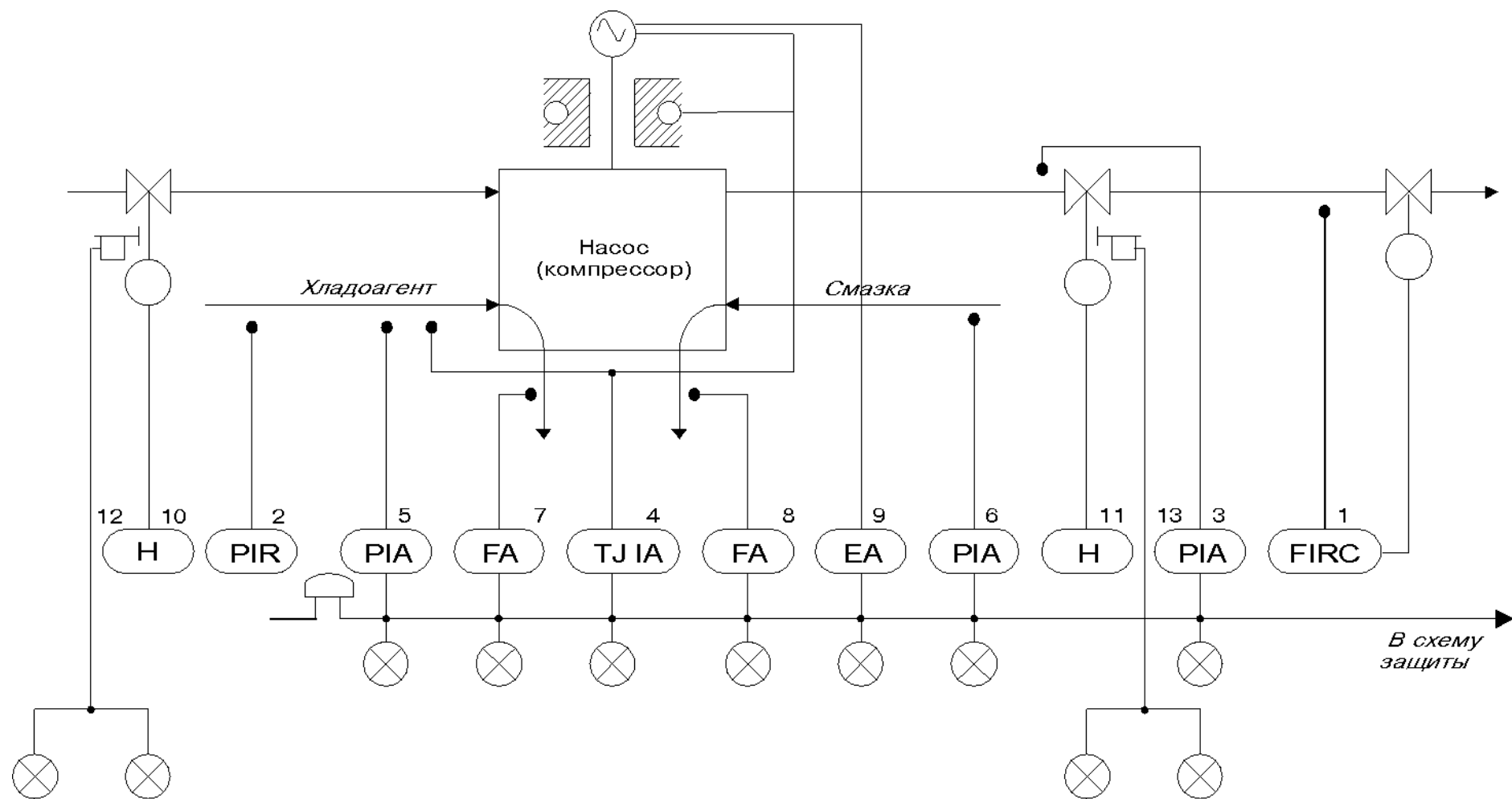


Рис. 94

сигнализацию отклонения режима работы двигателя от нормального – перегрузку двигателя (поз. 9). Предусмотрены ручное управление задвижками на линиях всасывания и нагнетания (поз. 10, 11) и сигнализация положения задвижек (поз. 12, 13).

Если давление в линии нагнетания или параметры состояния компрессора продолжают изменяться и после срабатывания сигнализации, несмотря на принятые обслуживающим персоналом меры, срабатывает автоматическое устройство защиты. Оно отключает насос и включает резервный.

*Автоматизация поверхностных кожухо-трубчатых
теплообменников (рис. 95)*

Предназначены для нагрева продукта теплом от теплоносителя. Теплоноситель подается в трубки внутри кожуха, через стенки которых тепло передается продукту, пропускаемому в межтрубное пространство.

Основной показатель качества – температура нагреваемого продукта – стабилизируется расходом теплоносителя (поз.1). Основные возмущения: расход продукта, начальные температуры продукта и теплоносителя, их удельные теплоемкости, температура окружающей среды, изменение теплопередачи стенок труб вследствие отложения солей и коррозии.

Теплообменники (и тепловые объекты вообще) характеризуются значительной инерционностью.

Контролируются: расходы теплоносителя, (поз.2) и продукта (поз.3), их конечные и начальные температуры (поз.4), давление теплоносителя и продукта (поз.5,6).

Сигнализируются: температура и расход продукта (поз.1,3). При резком падении расхода продукта теплообменник может выйти из строя, поэтому устройство защиты должно в этом случае перекрывать линию подачи
теплоносителя.

