

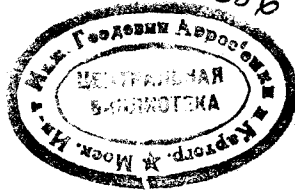
С. С. РИВКИН

К21.39.1

P615

СТАБИЛИЗАЦИЯ
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ
УСТРОЙСТВ
НА КАЧАЮЩЕМСЯ
ОСНОВАНИИ

80509



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

К 95

531
Р 65
УДК 531.383

Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании. Р и в к и н С. С., Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 320 стр.

В книге излагаются основные вопросы механики систем стабилизации измерительных устройств (ИУ) — целенаправленных устройств, чувствительных элементов систем навигации и управления — на качающемся основании. Исследование систем стабилизации ИУ и решение прикладных задач проводится применительно к кораблю. Тем не менее излагаемый в книге материал полностью относится и к системам стабилизации ИУ, устанавливаемым на других подвижных объектах.

Основные особенности исследования систем стабилизации ИУ состоят в применении вероятностных методов, методов теории автоматического регулирования, в использовании методов статистической оптимизации (Колмогорова — Винера, Калмана и др.).

Теоретическое изложение материала сопровождается решением значительного числа прикладных задач из области стабилизации ИУ.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, занимающихся вопросами стабилизации ИУ, прикладной гироскопии и автоматического управления подвижными объектами. Она может быть также использована студентами и аспирантами соответствующих специальностей.

Табл. 11, илл. 100, библ. 101.

Самуил Симонович Ривкин

Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании

М., 1978 г., 320 стр. с илл.

Редакторы Д. Р. Меркин, Н. П. Рябенская

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректоры О. А. Бутусова, Н. Д. Дорохова

ИБ № 11147

Сдано в набор 17.02.78. Подписано к печати 23.06.78. Т-42819. Бумага 60×90^{1/8}.
Тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20.
Уч.-изд. л. 19,51. Тираж 2750 экз. Заказ № 227. Цена книги 2 р. 20 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука» Москва, Шубинский пер. д. 10

Р 20302—104
053(02)—78 154-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Список сокращений	10
Глава 1. Общие сведения о колебаниях основания и стабилизации ИУ	11
§ 1.1. Стабилизация ИУ, ее методы и технические средства	11
§ 1.2. Постановка задачи об определении характеристик качки корабля на регулярном волнении	14
§ 1.3. Геометрия и кинематика качки корабля	15
§ 1.4. Вероятностные характеристики качки и орбитального движения корабля	29
Глава 2. Факторы, обуславливающие необходимость стабилизации ИУ	46
§ 2.1. Вращение системы координат, связанной с ИУ	46
§ 2.2. Угловые скорости и ускорения наведения ИУ на качке	53
§ 2.3. Линейные скорости и ускорения заданной точки корабля	63
§ 2.4. Влияние качки на использование ИУ	70
Глава 3. Сущность современных методов стабилизации на корабле	73
§ 3.1. Характеристика методов стабилизации и их классификация	73
§ 3.2. Краткие сведения об успокоителях качки корабля	77
§ 3.3. Объекты местной стабилизации, ее параметры и приборы для их определения	81
Глава 4. Математические основы решения задач преобразования координат	83
§ 4.1. Сущность задач преобразования координат на корабле и обзор методов их решения	83
§ 4.2. Использование формул сферической тригонометрии	85
§ 4.3. Применение методов аналитической геометрии	90
§ 4.4. Матричный метод преобразования координат	95
§ 4.5. Метод преобразования координат, основанный на теории малых поворотов твердого тела	98
§ 4.6. Метод преобразования координат, базирующийся на теории конечных поворотов твердого тела	105
§ 4.7. Сравнительная оценка различных методов решения задач преобразования координат	115
Глава 5. Геометрия и кинематика косвенной стабилизации ИУ	117
§ 5.1. Сущность метода косвенной стабилизации	117
§ 5.2. Угловые координаты осей ИУ; углы наклона палубы корабля	118

§ 5.3. Геометрия и кинематика наведения ИУ при различных схемах косвенной стабилизации	123
§ 5.4. Схемы стабилизации ИУ при косвенном методе	153
Глава 6. Геометрия и кинематика непосредственной стабилизации ИУ	169
§ 6.1. Сущность метода непосредственной стабилизации	169
§ 6.2. Карданов подвес и его основные элементы	170
§ 6.3. Геометрия и кинематика карданова подвеса	174
§ 6.4. Типы кардановых подвесов и их свойства	191
§ 6.5. Геометрия и кинематика наведения ИУ при различных схемах непосредственной стабилизации	206
§ 6.6. Схемы стабилизации ИУ при непосредственном методе	214
§ 6.7. Связь между погрешностями стабилизации и наведения ИУ	224
Глава 7. Гироскопические устройства, применяющиеся в системах стабилизации ИУ	228
§ 7.1. Общая характеристика некоторых типов ГУ	228
§ 7.2. Погрешности ГУ	231
§ 7.3. Гироскопическая стабилизация ИУ	238
Глава 8. Преобразование координат на корабле	249
§ 8.1. Общая характеристика задач преобразования координат	249
§ 8.2. Элементы теории и схемы ПК	252
§ 8.3. Погрешности ПК	262
Глава 9. Прогнозирование положения корабля на качке	265
§ 9.1. Сущность задачи прогнозирования	265
§ 9.2. Определение оптимальной передаточной функции прогнозирующего устройства	267
§ 9.3. Погрешности прогнозирования	274
§ 9.4. Решение задачи прогнозирования методом Калмана	276
Глава 10. Динамика систем стабилизации	284
§ 10.1. Обзор задач динамики систем стабилизации	284
§ 10.2. Выбор пределов стабилизации ИУ	285
§ 10.3. Общая характеристика и функциональная схема следящего привода стабилизации	290
§ 10.4. Вероятностные характеристики управляющих и возмущающих воздействий на ИУ	293
§ 10.5. Уравнения и передаточные функции следящего привода стабилизации	299
§ 10.6. Динамические погрешности стабилизации	303
Литература	316

Светлой памяти
своих учителей
профессоров

Бориса Ивановича КУДРЕВИЧА

и

Сергея Артуровича ИЗЕНБЕКА

автор посвящает эту книгу.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эффективность использования различных измерительных устройств (ИУ) на подвижном и качающемся основании существенно зависит от качки основания и от применяющихся методов стабилизации. Под ИУ имеются в виду установленные на корабле устройства, с помощью которых измеряются различные параметры (углы, линейные скорости, ускорения, перемещения, характеристики физических полей и др.) в земной, инерциальной или другой системах координат. К ним мы будем относить пеленгационные устройства, чувствительные элементы систем навигации, управления и другие корабельные устройства. Для уменьшения или полного устранения влияния качки на использование ИУ применяют различные методы стабилизации ИУ, а в ряде случаев и самого основания, реализуемые с помощью соответствующих технических средств. Вопросам стабилизации измерителей на качающемся основании в литературе уделяется сравнительно мало внимания, что затрудняет решение как теоретических, так и прикладных задач в этой области. В связи с этим появилась необходимость написания книги, в которой излагались бы основные вопросы механики, возникающие при решении разнообразных задач стабилизации ИУ на испытывающих качку объектах. К подобным вопросам относятся: характеристика колебаний объекта, факторы, обуславливающие необходимость стабилизации ИУ, сущность современных методов стабилизации на качающемся объекте, математические основы решения задач преобразования координат, геометрия и кинематика различных методов стабилизации и технические средства для их осуществления, анализ гироскопических устройств, применяющихся в системах стабилизации, а также приборов, которые предназначены для решения задач преобразования координат на качающемся объекте и для прогнозирования его положения в условиях качки, динамика систем стабилизации.

Изложению перечисленных выше вопросов посвящена предлагаемая книга. Основные особенности, отличающие ее от других работ по теории стабилизации ИУ на качающемся основании, состоят в следующем: 1) так как полезные сигналы и возмущающие воздействия в системах стабилизации ИУ являются, как правило,

случайными функциями времени, то для исследования этих систем применяются вероятностные методы; 2) при анализе динамики систем стабилизации, помимо методов, применяемых в классической механике, широко используются методы теории автоматического управления; 3) значительное внимание уделяется вопросам анализа и синтеза технических средств, применяющихся в системах стабилизации ИУ; при решении задач синтеза используются методы статистической оптимизации Колмогорова — Винера, Калмана и др.

Исследование систем стабилизации ИУ на качающемся основании и решение прикладных задач проводится применительно к кораблю. Это обусловлено тем, что корабли в условиях волнения моря испытывают сильную качку, и возникает необходимость как стабилизации самого корабля (общая его стабилизация), так и стабилизации отдельных расположенных на нем измерительных устройств (местная стабилизация ИУ).

Заметим, что первые исследования по теории стабилизации подвижных объектов и соответствующих технических средств проводились применительно к кораблю. Тем не менее излагаемый в книге материал полностью относится и к системам стабилизации ИУ, устанавливаемых на других подвижных объектах.

В теоретических исследованиях по стабилизации ИУ на корабле видную роль сыграли работы А. Н. Крылова, А. Ю. Ишлинского, С. А. Изенбека, Г. В. Чеховича, В. И. Кудревича, Е. Л. Бравина и др. А. Н. Крылову принадлежат выдающиеся исследования по теории качки корабля и его общей стабилизации. В области местной стабилизации им выполнен ряд весьма важных работ по теории гироскопических приборов, кардановых подвесов, маятниковых систем, стабилизации визирных и дальномерных постов на корабле. При этом основное внимание уделяется вопросам кинематики и динамики этих систем.

В работах А. Ю. Ишлинского подробно исследованы геометрия и кинематика систем стабилизации на корабле, теория кардановых подвесов, стабилизирующих устройств, гироскопических приборов, применяемых при решении задач стабилизации. При проведении указанных исследований широко используются различные математические методы, основанные на применении аналитической геометрии, теории матриц, теории малых и конечных поворотов твердого тела. Ряд теоретических результатов, полученных в работах А. Ю. Ишлинского, нашел применение при решении прикладных задач.

Г. В. Чеховичем были развиты некоторые вопросы теории местной стабилизации на корабле. Особое внимание им было уделено геометрии наведения на качке различных корабельных устройств, а также анализу точных и приближенных методов решения задач преобразования координат. В частности, им введено

понятие о так называемой кардановой ошибке, которое далее было развито в работах А. Ю. Ишлинского, Б. И. Кудревича и др. Отдельные полученные Г. В. Чеховичем результаты нашли применение при построении корабельных систем. Аналогичные исследования проводились С. А. Изенбаком. Одна из отличительных их особенностей состояла в том, что при анализе геометрии и кинематики систем стабилизации на качке применен оригинальный выбор углов, характеризующих положение корабля при качке, который был предложен им совместно с Е. Л. Бравиным в 1943 г. Этот выбор углов сейчас широко используется в теории качки корабля и различных ее приложениях. Е. Л. Бравину принадлежат также исследования в области кинематики и динамики наведения корабельных систем и методов их стабилизации. Б. И. Кудревич, известный своими работами по теории гирокомпасов и других гироскопических приборов, в последний период своей научной и педагогической деятельности много внимания уделил теории местной стабилизации ИУ на корабле. Его работы в этой области послужили основой для формирования нового научно-технического направления, связанного со стабилизацией измерительных устройств на качающемся основании. Б. И. Кудревичем были получены фундаментальные результаты по ряду перечисленных ранее вопросов, относящихся к местной стабилизации, которые нашли практическое приложение.

В теоретические обоснования и создание систем стабилизации, получивших широкое применение прежде всего в корабельных устройствах, большой вклад внесли Н. Н. Остряков, В. И. Кузнецов, А. Э. Атовмян, С. Ф. Фармаковский, В. И. Маслевский, Я. Г. Остромухов, А. Н. Дмитриев и многие другие.

В предлагаемой книге рассматриваются основные вопросы механики стабилизации ИУ на качающемся основании, а также анализа и синтеза используемых при этом технических средств. Теоретическое изложение материала сопровождается решением значительного числа прикладных задач из области стабилизации ИУ. Предполагается, что читатели знакомы с основами прикладной теории гироскопов, теории случайных функций, теории автоматического регулирования и, в частности, тех ее разделов, в которых рассматриваются вопросы статистической динамики систем автоматического управления.

Книга состоит из десяти глав. В первой главе приводятся общие сведения о колебаниях корабля и о стабилизации установленных на нем измерительных устройств. Излагаются вопросы геометрии и кинематики качки корабля. Подробно рассматриваются вероятностные характеристики его качки и орбитального движения в условиях нерегулярного волнения моря. Приводятся основные определения из области стабилизации ИУ, указываются ее методы и применяемые технические средства.

Вторая глава посвящена анализу факторов, обуславливающих необходимость стабилизации ИУ. При этом определяются углы поворотов на качке связанной с ИУ координатной системы, угловые скорости и ускорения наведения ИУ, приводятся расчеты линейных скоростей и ускорений заданной точки корабля, анализируется влияние качки на использование ИУ.

В третьей главе рассматривается сущность современных методов стабилизации на корабле. Приводится характеристика методов общей стабилизации корабля, местной стабилизации ИУ и их классификация. Излагаются краткие сведения об успокоителях качки. Рассматриваются объекты местной стабилизации, ее параметры и приборы для их определения.

В вопросах стабилизации ИУ существенную роль играют различные задачи преобразования координат, математические основы решения которых излагаются в четвертой главе. Приводятся методы преобразования координат, основанные на использовании формул сферической тригонометрии, аналитической геометрии, матричный метод, а также методы, базирующиеся на теории малых и конечных поворотов твердого тела. Применение указанных методов иллюстрируется решением типовых задач преобразования координат, возникающих в системах стабилизации, что позволяет дать сравнительную оценку различным методам преобразования координат.

В пятой главе излагаются вопросы геометрии и кинематики косвенной стабилизации. Поясняется сущность метода косвенной стабилизации, определяются углы наклона корабля, а также угловые координаты связанных с ИУ осей. Анализируются различные схемы косвенной стабилизации.

Наиболее широкое применение на кораблях и других подвижных объектах получил метод непосредственной стабилизации, геометрия и кинематика которого излагаются в главе шестой. Поясняется сущность метода, рассматриваются вопросы механики карданова подвеса, его геометрия и кинематика. Анализируются различные схемы стабилизации ИУ при непосредственном методе. Отдельно рассматривается важный для приложений вопрос о связи между погрешностями стабилизации и наведения ИУ.

В седьмой главе приводятся краткие сведения о гироскопических устройствах (ГУ), применяющихся в системах стабилизации. Здесь дается общая характеристика отдельных типов ГУ, рассматриваются их погрешности. Приводятся примеры гироскопической стабилизации измерительных устройств (секстант, оптические приборы, гравиметр, магнитометр и др.) на качающемся основании.

В восьмой и девятой главах рассматриваются теория и принципы построения приборов, предназначенных для решения задач преобразования координат на корабле и для прогнозирования его

положения в условиях качки. Приводятся элементы теории и схемы преобразователей координат, определяются их погрешности. Рассматривается сущность задач прогнозирования, находится оптимальная передаточная функция прогнозирующего устройства для условий нерегулярной качки корабля и погрешности прогнозирования. Отдельно рассматривается вопрос о решении задачи прогнозирования с помощью метода Калмана, реализуемого на ЦВМ.

Десятая глава посвящена изложению некоторых вопросов динамики систем стабилизации. Приводится обзор задач динамики, дается выбор пределов стабилизации. Применительно к схеме следящего привода стабилизации рассматриваются вероятностные характеристики полезных сигналов и возмущающих воздействий на ИУ, а также уравнения движения и передаточные функции привода стабилизации. Излагается методика расчета динамических погрешностей стабилизации, которая иллюстрируется соответствующими примерами.

Рассматриваемый в книге широкий круг вопросов, связанных со стабилизацией измерительных устройств на качающемся основании, дает достаточно полное представление о состоянии и перспективах теоретических исследований и решении прикладных задач в этой области.

Книга предназначена для инженерно-технических и научных работников, занимающихся вопросами стабилизации измерительных устройств, прикладной гироскопии и автоматического управления подвижными объектами. Она будет также полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

В процессе работы над рукописью автор пользовался советами ряда товарищей. Обсуждение с проф. А. А. Свешниковым содержания книги способствовало применению вероятностных методов в задачах стабилизации измерительных устройств. Проф. Д. Р. Меркин взял на себя труд редактирования книги, сделал существенные замечания и высказал ряд полезных рекомендаций. При подготовке рукописи и ее оформлении большую помощь оказала Т. А. Чаплюк. Всем этим лицам автор приносит глубокую благодарность.

С. С. Ривкин

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АК — акселерометр.
АРУ — автоматическое регулирование усиления,
ВН — вертикальное наведение,
ВТ — вращающийся трансформатор,
ВУ — вычислительное устройство,
ГА — гироазимут,
ГАГ — гироазимутгоризонт,
ГВ — гировертикаль,
ГИ — гиринонтегратор,
ГК — гирокомпас,
ГМ — гиромаятник,
ГН — гироскоп направления, горизонтальное наведение,
ГС — гиостабилизатор,
ГСП — гиостабилизированная платформа,
ГСС — гироскопическая следящая система,
ГТ — гиротахометр,
ГТА — гиротахоакселерометр,
ГУ — гироскопическое устройство,
ИВ — инерциальная вертикаль,
ИНС — инерциальная навигационная система,
ИУ — измерительное устройство,
МВ — механизм вращения,
МВТ — масштабный вращающийся трансформатор,
МПЗ — магнитное поле Земли,
НОЦ — наклон оси цапф,
ОФК — оптимальный фильтр Калмана, оптимальная фильтрация Калмана,
ПВ — плоскость визирования,
ПГ — плоскость горизонта,
ПК — преобразователь координат,
ПП — плоскость палубы,
ПУ — прогнозирующее устройство,
РЛС — радиолокационная станция,
САР — система автоматического регулирования,
С КВТ — синусно-косинусный вращающийся трансформатор,
СКО — среднеквадратичная ошибка,
СУ — стабилизирующее устройство, суммирующее устройство,
УК — успокоитель качки,
ЦВМ — цифровая вычислительная машина,
ЧЭ — чувствительный элемент.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О КОЛЕБАНИЯХ ОСНОВАНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ИУ

§ 1.1. Стабилизация ИУ, ее методы и технические средства

Как было указано в предисловии, в книге рассматриваются вопросы стабилизации установленных на корабле ИУ, с помощью которых измеряются различные параметры (углы, линейные скорости, ускорения, перемещения, характеристики физических полей и др.) в земной, инерциальной или другой системах координат. К ним будем относить различные пеленгационные устройства (визеры, антенны, секстанты, телескопы и др.), чувствительные элементы систем навигации, управления (маятниковые устройства, акселерометры, гироскопы, гравиметры, магнитометры и т. п.) и другие корабельные устройства.