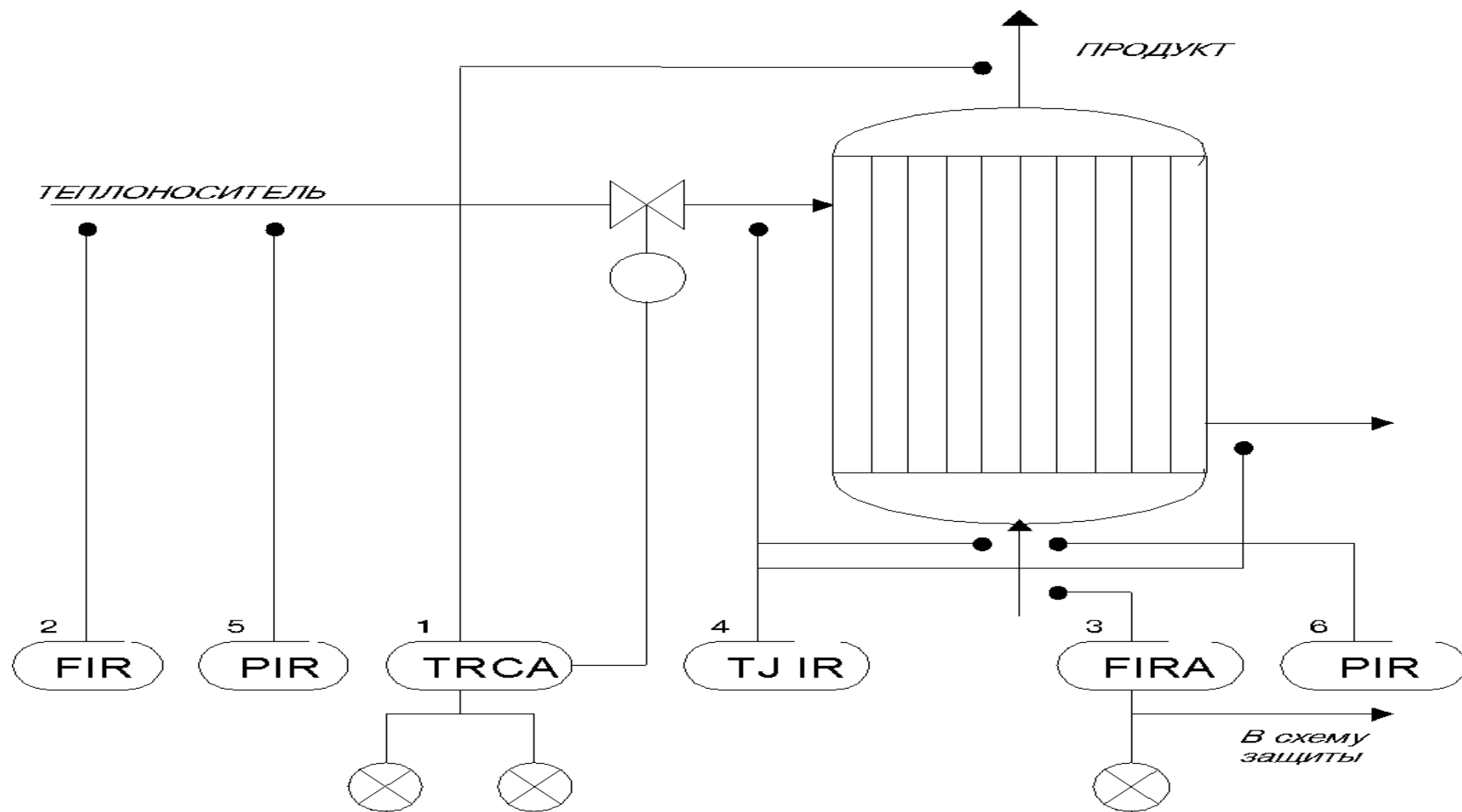


Рис. 95.

Для повышения качества регулирования температуры нагреваемого продукта может применяться каскадная АСР, в которой в качестве промежуточной регулируемой величины может использоваться расход теплоносителя или соотношение расходов теплоносителя и продукта. Если основными возмущениями являются колебания расхода или начальной температуры продукта, для повышения качества регулирования нагреваемого продукта может быть применена комбинированная АСР с компенсацией возмущений по расходу или начальной температуре продукта.

Автоматизация печей нагрева

Предназначены для получения дымовых газов сжиганием топлива, используемых в качестве теплоносителя при нагреве продуктов.

Основными задачами регулирования режима работы печей нагрева являются:

1. Стабилизация интенсивности и обеспечение устойчивости процесса горения. Интенсивность процесса горения зависит от количества топлива, сжигаемого в единицу времени, и определяет температуру дымовых газов или нагреваемого продукта, поэтому стабилизация температуры дымовых газов или нагреваемого продукта позволяет стабилизировать интенсивность процесса горения.

Одним из основных возмущений процесса горения является давление в топке, поскольку при его колебаниях меняются расходы топлива и воздуха, поэтому стабилизация давления в топке способствует повышению устойчивости процесса горения. Чаще в печах поддерживается разрежение (для предотвращения попадания дымовых газов через неплотности в кладке печи наружу), но иногда и избыточное давление (например, в стекловаренных печах для предотвращения уноса шихты в дымовую трубу).

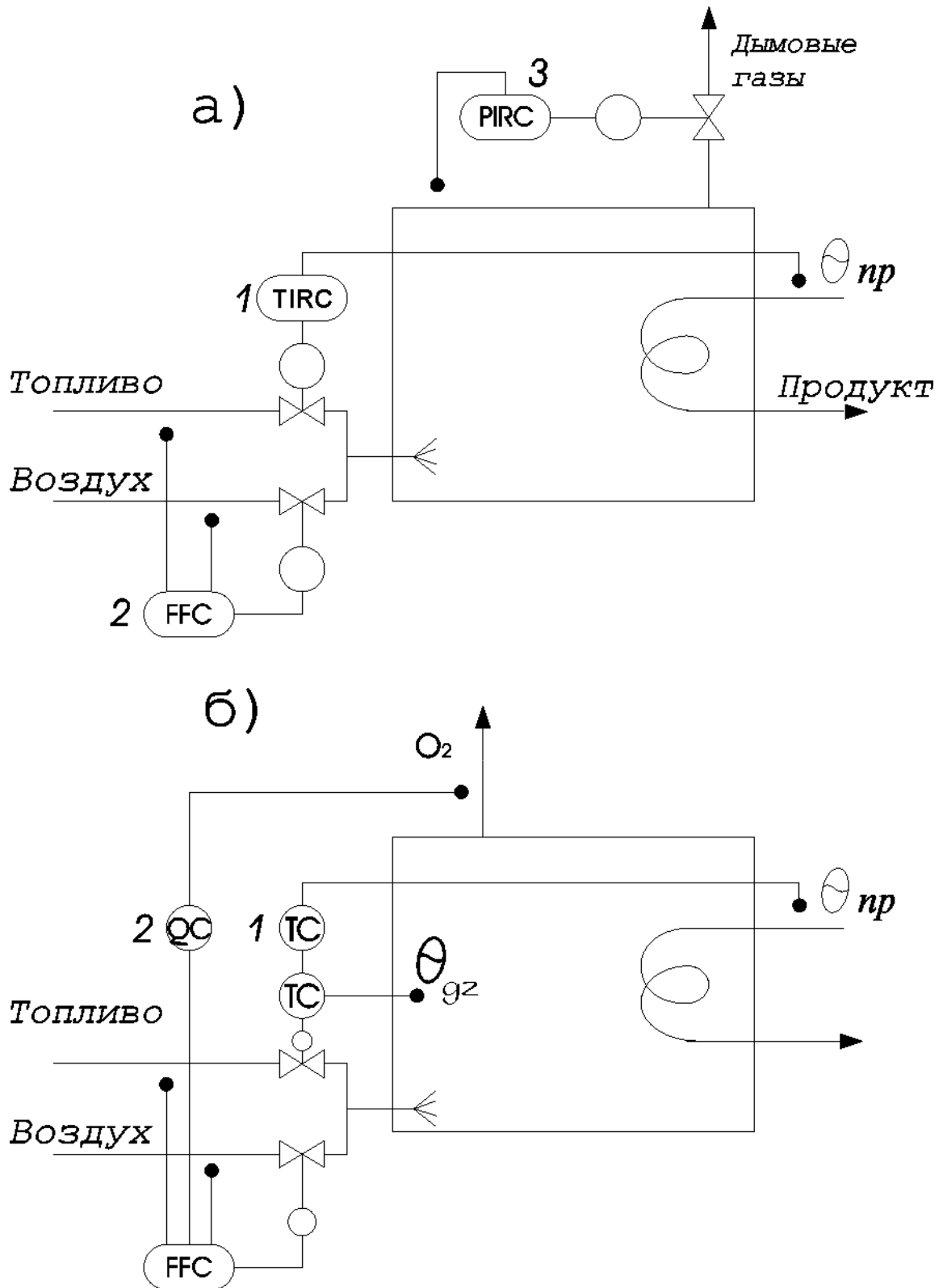


Рис. 96.