Качка корабля ухудшает эффективность использования указанных ИУ, а в ряде случаев делает его практически невозможным. Для уменьшения или полного устранения влияния качки на ИУ применяют различные методы стабилизации, реализуемые с помощью соответствующих технических средств. *Стабилизация ИУ* состоит в удержании некоторого направления (визирная линия оптического прибора, ось симметрии диаграммы направленности антенны и др.) или связанной с ИУ координатной системы в неизменном относительно ориентира или Земли положении в условиях качки корабля. Под *ориентиром* в дальнейшем имеется в виду в общем случае находящийся в пространстве подвижный объект или светило, звезда и т. п. При решении указанной выше задачи осуществляется стабилизация угловых движений связанной с ИУ координатной системы, т. е. устраняется вращение этой системы вследствие качки корабля относительно заданной (базовой) системы координат.

Основными характеристиками применяемой на кораблях стабилизации являются: 1) вид стабилизации, 2) степень полноты стабилизации, 3) параметры стабилизации. В зависимости от вида стабилизации различают *общую* стабилизацию корабля и *местную* стабилизацию установленных на нем ИУ. *Общая стабилизация* корабля обычно состоит в умерении его бортовой качки. Под *местной стабилизацией* понимают стабилизацию расположенных на корабле ИУ, при этом в общем случае компенсируется влияние

бортовой, килевой качки и рыскания корабля. В качестве примера местной стабилизации можно указать на стабилизацию на корабле некоторой площадки (с установленными на ней ИУ) относительно плоскости горизонта (ПГ) и заданного азимутального направления.

Местная стабилизация ИУ характеризуется методами, способами их осуществления и другими особенностями (см. §§ 3.1 и 3.3). Различают *непосредственный* и *косвенный методы стабилизации ИУ*. *Непосредственный метод* состоит в установке ИУ на некоторой площадке и в удержании его в неизменном относительно ПГ и заданного азимута положении путем введения углов качки и рыскания на вращение площадки вокруг осей стабилизации. В указанном выше примере стабилизации ИУ (например, визира) путем установки его на площадке в кардановом подвесе, на вращение колец которого вводятся углы качки, а на поворот площадки в азимуте — угол рыскания корабля, — осуществляется

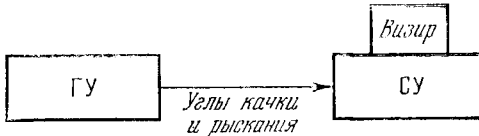


Рис. 1.1. Схема непосредственной стабилизации ИУ.

ся непосредственный метод стабилизации. При непосредственной стабилизации ИУ (визира) оси стабилизации площадки (оси введения углов качки и рыскания) и оси наведения визира по отношению к площадке различны. Сказанное поясняется схемой [23, 89] непосредственной стабилизации ИУ (рис. 1.1). Здесь гироскопическое устройство (ГУ) определяет углы качки и рыскания корабля, последние с помощью следящих приводов вводятся на стабилизирующее устройство (СУ), на площадке которого установлен визир. Под *стабилизирующим устройством* будем понимать электромеханическое устройство, предназначенное для удержания некоторой оси или координатной системы в неизменном относительно Земли или инерциального пространства положении при качке корабля. В схеме на рис. 1.1 СУ состоит из карданова подвеса и следящих приводов ввода углов качки и рыскания. Помимо данного типа СУ со следящими приводами, в системах стабилизации широкое применение получили СУ гироскопического типа, или гироскопические стабилизаторы (ГС), в которых стабилизация ИУ осуществляется при помощи гироскопов. При гироскопической стабилизации ИУ отпадает необходимость в отдельном ГУ (рис. 1.1), так как в этом случае измерительное устройство механически связано с ГС, который и обеспечивает его стабилизацию.

Косвенный метод стабилизации ИУ состоит в удержании некоторой оси ИУ в заданном относительно Земли или ориентира на-

правлении путем введения поправок на качку и рыскание на вращение ИУ относительно соответствующих осей наведения. При этом измерительное устройство установлено на палубе корабля. Примером косвенного метода стабилизации ИУ (например, визира) является введение поправок на качку и рыскание корабля на вращение визира относительно его осей наведения. При косвенном методе оси наведения и оси стабилизации совпадают. Сущность косвенного метода стабилизации состоит в преобразовании угловых координат, характеризующих заданное положение оси ИУ в земной системе, в соответствующие угловые координаты

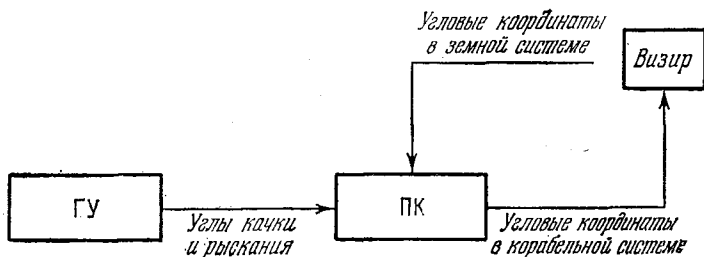


Рис. 1.2. Схема косвенной стабилизации ИУ.

(параметры стабилизации), отнесенные к корабельной системе, и во введении их в наведение ИУ. Решение задачи преобразования угловых координат осуществляется с помощью преобразователей координат (ПК), на вход которых вводятся углы качки от ГУ. Сказанное поясняется схемой [23, 89] косвенной стабилизации ИУ (рис. 1.2). Здесь углы качки и рыскания корабля от ГУ поступают в ПК, куда также вводятся угловые координаты направления на некоторый ориентир в земной системе. ПК преобразует их в угловые координаты, отнесенные к корабельной системе. Последние вводятся на наведение визира, благодаря чему его оптическая ось будет сохранять направление на заданный ориентир независимо от качки и рыскания корабля. При косвенной стабилизации, в отличие от непосредственной, осуществляется стабилизация лишь некоторой оси ИУ.

В зависимости от степени полноты различают *полную* и *частичную* стабилизацию. Первая предусматривает стабилизацию ИУ относительно трех осей его вращения и осуществляется теоретически точно, т. е. без методических погрешностей. Примером полной стабилизации является стабилизация установленной в трехосном кардановом подвесе площадки с ИУ по бортовой, килевой качке и рысканию корабля. Частичная стабилизация ИУ осуществляется относительно одной или двух осей, при этом она в принципе производится неточно (грубо) вследствие соответствующей

щих методических погрешностей. Примером частичной стабилизации является умерение бортовой качки корабля, так как при этом уменьшается лишь его угол крена. Параметрами непосредственной стабилизации ИУ обычно служат углы качки и рыскания корабля и их производные, определяемые с помощью ГУ. Иногда используются другие углы наклона палубы корабля относительно ПГ (§ 5.2). Параметрами косвенной стабилизации являются угловые координаты (в корабельной системе), например, заданного направления на ориентир, которые вырабатываются в ПК.

Для осуществления стабилизации ИУ применяют соответствующие технические средства, основными из которых являются: 1) успокоители качки корабля, 2) гироскопические устройства, 3) преобразователи координат, 4) прогнозирующие устройства.

Успокоители качки (см. § 3.2) предназначены для умерения бортовой качки корабля, которая наиболее существенно сказывается на эффективности использования ИУ. Гироскопические устройства (см. главу 7) служат для воспроизведения на корабле некоторой базовой системы координат, а также для определения углов рыскания и качки, их угловых скоростей и ускорений, линейных скоростей и ускорений места установки ИУ. При реализации косвенного и непосредственного методов стабилизации ИУ широкое применение получили ПК (см. главу 8), общее назначение которых состоит в преобразовании сферических координат некоторого направления из земной системы в корабельную или наоборот. Для учета качки корабля при использовании некоторых ИУ могут найти применение прогнозирующие устройства (ПУ), которые предназначены для прогнозирования положения корабля на качке или некоторого параметра, который изменяется в процессе качки (см. главу 9).

§ 1.2. Постановка задачи об определении характеристик качки корабля на нерегулярном волнении

Теория качки корабля, созданная А. Н. Крыловым [42, 45], рассматривает качку корабля в условиях правильного, регулярного волнения. Расчеты качки, выполненные согласно этой теории, показывают, что собственные колебания корабля со временем затухают и сохраняются лишь вынужденные колебания с постоянной амплитудой и с периодом, равным кажущемуся периоду волны. На основании многочисленных наблюдений за волнением в морях и океанах установлено, что волнение является нерегулярным, что приводит к возникновению нерегулярной качки корабля. Это подтверждается результатами натурных испытаний качки кораблей, которые показывают, что на нерегулярном волнении последовательные размахи корабля не остаются постоянными, а период, особенно бортовой качки, близок к периоду собственных колеба-

ний. Нерегулярное волнение моря представляет собой случайный процесс. Поэтому при исследовании качки корабля на нерегулярном волнении приходится обращаться к вероятностным методам. На нерегулярный характер волнения моря и качки корабля впервые обратил внимание А. Н. Крылов [42].

Развитие теории качки на нерегулярном волнении в течение последних двух десятков лет обязано работам А. А. Свешникова [77, 79], А. Н. Тупысева [93], А. И. Вознесенского [101], Г. А. Фирсова [95, 101], И. К. Бородая и Ю. А. Нецветаева [8], М. Сен-Дени и В. Пирсона [100] и др. Основной задачей теоретического исследования качки корабля в указанных условиях является определение вероятностных характеристик качки по заданным вероятностным характеристикам волнения. Другой способ определения вероятностных характеристик качки состоит в статистической обработке записей качки однотипных кораблей в интересующих нас условиях волнения. При исследованиях и расчетах по стабилизации ИУ на качке представляется целесообразным учитывать основные выводы теории качки корабля на нерегулярном волнении, а ее вероятностные характеристики задавать по результатам статистической обработки натурных записей качки в процессе мореходных испытаний корабля при типичных для эксплуатационных условий нагрузках и различной интенсивности волнения. С методами испытаний мореходных качеств судов, применяемой аппаратурой и методами статистического анализа результатов испытаний можно познакомиться в работах [7, 17].

При рассмотрении вопросов стабилизации будем пренебрегать вращением Земли и ее кривизной. Примем, что корабль движется с постоянной скоростью и постоянным курсом. В этих предположениях оси, связанные с траекторией корабля, можно считать инерциальными и условно неподвижными.

§ 1.3. Геометрия и кинематика качки корабля

1. Основные определения. Для определения положения корабля в пространстве при наличии вращательного движения корабля вокруг его центра тяжести и его поступательного колебательного движения введем следующие координатные системы:

1) система $O_0\xi\eta\zeta$ (рис. 1.3), оси которой неподвижны относительно Земли; ось $O_0\xi$ горизонтальна и направлена по линии заданного кораблю курса, ось $O_0\zeta$ направлена вертикально вниз, ось $O_0\eta$ горизонтальна, начало O_0 совпадает в исходный момент с центром тяжести (ц. т.) корабля O ;

2) система $O\xi\eta\zeta$, оси которой параллельны осям системы $O_0\xi\eta\zeta$ и движутся поступательно с кораблем; оси $O\xi\eta\zeta$ в дальнейшем именуется *земными*;

3) система $Oxyz$, оси которой связаны с кораблем.

Движение корабля на волнении можно разложить на поступательное вместе с ц. т. корабля O и на вращательное вокруг точки O . Положение ц. т. O корабля относительно системы $O_0\xi\eta\zeta$ характеризуется радиусом-вектором R_0 или тремя координатами ξ_0, η_0, ζ_0 точки O . Вращение корабля около ц. т. O , определяемое

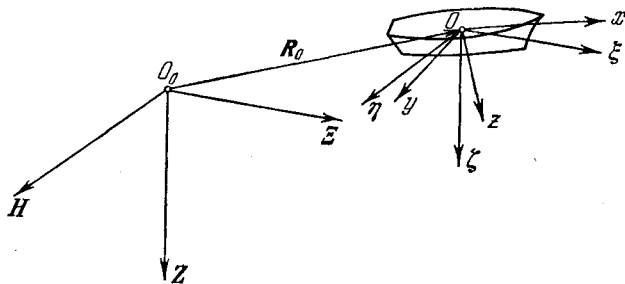


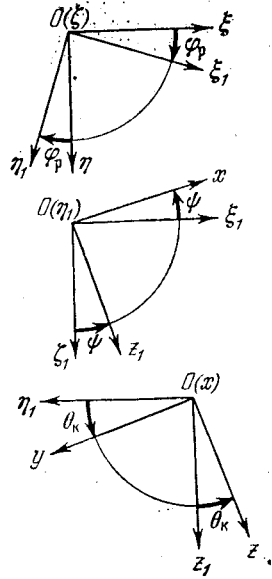
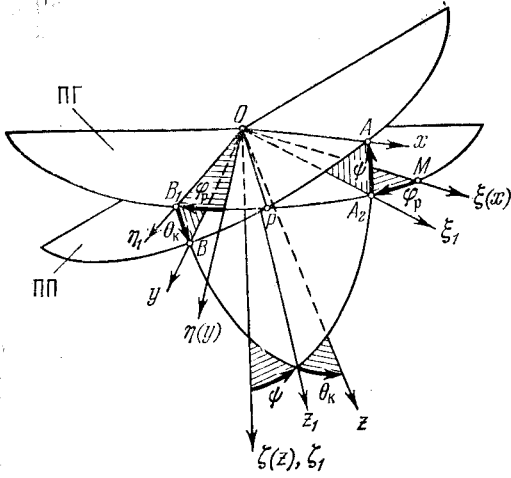
Рис. 1.3. К определению положения корабля при качке.

взаимным положением осей $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$, характеризуется тремя углами: рыскания φ_r , килевой качки ψ и бортовой качки θ_k .

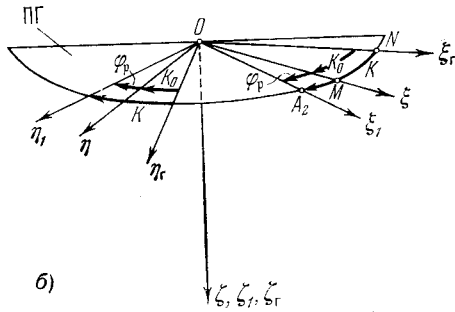
При рассмотрении геометрии качки корабля и стабилизации измерительных устройств мы будем пользоваться сферическими чертежами, на которых дугами больших кругов показаны соответствующие углы наклона корабля и наведения ИУ. На первом из таких чертежей (рис. 1.4) даны углы качки и рыскания (курса) корабля. Для пояснения принципа построения подобных сферических чертежей этот рисунок разбит на три: на рис. 1.4, а показаны углы качки и рыскания, при этом отдельно рассматриваются последовательные линейные преобразования координат, с помощью которых осуществляется преобразование системы $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$; на рис. 1.4, б даны углы, характеризующие курс корабля относительно географически ориентированных осей; на рис. 1.4, в показаны все углы, определяющие положение корабля относительно земных и географических осей.

Заметим, что большинство других сферических чертежей, приведенных в книге, базируется в основном на рис. 1.4, в с добавлением углов, характеризующих ориентацию и наведение различных измерительных устройств. Подобные чертежи при первоначальном ознакомлении кажутся несколько сложными, но при их освоении дают весьма наглядную картину геометрии качки основания, ориентации и наведения ИУ.

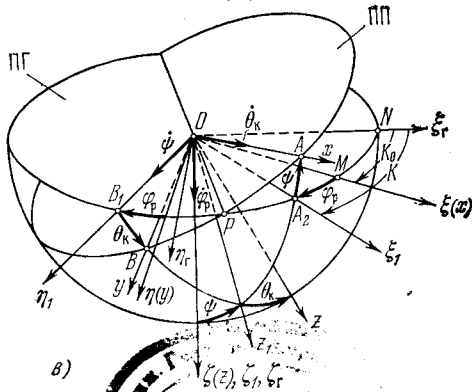
Оси системы координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 1.4, а и в) ориентированы подобно осям системы $O_0\xi\eta\zeta$. Оси системы $Oxyz$ направлены так, что Ox совпадает с продольной осью корабля, Oy — с поперечной



a)



б)



в)

Рис. 1.4. Углы качки φ_p , ψ , θ_k .

625081



осью, а Oz перпендикулярна к плоскости палубы (ПП) корабля. Взаимное положение координатных систем $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ определяется углами рыскания $\varphi_p = MA_2$, дифферента $\psi = A_2A$ и крена $\theta_k = B_1B$. Угол рыскания φ_p расположен в ПГ и заключен между осью $O\xi$ и проекцией OA_2 оси Ox на ПГ; угол дифферента (килевой качки) ψ расположен в вертикальной плоскости $OAA_2\xi$ и заключен между осью Ox и ее проекцией OA_2 на ПГ; угол крена (бортовой качки) θ_k расположен в плоскости шпангоута OB_1Bz и заключен между поперечной осью Oy и линией пересечения OB_1 плоскости шпангоута с ПГ.

Указанный способ выбора углов *) получил в последнее время широкое применение в теории качки корабля [7] и в различных ее приложениях [49, 70]. При решении задач стабилизации ИУ эти углы обладают рядом преимуществ [49] по сравнению с классическими углами Эйлера и корабельным выбором [42] эйлеровых углов: 1) углы φ_p , ψ , θ_k могут быть определены с помощью ГУ: угол φ_p — гироскопом направления (гиросазимут), а углы ψ и θ_k — гировертикалью; 2) углы φ_p , ψ определяют положение точки A_2 , лежащей на проекции OA_2 продольной оси корабля Ox на ПГ и являющейся нулем отсчета углов в ПГ (курсового угла на ориентир, курса корабля и др.); точка A_2 получается естественным путем при использовании в ИУ и других корабельных приборах карданова подвеса; 3) углы φ_p , ψ , θ_k в реальных условиях использования ИУ на корабле являются достаточно малыми, что позволяет при исследовании динамики корабля и систем стабилизации применять методы линейной теории колебаний.

2. Преобразования координат. Рассмотрим преобразование системы $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$. Обозначим через ξ^0 , η^0 , ζ^0 и x^0 , y^0 , z^0 единичные векторы соответствующих координатных осей. Составим таблицу направляющих косинусов

$$\begin{array}{c|ccc} & \xi^0 & \eta^0 & \zeta^0 \\ \hline x^0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y^0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z^0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad (1.1)$$

где направляющий косинус $a_{\mu\nu}$ равен скалярному произведению единичных векторов, расположенных в μ -й строке и в ν -м столбце (1.1), и равен косинусу угла между соответствующими единичными векторами, например,

$$a_{11} = x^0 \cdot \xi^0 = \cos(\widehat{x^0, \xi^0}), \quad a_{12} = x^0 \cdot \eta^0 = \cos(\widehat{x^0, \eta^0}), \dots, \quad a_{33} = z^0 \cdot \zeta^0 = \cos(\widehat{z^0, \zeta^0}).$$

*) Этот способ выбора углов применительно в качке корабля впервые предложил Е. Л. Бравин в 1943 г. (см. [70]).

Преобразование системы координат $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Преобразование (1.2) характеризуется матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

или более кратко

$$A = \| a_{\mu\nu} \| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \quad (1.4)$$

которая называется *матрицей преобразования координат* или *преобразующей матрицей*. Элементы матрицы A равны косинусам углов между единичными векторами ξ^0, η^0, ζ^0 и x^0, y^0, z^0 .