2. Поддержание экономичности процесса горения – коэффициента избытка воздуха или содержания O_2 или CO_2 в дымовых газах. Коэффициент избытка воздуха должен удовлетворять двусторонним ограничениям (с одной стороны, из соображений взрывобезопасности и снижения температуры дымовых газов при избытке воздуха, а с другой – защиты окружающей среды при его недостатке).

На рис.96.а показана схема регулирования режима работы печи нагрева, содержащая три контура регулирования: регулирование температуры продукта θ_{np} на выходе печи подачей топлива (поз.1); регулирование соотношения топливо/воздух подачей воздуха (поз.2); регулирование разрежения в топке отводом дымовых газов. (Буква F во второй позиции наименования регулятора означает соотношение).

Качество регулирования температуры продукта и экономичности процесса горения можно повысить, применяя каскадные АСР (рис.96.б). В каскадной АСР температуры продукта (поз.1) в качестве промежуточной регулируемой величины использована температура дымовых газов $\theta_{дг}$. В каскадной АСР содержания кислорода в отходящих газах (поз.2) промежуточной величиной является соотношение топливо/воздух. Применение АСР содержания O_2 объясняется тем, что регулирование соотношения топливо/воздух при определенных возмущениях (например, колебаниях теплотворной способности газа) может не обеспечивать экономичности сгорания топлива. (На рис.96.б буква Q обозначает “качественные показатели”, в данном случае содержание O_2).

Автоматизация барабанных котлов

Котельный агрегат (парогенератор) включает барабан, топку и пароперегреватель (рис.97). Основной показатель качества работы парогенератора – давление пара за котлом, основное возмущение – колебания нагрузки. Поэтому, основная задача при автоматизации

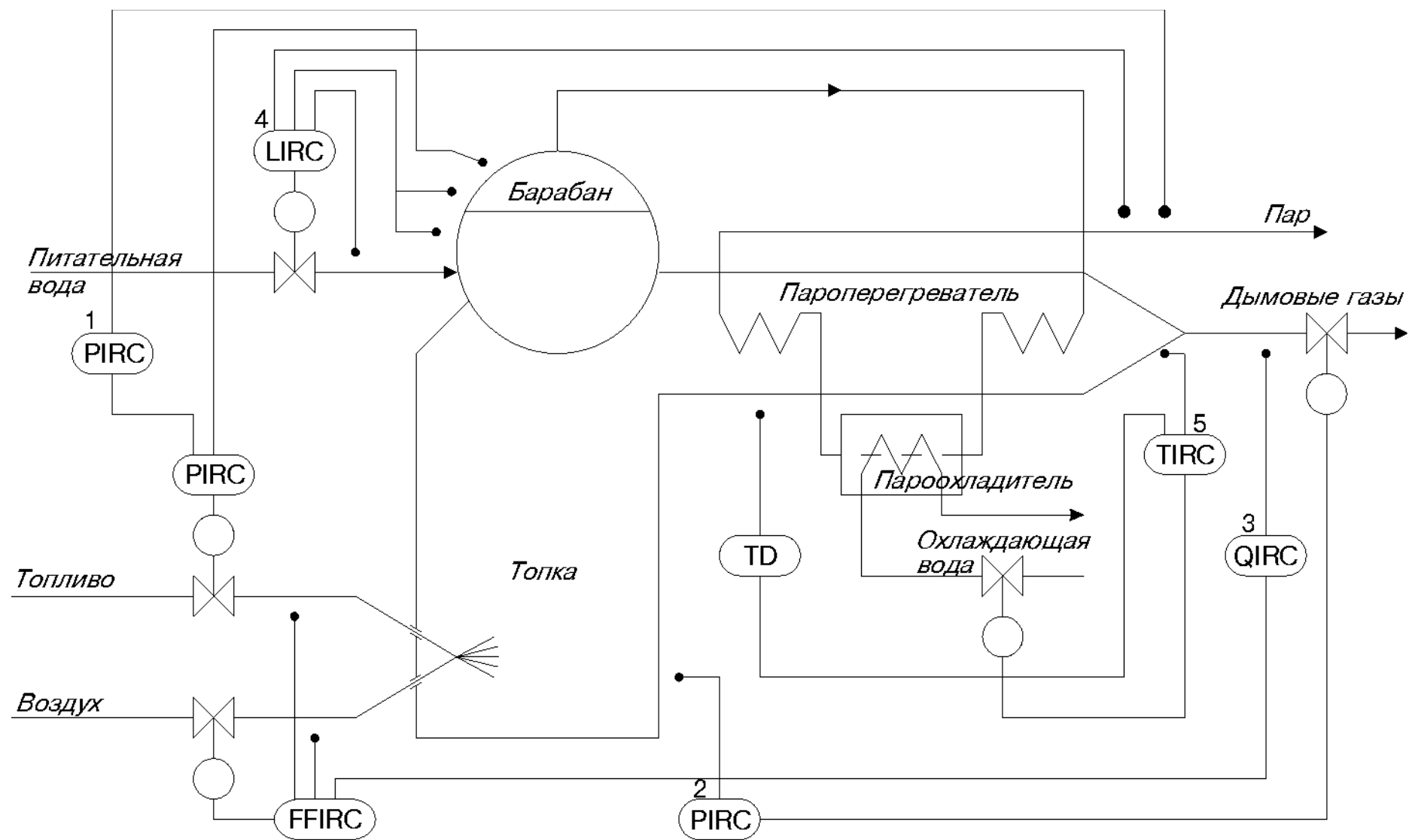


Рис. 97.

котельного агрегата – регулирование давления пара на выходе котла. Эта задача решается с помощью каскадной АСР давления пара за котлом (поз.1). (Кстати, впервые каскадная АСР применена именно для решения этой задачи). Промежуточная регулируемая величина – давление пара в барабане, регулирующее воздействие – расход топлива. Эффективность работы каскадной системы, как всегда, достигается за счет высокого быстродействия внутреннего контура.

Устойчивость процесса горения в топке поддерживается АСР разрежения в топке (поз.2). Регулирующее воздействие – отбор дымовых газов (производительность дымососов).

Экономичность процесса горения обеспечивается стабилизацией коэффициента избытка воздуха, который поддерживается регулятором соотношения топливо/воздух (поз.3). При этом, поскольку подача топлива является регулирующим воздействием в АСР давления пара, расход топлива выступает как задание регулятору соотношения, а расход воздуха “следит” за расходом топлива. Как отмечалось, при определенных возмущениях (просачивание воздуха в щели топки, изменение теплотворной способности топлива) коэффициент избытка воздуха может отклоняться от оптимального значения. Поэтому качество регулирования экономичности горения можно повысить, вводя корректирующий импульс по содержанию в дымовых газах O_2 или CO_2 , т.е. применяя каскадную систему. Содержание CO_2 измеряется газоанализаторами.