Преобразование (1.2) может быть записано в виде следующего матричного равенства:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Обозначая столбцевые матрицы

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix}$$

условно через $[x, y, z]$ и $[\xi, \eta, \zeta]$, вместо (1.5) получим

$$[x, y, z] = A [\xi, \eta, \zeta]. \quad (1.6)$$

Обратное преобразование координат по отношению к (1.2), т. е. преобразование системы $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$, можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ \eta &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ \zeta &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Преобразование (1.7) характеризуется матрицей

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

или

$$A^{-1} = \| a_{\mu\nu} \|^{-1} = \| a_{\nu\mu} \| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \quad \text{т. е.} \quad a_{\mu\nu}^{-1} = a_{\nu\mu}.$$

При преобразованиях координат, представляющих собой повороты прямоугольных систем координат, обратная матрица в

силу известных свойств ортогональных преобразований совпадает с транспонированной, т. е. $A^{-1} = A^T$ (T — символ транспонирования). Поэтому матрица A^{-1} (1.8) получается из матрицы A (1.3) путем замены строк столбцами.

Формулы преобразования (1.7) можно записать в виде матричного равенства

$$[\xi, \eta, \zeta] = A^{-1} [x, y, z]. \quad (1.9)$$

Рассмотрим преобразование земной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к корабельной $Oxyz$ (рис. 1.4, *a* и *в*). Перевод подвижной системы координат из исходного положения $O\xi(x)\eta(y)\zeta(z)$ в заданное положение $Oxyz$ может быть осуществлен тремя последовательными вращениями:

1) поворотом подвижных осей вокруг $O\zeta$ на угол рыскания корабля φ_p , при котором эти оси переходят из $O\xi\eta\zeta$ в положение $O\xi_1\eta_1\zeta$ путем преобразования

$$[\xi_1, \eta_1, \zeta] = A_{\varphi_p} [\xi, \eta, \zeta], \quad (1.10)$$

где матрица

$$A_{\varphi_p} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_p & \sin \varphi_p & 0 \\ -\sin \varphi_p & \cos \varphi_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (1.11)$$

2) поворотом подвижных осей вокруг $O\eta_1$ на угол дифферента корабля ψ , при котором эти оси переходят из $O\xi_1\eta_1\zeta$ в положение $Ox\eta_1z_1$ путем преобразования

$$[x, \eta_1, z_1] = A_{\psi} [\xi_1, \eta_1, \zeta], \quad (1.12)$$

где матрица

$$A_{\psi} = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}; \quad (1.13)$$

3) поворотом подвижных осей вокруг Ox на угол крена корабля θ_k , при котором оси $Ox\eta_1z_1$ переходят в положение $Oxyz$ путем преобразования

$$[x, y, z] = A_{\theta_k} [x, \eta_1, z_1], \quad (1.14)$$

где матрица

$$A_{\theta_k} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_k & \sin \theta_k \\ 0 & -\sin \theta_k & \cos \theta_k \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

В результате последовательного применения линейных преобразований получается также линейное преобразование, матрица которого является произведением матриц последовательных линейных преобразований.

Следовательно, матрица A преобразования (1.6) будет

$$A = A_{\theta_K} A_{\psi} A_{\varphi_P}. \quad (1.16)$$

Применяя известное правило умножения матриц к (1.16) и учитывая (1.11), (1.13) и (1.15), получим

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi_P \cos \psi & \sin \varphi_P \cos \psi & -\sin \psi \\ \cos \varphi_P \sin \psi \sin \theta_K - & \cos \varphi_P \cos \theta_K + & \\ -\sin \varphi_P \cos \theta_K & + \sin \varphi_P \sin \psi \sin \theta_K & \cos \psi \sin \theta_K \\ \sin \varphi_P \sin \theta_K + & \sin \varphi_P \sin \psi \cos \theta_K - & \\ + \cos \varphi_P \sin \psi \cos \theta_K & - \cos \varphi_P \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (1.17)$$

Углы φ_P , ψ и θ_K практически достаточно малы; ограничиваясь учетом слагаемых первого порядка малости, вместо (1.17) получим

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_P & -\psi \\ -\varphi_P & 1 & \theta_K \\ \psi & -\theta_K & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим полуподвижную систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ (рис. 1.4, а и в), повернутую относительно системы $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси $O\zeta$ на угол рыскания φ_P . При исследовании геометрии стабилизации ИУ система $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ часто принимается за опорную (базовую), так как ось $O\xi_1$ совпадает с проекцией OA_2 продольной оси корабля Ox на ПГ, а точка A_2 принимается за нуль отсчета углов в ПГ.

Преобразование системы $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ к $Oxyz$ можно представить в матричном виде

$$[x, y, z] = A_1 [\xi_1, \eta_1, \zeta_1]. \quad (1.19)$$

Так как перевод полуподвижной системы координат из положения $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ в положение $Oxyz$ осуществляется путем поворотов на углы ψ и θ_K , то матрица A_1 будет

$$A_1 = A_{\theta_K} A_{\psi}. \quad (1.20)$$

Принимая во внимание (1.13) и (1.15), получим

$$A_1 = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta_K & \cos \theta_K & \cos \psi \sin \theta_K \\ \sin \psi \cos \theta_K & -\sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

При малых углах ψ , θ_K вместо (1.21), ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\psi \\ 0 & 1 & \theta_K \\ \psi & -\theta_K & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

В некоторых задачах стабилизации в качестве базовой выбирают географическую систему координат $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ (рис. 1.4, б и в), у которой ось $O\xi_{\Gamma}$ направлена на север, ось $O\eta_{\Gamma}$ — на восток, а ось $O\zeta_{\Gamma}$ — по вертикали вниз. Ось $O\xi_{\Gamma}$ составляет с нулевой осью $O\xi_1$ (OA_2) *) угол $K = NA_2$, называемый *курсом корабля*. Угол, соответствующий курсу корабля K , расположен в ПГ и заключен между направлением ON на север и проекцией OA_2 продольной оси корабля Ox на ПГ. Курс корабля K определяется с помощью гироскопаса.

Рассмотрим ориентацию корабельных осей $Oxyz$ относительно географических $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$. Преобразование системы $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ к $Oxyz$ представим в матричном виде

$$[x, y, z] = A_{\Gamma} [\xi_{\Gamma}, \eta_{\Gamma}, \zeta_{\Gamma}], \quad (1.23)$$

где матрицу A_{Γ} можно получить из (1.17), если в ней заменить угол рыскания φ_p на курс корабля K ; тогда

$$A_{\Gamma} = \begin{vmatrix} \cos K \cos \psi & \sin K \cos \psi & -\sin \psi \\ \cos K \sin \psi \sin \theta_K - & \cos K \cos \theta_K + & \\ -\sin K \cos \theta_K & + \sin K \sin \psi \sin \theta_K & \cos \psi \sin \theta_K \\ \sin K \sin \theta_K + & \sin K \sin \psi \cos \theta_K - & \\ + \cos K \sin \psi \cos \theta_K & - \cos K \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

В согласии с рис. 1.4, б курс K можно представить в виде

$$K = K_0 + \varphi_p, \quad (1.25)$$

где $K_0 = NM$ — заданный кораблю курс, который может быть постоянным или изменяться по требуемому закону.

Так как $\varphi_p \ll K_0$ (при K_0 , отличном от нуля), то входящие в (1.24) $\sin K$ и $\cos K$ приближенно можно заменить следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \sin K &\cong \sin K_0 + \varphi_p \cos K_0, \\ \cos K &\cong \cos K_0 - \varphi_p \sin K_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

При движении корабля по локсодромии $K_0 = \text{const}$, при других режимах движения корабля $K_0(t)$ является медленно изменяющейся функцией времени по сравнению с изменением углов качки и рыскания. Определение на корабле угла рыскания φ_p весьма затруднительно. Поэтому при решении различных задач стабилизации, в частности азимутальной стабилизации, вместо угла φ_p используют курс корабля или азимут A , который определяется углом между произвольным в ПГ направлением и линией OA_2 (рис. 1.4, б).

*) Линию OA_2 иногда называют [27] *курсовой чертой* корабля.

3. Связь между углами качки корабля и другими параметрами. Помимо углов качки ψ и θ_K , в теории стабилизации часто используются углами качки ψ_K и θ (рис. 1.5). Через оси Ox и Oz проведена

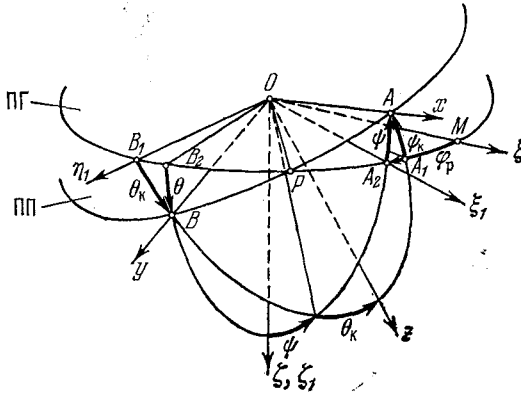


Рис. 1.5. Углы качки ψ_K и θ .

диаметральная плоскость корабля Oxz , перпендикулярная к ПП. Наклон в плоскости Oxz продольной оси Ox к ПП характеризуется углом килевой качки $\psi_K = \angle A_1A$, который заключен между осью Ox и линией OA_1 пересечения плоскости Oxz с ПП. Через оси Oz

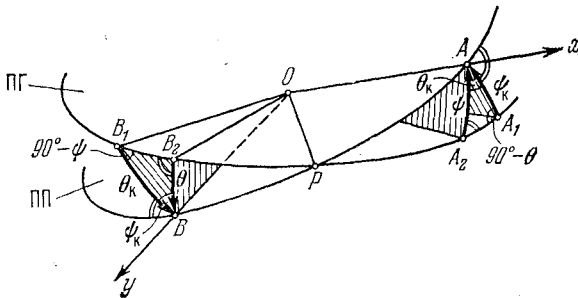


Рис. 1.6. Треугольники качки.

и Oy проведена вертикальная плоскость $Oy\zeta$. Наклон в плоскости $Oy\zeta$ поперечной оси Oy к ПП характеризуется углом бортовой качки $\theta = \angle B_2B$, который заключен между осью Oy и ее проекцией OB_2 на ПП.

Найдем связь между углами ψ_K , θ_K и ψ , θ . Для этого воспользуемся рис. 1.6, на котором изображены «треугольники качки»

AA_1A_2 и BB_1B_2 . Элементы этих треугольников следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_2A &= \psi, & B_2B &= \theta, \\ A_1A &= \psi_K, & B_1B &= \theta_K, \\ \sphericalangle A &= \theta_K, & \sphericalangle B &= \psi_K, \\ \sphericalangle A_1 &= 90^\circ - \theta, & \sphericalangle B_1 &= 90^\circ - \psi, \\ \sphericalangle A_2 &= 90^\circ, & \sphericalangle B_2 &= 90^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Из треугольников AA_1A_2 и BB_1B_2 с помощью формул сферической тригонометрии находим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{tg} \psi_K \cos \theta_K, \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg} \theta_K \cos \psi_K. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Пример 1.1. Положение палубы корабля при качке определяется углом дифферента $\psi=5^\circ$ и углом крена $\theta_K=15^\circ$ [27, 70]. Требуется определить углы качки ψ_K и θ .

Решение. 1) Из формул (1.28) находим угол ψ_K :

$$\psi_K = 5^\circ 11'.$$

2) По формулам (1.28) вычисляем угол θ :

$$\theta = 14^\circ 56'.$$

Из примера следует, что углы качки ψ_K и θ могут значительно отличаться от углов ψ и θ_K .

В зависимости от применяемых в ГВ типов карданова подвеса они определяют обычно углы ψ , θ_K или ψ_K , θ .

Формулы (1.28) можно записать в другом виде [27]:

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \psi_K \cos^2 \theta_K}} = \frac{\cos \psi_K}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_K \sin^2 \theta_K}}, \\ \sin \psi &= \operatorname{tg} \psi_K \cos \theta_K \frac{\cos \psi_K}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_K \sin^2 \theta_K}} = \frac{\sin \psi_K \cos \theta_K}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi_K \sin^2 \theta_K}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Обозначим

$$R = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_K \sin^2 \theta_K}, \quad (1.30)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{R} \cos \psi_K, \\ \sin \psi &= \frac{1}{R} \sin \psi_K \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{R} \cos \theta_K, \\ \sin \theta &= \frac{1}{R} \sin \theta_K \cos \psi_K. \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

Величина R близка к единице; так, для условий примера 1.1 $R = 0,99996$.

В теории карданова подвеса существенный интерес представляет угол $\gamma = A_1A_2 = B_1B_2$. Из рис. 1.6 следует, что

$$\gamma = 90^\circ - A_2B_2,$$

при этом

$$A_2B_2 = 90^\circ - A_1A_2 = 90^\circ - B_1B_2.$$

Из сферического треугольника AA_1A_2 имеем

$$\sin A_1A_2 = \sin \psi_K \sin \theta_K,$$

следовательно,

$$\sin \gamma = \sin \psi_K \sin \theta_K. \quad (1.33)$$

Формулу (1.33) иногда записывают в таком виде [27]:

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \psi_K \sin^2 \theta_K} = R. \quad (1.34)$$

При малых углах качки угол γ часто рассчитывают по приближенной формуле

$$\gamma \cong \psi_K \theta_K. \quad (1.35)$$

Пример 1.2. Определить угол γ при наклоне палубы корабля, характеризуемом углами качки $\psi = 5^\circ$, $\theta_K = 15^\circ$.

Решение.

1) Согласно примеру 1.1

$$\psi_K = 5^\circ 11'.$$

2) По формуле (1.33) находим значение угла γ

$$\gamma = 1^\circ 20'.$$

3) Вычислим значение угла γ по приближенной формуле (1.35)

$$\gamma = 1^\circ 21'.$$

Из примера видно, что угол γ является значительным. Погрешность в определении угла γ по приближенной формуле составила 1 *угл. мин.*, что в ряде случаев допустимо.

Иногда полезно представление углов качки корабля, приведенное на рис. 1.7. Здесь OE_0 ($-\zeta$) — направление вертикали места, а OE ($-z$) — нормали к ПП («мачта» корабля). Дуги, характеризующие углы качки $\psi = E_0E_1$, $\theta_K = E_1E$, $\theta = E_0E_2$, $\psi_K = E_2E$, являются сторонами сферического четырехугольника $E_0E_1EE_2$.

Положение палубы корабля можно также характеризовать некоторыми параметрами ν и χ , которые однозначно выражаются через углы качки и определяются следующим образом. Обозначим через OP (рис. 1.7) мгновенную ось вращения ПП относительно

кости Π (рис. 1.8), касательной к сфере в точке E_0 , рассматривая ψ и θ_K как компоненты вектора ν .

Предположим, что математические ожидания углов ψ и θ_K равны нулю (см. § 1.4). В соответствии с (1.40) и рис. 1.8 имеем

$$\nu = \psi u^0 + \theta_K v^0, \quad (1.41)$$

где u^0 и v^0 — единичные векторы соответствующих координатных осей. Так как *) $\bar{\psi} = \bar{\theta}_K = 0$, то математическое ожидание вектора ν будет

$$M[\nu] = 0, \quad (1.42)$$

т. е. нормаль OE (Oz) к ПП изменяет на качке свое положение относительно Земли таким образом, что в среднем совпадает с вертикалью места.

Параметры χ и ν не определяются на корабле с помощью ГУ, а могут быть вычислены по известным углам качки корабля. Поэтому углы χ и ν обычно не используются в системах стабилизации, а применяются иногда лишь при теоретических исследованиях.

При решении некоторых задач возникает необходимость определения разностей дуг ($AP - A_2P$) и ($PB - PB_2$) (рис. 1.7), обозначим их

$$\beta_x = AP - A_2P, \quad \beta_y = PB - PB_2.$$

Для них могут быть получены следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta_x &= \sin \psi_K \sin \theta_K \frac{\cos \theta}{1 + \cos \psi \cos \theta_K}, \\ \sin \beta_y &= \sin \psi_K \sin \theta_K \frac{\cos \psi}{1 + \cos \psi \cos \theta_K}. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

При малых углах качки приближенно имеем

$$\sin \beta_x = \sin \beta_y = \frac{1}{2} \sin \psi_K \sin \theta_K \quad (1.44)$$

или, учитывая формулу (1.33),

$$\sin \beta_x = \sin \beta_y = \frac{1}{2} \sin \gamma. \quad (1.45)$$

4. Некоторые соотношения из кинематики качки. Обозначим через ω мгновенную угловую скорость корабля. Из рис. 1.4, в

*) Здесь и далее чертой над буквой обозначается символ математического ожидания.

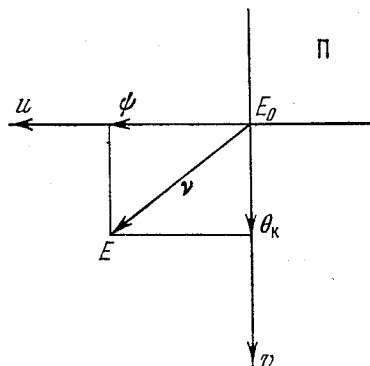


Рис. 1.8. Определение положения точки E на плоскости Π .