Важной задачей при автоматизации котлоагрегата является поддержание материального баланса в барабане котла, т.к. при его переполнении или опустошении возникает аварийная ситуация. Эта задача решается посредством АСР уровня воды в барабане котла (поз.4, L -уровень). Измерение уровня осуществляется дифманометрическим способом по перепаду давлений над и под столбом жидкости. Регулирующее воздействие – подача питательной воды в барабан.

Качество регулирования уровня можно повысить, применяя комбинированную АСР с компенсацией основного возмущения – разности расходов пара и питательной воды. (Такая система называется трехимпульсной).

Для регулирования температуры пара на выходе пароперегревателя используется АСР со скоростным импульсом от промежуточной регулируемой величины – температуры в первой секции пароперегревателя (поз.5, D - дифференциатор промежуточной величины). Регулирующее воздействие – подача охлаждающей воды в пароохладитель. Описанная система со скоростным импульсом также впервые внедрена в теплоэнергетике.

Автоматизация однокорпусной выпарной установки с рециклом (рис.98)

Установка предназначена для упаривания (т.е. повышения концентрации растворов). Для достижения заданной степени упаривания организован замкнутый рецикл: выпарной аппарат – кипятильник.

Основной показатель качества технологического процесса – концентрация упаренного раствора. Возмущения: расход свежего раствора (при уменьшении расхода увеличивается время пребывания раствора в аппарате и, следовательно, увеличивается концентрация упаренного раствора), концентрация свежего раствора, температура или связанное с ней давление в аппарате. Давление стабилизируется отбором пара из аппарата (поз.1).

Основные возмущения, действующие на кипятильник, – параметры теплоносителя (расход, температура, давление). Расход теплоносителя стабилизируется (поз.2).

Концентрация упаренного раствора определяется косвенно по величине так называемой температурной депрессии – разности между температурами кипения раствора и растворителя. Температурная

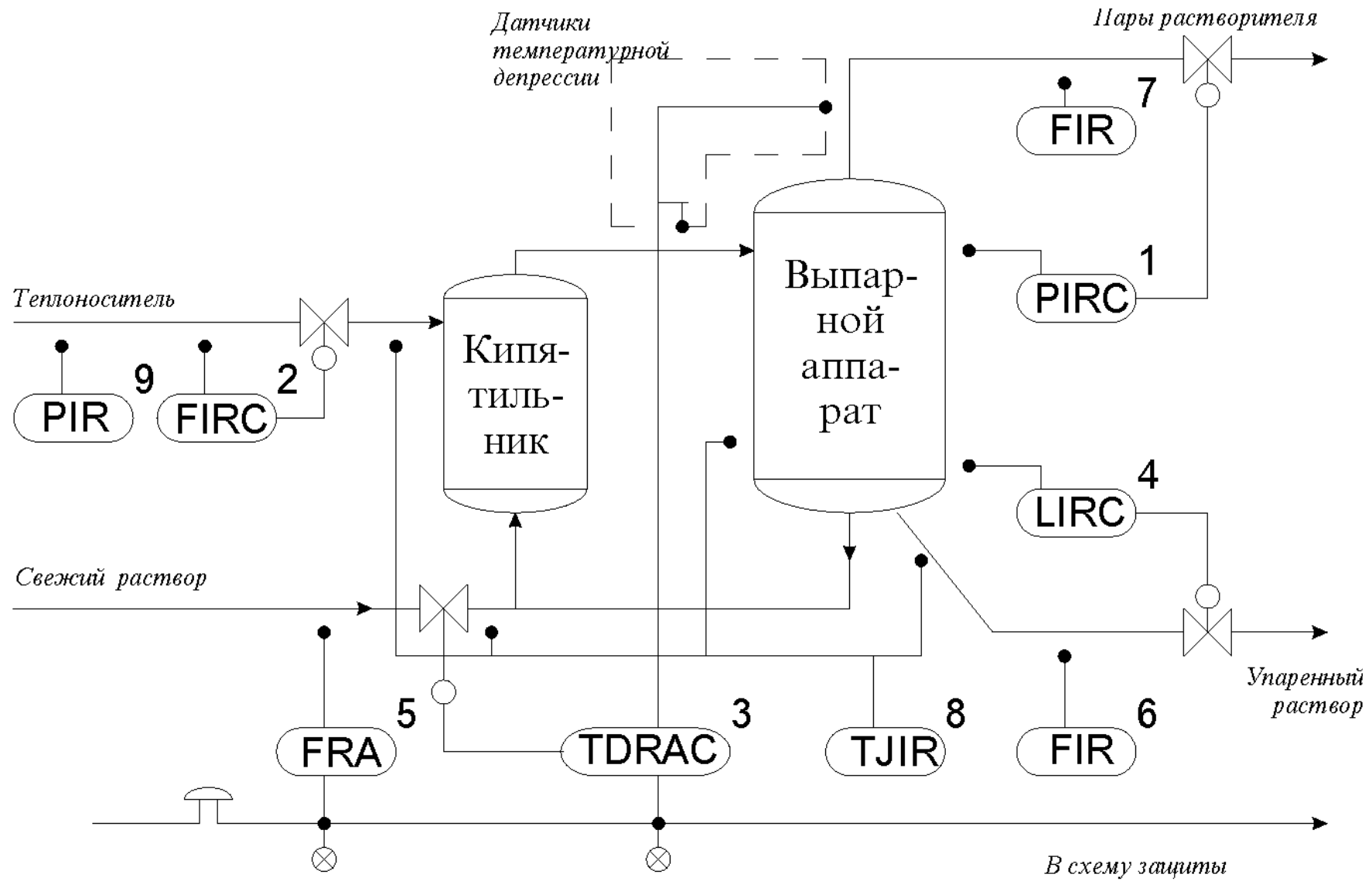


Рис. 98.

депрессия регулируется подачей свежего раствора (поз.3, вторая буква D означает “разность”). Итак, основные регулируемые параметры: температурная депрессия, давление в аппарате, расход теплоносителя. Кроме того, для поддержания материального баланса в аппарате регулируется уровень раствора изменением расхода упаренного раствора (поз.4).

Контролируются: расходы растворов (поз.5, 6), а также паров растворителя (поз.7), температуры растворов, температура, расход и давление теплоносителя (поз.8, 2, 9), давление, температура и уровень в аппарате (поз.1, 8, 4), температурная депрессия (поз.3).

Сигнализируются: отклонения концентрации упаренного раствора и прекращение подачи свежего раствора. При угрозе возникновения аварийной ситуации устройство защиты отключает подачу теплоносителя.

Автоматизация ректификационных установок

Ректификационные установки служат для разделения жидких однородных смесей компонентов, различающихся по температуре кипения.