имеем

$$\omega = \phi_p \xi^0 + \psi \eta^0 + \dot{\theta}_K x^0 \quad (1.46)$$

или

$$\omega = \omega_x x^0 + \omega_y y^0 + \omega_z z^0, \quad (1.47)$$

где ω_x , ω_y и ω_z — проекции вектора ω на оси $Oxyz$, определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}_K - \phi_p \sin \psi, \\ \omega_y &= \phi_p \cos \psi \sin \theta_K + \dot{\psi} \cos \theta_K, \\ \omega_z &= \phi_p \cos \psi \cos \theta_K - \dot{\psi} \sin \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Принимая во внимание малые величины до второго порядка, получим

$$\omega_x = \dot{\theta}_K - \phi_p \dot{\psi}, \quad \omega_y = \dot{\psi} + \phi_p \dot{\theta}_K, \quad \omega_z = \phi_p - \dot{\psi} \theta_K \quad (1.49)$$

или с точностью до слагаемых первого порядка

$$\omega_x = \dot{\theta}_K, \quad \omega_y = \dot{\psi}, \quad \omega_z = \phi_p. \quad (1.50)$$

Обозначим угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.51)$$

Так как производная от угловой скорости ω по времени равна локальной производной, то будем иметь

$$\varepsilon_x = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_x = \frac{d\omega_x}{dt}, \quad \varepsilon_y = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_y = \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \varepsilon_z = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_z = \frac{d\omega_z}{dt}. \quad (1.52)$$

Тогда, согласно (1.48), получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \ddot{\theta}_K - \ddot{\phi}_p \sin \psi - \dot{\phi}_p \dot{\psi} \cos \psi, \\ \varepsilon_y &= \ddot{\phi}_p \cos \psi \sin \theta_K + \ddot{\psi} \cos \theta_K + \\ &\quad + \dot{\phi}_p (\dot{\theta}_K \cos \theta_K \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta_K) - \dot{\psi} \dot{\theta}_K \sin \theta_K, \\ \varepsilon_z &= \ddot{\phi}_p \cos \psi \cos \theta_K - \ddot{\psi} \sin \theta_K - \\ &\quad - \dot{\phi}_p (\dot{\psi} \sin \psi \cos \theta_K + \dot{\theta}_K \cos \psi \sin \theta_K) - \dot{\psi} \dot{\theta}_K \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Приближенно

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \ddot{\theta}_K - \ddot{\phi}_p \psi - \dot{\phi}_p \dot{\psi}, \\ \varepsilon_y &= \ddot{\psi} + \dot{\theta}_K \dot{\phi}_p + \dot{\phi}_p \dot{\theta}_K, \\ \varepsilon_z &= \ddot{\phi}_p - \ddot{\psi} \theta_K - \dot{\psi} \dot{\theta}_K, \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

откуда с точностью до слагаемых первого порядка

$$\varepsilon_x = \ddot{\theta}_K, \quad \varepsilon_y = \ddot{\psi}, \quad \varepsilon_z = \ddot{\phi}_p. \quad (1.55)$$

§ 1.4. Вероятностные характеристики качки и орбитального движения корабля

1. О морском волнении. Волнение в морях и океанах можно считать нормальным стационарным случайным процессом. В общем случае волнение моря является трехмерным [8, 46, 60, 79]. Характеристикой трехмерного волнения в первом приближении является двумерная корреляционная функция, дающая момент связи между ординатами волновой поверхности в различных точках моря для одного и того же значения времени. Для решения ряда прикладных задач, встречающихся в теории качки и стабилизации, допустим упрощенный подход, при котором волнение моря принимается двумерным*). При этом ордината $\zeta(t)$ волнового профиля является функцией двух переменных — линейной координаты рассматриваемой точки поверхности моря и времени. Исчерпывающей характеристикой функции $\zeta(t)$ служит корреляционная функция $K_\zeta(\tau)$ ординаты волнового профиля в данной точке моря или соответствующая ей спектральная плотность $S_\zeta(\omega)$. На основании статистической обработки материала по волнению (см., например, [7, 8, 46, 79]) корреляционную функцию $K_\zeta(\tau)$ можно представить в виде

$$K_\zeta(\tau) = A_\zeta e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right), \quad (1.56)$$

где $A_\zeta = K_\zeta(0) = D[\zeta(t)]$ — дисперсия ординат волнового профиля, характеризующая интенсивность волнения, μ — коэффициент затухания корреляционной функции, определяющий степень нерегулярности волнения, λ — частота изменения корреляционной функции, характеризующая преобладающую частоту системы волн. Корреляционная функция (1.56) и соответствующая ей спектральная плотность (индекс у A опускаем)¹

$$S_\zeta(\omega) = \frac{2A\mu}{\pi} \frac{b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (1.57)$$

где

$$a = \mu^2 - \lambda^2, \quad b^2 = \mu^2 + \lambda^2, \quad (1.58)$$

получены из опытных данных [8, 46, 60].

В теории морских волн [7, 8, 46, 60, 100] основной характеристикой двумерного стационарного волнения является спектральная плотность или энергетический спектр $S_\zeta(\omega)$, при этом параметры спектра являются функциями таких величин, как скорость ветра, продолжительность его действия, длина разгона волн и т. д.

*) Двумерное нерегулярное волнение можно представить как результат суперпозиции большого числа цилиндрических прогрессивных волн различной длины со случайными амплитудами, распространяющихся в одном и том же направлении [8].

В теории качки корабля на нерегулярном волнении (см., например, [7, 8, 16, 96]) обычно используются энергетические спектры типа (1.57) или в виде экспоненциальных зависимостей, устанавливающие в фиксированной точке поверхности моря связь между параметрами спектра и видимыми элементами волн (средняя высота, средний период волн), которые регистрируются в процессе наблюдения за волнением.

Входящая в формулы (1.56) и (1.57) дисперсия $D[\zeta(t)] = A$ связана с высотой волны трехпроцентной обеспеченности *) $h_{3\%}$ соотношением [8, 20]

$$D[\zeta(t)] = 0,143 \left(\frac{h_{3\%}}{2} \right)^2. \quad (1.59)$$

В табл. 1.1 [20] приводятся значения $h_{3\%}$ и $D[\zeta(t)]$ для балльности волнения, соответствующей шкале ГУ ГМС СССР 1953 г.

Таблица 1.1

Степень волнения, баллы	Характеристика волнения	Высота волны $h_{3\%}$, м	Дисперсия ординат волн $D[\zeta(t)]$, м ²
0	отсутствует	0	0
I	слабое	0—0,25	0—0,002
II	умеренное	0,25—0,75	0,002—0,020
III	значительное	0,75—1,25	0,020—0,056
IV	»	1,25—2,0	0,056—0,143
V	сильное	2,0—3,5	0,143—0,440
VI	»	3,5—6,0	0,440—1,285
VII	очень сильное	6,0—8,5	1,285—2,580
VIII	»	8,5—11,0	2,580—4,320
IX	исключительное	11,0 и более	4,32 и более

В формулах (1.56) и (1.57) параметры μ и λ могут колебаться в значительных пределах. В [8, 20] для μ и λ приводятся различные таблицы и графики, устанавливающие связь этих параметров с элементами видимых волн. По данным работы [68] приближенно

$$\mu = 0,21\lambda, \quad \lambda = 0,82\bar{\omega}, \quad (1.60)$$

где $\bar{\omega}$ — средняя частота волнения.

При расчете бортовой и килевой качки корабля возмущающим воздействием является угол волнового склона $\alpha(t)$. Связь между спектральными плотностями $S_\alpha(\omega)$ и $S_\zeta(\omega)$ для двумерного нере-

*) Под *обеспеченностью* понимается вероятность превышения случайной величиной x некоторого заданного значения x_0 . При экспериментальном определении характеристик волнения более надежным является нахождение некоторых средних величин (среднего арифметического значения амплитуд и др.), которые в предположении нормальности волнения функционально связаны с $h_{3\%}$.

гулярного волнения (угол α измеряется в направлении распространения волны) дается следующим соотношением [7, 8]:

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{\omega^4}{g^2} S_{\zeta}(\omega). \quad (1.61)$$

2. Общие уравнения качки корабля. При теоретическом определении вероятностных характеристик качки корабля необходимо пользоваться дифференциальными уравнениями колебаний корабля, которые можно разбить на две группы.

1) Уравнения движения ц. т. корабля, характеризующие его орбитальное движение,

$$m\ddot{\xi}_0 = F_{\Xi}, \quad m\ddot{\eta}_0 = F_{\text{H}}, \quad m\ddot{\zeta}_0 = F_{\text{Z}}, \quad (1.62)$$

где m — масса корабля, $\ddot{\xi}_0$, $\ddot{\eta}_0$, $\ddot{\zeta}_0$ — проекции ускорения ц. т. корабля на неподвижные оси $O_0\Xi\text{H}\text{Z}$ (рис. 1.3), F_{Ξ} , F_{H} , F_{Z} — составляющие главного вектора сил, действующих на корабль.

Поступательные движения корабля, определяемые первыми двумя уравнениями системы (1.62), называют *продольно-горизонтальными* и *поперечно-горизонтальными колебаниями*. Указанные движения корабля не приводят к появлению восстанавливающих сил, и поэтому ц. т. корабля на тихой воде не совершает колебаний вдоль осей $O_0\Xi$ и $O_0\text{H}$ (рис. 1.3); последние имеют место лишь на волнении вследствие колебательного движения воды. Третье уравнение системы (1.62) характеризует вертикальные колебания ц. т. корабля (вертикальную качку). Движение ц. т. корабля вдоль оси $O_0\text{Z}$ (рис. 1.3) сопровождается появлением восстанавливающих сил, поэтому вертикальные колебания корабля имеют место и на тихой воде.

2) Уравнения вращательного движения корабля относительно его ц. т., которые в линейной постановке имеют вид (индексы при θ и ϕ опускаем)

$$I_x\ddot{\theta} = M_x, \quad I_y\ddot{\phi} = M_y, \quad I_z\ddot{\psi} = M_z, \quad (1.63)$$

где I_x , I_y , I_z — главные моменты инерции массы корабля относительно осей Ox , Oy и Oz (рис. 1.3), M_x , M_y , M_z — составляющие главного момента сил, действующих на корабль.

Уравнения (1.63) характеризуют бортовую, килевую качку и рыскание корабля. Поворот корабля вокруг вертикальной оси $O\zeta$ (рис. 1.3) на тихой воде не сопровождается появлением восстанавливающего момента. Колебательный характер рыскания корабля на волнении возникает, например, вследствие перекадки руля.

3. Характеристики качки корабля. Качку корабля на нерегулярном волнении можно считать нормальным стационарным случайным процессом и характеризовать математическим ожиданием и корреляционной функцией. Для случайных функций качки

$\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$ (индексы опускаем) введем следующее обозначение:

$$x_i(t) [i = 1, 2, 3; x_1(t) = \psi(t), x_2(t) = \theta(t), x_3(t) = \varphi(t)]. \quad (1.64)$$

Математическое ожидание случайной функции $x_i(t)$ можно принять равным нулю *)

$$\bar{x}_i(t) = M[x_i(t)] = 0. \quad (1.65)$$

Корреляционная функция $K_x(\tau)$ (индекс опускаем) стационарного случайного процесса $x(t)$, характеризующая связь между ординатами случайного процесса при различных значениях аргумента, при равенстве нулю его математического ожидания определяется соотношением

$$K_x(\tau) = M[x(t)x(t + \tau)]. \quad (1.66)$$

Зная $K_x(\tau)$, можно найти еще одну важную характеристику качки корабля на нерегулярном волнении — спектральную плотность $S_x(\omega)$ случайной функции $x(t)$, которая определяет распределение интенсивности колебаний корабля по частотам. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ и спектральная плотность $S_x(\omega)$ связаны следующим соотношением [78]:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.67)$$

откуда можно получить выражение для $K_x(\tau)$ через $S_x(\omega)$:

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (1.68)$$

Дисперсия $D[x(t)]$ случайной функции $x(t)$, характеризующая интенсивность качки корабля на нерегулярном волнении, согласно (1.66) и (1.68), определяется формулой

$$D[x(t)] = K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (1.69)$$

Зная дисперсию $D[x(t)]$, можно найти среднеквадратичное значение σ_x углов качки по формуле

$$\sigma_x = \sqrt{D[x(t)]}. \quad (1.70)$$

При воздействии на ИУ, например, килевой и бортовой качки важно выявить взаимную зависимость случайных функций $\psi(t)$

*) Возможны случаи, когда $\bar{x}_i \neq 0$. Однако это не влияет, например, на расчет погрешностей ИУ при качке корабля, так как для стационарного процесса качки $\bar{\dot{x}}_i = \ddot{x}_i = 0$.

и $\theta(t)$, которая характеризуется взаимной корреляционной функцией

$$[K_{\psi\theta}(\tau) = M[\psi(t)\theta(t+\tau)]. \quad (1.71)$$

Помимо указанных выше вероятностных характеристик качки, иногда возникает необходимость в определении характеристик, связанных с выбросами функции $x(t)$ за заданный уровень x_0 (см., например, [8, 20, 70, 72, 78]).

4. Сущность теоретического расчета вероятностных характеристик качки. Для пояснения методики расчета найдем вероятностные характеристики бортовой качки корабля по известным вероятностным характеристикам волнения. При этом будем исходить из линейного уравнения качки (1.63). Нерегулярное волнение предполагается двумерным и характеризуется нормальной стационарной случайной функцией $\zeta(t)$ ординат волнового профиля; корабль расположен лагом к волне. Уравнение бортовой качки запишем в виде *)

$$\ddot{\theta} + 2h\dot{\theta} + \omega_2^2\theta = \omega_2^2\alpha(t), \quad (1.72)$$

где h — коэффициент, характеризующий сопротивление воды качаниям корабля, ω_2 — собственная частота бортовой качки корабля, $\alpha(t)$ — угол волнового склона, спектральная плотность $S_\alpha(\omega)$ которого связана со спектральной плотностью $S_\zeta(\omega)$ выражением (1.61).

Так как случайная функция $\alpha(t)$ является нормальной и стационарной с равным нулю математическим ожиданием, а уравнение (1.72) — линейное с постоянными коэффициентами, то аналогичными свойствами обладает случайная функция $\theta(t)$ и ее вероятностной характеристикой служит корреляционная функция $K_\theta(\tau)$ или спектральная плотность $S_\theta(\omega)$. Наиболее просто определяется выражение для $S_\theta(\omega)$; имеем

$$S_\theta(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_\alpha(\omega), \quad (1.73)$$

где $\Phi(j\omega)$ — частотная характеристика корабля.

В согласии с уравнением (1.72)

$$|\Phi(j\omega)|^2 = \frac{\omega_2^4}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}. \quad (1.74)$$

Вводя (1.74) в (1.73), получим

$$S_\theta(\omega) = \frac{\omega_2^4}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} S_\alpha(\omega). \quad (1.75)$$

*) Входящий обычно в правую часть уравнения (1.72) редукционный коэффициент κ_0 принимаем равным единице.

Из формулы (1.75) следует, что если ордината кривой спектральной плотности $S_\alpha(\omega)$ в точке $\omega = \omega_2$ не очень мала, а ординаты кривой $|\Phi(j\omega)|^2$ в области максимальных значений $S_\alpha(\omega)$ малы, то при достаточно малом значении коэффициента затухания h спектральная плотность $S_\theta(\omega)$ углов бортовой качки будет иметь максимум вблизи точки $\omega = \omega_2$. Наличие этого максимума, как впервые было показано А. А. Свешниковым [77], приводит к возникновению своеобразного статистического резонанса, при котором корабль под действием нерегулярного волнения будет совершать колебания с частотами, близкими к собственной частоте колебаний ω_2 , и со случайным значением амплитуд, т. е. должна наблюдаться как раз та картина качки корабля, которая имеет место в реальных условиях.

Зная $S_\theta(\omega)$, по формуле (1.69) можно определить дисперсию $D[\theta(t)]$ углов крена

$$D[\theta(t)] = 2 \int_0^{\infty} S_\theta(\omega) d\omega \quad (1.76)$$

или, учитывая (1.75), (1.61), (1.57), имеем

$$D[\theta(t)] = 2 \int_0^{\infty} \frac{\omega_2^4}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \frac{2A\mu}{\pi g^2} \frac{b^2\omega^4}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^2} d\omega. \quad (1.77)$$

Здесь ω_2 , h являются характеристиками корабля, а A , μ , b — характеристиками волнения. Для расчета дисперсии $D[\theta(t)]$ можно воспользоваться теорией вычетов или табличными интегралами (см., например, [67, 83] и § 10.6 настоящей книги).

Для пояснения некоторых особенностей нерегулярной качки корабля рассмотрим наиболее простой случай, приведенный в работе [93]. Следуя ей, примем, что для узкой резонансной кривой колебаний корабля, определяемой $|\Phi(j\omega)|^2$, для значений $|\Phi(j\omega)|^2$, существенно отличных от нуля, спектральная плотность $S_\alpha(\omega)$ изменяется мало и в диапазоне частот, мало удаленном от точки $\omega = \omega_2$, остается практически постоянной, т. е. $S_\alpha(\omega) = S_\alpha(\omega_2) = \text{const}$. В этом случае формула (1.75) переписывается в виде

$$S_\theta(\omega) = \frac{\omega_2^4}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} S_\alpha(\omega_2), \quad (1.78)$$

откуда следует, что характер кривой спектральной плотности $S_\theta(\omega)$ при равномерном спектре $S_\alpha(\omega_2)$ определяется формой резонансной кривой качки корабля.

Подставляя (1.78) в (1.68), получим выражение для корреляционной функции $K_\theta(\tau)$ углов крена корабля в виде [93]

$$K_\theta(\tau) = A_2 e^{-\mu_2|\tau|} \left(\cos \lambda_2 \tau + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 |\tau| \right), \quad (1.79)$$

где $A_2 = K_\theta(0) = D[\theta(t)]$ — дисперсия углов крена, $\mu_2 = h$ — коэффициент, характеризующий степень нерегулярности качки, $\lambda_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \mu_2^2}$ — преобладающая частота качки на нерегулярном волнении, близкая к частоте ω_2 собственных колебаний корабля.

Выражение (1.79) достаточно хорошо согласуется с результатами статистической обработки натуральных записей бортовой качки кораблей. При этом параметры A_2, μ_2, λ_2 определяются из опытных данных.

Выше предполагалось, что корабль расположен лагом к системе двумерных волн. В этом случае ход корабля, естественно, не учитывается. При движении корабля под некоторым углом к направлению бега волн расчет спектра качки корабля существенно усложняется [100], при этом приходится использовать понятие о псевдоспектре [8].

При исследованиях и расчетах по стабилизации ИУ представляется нецелесообразным применять теоретический метод расчета качки корабля на нерегулярном волнении, а следует в основном пользоваться характеристиками качки, полученными из статистической обработки соответствующих натуральных записей. Поэтому более подробные сведения по теории нерегулярной качки корабля не приводятся (см., например, [7, 8, 16, 77, 79, 93, 100]).

5. Определение вероятностных характеристик качки из опытных данных. Вопросы, связанные с определением аналитических зависимостей для вероятностных характеристик качки и числовых значений соответствующих параметров путем статистической обработки натуральных записей качки кораблей, излагаются в ряде работ (см., например, [8, 20, 68, 70, 77, 86, 100]), которые используются ниже.

На рис. 1.9 приведена примерная запись $\theta(t)$ углов крена корабля на нерегулярном волнении; аналогичный вид имеют функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$. Полученные из наблюдений случайные функции $x_i(t)$ (см. (1.64)) обрабатывают на специальном приборе — корреляторе [83], в результате чего находят корреляционную функцию углов качки корабля или соответствующую ей нормированную корреляционную функцию

$$r_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{K_x(0)}. \quad (1.80)$$

На рис. 1.10 приведена нормированная корреляционная функция $r_\theta(\tau)$ углов крена корабля. Нормированная корреляционная

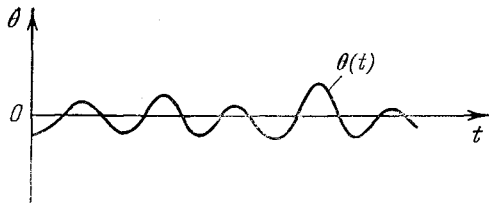


Рис. 1.9. Запись углов крена корабля на нерегулярном волнении.