Схема автоматизации ректификационной установки (рис.99) содержит следующие обозначения:

РК – ректификационная колонна,

К – кипятильник кубовой жидкости, служащий для создания восходящего потока пара,

Д – дефлегматор (конденсатор) паров, служащий для получения целевого продукта – дистиллята, часть которого используется в виде флегмы на орошение колонны,

П – подогреватель исходной смеси до температуры кипения.

Разделение смеси происходит в ректификационной колонне в противотоке жидкости и пара. Стекающая вниз по тарелкам жидкость

пронизывается восходящим потоком паров, увлекающим за собой низкокипящие компоненты смеси. В результате низкокипящие компоненты отводятся в виде паров из верхней части колонны, а высококипящие компоненты собираются в ее нижней части в виде кубовой жидкости.

Особенности ректификационной колонны:

- высокая энергоемкость, обусловленная большими затратами пара;
- высокая инерционность, обусловленная значительными размерами аппаратов колонного типа (диаметр – несколько метров, высота – десятки метров).

Основные показатели качества работы ректификационной колонны:

- энергозатраты (расход греющего пара в кипятильник кубовой жидкости и теплоносителя в подогреватель исходной смеси);
- производительность по целевому продукту (чаще – дистилляту, реже – кубовой жидкости);
- состав дистиллята (или паров, выходящих из колонны) или разделительная способность колонны (разность концентраций дистиллята и кубового остатка).

Основные цели управления ректификационной установкой: снижение энергозатрат, повышение выхода по готовому продукту, обеспечение заданной концентрации дистиллята или степени разделения.

Основные возмущения: изменение характеристик исходной смеси, тепло- и хладоносителей, изменение свойств теплопередающих поверхностей.

Поскольку анализаторы состава целевого продукта, как правило, отсутствуют, приходится вести регулирование процесса по косвенным показателям, от которых зависит интенсивность процесса ректификации.

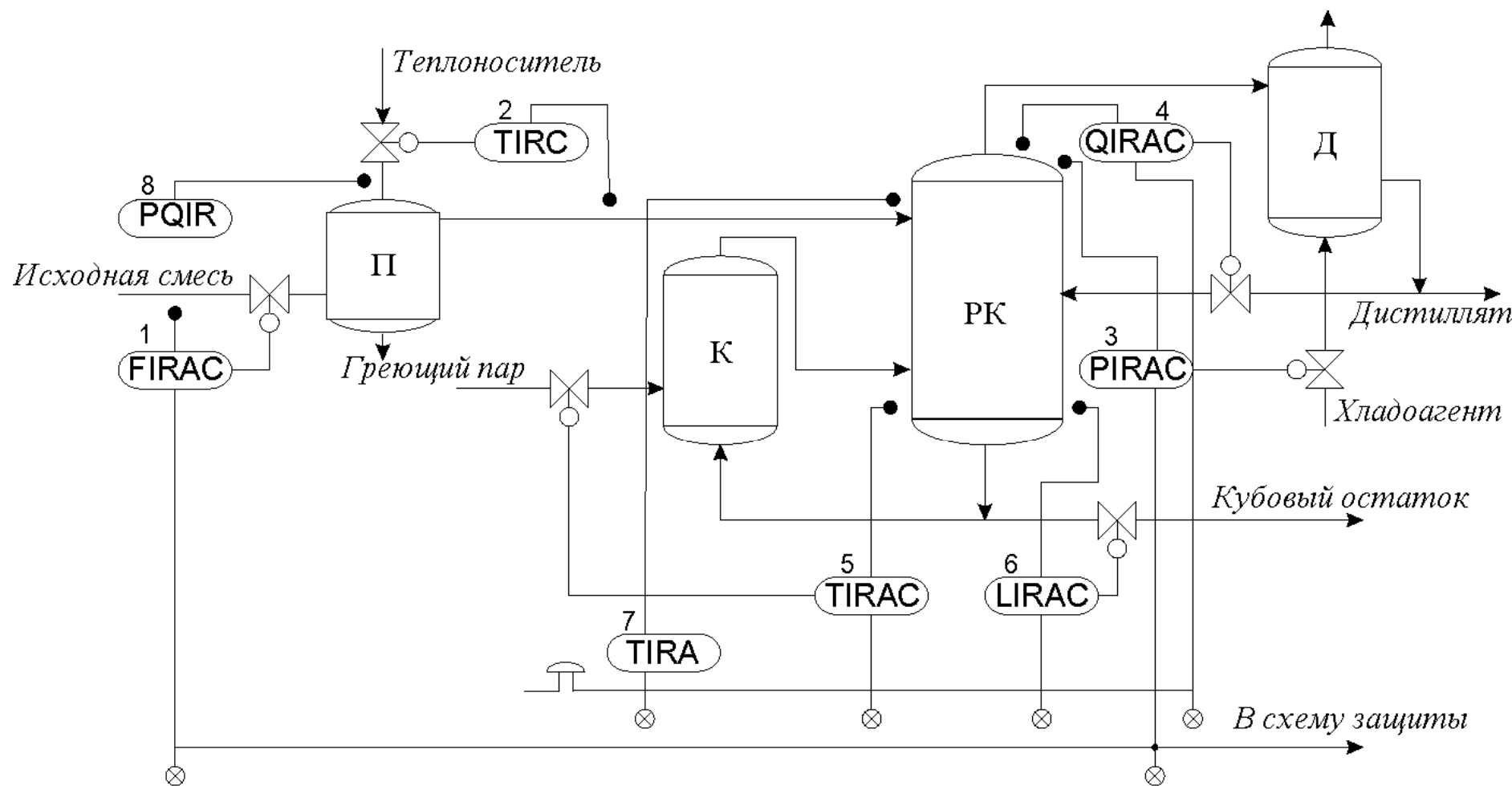


Рис. 99.

Системы автоматизации ректификационных установок обычно строят по принципу стабилизации основных режимных показателей (температура, уровень, давление, расход) с целью поддержания материального и теплового баланса. Изображенная на рис.99 схема содержит шесть контуров регулирования, с помощью которых осуществляется стабилизация теплового режима и материального баланса по жидкой и паровой фазе.

Расход исходной смеси стабилизируется регулятором расхода (поз.1). Диафрагма и рабочий орган должны быть установлены до подогревателя, т.к. после подогревания смеси до температуры кипения в подогревателе поток жидкости может содержать паровую фазу.

Большое значение для процесса ректификации имеет температура исходной смеси. Если смесь будет поступать в колонну при температуре ниже температуры кипения, она будет подогреваться до этой температуры паром, восходящим из нижней части колонны. Конденсация паров при этом возрастает, что нарушает режим процесса ректификации. Поэтому температуру исходной смеси стабилизируют изменением расхода теплоносителя в подогреватель (поз.2).

В данном случае предполагается, что основной показатель качества – состав дистиллята – не контролируется. Поскольку, однако, концентрация дистиллята зависит от концентрации жидкости в верхней части колонны и давления паров, эти показатели стабилизируются. Давление в верхней части колонны стабилизируется подачей хладоагента в дефлегматор (поз.3), что приводит к изменению интенсивности конденсации и величины отбора пара из колонны. Стабилизация давления в верхней части ректификационной колонны дополнительно обеспечивает нормальный гидродинамический режим колонны, т.к. при понижении давления может произойти “захлебывание” колонны (восходящий поток пара начинает препятствовать стеканию жидкости по тарелкам вниз), а при его

повышении уменьшается скорость парового потока и, следовательно, производительность установки.

Концентрация жидкости в верхней части колонны регулируется расходом флегмы на орошение (поз.4). Чем выше этот расход, тем больше в жидкости низкокипящего компонента и наоборот. (При наличии датчика состава паров или дистиллята стабилизируются эти показатели расходом флегмы на орошение. При отсутствии датчиков состава расходом флегмы на орошение стабилизируется температура верха колонны, оказывающая сильное влияние на интенсивность процесса ректификации).

Качество регулирования давления и состава жидкости в верхней части колонны зависит от состава и скорости паров, движущихся из нижней части и зависящих от давления, температуры и состава жидкости в кубе колонны. Необходимость стабилизации давления паров в кубе колонны отпадает, т.к. регулирование давления в верхней части колонны одновременно стабилизирует (с некоторым запаздыванием) и давление в нижней части. Температуру в кубе колонны стабилизируют подачей пара в кипятильник (поз.5). (Если целевым продуктом является кубовый остаток, то регулируют (при наличии датчика) состав жидкости в кубе подачей теплоносителя в кипятильник. В верхней части колонны в этом случае достаточно регулировать только температуру). Для поддержания материального баланса в кубе уровень жидкости регулируют расходом кубового остатка (поз.6).

Контролю подлежат расходы и температуры материальных потоков (на схеме показаны частично). Предусмотрен счетчик количества теплоносителя в подогреватель исходной смеси (поз.8, вторая буква Q-интегрирование (суммирование) по времени). Сигнализируются отклонения состава жидкости в верхней части колонны (поз.4), уровня кубового остатка (поз.6), давления в колонне (поз.3), температуры верха (поз.7) и низа (поз.5), расхода исходной смеси (поз.1). При повышении

давления в колонне выше допустимого, а также при прекращении поступления исходной смеси срабатывает защита, перекрывающая магистрали подачи теплоносителей, остатка и дистиллята, а магистрали хладоагента и флегмы полностью открываются.

При большой инерционности ректификационной колонны для повышения качества регулирования состава продукта или температуры верха могут применяться каскадные АСР, в которых в качестве промежуточной регулируемой величины можно использовать состав (или температуру) на промежуточной (контрольной) тарелке, которые изменяются гораздо быстрее и больше, чем состав на выходе колонны.

Для сокращения энергозатрат иногда применяют АСР соотношения расходов греющего пара в кипятильник и исходной смеси (или исходной смеси и флегмы).

При одновременном регулировании составов (или температур) верха и низа ректификационная колонна может оказаться объектом связанного регулирования.

Автоматизация газовых абсорберов (рис.100)

Предназначены для извлечения из газовой смеси какого-либо компонента жидким абсорбентом.

Объект регулирования – абсорбционная колонна (АК) и два холодильника (X1, X2) на линиях газовой смеси и абсорбента.

Показатель эффективности процесса – концентрация извлекаемого компонента в обедненной смеси (абгазе) или – реже – концентрация насыщенного абсорбента (например, процесс абсорбции в производстве кислот).

Основные возмущения: параметры потоков газовой смеси и абсорбента (расходы, концентрации), температура и давление в абсорбционной колонне.

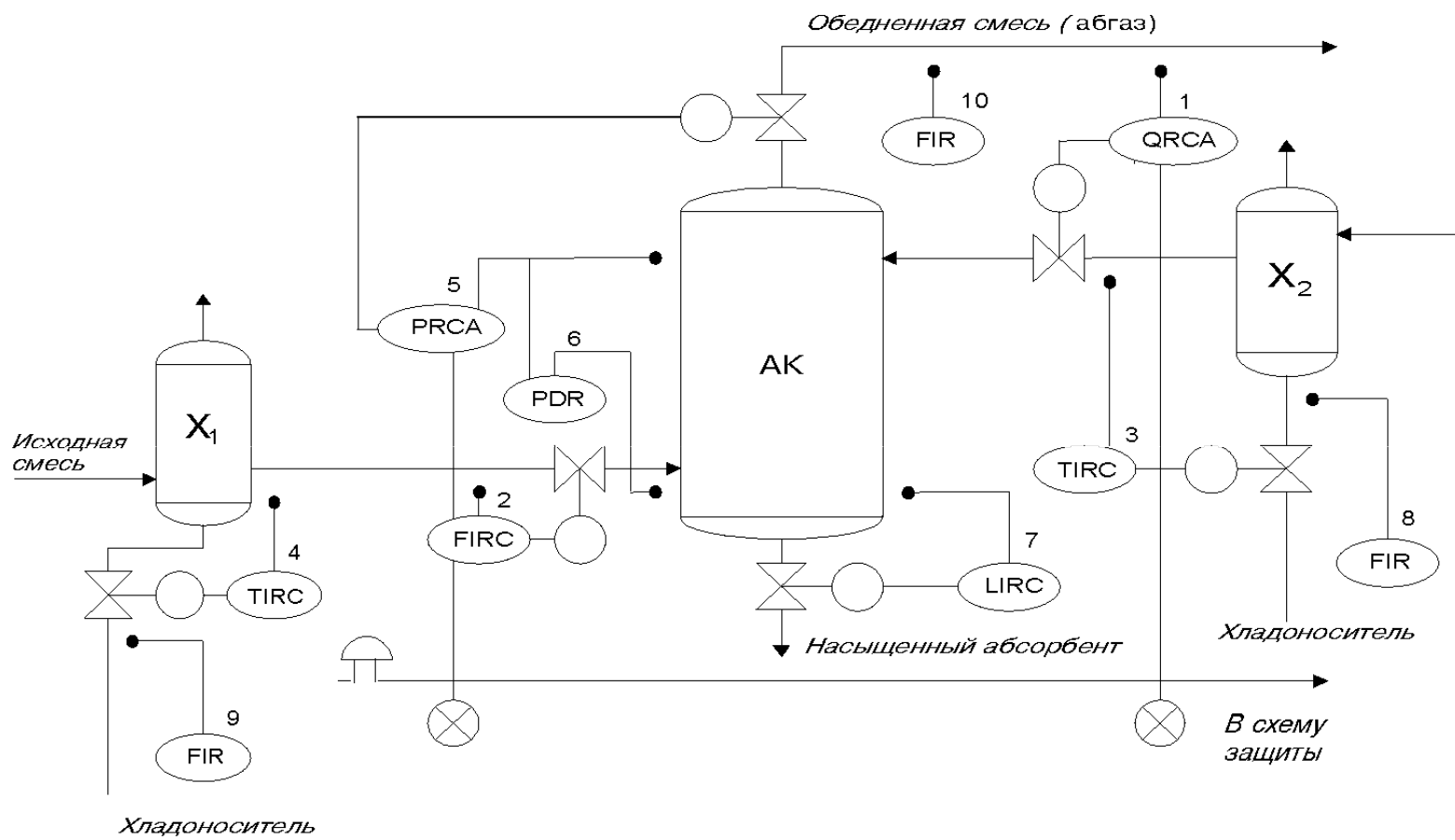


Рис. 100.