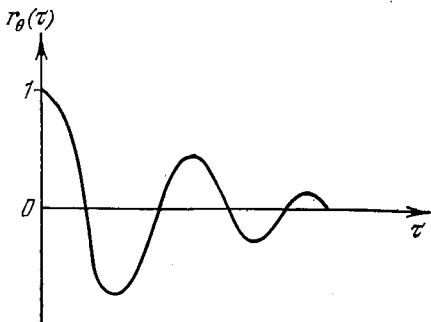
функция углов качки и рыскания может быть аппроксимирована формулой

$$r_x(\tau) = e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right), \quad (1.84)$$

где физический смысл параметров μ и λ был указан ранее (см. (1.79)); для бортовой и килевой качки λ приближенно равна соответствующим частотам собственных колебаний корабля. Подставляя (1.84) в (1.80) и обозначая $K_x(0) = D[x(t)] = A$, получим выражение для корреляционной функции $K_x(\tau)$ в виде

$$K_x(\tau) = A e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right). \quad (1.82)$$

Рис. 1.10. Нормированная корреляционная функция углов крена корабля,



Численные значения коэффициентов A , μ , λ устанавливаются путем статистической обработки натуральных записей качки кораблей (см., например, [8, 20, 77, 86]). Вывод о близости параметра λ для бортовой и килевой качки к соответствующим частотам собственных колебаний корабля [77] подтверждается материалами [70], полученными при исследовании качки парохода «Сан-Франциско» в Атлантическом океане. На рис. 1.11 дана диаграмма распределения периодов бортовой, килевой и вертикальной качки этого судна при переменных курсовых углах. Пики кривых на диаграмме приблизительно соответствуют периодам собственных колебаний корабля. По оси абсцисс указаны периоды колебаний, а по оси ординат — число колебаний в течение одного часа.

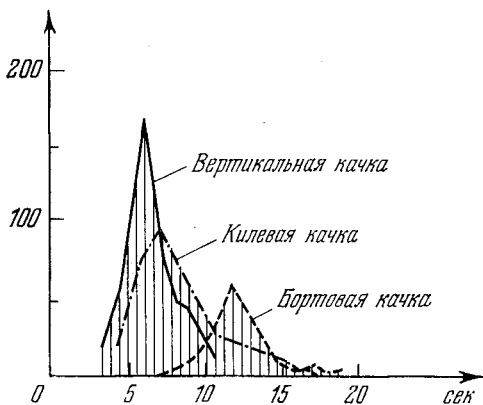


Рис. 1.11. Диаграмма распределения периодов бортовой, килевой и вертикальной качки парохода «Сан-Франциско».

Помимо корреляционных функций качки, понадобятся выражения для спектральных плотностей углов качки и рыскания

корабля. Подставляя (1.82) в (1.67), после интегрирования получим

$$S_x(\omega) = \frac{A\mu}{2\pi\lambda} \left[\frac{2\lambda + \omega}{\mu^2 + (\omega + \lambda)^2} + \frac{2\lambda - \omega}{\mu^2 + (\omega - \lambda)^2} \right], \quad (1.83)$$

или

$$S_x(\omega) = \frac{2A\mu}{\pi} \frac{b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (1.84)$$

где

$$a = \mu^2 - \lambda^2, \quad b^2 = \mu^2 + \lambda^2. \quad (1.85)$$

Пример 1.3. Построить график спектральной плотности $S_\theta(\omega)$ углов крена корабля для следующих исходных данных: дисперсия $A_2 = D[\theta(t)] = 1,674 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2$, $\mu_2 = 0,1 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda_2 \cong \omega_2 = 0,7 \text{ сек}^{-1}$ (ω_2 — собственная частота бортовой качки).

Решение.

1) Согласно (1.85) определяем a и b^2 :

$$a = \mu^2 - \lambda^2 = 0,1^2 - 0,7^2 = -0,48 \text{ сек}^{-2},$$

$$b^2 = \mu^2 + \lambda^2 = 0,1^2 + 0,7^2 = 0,5 \text{ сек}^{-2}.$$

2) По формуле (1.84) для различных значений ω вычисляем ординаты спектральной плотности $S_\theta(\omega)$ и строим ее график (рис. 1.12).

График показывает, что функция $S_\theta(\omega)$ достигает максимума при $\omega = \lambda_2 \cong \omega_2$, т. е. преобладающая частота бортовой качки корабля на нерегулярном волнении приблизительно равна частоте его собственных колебаний.

Так как углы качки корабля следуют нормальному закону распределения вероятностей, то плотность вероятности определяется формулой (при $\bar{x} = 0$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (1.86)$$

При совместном воздействии на ИУ килевой и бортовой качки важно выявить взаимную связанность случайных функций $\psi(t)$ и $\theta(t)$, которая характеризуется взаимной корреляционной функцией

$$K_{\psi\theta}(\tau) = M[\psi(t)\theta(t+\tau)]. \quad (1.87)$$

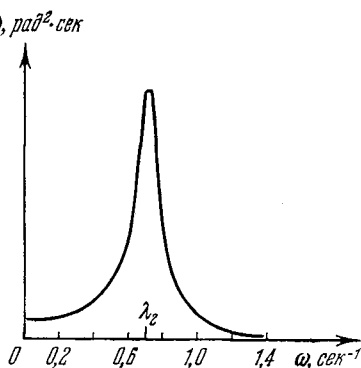


Рис. 1.12. График спектральной плотности $S_\theta(\omega)$.

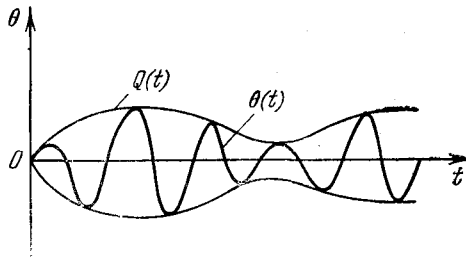
Обычно принимается [77], что килевая и бортовая качка корабля на нерегулярном волнении являются несвязанными случайными функциями, т. е.

$$K_{\varphi\theta}(\tau) = 0. \quad (1.88)$$

Для большинства прикладных задач *) аналогичное имеем в отношении связанности случайных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а также $\varphi(t)$ и $\theta(t)$, т. е.

$$K_{\varphi\psi}(\tau) = 0, \quad K_{\varphi\theta}(\tau) = 0. \quad (1.89)$$

Для определения характеристик качки корабля на нерегулярном волнении можно также воспользоваться «методом огибающей» [12, 78]. Подобный



подход к исследованию качки используется в работе [93]. В согласии с указанным методом закон изменения, например, углов крена корабля можно представить в виде (рис. 1.13)

$$\theta(t) = Q(t) \cos \Phi(t), \quad (1.90)$$

Рис. 1.13. Огибающая углов крена корабля.

где $Q(t)$ — амплитуда или огибающая случайного процесса, $\Phi(t)$ — фаза колебаний. Представление $\theta(t)$ в виде (1.90) особенно целесообразно, когда кривая спектральной плотности имеет резко выраженный максимум, как это имеет место в случае бортовой качки (рис. 1.12). Фазу $\Phi(t)$ можно записать в виде

$$\Phi(t) = \lambda_2 t - \nu(t). \quad (1.91)$$

Тогда вместо (1.90) получим

$$\theta(t) = Q(t) \cos [\lambda_2 t - \nu(t)]. \quad (1.92)$$

Следовательно, в случае узкополосного случайного процесса со спектральной плотностью $S_\theta(\omega)$, имеющей максимум в точке $\omega = \lambda_2 \cong \omega_2$, функцию $\theta(t)$ можно представить как «синусоиду» с круговой частотой λ_2 , причем ее амплитуда $Q(t)$ и фаза $\nu(t)$ являются медленно изменяющимися функциями времени.

Для нормальных стационарных случайных функций законы распределения вероятностей для огибающей (амплитуды) и для

*) Возможны случаи $K_{\varphi\theta}(\tau) \neq 0$, тогда $K_{\varphi\theta}(\tau)$ определяется из опытных данных или теоретически.

фазы будут

$$f(Q) = \frac{Q}{\sigma_\theta^2} e^{-\frac{Q^2}{2\sigma_\theta^2}}, \quad (1.93)$$

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad (1.94)$$

т. е. амплитуда подчиняется закону распределения Релея, а фаза Φ в интервале $(0, 2\pi)$ имеет равномерный закон распределения.

Приведенные выше выражения позволяют определить среднее значение амплитуды бортовой качки

$$\bar{Q} \cong 1,25 \sigma_\theta, \quad (1.95)$$

среднее значение квадрата амплитуды

$$\bar{Q}^2 = 2\sigma_\theta^2 \quad (1.96)$$

и дисперсию амплитуды

$$D[Q(t)] \cong 0,428 D[\theta(t)]. \quad (1.97)$$

Среднее значение абсолютной величины производной фазы по времени равно

$$\bar{\dot{\omega}} = |\dot{\Phi}| = \omega_{II}, \quad (1.98)$$

где ω_{II} определяется формулой [12, 78]

$$\omega_{II}^2 = \frac{2}{\sigma_\theta^2} \int_0^\infty \omega^2 S_\theta(\omega) d\omega. \quad (1.99)$$

Для спектральной плотности $S_\theta(\omega)$ (1.84) $\omega_{II}^2 = b^2 = \mu^2 + \lambda^2$; при $\mu/\lambda < 1$ и $\lambda \cong \omega_2$ имеем $\omega_{II} \cong \omega_2$. Тогда, согласно (1.98).

$$\bar{\dot{\omega}} = \omega_2, \quad (1.100)$$

т. е. средняя частота нерегулярной качки равна частоте ω_2 собственных колебаний корабля.

Пример 1.4. Определить математическое ожидание и дисперсию \bar{Q} и $D[Q(t)]$ амплитуды бортовой качки, если средне-квадратичное значение угла крена корабля $\sigma_\theta = 5^\circ$.

Решение.

1) По формуле (1.95) определяем среднее значение амплитуды бортовой качки

$$\bar{Q} = 1,25 \sigma_\theta = 1,25 \cdot 5 = 6^\circ 15'.$$

2) Согласно выражению (1.97) находим дисперсию амплитуды

$$D[Q(t)] = 0,428 D[\theta(t)] = 0,428 \sigma_\theta^2 = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ рад}^2.$$

6. Вероятностные характеристики угловых скоростей и угловых ускорений качки. При исследовании и расчетах по стабилизации ИУ необходимо знать вероятностные характеристики угловых скоростей $\dot{x}(t)$ и угловых ускорений $\ddot{x}(t)$ качки, являющихся производными случайного процесса $x(t)$. Корреляционная функция $K_{\dot{x}}(\tau)$ случайной функции $\dot{x}(t)$ определяется формулой [78]

$$K_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau). \quad (1.101)$$

Пользуясь (1.82) и учитывая (1.85), имеем

$$K_{\dot{x}}(\tau) = Ab^2 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau - \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right). \quad (1.102)$$

Дисперсия $D[\dot{x}(t)]$ случайной функции $\dot{x}(t)$ определяется выражением

$$D[\dot{x}(t)] = K_{\dot{x}}(0) = b^2 D[x(t)] = (\mu^2 + \lambda^2) D[x(t)], \quad (1.103)$$

откуда

$$\sigma_{\dot{x}} = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2} \sigma_x = b \sigma_x. \quad (1.104)$$

Корреляционная функция $K_{\dot{x}}(\tau)$ является корреляционной функцией недифференцируемого процесса (производная от $K_x(\tau)$ терпит разрыв в точке $\tau = 0$) и, следовательно, повторное применение формулы (1.101) для нахождения $K_{\ddot{x}}(\tau)$ при принятой аппроксимации (1.82) невозможно.

Приближенное значение величины дисперсии углового ускорения $\ddot{x}(t)$ можно получить, если принять, что корреляционная функция угловой скорости $\dot{x}(t)$ также достаточно хорошо аппроксимируется выражением (1.82). В этом случае, учитывая (1.85), получим

$$D[\ddot{x}(t)] \cong (\mu^2 + \lambda^2) D[\dot{x}(t)] \cong (\mu^2 + \lambda^2)^2 D[x(t)] \cong b^4 D[x(t)], \quad (1.105)$$

откуда

$$\sigma_{\ddot{x}} \cong (\mu^2 + \lambda^2) \sigma_{\dot{x}} \cong b^2 \sigma_x. \quad (1.106)$$

Для определения спектральной плотности угловой скорости качки следует пользоваться соотношением [78]

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (1.107)$$

Тогда для дисперсии $D[\dot{x}(t)]$, учитывая (1.69), получим

$$D[\dot{x}(t)] = 2 \int_0^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (1.108)$$

Подставляя сюда (1.84), найдем выражение, совпадающее с (1.103)

Для спектральной плотности $S_{\ddot{x}}(\omega)$ угловых ускорений качки $\ddot{x}(t)$ в общем случае справедлива формула, аналогичная (1.107), т. е.

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega). \quad (1.109)$$

Однако при принятой аппроксимации (1.82) функция $x(t)$ не дифференцируема дважды и, следовательно, формулу (1.109) нельзя применять при определении дисперсии $D[\ddot{x}(t)]$, так как интеграл $2\int_0^\infty \omega^4 S_x(\omega) d\omega$ стремится к бесконечности. Тем не менее формулу (1.109) можно использовать, например, при рассмотрении вопросов, связанных с прохождением случайной функции $\ddot{x}(t)$ через динамическую систему.

При решении ряда задач анализа и синтеза необходимо знать взаимные корреляционные функции случайных функций $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, а также $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$. Согласно определению

$$K_{x\dot{x}}(\tau) = M[x(t)\dot{x}(t+\tau)] = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau). \quad (1.110)$$

Тогда, учитывая (1.82) и (1.85), получаем

$$K_{x\dot{x}}(\tau) = -A \frac{b^2}{\lambda} e^{-\mu|\tau|} \sin \lambda\tau, \quad (1.111)$$

откуда

$$K_{x\dot{x}}(0) = 0, \quad (1.112)$$

т. е. взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной, взятых для одного и того же момента времени, равна нулю *).

Аналогичным образом взаимная корреляционная функция $K_{x\ddot{x}}(\tau)$ случайных функций $x(t)$ и $\ddot{x}(t)$ будет иметь вид

$$K_{x\ddot{x}}(\tau) = M[x(t)\ddot{x}(t+\tau)] = \frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau), \quad (1.113)$$

откуда, учитывая (1.101) и (1.102), получим

$$K_{x\ddot{x}}(\tau) = -Ab^2 e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda\tau - \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda|\tau| \right), \quad (1.114)$$

поэтому

$$K_{x\ddot{x}}(0) = -b^2 A = -b^2 D[x(t)]. \quad (1.115)$$

Для взаимных спектральных плотностей $S_{x\dot{x}}(\omega)$ и $S_{x\ddot{x}}(\omega)$ могут быть получены следующие формулы [80]:

$$S_{x\dot{x}}(\omega) = j\omega S_x(\omega), \quad S_{x\ddot{x}}(\omega) = -\omega^2 S_x(\omega). \quad (1.116)$$

Пример 1.5. Вычислить вероятностные характеристики угловых скоростей и угловых ускорений бортовой качки корабля

*) Это свойство справедливо при любом виде корреляционной функции $K_x(\tau)$ и является следствием ее четности [98].

на нерегулярном волнении, если среднеквадратичное значение угла крена $\sigma_\theta = 5^\circ$, частота собственных колебаний корабля $\omega_2 = 0,7 \text{ сек}^{-1}$, коэффициент $\mu = 0,1 \text{ сек}^{-1}$.

Р е ш е н и е.

1) По формуле (1.104) определяем среднеквадратичное значение угловой скорости качки ($\lambda \cong \omega_2$)

$$\sigma_{\dot{\theta}} = 3,55 \text{ град/сек};$$

так как $\mu < \lambda$, то приближенно

$$\sigma_{\ddot{\theta}} = \lambda \sigma_{\dot{\theta}} = 0,7 \cdot 5 = 3,5 \text{ град/сек},$$

что мало отличается от точного значения.

2) С помощью выражения (1.106) вычисляем среднеквадратичное значение углового ускорения качки

$$\sigma_{\ddot{\theta}} = 2,50 \text{ град/сек}^2;$$

приближенно

$$\sigma_{\ddot{\theta}} = \lambda^2 \sigma_{\dot{\theta}} = 0,7^2 \cdot 5 = 2,45 \text{ град/сек}^2,$$

что мало отличается от истинного значения.

7. Вероятностные характеристики орбитального движения ц. т. корабля. Параметры орбитального движения ц.т. корабля, определяемые координатами $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$, $\zeta_0(t)$ вдоль осей системы координат $O_0 \Xi \Pi \Sigma$ (рис. 1.3), в условиях нерегулярного волнения являются случайными функциями времени. На основании общей характеристики этих движений ц.т. корабля (см. п. 2) можно заключить, что случайные функции $\xi_0(t)$ и $\eta_0(t)$ не являются стационарными, в то время как $\zeta_0(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию. В дальнейшем представляют интерес линейные скорости $\dot{\xi}_0(t)$, $\dot{\eta}_0(t)$, $\dot{\zeta}_0(t)$ и ускорения $\ddot{\xi}_0(t)$, $\ddot{\eta}_0(t)$, $\ddot{\zeta}_0(t)$ ц. т. корабля, которые являются стационарными случайными функциями. На рис. 1.14 приведены примерные записи ускорений $\ddot{\xi}_0(t)$, $\ddot{\eta}_0(t)$, $\ddot{\zeta}_0(t)$ научно-исследовательского судна «Академик Курчатов» [50]. Обработка этих записей на корреляторе позволяет получить корреляционные функции указанных случайных процессов. На рис. 1.15 в качестве примера дан график нормированной корреляционной функции $r_{\eta_0}(\tau)$. Из рис. 1.14 следует, что ординаты функции $\ddot{\xi}_0(t)$ существенно меньше ординат функций $\ddot{\eta}_0(t)$ и $\ddot{\zeta}_0(t)$, поэтому в большинстве случаев продольно-горизонтальные движения ц.т. корабля не учитывают.

Для случайных функций $\ddot{\xi}_0(t)$, $\ddot{\eta}_0(t)$, $\ddot{\zeta}_0(t)$ введем следующее обозначение:

$$\dot{y}_i(t) [i = 1, 2, 3; \dot{y}_1(t) = \dot{\xi}_0(t), \dot{y}_2(t) = \dot{\eta}_0(t), \dot{y}_3(t) = \dot{\zeta}_0(t)]. \quad (1.117)$$

Корреляционные функции случайных функций $\dot{y}(t)$ (индекс i опускаем) имеют вид [80]

$$K_{\dot{y}}(\tau) = A_{\dot{y}} e^{-\mu_{\dot{y}}|\tau|} \left(\cos \lambda_{\dot{y}}\tau + \frac{\mu_{\dot{y}}}{\lambda_{\dot{y}}} \sin \lambda_{\dot{y}}|\tau| \right), \quad (1.118)$$

где физический смысл параметров $A_{\dot{y}}$, $\mu_{\dot{y}}$ и $\lambda_{\dot{y}}$ тот же, что и в

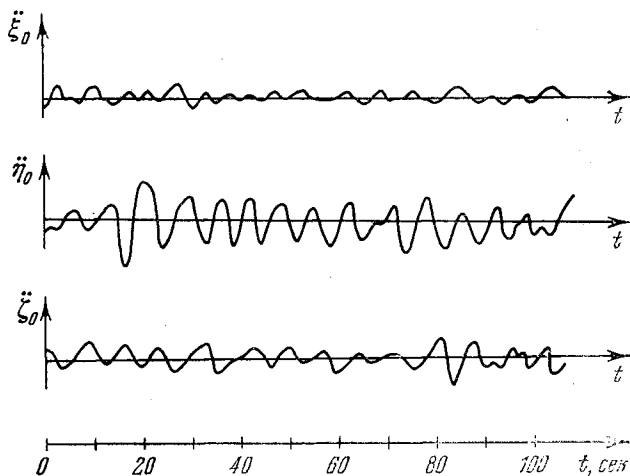


Рис. 1.14. Запись линейных ускорений центра тяжести корабля на волнении.