Концентрация абгаза стабилизируется изменением расхода абсорбента (поз.1). Если газовая смесь имеет постоянный состав, стабилизировать концентрацию абгаза нет необходимости, достаточно ограничиться стабилизацией расходов смеси и абсорбента или регулированием соотношения этих расходов. Если же конечным продуктом является насыщенный абсорбент, стабилизируют концентрацию извлекаемого компонента в абсорбенте (или косвенный показатель – его плотность) расходом абсорбента.

Расход исходной смеси стабилизируется регулятором (поз.2). Если расход газовой смеси определяется предшествующим процессом и не может быть стабилизирован, применяют АСР соотношения расходов газовой смеси и абсорбента или каскадную АСР концентрации абгазов с промежуточной величиной - соотношением расходов абсорбента/смеси.

Возможность регулирования температуры в самом абсорбере отсутствует, т.к. он не содержит охлаждающих змеевиков, поэтому в данной схеме стабилизируются температура абсорбента (поз.3) и газовой смеси (поз.4) изменением расходов хладоносителей.

Давление в колонне стабилизируется изменением расхода обедненной смеси (поз.5). Некоторые конструкции абсорбционных колонн очень чувствительны к нарушению гидродинамического режима: даже незначительные изменения скорости газа в колонне приводят к неустойчивым режимам ее работы. В этих случаях стабилизируют перепад давления в колонне (а не давление, как в описываемой схеме) изменением расхода абгазов. В данной схеме перепад (разность) давлений контролируется (поз.6).

В нижней части абсорбционной колонны должно находиться некоторое количество жидкости, обеспечивающее гидравлический затвор, что исключает попадание газовой смеси из колонны в линию насыщенного абсорбента и позволяет регулировать давление в абсорбере. Постоянное

количество этой жидкости поддерживается регулятором уровня (поз.7) изменением расхода насыщенного абсорбента.

Контролируются расходы и температуры потоков (на схеме показаны частично), концентрация извлекаемого компонента в обедненной смеси (поз.1), уровень кубовой жидкости (поз.7), давление в колонне (поз.5), перепад давления в колонне (поз.6).

Сигнализируются отклонения давления в колонне, концентрация извлекаемого компонента в абгазе. При значительном повышении давления в абсорбционной колонне и недопустимых отклонениях концентрации абгазов срабатывает защита, открывающая магистраль обедненной смеси и закрывающая все остальные магистрали.

Автоматизация сушильного барабана (рис.101)

Сушильные установки предназначены для уменьшения влажности сырого материала. Изображенная на рис.101 барабанная прямоточная сушилка включает: топку, служащую для выработки дымовых газов; смесительную камеру, в которой дозируемый сырой материал смешивается с сушильным агентом, который, в свою очередь, представляет смесь дымовых газов и вторичного воздуха; вращающийся наклонный сушильный барабан, в котором осуществляется процесс сушки за счет взаимодействия сушильного агента с влажным материалом; бункер сухого материала, из которого готовый продукт дозируется потребителям; циклон, служащий для удаления пыли из отработанного сушильного агента и вентилятор, служащий для сброса в атмосферу сушильного агента.

Основной показатель качества процесса – влажность сухого материала. Основные возмущения: параметры сырого материала (расход, влажность, гранулометрический состав), параметры сушильного агента

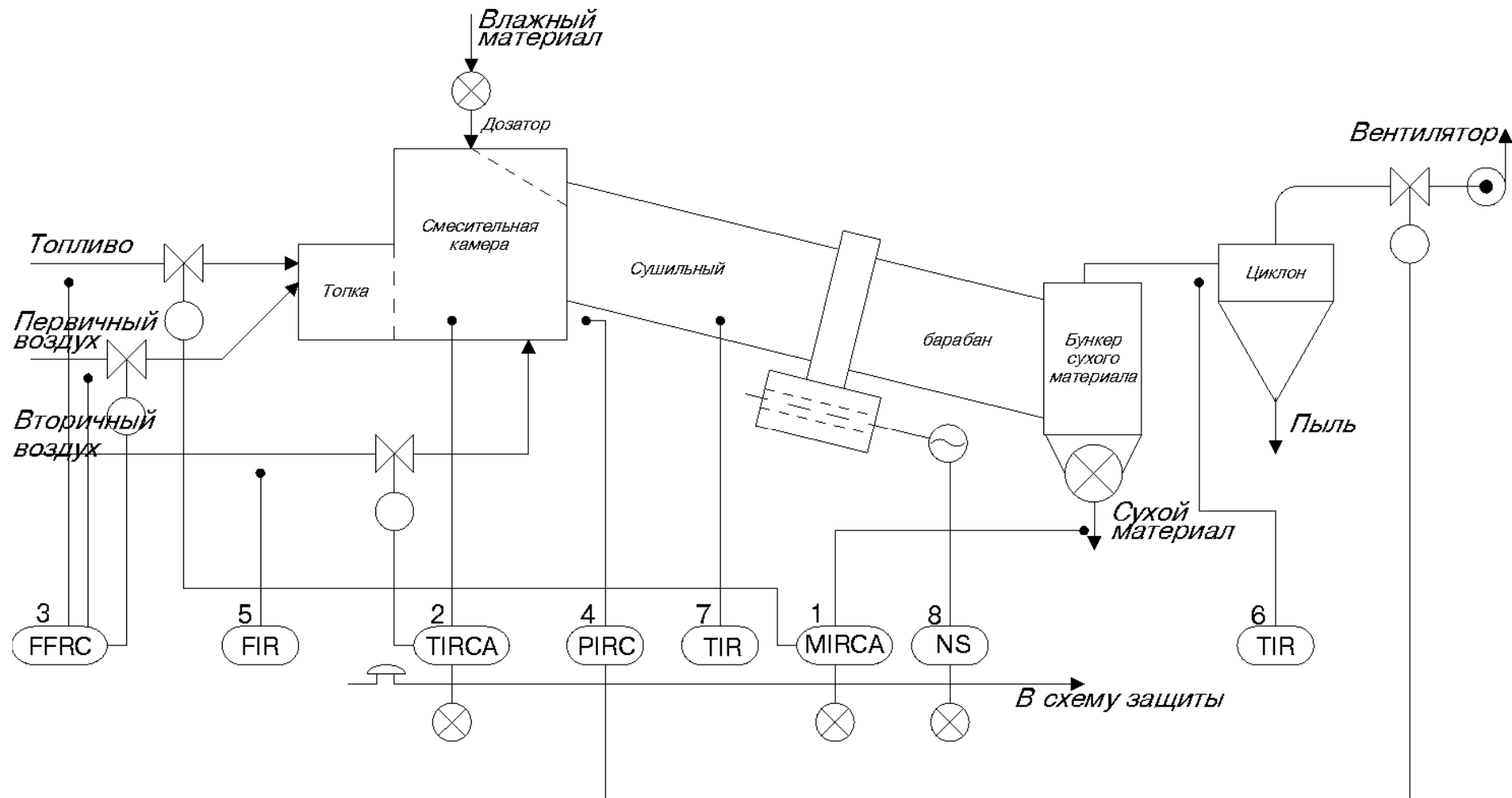


Рис. 101.