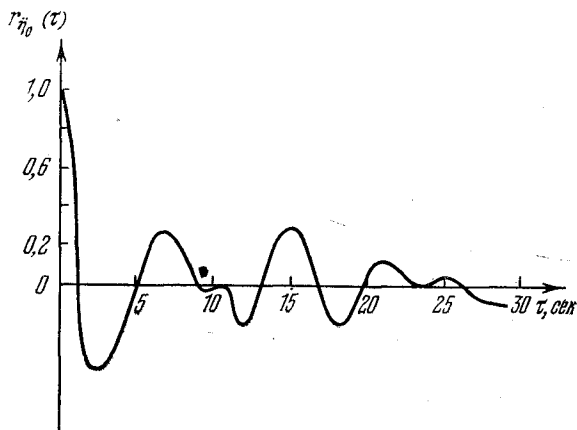


Рис. 1.15. Нормированная корреляционная функция горизонтально-поперечных ускорений центра тяжести корабля.

формуле (1.56). Для приближенных расчетов дисперсию $A_{\dot{y}} = K_{\dot{y}}(0) = D[\dot{y}(t)]$ линейной скорости ц. т. корабля можно

определять по формуле

$$A_y = D [\dot{y}(t)] \cong \lambda^2 D [\zeta(t)], \quad (1.119)$$

где λ — преобладающая частота системы нерегулярных волн, которая предполагается заданной, $D [\zeta(t)]$ — дисперсия ординат волнового профиля, определяемая в зависимости от балльности волнения по табл. 1.1.

При более строгом подходе, например, для случая двумерного волнения, следует принимать [70]

$$\left. \begin{aligned} A_{\xi_0} &= D [\xi_0(t)] = \lambda^2 \cos^2 q_B D [\eta(t)], \\ A_{\eta_0} &= D [\eta_0(t)] = \lambda^2 \sin^2 q_B D [\eta(t)], \\ A_{\zeta_0} &= D [\zeta_0(t)] = \lambda^2 D [\zeta(t)], \end{aligned} \right\} \quad (1.120)$$

где q_B — курсовой угол корабля к волне, $D [\eta(t)] \cong D [\zeta(t)]$ — дисперсия горизонтальной составляющей колебательного движения воды.

Параметры μ_y и λ_y в формуле (1.118) приближенно можно принять равными соответственно параметрам μ и λ нерегулярного волнения (см. (1.56)), которые определяются из опытных данных (см., например, [8, 20, 46, 60, 68, 77, 86]).

Для более полного решения задачи необходимо располагать записями реализаций случайной функции $\dot{y}(t)$ и определять параметры A_y , μ_y , λ_y путем их статистической обработки. Преобладающую частоту λ_y вертикальных колебаний $\zeta_0(t)$ ц.т. корабля в ряде случаев можно принимать равной частоте собственных вертикальных колебаний корабля, которая близка к собственной частоте ω_1 килевой качки.

Для корреляционной функции $K_y(\tau)$ ускорений $\ddot{y}(t)$ орбитального движения ц.т. корабля, по аналогии с (1.102), можно пользоваться формулой

$$K_y(\tau) = A_y b_y^2 e^{-\mu_y |\tau|} \left(\cos \lambda_y \tau - \frac{\mu_y}{\lambda_y} \sin \lambda_y |\tau| \right), \quad (1.121)$$

где

$$b_y^2 = \mu_y^2 + \lambda_y^2, \quad b_y^2 A_y = b_y^2 D [\dot{y}(t)] = D [\ddot{y}(t)]. \quad (1.122)$$

С более подробными сведениями об орбитальном движении ц.т. корабля на нерегулярном волнении можно познакомиться в ряде работ (см., например, [8, 20, 21, 50, 68, 77, 86]).

При расчетах ИУ для условий нерегулярного волнения будем полагать, что случайные функции, характеризующие качку, не связаны в вероятностном смысле со случайными функциями, характеризующими орбитальное движение ц.т. корабля.

8. Другие виды корреляционных функций случайных воздействий. Полезные сигналы и возмущающие воздействия в ИУ могут иметь корреляционные функции, отличающиеся от (1.82). Возможна корреляционная функция вида

$$K_x(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|} \cos \lambda\tau. \quad (1.123)$$

Вводя (1.123) в (1.67), находим соответствующее выражение спектральной плотности

$$S_x(\omega) = \frac{A\mu}{\pi} \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}. \quad (1.124)$$

В дальнейшем будут рассматриваться случайные функции, корреляционная функция которых имеет вид

$$K_x(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|}. \quad (1.125)$$

Подобная корреляционная функция характеризует угловую скорость ухода некоторых типов гироскопических устройств. Вводя (1.125) в (1.67), находим соответствующее выражение для спектральной плотности

$$S_x(\omega) = \frac{A}{\pi} \frac{\mu}{\omega^2 + \mu^2}. \quad (1.126)$$

При увеличении μ кривая $S_x(\omega)$ становится более полой. Это позволяет ввести понятие белого шума, т. е. случайной функции с постоянной спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} C = \text{const}, \quad (1.127)$$

где постоянная C , характеризующая интенсивность белого шума, связана с параметрами A и μ соотношением

$$C = \frac{2A}{\mu}. \quad (1.128)$$

Абсолютно белый шум существовать не может, так как для него характерна бесконечная дисперсия (см. (1.127) и (1.69)). Однако в ряде случаев использование понятия белого шума является весьма полезной идеализацией. Корреляционная функция белого шума определяется выражением

$$K_x(\tau) = C\delta(\tau), \quad (1.129)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

**ФАКТОРЫ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИЕ НЕОБХОДИМОСТЬ
СТАБИЛИЗАЦИИ ИУ**

§ 2.1. Вращение системы координат, связанной с ИУ

Одним из существенных факторов, вызывающих необходимость стабилизации ИУ, является вращение при качке связанной с ИУ координатной системы. Если в качестве ИУ рассматривается пеленгационное устройство, например, визир или антенна, то указанное вращение приводит к смещению визирной линии, оси луча антенны относительно заданного направления на ориентир,

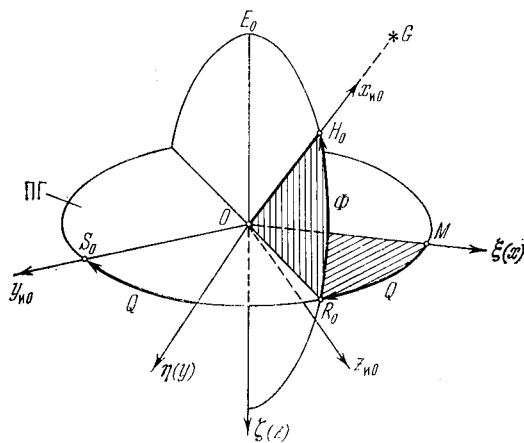


Рис. 2.1. Исходное положение осей $Ox_{и0}y_{и0}z_{и0}$.

а также к наклону перекрестия визира или продольной плоскости, которая проходит через ось луча антенны.

Определим углы поворотов при качке связанной с ИУ координатной системы, которую обозначим через $Ox_{и}y_{и}z_{и}$. Решение подобных задач содержится в ряде работ (см., например, [23, 27, 49, 53, 57, 63, 89]). На рис. 2.1 показана земная система осей $O\xi\eta\zeta$, с которой при отсутствии качки совмещены корабельные оси $Oxyz$. Исходное положение осей ИУ $Ox_{и0}y_{и0}z_{и0}$ относительно $O\xi\eta\zeta$ характеризуется здесь двумя сферическими координатами: азимутальным углом $Q = MR_0$ и углом возвышения $\Phi =$

$= R_0 H_0$. Предполагается, что ось $Ox_{и0}$ совмещена с линией визирования или осью луча антенны и направлена на ориентир G .

Взаимное положение осей $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ при качке и рыскании корабля (рис. 2.2) будем определять с помощью углов φ_p , ψ , θ_k (см. также рис. 1.4, а). Преобразование осей $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ дается с помощью матричного равенства (1.6). Введем полуподвижную

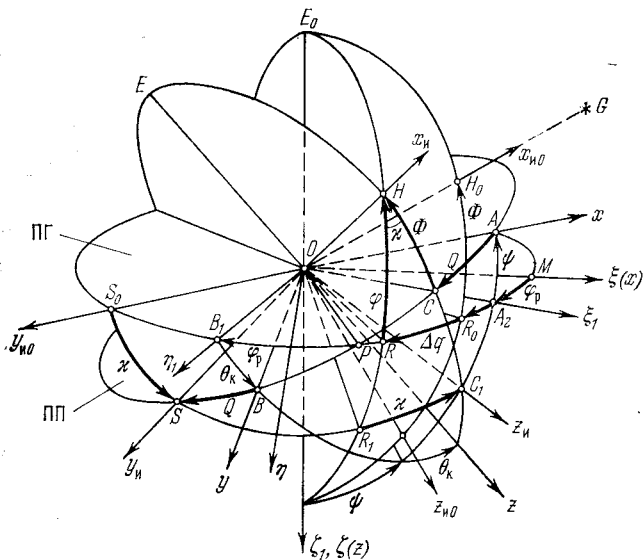


Рис. 2.2. Повороты Δq , $\Delta \varphi$, и осей $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ на качке.

систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ (рис. 2.2), повернутую относительно $O\xi\eta\zeta$ на угол φ_p вокруг оси $O\xi$. Преобразование осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ к $Oxyz$ записывается в виде матричного равенства (1.19).

Предположим, что при качке и рыскании ИУ не изменяет своей ориентации относительно корабля. Следовательно, положение осей $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ относительно $Oxyz$ сохраняется первоначальным, но изменяется при качке по отношению к земным осям $O\xi\eta\zeta$. На рис. 2.2 до качки и рыскания оси ИУ занимают положение $Ox_{и0}y_{и0}z_{и0}$, которое относительно $O\xi\eta\zeta$ определяется углами Q и Φ , как и на рис. 2.1. При качке корабля оси ИУ занимают положение $Ox_{и}y_{и}z_{и}$, характеризующееся относительно $O\xi\eta\zeta$ тремя сферическими координатами: углом $q = MR$ в PG между осью $O\xi$ и линией OR пересечения плоскости $OE_0HR\zeta$ с PG ; углом $\varphi = RH$ в вертикальной плоскости $OE_0HR\zeta$ между линией OR и осью $Ox_{и}$ и двугранным углом χ между плоскостью симметрии ИУ $Ox_{и}z_{и}$ и вертикальной плоскостью $OE_0HR\zeta$. При этом ось $Ox_{и}$ сместится относительно первоначально заданного ей направ-

ления $Ox_{и0}$ (OH_0) на ориентир G . Положение осей $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ относительно их исходного положения $Ox_{и0}y_{и0}z_{и0}$ определяется также тремя углами: $\Delta q = R_0 R$, $\Delta \varphi = RH - R_0 H_0$ и κ . Согласно рис. 2.2

$$\Delta q = q - Q, \quad \Delta \varphi = \varphi - \Phi. \quad (2.1)$$

Угол Δq характеризует азимутальный поворот осей ИУ, $\Delta \varphi$ — изменение угла возвышения, κ — поворот осей ИУ вокруг $Ox_{и}$. В соответствии с рис. 2.2 угол q можно записать в виде

$$q = \varphi_p + q_1, \quad (2.2)$$

где $q_1 = A_2 R$, $\varphi_p = MA_2$ — угол рыскания корабля.

Решаемая далее задача состоит в следующем: зная ориентацию осей ИУ $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ относительно корабельных осей $Oxyz$, характеризуемую углами Q и Φ , определить ориентацию осей $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ относительно $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, т. е. найти аналитические зависимости углов q_1 , φ , κ от углов Q , Φ и углов качки ψ и θ_K :

$$q_1 = q_1(Q, \Phi, \psi, \theta_K), \quad \varphi = \varphi(Q, \Phi, \psi, \theta_K), \quad \kappa = \kappa(Q, \Phi, \psi, \theta_K), \quad (2.3)$$

а далее по формулам (2.2) и (2.1) определить Δq и $\Delta \varphi$.

Поставленная задача сводится к преобразованию угловых координат. Для ее решения воспользуемся матричным методом. Сущность этого метода базируется на следующих положениях теории матриц:

1) При последовательном применении линейных преобразований получается также линейное преобразование, матрица которого является произведением матриц последовательных преобразований.

2) Переход от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат (при неизменном начале координат) можно осуществить путем ряда последовательных поворотов осей координат. При этом каждый поворот осей координат определяется соответствующими угловыми параметрами и характеризуется своей матрицей преобразования.

К этим двум положениям следует добавить вполне очевидное третье положение.

3) В указанном выше случае линейного преобразования одной прямоугольной системы координат в другую путем различных поворотов осей координат матрицы окончательных преобразований должны совпадать, а следовательно, должны быть тождественно равны и соответствующие элементы этих матриц.

Таким образом, применяемый далее метод преобразования сферических координат состоит в сравнении элементов матрицы линейного преобразования от одной системы координат к другой,

выраженных через различные углы, которые характеризуют заданные и искомые сферические координаты.

Для определения параметров q_1 , φ , κ воспользуемся преобразованием системы $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ к $Ox_иy_иz_и$, которое запишем в матричном виде

$$[x_и, y_и, z_и] = F [\xi_1, \eta_1, \zeta_1], \quad (2.4)$$

где элементы матрицы $F = \|f_{\mu\nu}\|$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) могут быть выражены через искомые углы q_1 , φ , κ .

Преобразование координат (2.4) можно записать также следующим образом:

$$[x_и, y_и, z_и] = D [\xi_1, \eta_1, \zeta_1], \quad (2.5)$$

где элементы матрицы $D = \|d_{\mu\nu}\|$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) выражаются через заданные углы Q , Φ и углы качки ψ , θ_K .

Сопоставляя (2.4) и (2.5), замечаем, что матрицы F и D должны быть равны

$$F = D, \text{ т. е. } \|f_{\mu\nu}\| = \|d_{\mu\nu}\| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (2.6)$$

Матрицу F можно получить из матрицы A (1.17), если в ней заменить φ_p на q_1 , ψ на φ и θ_K на κ ; тогда получим

$F =$

$$= \begin{vmatrix} \cos q_1 \cos \varphi & \sin q_1 \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \cos q_1 \sin \varphi \sin \kappa - \sin q_1 \cos \kappa & \cos q_1 \cos \kappa + \sin q_1 \sin \varphi \sin \kappa & \cos \varphi \sin \kappa \\ \sin q_1 \sin \kappa + \cos q_1 \sin \varphi \cos \kappa & \sin q_1 \sin \varphi \cos \kappa - \cos q_1 \sin \kappa & \cos \varphi \cos \kappa \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Матрицу D представим произведением

$$D = BA_1, \quad (2.8)$$

где матрица B характеризует преобразование осей $Oxyz$ к $Ox_иy_иz_и$:

$$[x_и, y_и, z_и] = B [x, y, z]. \quad (2.9)$$

Для матрицы B имеем

$$B = \begin{vmatrix} \cos \Phi \cos Q & \cos \Phi \sin Q & -\sin \Phi \\ -\sin Q & \cos Q & 0 \\ \sin \Phi \cos Q & \sin \Phi \sin Q & \cos \Phi \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Подставляя (1.21) и (2.10) в (2.8) и перемножая соответствующие матрицы, получим следующие выражения для элементов

матрицы D :

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= \cos \Phi \cos Q \cos \psi + \cos \Phi \sin Q \sin \psi \sin \theta_K - \sin \Phi \sin \psi \cos \theta_K, \\
 d_{12} &= \cos \Phi \sin Q \cos \theta_K + \sin \Phi \sin \theta_K, \\
 d_{13} &= -\cos \Phi \cos Q \sin \psi + \cos \Phi \sin Q \cos \psi \sin \theta_K - \sin \Phi \cos \psi \cos \theta_K, \\
 d_{21} &= -\sin Q \cos \psi + \cos Q \sin \psi \sin \theta_K, \\
 d_{22} &= \cos Q \cos \theta_K, \\
 d_{23} &= \sin Q \sin \psi + \cos Q \cos \psi \sin \theta_K, \\
 d_{31} &= \sin \Phi \cos Q \cos \psi + \sin \Phi \sin Q \sin \psi \sin \theta_K + \cos \Phi \sin \psi \cos \theta_K, \\
 d_{32} &= \sin \Phi \sin Q \cos \theta_K - \cos \Phi \sin \theta_K, \\
 d_{33} &= -\sin \Phi \cos Q \sin \psi + \sin \Phi \sin Q \cos \psi \sin \theta_K + \cos \Phi \cos \psi \cos \theta_K.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Согласно (2.6)

$$f_{13} = d_{13}. \tag{2.12}$$

Подставляя в (2.12) соответствующие выражения из (2.7) и (2.11), получим

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi &= \sin \Phi \cos \psi \cos \theta_K + \\
 &+ \cos \Phi (\cos Q \sin \psi - \sin Q \cos \psi \sin \theta_K).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Далее, на основании (2.7) и (2.6), имеем

$$\operatorname{tg} q_1 = \frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{d_{12}}{d_{11}}. \tag{2.14}$$

Вводя в (2.14) выражения (2.11), после преобразований получим

$$\operatorname{tg} q_1 = \frac{\sin \theta_K + \sin Q \operatorname{ctg} \Phi \cos \theta_K}{\operatorname{ctg} \Phi (\cos Q \cos \psi + \sin Q \sin \psi \sin \theta_K) - \sin \psi \cos \theta_K}. \tag{2.15}$$

На основании (2.7) и (2.6) имеем

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{f_{23}}{f_{33}} = \frac{d_{23}}{d_{33}}. \tag{2.16}$$

Подставим в (2.16) выражения (2.11), тогда

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\operatorname{tg} \theta_K \cos Q + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \theta_K} \sin Q}{\cos \Phi + \sin \Phi \left(\operatorname{tg} \theta_K \sin Q - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \theta_K} \cos Q \right)}. \tag{2.17}$$

Введем (2.15) в (2.2); имеем

$$q = \varphi_p + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_K + \sin Q \operatorname{ctg} \Phi \cos \theta_K}{\operatorname{ctg} \Phi (\cos Q \cos \psi + \sin Q \sin \psi \sin \theta_K) - \sin \psi \cos \theta_K} \right]. \tag{2.18}$$

Согласно (2.1), (2.18), (2.13) и (2.17) получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \varphi_p + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_K + \sin Q \operatorname{ctg} \Phi \cos \theta_K}{\operatorname{ctg} \Phi (\cos Q \cos \psi + \sin Q \sin \psi \sin \theta_K) - \sin \psi \cos \theta_K} \right] - Q, \\ \Delta \varphi &= \operatorname{arc} \sin [\sin \Phi \cos \psi \cos \theta_K + \cos \Phi (\cos Q \sin \psi - \\ &\quad - \sin Q \cos \psi \sin \theta_K)] - \Phi, \\ \kappa &= \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \theta_K \cos Q + \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \theta_K} \sin Q}{\cos \Phi + \sin \Phi \left(\operatorname{tg} \theta_K \sin Q - \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \theta_K} \cos Q \right)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

где Δq — азимутальный поворот осей ИУ, $\Delta \varphi$ — изменение угла возвышения, κ — поворот осей ИУ вокруг $Ox_{и}$, характеризующий наклон плоскости симметрии $Ox_{и}z_{и}$.