(температура, расход), режим сушки (температура, время пребывания в барабане).

Расход сырого материала определяет производительность сушилки, которую, по возможности, следует стабилизировать. В данной схеме для этой цели используется дозатор сырого материала.

Влажность сухого материала стабилизируется подачей топлива в топку (поз.1, M - влажность). При изменении расхода топлива меняется расход сушильного агента, подаваемого в барабан. При этом температура сушильного агента на входе в барабан стабилизируется изменением расхода вторичного воздуха (поз.2).

При отсутствии датчика влажности сухого материала в качестве косвенного показателя влажности можно использовать температуру материала на выходе из сушилки, однако, измерение этой температуры также представляет определенные трудности ввиду неравномерности температурного поля в материале, налипания частиц на датчик и т.д. В качестве косвенного показателя влажности можно использовать также температуру сушильного агента на расстоянии приблизительно одной трети длины барабана от точки загрузки материала (в данной схеме эта величина контролируется - поз.7). При наличии датчика влажности эту же температуру можно использовать в качестве промежуточной регулируемой величины в каскадной АСР.

Для обеспечения экономичности процесса горения используется стандартный регулятор соотношения топливо/воздух (поз.3). Устойчивость процесса горения также обеспечивается стандартным регулятором разрежения (поз.4).

Контролируются: расходы потоков (поз.3, 5), температуры (поз.2, 6, 7), разрежение (поз.4).

Сигнализируются: отклонение влажности свыше допустимого значения (поз.1), повышение температуры сушильного агента (поз.2),

остановка электродвигателя (поз.8, NS - сигнализация состояния двигателя: включено - выключено).

При остановке электродвигателя, аварийном повышении температуры сушильного агента или влажности сухого материала защита прекращает подачу материала в сушилку.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стефани Е.П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. М.: Энергия, 1972. 376 с.
2. Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами: Учебник для ВУЗов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 296 с.
3. Автоматическое управление в химической промышленности: Учебник для ВУЗов / под ред. Е.Г. Дудникова. М.: Химия, 1987. 368 с.
4. Комиссарчик В.Ф. Автоматическое регулирование технологических процессов: Учебное пособие. Тверь: ТГТУ, 1995. 71 с.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
6. Шуп Т. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высшая Школа, 1990. 255 с.
7. Комиссарчик В.Ф. Обработка временных рядов: Учебное пособие. Тверь: ТГТУ, 1997. 98 с.
8. Бендат Дж., Пирсол. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.
9. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
10. Остром К.Ю. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.

11. Болнокин В.Е., Чинаев П.Н. Анализ и синтез систем автоматического управления на ЭВМ. Алгоритмы и программы. М.: Радио и связь, 1991. 256 с.
12. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М.: Наука, 1985. 296 с.
13. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987. 480 с.
14. Комиссарчик В.Ф. Методы оптимизации и оптимального управления : Учебное пособие. Тверь: ТГТУ, 2000. 144 с.
15. Комиссарчик В.Ф., Юрков Л.Ф. Стабилизация физических свойств электровакуумных стекол. М.: Мир книги, 1992. 176 с.
16. Льюис К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей. М.: Финансы и статистика, 1986. 133 с.
17. Рэклейтис Г., Рейвиндран А., Рэкдел К. Оптимизация в технике. Книга 2. М.: Мир, 1986. 320 с.
18. Шувалов В.В., Огаджанов Г.А., Голубятников В.А. Автоматизация производственных процессов в химической промышленности. М.: Химия, 1991. 480 с.

Содержание

Введение.....	3
1. Математическое описание объектов регулирования....	7
1.1. Основные характеристики и свойства объектов регулирования.....	7
1.2. Методы математического описания объектов регулирования.....	22
1.3. Получение и аппроксимация временных характеристик объектов регулирования.....	24
2. Промышленные регуляторы АСР.....	37
2.1. Функциональная схема автоматического регулятора.....	37
2.2. Классификация регуляторов по потреблению энергии внешнего источника.....	38
2.3. Классификация регуляторов по закону регулирования.....	39
3. Расчет настроек регуляторов в линейных непрерывных системах	48
3.1. Качество регулирования	48
3.2. Типовые оптимальные процессы	51
3.3. Упрощенные формулы для расчета настроек регуляторов.....	52
3.4. Расчет настроек регуляторов методом расширенных частотных характеристик.....	54
3.5. Построение переходных процессов в замкнутых АСР методом Акульшина.....	70
4. Анализ АСР с релейными регуляторами	73
4.1. Анализ АСР с двухпозиционным релейным регулятором.....	74
4.2. Анализ АСР частотно-амплитудным методом Гольдфарба.....	82
5. АСР с усложненной структурой	89
5.1. Каскадные АСР.....	89
5.2. АСР со скоростным импульсом от промежуточной регулируемой величины.....	94
5.3. Системы с компенсацией возмущения. Комбинированные АСР.....	97
5.4. Системы связанного регулирования.....	109
5.5. Регулирование объектов с чистым запаздыванием. Упредитель Смита.....	115
6. Расчет настроек цифровых регуляторов	117
6.1. Динамические характеристики цифровых систем регулирования.....	120
6.2. Структурная схема цифровой системы регулирования.....	130

6.3.	Нахождение передаточной функции приведенной непрерывной части.....	133
6.4.	Дискретные аналоги типовых законов регулирования.....	135
6.5.	Расчет настроек цифровых регуляторов.....	148
7.	Анализ и синтез цифровых АСР при случайных воздействиях.....	156
7.1.	Основные характеристики случайных процессов.....	157
7.2.	Определение дисперсии выходной величины в цифровой АСР.....	167
7.3.	Синтез регулятора с минимальной дисперсией.....	173
8.	Синтез многомерных дискретных регуляторов в пространстве состояния.....	178
8.1.	Формулировка задачи оптимального управления.....	178
8.2.	Уравнения состояния и измерения.....	179
8.3.	Синтез дискретного П - регулятора состояния - выхода.....	185
8.4.	Синтез дискретного ПИ - регулятора состояния.....	188
8.5.	Синтез дискретного наблюдателя состояния.....	191
9.	Многомерные дискретные АСР с прогнозом регулируемых переменных.....	194
9.1.	Структурная схема системы с прогнозом регулируемых переменных и его минимизацией.....	194
9.2.	Прогнозирование рассогласования.....	196
9.3.	Минимизация прогноза рассогласования.....	197
9.4.	Сведение задачи квадратичного программирования к задаче о линейной дополнителности.....	199
9.5.	Решение задачи о линейной дополнителности методом Лемке.....	201
10.	Автоматизация типовых технологических процессов.....	204
10.1.	Регулирование основных параметров технологических процессов.....	204
10.2.	Типовые схемы автоматизации технологических процессов.....	222
	Библиографический список.....	244