Рассмотрим два частных случая:

1) $Q = 0$, вместо (2.19) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= \varphi_p + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \theta_K}{\operatorname{ctg} \Phi \cos \psi - \sin \psi \cos \theta_K} \right], \\ \Delta \varphi &= \operatorname{arc} \sin [\sin \Phi \cos \psi \cos \theta_K + \cos \Phi \sin \psi] - \Phi, \\ \kappa &= \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\cos \Phi - \sin \Phi \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \theta_K}} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

2) $Q = 0$, $\Phi = 0$, тогда

$$\Delta q = \varphi_p, \quad \Delta \varphi = \psi, \quad \kappa = \theta_K, \quad (2.21)$$

т. е. углы поворотов осей ИУ равны углам рыскания, дифферента и крена корабля, так как в этом случае оси $Ox_{и}y_{и}z_{и}$ совмещены с корабельными осями $Oxyz$.

Из общих формул (2.19) следует, что $\Delta q(t)$, $\Delta \varphi(t)$, $\kappa(t)$ являются случайными функциями времени, которые нелинейно зависят от углов Φ , Q и углов качки ψ , θ_K , что существенно затрудняет расчет вероятностных характеристик $\Delta q(t)$, $\Delta \varphi(t)$, $\kappa(t)$. Формулы (2.19) показывают, что $\Delta q(t)$ и $\kappa(t)$ растут с увеличением угла возвышения Φ оси $Ox_{и}$ над ПП. Это обстоятельство является весьма существенным и приводит к необходимости стабилизации ИУ, у которых углы Φ достигают больших величин.

При определении вероятностных характеристик случайных функций $\Delta q(t)$, $\Delta \varphi(t)$, $\kappa(t)$ рассмотрим случай, когда $Q = 0$, $\Phi = \text{const}$.

Углы качки для реальных условий использования ИУ малы и в соответствующих слагаемых можно удерживать лишь малые первого порядка. При указанных предположениях из формул (2.20) для $\Delta \varphi$, а также для Δq , κ (при дополнительном условии $\psi = 0$)

имеем

$$\Delta q(t) = \varphi_p + \theta_k \operatorname{tg} \Phi, \quad \Delta \varphi(t) = \psi, \quad \kappa(t) = \theta_k \frac{1}{\cos \Phi}. \quad (2.22)$$

Формулы (2.22) наглядно характеризуют зависимость Δq и κ от угла возвышения Φ .

В согласии с (1.65) математические ожидания случайных функций $\Delta q(t)$, $\Delta \varphi(t)$ и $\kappa(t)$ будут

$$M[\Delta q] = M[\Delta \varphi] = M[\kappa] = 0. \quad (2.23)$$

Их дисперсии и среднеквадратичные значения определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} D[\Delta q] &= D[\varphi_p] + D[\theta_k] \operatorname{tg}^2 \Phi, \\ D[\Delta \varphi] &= D[\psi], \\ D[\kappa] &= D[\theta_k] \frac{1}{\cos^2 \Phi}, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

$$\sigma_{\Delta q} = \sqrt{\sigma_{\varphi_p}^2 + \sigma_{\theta_k}^2 \operatorname{tg}^2 \Phi}, \quad \sigma_{\Delta \varphi} = \sigma_{\psi}, \quad \sigma_{\kappa} = \sigma_{\theta_k} \frac{1}{\cos \Phi}. \quad (2.25)$$

Пример 2.1. Вычислить среднеквадратичные значения углов поворотов осей ИУ на качке для следующих исходных данных:

$$\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ, \quad \sigma_{\psi} = 2^\circ, \quad \sigma_{\theta_k} = 5^\circ, \quad \Phi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ.$$

Решение.

1) Согласно (2.25) находим $\sigma_{\Delta \varphi}$

$$\sigma_{\Delta \varphi} = 2^\circ.$$

2) Наибольшее изменение угла возвышения $\Delta \varphi_m$, если принять его равным трем среднеквадратичным значениям, составит *)

$$\Delta \varphi_m = 3\sigma_{\Delta \varphi} = 6^\circ.$$

3) По формулам (2.25) вычисляем значения $\sigma_{\Delta q}$ и σ_{κ} , а также Δq_m и κ_m в согласии с выражениями

$$\Delta q_m = 3\sigma_{\Delta q}, \quad \kappa_m = 3\sigma_{\kappa}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 2.1.

*) Здесь и далее под наибольшим значением нормальной случайной величины имеется в виду ширина доверительного интервала, которому соответствует доверительная вероятность $q = 0,9973$. В данном примере $q = P\{|\Delta \varphi| < \Delta \varphi_m\} = 0,9973$ — вероятность того, что $\Delta \varphi$ не превысит значения $\Delta \varphi_m$.

4) По данным табл. 2.1 на рис. 2.3 построены графики $\sigma_{\Delta q} = f(\Phi)$, $\sigma_{\kappa} = f_1(\Phi)$, которые иллюстрируют увеличение $\sigma_{\Delta q}$ и σ_{κ} с ростом угла возвышения Φ .

Таблица 2.1

Φ	15°	30°	45°	60°	75°
$\sigma_{\Delta q}$	2°25'	3°31'	5°23'	8°53'	18°46'
Δq_m	7°15'	10°33'	16°9'	26°39'	56°18'
σ_{κ}	5°11'	5°46'	7°04'	10°0'	19°19'
κ_m	15°33'	17°18'	21°12'	30°0'	57°57'

Из примера видно, что углы поворотов Δq , $\Delta \phi$, κ координатной системы ИУ в условиях качки и рыскания корабля могут

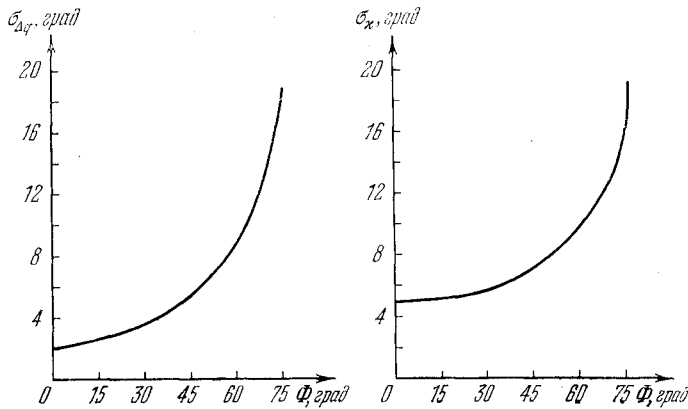


Рис. 2.3. Графики средневладратичных значений $\sigma_{\Delta q}$ азимутального поворота осей ИУ и σ_{κ} наклона плоскости симметрии ИУ.

достигать недопустимо больших величин, что указывает на необходимость стабилизации ИУ на корабле.

§ 2.2. Угловые скорости и ускорения наведения ИУ на качке

1. Угловые скорости вращения осей ИУ. Выясним некоторые кинематические особенности, связанные с вращением осей ИУ при качке и рыскании корабля. Обозначим через Ω мгновенную угловую скорость осей $Ox_{иу}$ и $Oz_{иу}$ на качке по отношению к Земле. При условии, что оси $Ox_{иу}$ и $Oz_{иу}$ сохраняют относительно

и среднеквадратичных значений:

$$\sigma_{\Omega_{x_H}} = \sqrt{D[\Omega_{x_H}]}; \quad \sigma_{\Omega_{y_H}} = \sqrt{D[\Omega_{y_H}]}; \quad \sigma_{\Omega_{z_H}} = \sqrt{D[\Omega_{z_H}]} \quad (2.32)$$

Пример 2.2. Определить среднеквадратичные $\sigma_{\Omega_{x_H}}$, $\sigma_{\Omega_{y_H}}$, $\sigma_{\Omega_{z_H}}$ и наибольшие $\Omega_{x_H}^m$, $\Omega_{y_H}^m$, $\Omega_{z_H}^m$ значения угловых скоростей ИУ для следующих исходных данных: $\Phi = Q = 45^\circ$, $\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ$, $\sigma_\psi = 2^\circ$, $\sigma_{\theta_K} = 5^\circ$; преобладающие частоты колебаний $\lambda_3 = 0,2 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda_{1K} = 1 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,5 \text{ сек}^{-1}$; коэффициенты нерегулярности колебаний μ_i малы по сравнению с частотами λ_i .

Решение.

1) По формулам (1.104) вычисляем среднеквадратичные значения угловых скоростей качки и рыскания

$$\sigma_{\dot{\varphi}_p} = \lambda_3 \sigma_{\varphi_p} = 0,2 \cdot 1 = 0,2 \text{ град/сек},$$

$$\sigma_{\dot{\psi}} = \lambda_{1K} \sigma_\psi = 1 \cdot 2 = 2 \text{ град/сек},$$

$$\sigma_{\dot{\theta}_K} = \lambda_2 \sigma_{\theta_K} = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ град/сек}.$$

2) Дисперсии соответственно будут

$$D[\dot{\varphi}_p] = 12,18 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-2}, \quad D[\dot{\psi}] = 12,18 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-2},$$

$$D[\dot{\theta}_K] = 19 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-2}.$$

3) По формулам (2.31) находим дисперсии составляющих угловой скорости осей ИУ на качке

$$D[\Omega_{x_H}] = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-2}, \quad D[\Omega_{y_H}] = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-2},$$

$$D[\Omega_{z_H}] = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-2}.$$

4) Среднеквадратичные значения указанных в п. 3 угловых скоростей составят

$$\sigma_{\Omega_{x_H}} = 1,6 \text{ град/сек}; \quad \sigma_{\Omega_{y_H}} = 2,33 \text{ град/сек}, \quad \sigma_{\Omega_{z_H}} = 1,6 \text{ град/сек}.$$

5) Наибольшие значения угловых скоростей будут

$$\Omega_{x_H}^m = 3\sigma_{\Omega_{x_H}} = 4,8 \text{ град/сек},$$

$$\Omega_{y_H}^m = 3\sigma_{\Omega_{y_H}} = 6,99 \text{ град/сек},$$

$$\Omega_{z_H}^m = 3\sigma_{\Omega_{z_H}} = 4,8 \text{ град/сек}.$$

Из примера следует, что составляющие угловой скорости осей ИУ на качке могут быть значительными.

Стабилизация ИУ компенсирует угловые повороты Δq , $\Delta \varphi$, κ , т. е. обеспечивает удержание осей ИУ в исходном положении $Ox_{H0}y_{H0}z_{H0}$ (рис. 2.2), при этом угловые скорости $\Omega_{x_H} = \Omega_{y_H} = \Omega_{z_H} = 0$.

2. Геометрия наведения ИУ на качке. Рассмотрим способ стабилизации ИУ, при котором компенсируются повороты Δq в азимуте и $\Delta\varphi$ в угле возвышения. Для решения этой задачи воспользуемся косвенным методом стабилизации ИУ (см. § 1.1), который

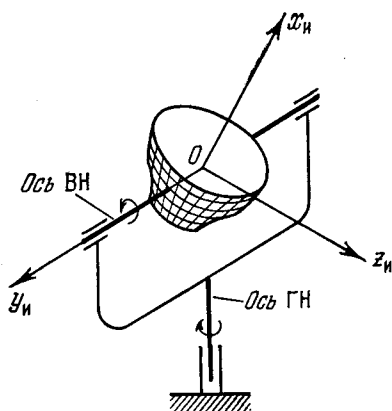


Рис. 2.4. Двухосная система наведения ИУ.

удерживает ось Ox_n (линия визирования, ось луча антенны) в заданном направлении путем введения поправок на качку и рыскание на вращение ИУ относительно соответствующих осей наведения. Для осуществления косвенной стабилизации оси Ox_n достаточно использовать двухосную систему наведения ИУ [53], например антенны, приведенную на рис. 2.4. В этой системе ось горизонтального наведения (ось ГН) перпендикулярна к ПП, т. е. ГН осуществляется в плоскости палубы; ось вертикального наведения (ось ВН или ось цапф

ИУ) лежит в ПП, т. е. ВН осуществляется в плоскости, перпендикулярной к ПП. Путем введения в ГН и ВН соответствующих поправок на качку удается удерживать ось Ox_n в требуемом направлении на ориентир.

Рассмотрим геометрию наведения ИУ на качке [49, 53, 57, 63, 89, 23]. На рис. 2.5 показана полуподвижная система координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, с которой в исходный момент совмещены корабельные оси $Oxyz$. При наличии качки корабельные оси займут положение $Ox_1y_1z_1$, характеризующееся относительно системы отсчета $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ углами ψ и θ_k . До наведения оси $Ox_ny_nz_n$ совмещены с осями $Oxyz$. Зададим на единичной сфере направление OH . Положение точки H на сфере относительно осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ определяется двумя сферическими координатами $q = A_2R_0$ и $\varphi = R_0H$, которые рассматриваются как заданные функции времени. Угол q расположен в ПГ и является углом ГН; угол φ расположен в вертикальной плоскости $OE_0HR_0\zeta_1$ и представляет собой угол ВН. Углы q и φ являются стабилизированными координатами точки H . Для приведения оси Ox_n в совмещение с линией OH при двухосной системе наведения ИУ следует: 1) повернуть устройство в ПП вокруг оси ГН Oz на угол $Q = AC$, при этом ось ВН (ось цапф) займет положение Oy_n ; 2) повернуть устройство в плоскости ВН $ENCz$ вокруг оси цапф Oy_n на угол $\Phi = CH$; при этом ось Ox_n совместится с направлением OH , а оси ИУ займут положение $Ox_ny_nz_n$, определяемое относительно корабельных осей

Oxuz углами Q и Φ . Углы Q и Φ иногда называют [57, 63] полными углами ГН и ВН. Введение этих углов в наведение ИУ обеспечивает косвенную стабилизацию оси Ox_H на заданном направлении OH , т. е. Q и Φ в данном случае являются параметрами косвенной стабилизации.

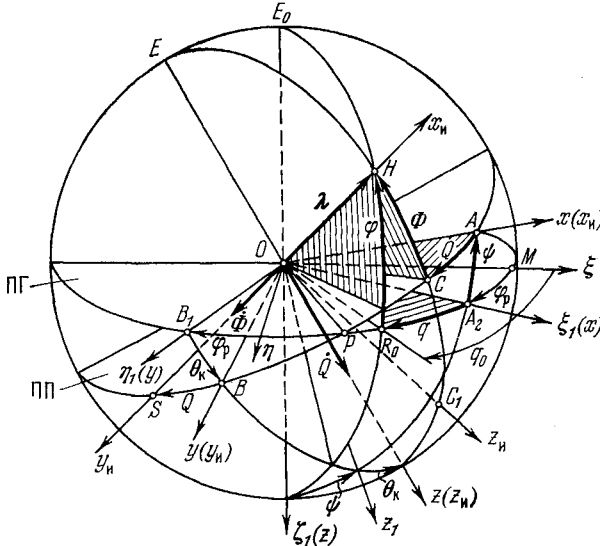


Рис. 2.5. Геометрия двухосной системы наведения ИУ.

Аналитические зависимости для Q и Φ могут быть записаны в следующем общем виде:

$$Q = Q(q, \varphi, \psi, \theta_k), \quad \Phi = \Phi(q, \varphi, \psi, \theta_k). \quad (2.33)$$

Для вывода этих зависимостей воспользуемся следующим методом (см. § 4.3). Обозначим единичный вектор направления OH через λ . Проекция вектора λ на оси $O\xi_1\eta_1\xi_1$ и $Oxuz$ будут:

$$\lambda_{\xi_1} = \cos q \cos \varphi, \quad \lambda_{\eta_1} = \cos \varphi \sin q, \quad \lambda_{\xi_2} = -\sin \varphi, \quad (2.34)$$

$$\lambda_x = \cos Q \cos \Phi, \quad \lambda_y = \cos \Phi \sin Q, \quad \lambda_z = -\sin \Phi. \quad (2.35)$$

Связь между проекциями вектора λ , по аналогии с (1.5), может быть записана в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{\xi_1} \\ \lambda_{\eta_1} \\ \lambda_{\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

где a'_{11}, \dots, a'_{33} — элементы матрицы A_1 (1.21).

Учитывая (2.34), (2.35) и (1.21), перепишем (2.36) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \cos Q \cos \Phi \\ \cos \Phi \sin Q \\ -\sin \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ \sin \psi \sin \theta_K & \cos \theta_K & \cos \psi \sin \theta_K \\ \sin \psi \cos \theta_K & -\sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos q \cos \varphi \\ \cos \varphi \sin q \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Из (2.37) находим

$$\sin \Phi = \sin \varphi \cos \psi \cos \theta_K + \cos \varphi (\sin q \sin \theta_K - \cos q \sin \psi \cos \theta_K). \quad (2.38)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \cos \Phi \cos Q &= \cos \psi \cos \varphi \cos q + \sin \psi \sin \varphi, \\ \cos \Phi \sin Q &= \sin \psi \sin \theta_K \cos \varphi \cos q + \cos \theta_K \cos \varphi \sin q - \\ &\quad - \cos \psi \sin \theta_K \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\cos \varphi (\cos q \sin \psi \sin \theta_K + \sin q \cos \theta_K) - \sin \varphi \cos \psi \sin \theta_K}{\cos q \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi}. \quad (2.39)$$

Параметры Φ и Q вырабатываются по формулам (2.38), (2.39) в ПК (рис. 1.2) на основании углов q и φ , поступающих от вычислительного устройства, и углов качки ψ , θ_K , определяемых ГУ. Углы Φ и Q с помощью следящих приводов вводятся на наведение ИУ.

3. Угловые скорости и ускорения наведения ИУ. При практической реализации метода косвенной стабилизации весьма важным является вопрос о необходимых на качке угловых скоростях и угловых ускорениях ВН и ГН, которые обозначим через $\dot{\Phi}$, \dot{Q} и $\ddot{\Phi}$, \ddot{Q} . Для их нахождения можно продифференцировать выражения (2.38) и (2.39) по времени. Однако более наглядным является кинематический вывод, который приводится ниже.

Обозначим через ω_n относительную угловую скорость наведения ИУ (по отношению к кораблю), ω — мгновенную угловую скорость корабля, определяемую соотношением (1.47). В предположении, что направление OH (рис. 2.5) неподвижно относительно Земли, а составляющие угловой скорости суточного вращения Земли малы по сравнению с угловыми скоростями качки и рыскания корабля, имеем

$$\omega_n + \omega = 0. \quad (2.40)$$

Легко видеть (рис. 2.5), что

$$\omega_n = \dot{\Phi} y_n^0 + \dot{Q} z^0. \quad (2.41)$$

Подставим (2.41) и (1.47) в выражение (2.40), тогда

$$\dot{\Phi} y_n^0 + \dot{Q} z^0 + \omega_x x^0 + \omega_y y^0 + \omega_z z^0 = 0. \quad (2.42)$$

Спроектируем векторное равенство (2.42) на оси Oy_n и Oz_n (рис. 2.5); имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi} + (-\omega_x \sin Q + \omega_y \cos Q) &= 0, \\ \dot{Q} \cos \Phi + (\omega_x \cos Q + \omega_y \sin Q) \sin \Phi + \omega_z \cos \Phi &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi} &= \omega_x \sin Q - \omega_y \cos Q, \\ \dot{Q} &= -\omega_z - (\omega_x \cos Q + \omega_y \sin Q) \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Учитывая (1.48), вместо (2.43) получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi} &= -\dot{\varphi}_p (\cos \psi \sin \theta_k \cos Q + \sin \psi \sin Q) - \dot{\psi} \cos \theta_k \cos Q + \\ &\quad + \dot{\theta}_k \sin Q, \\ \dot{Q} &= -\dot{\varphi}_p [\cos \psi \cos \theta_k + (\cos \psi \sin \theta_k \sin Q - \\ &\quad - \sin \psi \cos Q) \operatorname{tg} \Phi] + \dot{\psi} (\sin \theta_k - \cos \theta_k \sin Q \operatorname{tg} \Phi) - \\ &\quad - \dot{\theta}_k \cos Q \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Для расчета вероятностных характеристик случайных функций $\dot{\Phi}(t)$ и $\dot{Q}(t)$ допустима линеаризация формул (2.44). В предположении о малости углов качки вместо (2.44) приближенно имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi} &= -\dot{\psi} \cos Q + \dot{\theta}_k \sin Q, \\ \dot{Q} &= -\dot{\varphi}_p - (\dot{\psi} \sin Q + \dot{\theta}_k \cos Q) \operatorname{tg} \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Сложность пользования формулами (2.45) состоит в том, что входящие в них величины Q и Φ определяются выражениями (2.38), (2.39) и зависят от углов ГН и ВН q , φ и углов качки ψ , θ_k . Дальнейшее упрощение формул (2.45) возможно путем замены Q и Φ их математическими ожиданиями *). Угол q , согласно рис. 2.5, можно записать в виде

$$q = q_0 - \varphi_p, \quad (2.46)$$

где $q_0 = MR_0$ — угол ГН, отсчитанный от оси $O\xi$ заданного кораблю курса.

В соответствии с формулой (2.38) и выводом выражения (2.39) при учете (2.46) имеем

$$M[\Phi] = \varphi, \quad M[Q] = q_0. \quad (2.47)$$

Заменяя в (2.45) Q и Φ их математическими ожиданиями q_0

*) Допустимость подобной замены основана на линеаризации выражений для Q и Φ и пренебрежении в полученных соотношениях малыми слагаемыми.

и φ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi} &= -\psi \cos q_0 + \dot{\theta}_K \sin q_0, \\ \dot{Q} &= -\dot{\varphi}_p - (\psi \sin q_0 + \dot{\theta}_K \cos q_0) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Из формул (2.48) следует, что угловая скорость ВН $\dot{\Phi}$ имеет порядок угловых скоростей качки. Угловая скорость ГН \dot{Q} увеличивается с ростом φ , достигая больших значений при φ , близких к 90° . При $\varphi < 45^\circ$ имеем $|\dot{Q}| < |\dot{\Phi}|$, а при $\varphi > 45^\circ$ соответственно $|\dot{Q}| > |\dot{\Phi}|$.

Пользуясь (2.48), определим математические ожидания и дисперсии случайных функций $\dot{\Phi}(t)$ и $\dot{Q}(t)$; имеем

$$M[\dot{\Phi}] = M[\dot{Q}] = 0; \quad (2.49)$$

$$\left. \begin{aligned} D[\dot{\Phi}] &= D[\psi] \cos^2 q_0 + D[\dot{\theta}_K] \sin^2 q_0, \\ D[\dot{Q}] &= D[\dot{\varphi}_p] + \{D[\psi] \sin^2 q_0 + D[\dot{\theta}_K] \cos^2 q_0\} \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Соответственно для среднеквадратичных значений $\sigma_{\dot{\Phi}}$, $\sigma_{\dot{Q}}$ имеем

$$\sigma_{\dot{\Phi}} = \sqrt{D[\dot{\Phi}]}, \quad \sigma_{\dot{Q}} = \sqrt{D[\dot{Q}]}. \quad (2.51)$$

Пример 2.3. Для условий примера 2.2 и $q_0 = 45^\circ$, $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ определить среднеквадратичные и наибольшие значения угловых скоростей ВН и ГН двухосного ИУ на качке.

Решение.

1) В соответствии с примером 2.2, п. 2 дисперсии угловых скоростей качки и рыскания составляют

$$\begin{aligned} D[\dot{\varphi}_p] &= 12,18 \cdot 10^{-6} \operatorname{сек}^{-2}, & D[\psi] &= 12,18 \cdot 10^{-4} \operatorname{сек}^{-2}, \\ D[\dot{\theta}_K] &= 19 \cdot 10^{-4} \operatorname{сек}^{-2}. \end{aligned}$$

2) По формулам (2.50), (2.51) вычисляем дисперсию, среднеквадратичное и наибольшее значения угловой скорости ВН; имеем

$$\begin{aligned} D[\dot{\Phi}] &= 15,59 \cdot 10^{-4} \operatorname{сек}^{-2}, & \sigma_{\dot{\Phi}} &= 2,26 \text{ град/сек}, \\ \dot{\Phi}_m &= 3\sigma_{\dot{\Phi}} = 6,78 \text{ град/сек}. \end{aligned}$$

3) По формулам (2.50), (2.51) находим дисперсии, среднеквадратичные и наибольшие значения угловой скорости ГН для различных величин углов возвышения φ ; результаты расчета сведены в табл. 2.2.

4) По данным табл. 2.2 на рис. 2.6 построен график $\sigma_{\dot{Q}} = f(\varphi)$, который наглядно показывает рост $\sigma_{\dot{Q}}$ с увеличением угла возвышения φ .

Таблица 2.2

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$D[\dot{Q}],$ <i>сек⁻²</i>	$12,18 \cdot 10^{-6}$	$0,124 \cdot 10^{-3}$	$0,531 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$4,68 \cdot 10^{-3}$	$21,72 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\dot{Q}},$ <i>град/сек</i>	0,2	0,638	1,32	2,27	3,92	8,45
$\dot{Q}_m,$ <i>град/сек</i>	0,6	1,91	3,96	6,81	11,76	25,35

Из примера видно, что угловые скорости $\dot{\Phi}$ ВН двухосного ИУ на качке могут быть значительными. Особенно большими становятся угловые скорости \dot{Q} ГН при углах возвышения $\varphi > 45^\circ$.

При $\dot{Q} > \dot{Q}_{\text{пред}}$, где $\dot{Q}_{\text{пред}}$ — предельное значение угловой скорости ГН для данного измерительного устройства, система косвенной стабилизации ИУ имеет по углу возвышения некоторую «мертвую зону» [6] в виде конуса, ось которого направлена по нормали OE к ПП (рис. 2.5). В связи с этим при больших значениях φ в ряде случаев затруднительно применять косвенный метод стабилизации, и требуется переход к непосредственному методу стабилизации (см. § 1.1).

Выражения для угловых ускорений $\ddot{\Phi}$, \ddot{Q} ВН и ГН измерительного устройства на качке, необходимые для практических расчетов, могут быть

наиболее просто получены путем дифференцирования формул (2.48), тогда (при $q_0 = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$)

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Phi} &= -\ddot{\psi} \cos q_0 + \ddot{\theta}_k \sin q_0, \\ \ddot{Q} &= -\ddot{\varphi}_p - (\ddot{\psi} \sin q_0 + \ddot{\theta}_k \cos q_0) \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

откуда следует, что общий характер изменения $\ddot{\Phi}(t)$, $\ddot{Q}(t)$ на качке такой же, как и $\dot{\Phi}(t)$, $\dot{Q}(t)$ (см. (2.48)). Пользуясь (2.52), для математических ожиданий и дисперсий случайных функций

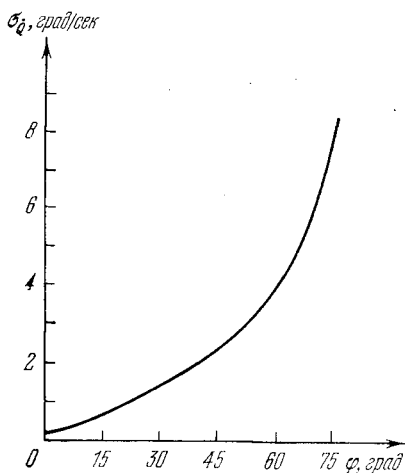


Рис. 2.6. График среднеквадратичного значения $\sigma_{\dot{Q}}$ угловой скорости ГН.

$\ddot{\Phi}(t)$ и $\ddot{Q}(t)$ имеем

$$M[\ddot{\Phi}] = M[\ddot{Q}] = 0, \quad (2.53)$$

$$\left. \begin{aligned} D[\ddot{\Phi}] &= D[\ddot{\psi}] \cos^2 q_0 + D[\ddot{\theta}_K] \sin^2 q_0, \\ D[\ddot{Q}] &= D[\dot{\varphi}_p] + \{D[\ddot{\psi}] \sin^2 q_0 + D[\ddot{\theta}_K] \cos^2 q_0\} \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Соответствующие среднеквадратичные значения будут

$$\sigma_{\ddot{\Phi}} = \sqrt{D[\ddot{\Phi}]}, \quad \sigma_{\ddot{Q}} = \sqrt{D[\ddot{Q}]}. \quad (2.55)$$

Пример 2.4. Для условий примеров 2.2 и 2.3 вычислить среднеквадратичные и наибольшие значения угловых ускорений ВН и ГН двухосного ИУ на качке.

Решение.

1) По формулам (1.105) при условии $\mu_i/\lambda_i < 1$ находим дисперсии угловых ускорений рыскания и качки корабля

$$D[\dot{\varphi}_p] = \lambda_3^2 D[\dot{\varphi}_p] = 0,487 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-4},$$

$$D[\ddot{\psi}] = \lambda_1^2 D[\ddot{\psi}] = 12,18 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-4},$$

$$D[\ddot{\theta}_K] = \lambda_2^2 D[\ddot{\theta}_K] = 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-4}.$$

2) Согласно (2.54) и (2.55) вычисляем дисперсию, среднеквадратичное и наибольшее значения углового ускорения ВН; имеем

$$D[\ddot{\Phi}] = 8,47 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-4}, \quad \sigma_{\ddot{\Phi}} = 1,67 \text{ град/сек}^2,$$

$$\ddot{\Phi}_m = 3\sigma_{\ddot{\Phi}} = 5,01 \text{ град/сек}^2.$$

3) По формулам (2.54) и (2.55) находим дисперсии, среднеквадратичные и наибольшие значения углового ускорения ГН для различных углов возвышения φ (результаты расчета сведены в табл. 2.3).

Таблица 2.3

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$D[\ddot{Q}],$ сек^{-4}	$0,487 \cdot 10^{-6}$	$0,608 \cdot 10^{-4}$	$0,282 \cdot 10^{-3}$	$0,847 \cdot 10^{-3}$	$2,56 \cdot 10^{-3}$	$11,88 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{\ddot{Q}},$ град/сек^2	0,04	0,446	0,962	1,67	2,89	6,22
$\ddot{Q}_m,$ град/сек^2	0,12	1,34	2,89	5,01	8,67	18,66

4) По данным табл. 2.3 на рис. 2.7 построен график $\sigma_{\ddot{Q}} = f(\varphi)$, который показывает рост $\sigma_{\ddot{Q}}$ с увеличением угла возвышения φ .

Из примера видно, что угловые ускорения $\ddot{\Phi}$ ВН двухосного ИУ на качке могут быть значительными. Особенно большими становятся угловые ускорения \ddot{Q} ГН при углах возвышения $\varphi > 45^\circ$, что существенно сказывается на динамике привода ГН.

С отдельными исследованиями по кинематике двухосных антенн, визиров, телескопов на качающемся основании можно познакомиться в ряде работ (см., например, [6, 23, 27, 53, 57]).

§ 2.3. Линейные скорости и ускорения заданной точки корабля

1. **Линейные скорости.** При решении различных задач по стабилизации на корабле необходимо знать линейные скорости и ускорения места установки ИУ, обусловленные качкой и орбитальным движением корабля. Общие выражения для линейных скоростей и ускорений любой точки корабля выводятся в работах А. Н. Крылова [42, 44]; некоторые формулы даны в работе [7]. На рис. 2.8 приведены координатные системы $O_0 \Xi \eta \zeta$, $Oxuz$, которые были рассмотрены ранее (см. § 1.2 и рис. 1.3). Выберем произвольную точку O_1 на корабле с координатами x , y , z . Положение точки O относительно начала O_0 характеризуется радиусом-вектором r_0 ; введем радиус-вектор r_1 , характеризующий положение точки O_1 относительно ц.т. корабля O , и радиус-вектор R , определяемый равенством

$$R = r_0 + r_1. \quad (2.56)$$

Введем следующие обозначения:

$$v_0 = \frac{dr_0}{dt} \quad (2.57)$$

— скорость орбитального движения ц.т. корабля (ход корабля для простоты не учитываем);

$$v_k = \frac{dr_1}{dt} = \omega \times r_1 \quad (2.58)$$

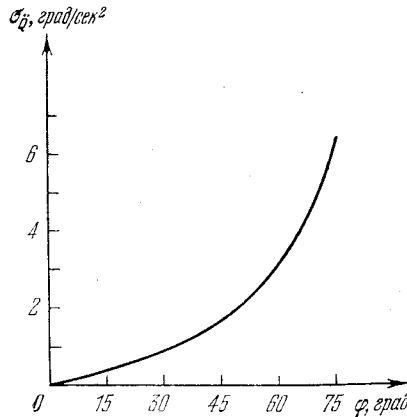


Рис. 2.7. График среднеекватрального значения $\sigma_{\dot{Q}}$ углового ускорения ГН.

— скорость точки O_1 (рис. 2.8), обусловленная качкой, где ω — мгновенная угловая скорость корабля.

Тогда абсолютная линейная скорость точки O_1 , как известно, выразится формулой [51]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}_1, \quad (2.59)$$

или

$$\mathbf{v} = v_{0\xi} \xi^0 + v_{0\eta} \eta^0 + v_{0\zeta} \zeta^0 + \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad (2.60)$$

где $v_{0\xi} = \dot{\xi}_0$, $v_{0\eta} = \dot{\eta}_0$, $v_{0\zeta} = \dot{\zeta}_0$ — проекции линейной скорости

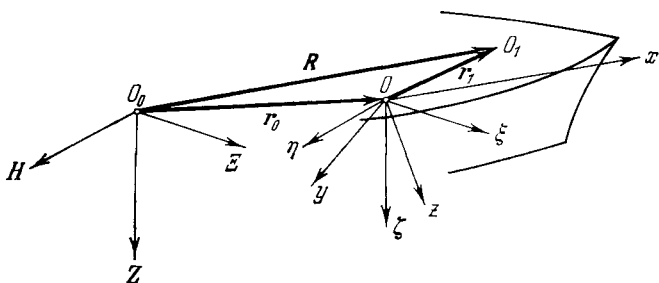


Рис. 2.8. К определению линейной скорости заданной точки корабля.

ц.т. корабля на оси $O\xi\eta\zeta$, обусловленной его орбитальным движением.

Выражение (2.60) в матричном виде в проекциях на оси $O\xi\eta\zeta$ можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\xi}_0 \\ \dot{\eta}_0 \\ \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix} + A^{-1} \begin{vmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix}, \quad (2.61)$$

где A^{-1} — матрица перехода (1.9) от осей $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$, которая получается из матрицы A (1.3) путем замены строк столбцами.

Подставляя в (2.61) выражения (1.49), (1.18) и учитывая слабые второго порядка малости, получим

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \dot{\xi}_0 - x(\varphi_p \varphi_p + \psi\psi) + y(-\varphi_p + \psi\theta_K + \dot{\theta}_K \psi) + z(\psi + \varphi_p \theta_K + \dot{\theta}_K \varphi_p), \\ v_\eta &= \dot{\eta}_0 + x\varphi_p - y(\varphi_p \varphi_p + \dot{\theta}_K \theta_K) - z(\dot{\theta}_K - \varphi_p \psi - \psi \varphi_p), \\ v_\zeta &= \dot{\zeta}_0 - x\dot{\psi} + y\dot{\theta}_K - z(\dot{\theta}_K \theta_K + \dot{\psi}\psi). \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

С точностью до слагаемых первого порядка малости формулы (2.62) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi} &= \dot{\xi}_0 + z\psi - y\phi_p, \\ v_{\eta} &= \dot{\eta}_0 + x\phi_p - z\theta_k, \\ v_{\zeta} &= \dot{\zeta}_0 + y\theta_k - x\psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

В некоторых задачах стабилизации в качестве базовой системы выбирают географическую систему координат $O\xi_r\eta_r\zeta_r$ (рис. 1.4, б). Для проекции вектора v на оси $O\xi_r\eta_r\zeta_r$ в согласии с рис. 1.4, б имеем

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi_r} &= v_{\xi} \cos K_0 - v_{\eta} \sin K_0, \\ v_{\eta_r} &= v_{\xi} \sin K_0 + v_{\eta} \cos K_0, \\ v_{\zeta_r} &= v_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

где v_{ξ} , v_{η} и v_{ζ} определяются формулами (2.62) или (2.63).

Иногда могут понадобиться проекции вектора v на корабельные оси $Oxyz$. По аналогии с (1.6) имеем

$$[v_x, v_y, v_z] = A [v_{\xi}, v_{\eta}, v_{\zeta}]. \quad (2.65)$$

Тогда с точностью до слагаемых первого порядка, учитывая (2.63) и (1.18), получим

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{\xi}_0 + z\psi - y\phi_p, \\ v_y &= \dot{\eta}_0 + x\phi_p - z\theta_k, \\ v_z &= \dot{\zeta}_0 + y\theta_k - x\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

т. е. выражения (2.63).

Если требуется учесть скорость хода корабля, то во всех приведенных выше формулах для составляющих вектора v ее следует прибавить к величине $\dot{\xi}_0$.

В согласии с (2.63) для математических ожиданий случайных функций $v_{\xi}(t)$, $v_{\eta}(t)$, $v_{\zeta}(t)$ имеем

$$M [v_{\xi}] = M [v_{\eta}] = M [v_{\zeta}] = 0. \quad (2.67)$$

Этот результат не изменится, если воспользоваться выражениями (2.62), что непосредственно следует из формул типа (1.88), (1.89) и (1.112).

Дисперсии случайных функций $v_{\xi}(t)$, $v_{\eta}(t)$, $v_{\zeta}(t)$ согласно (2.63) определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} D [v_{\xi}] &= D [\dot{\xi}_0] + z^2 D [\psi] + y^2 D [\phi_p], \\ D [v_{\eta}] &= D [\dot{\eta}_0] + x^2 D [\phi_p] + z^2 D [\theta_k], \\ D [v_{\zeta}] &= D [\dot{\zeta}_0] + y^2 D [\theta_k] + x^2 D [\psi]. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

Соответственно среднеквадратичные значения будут

$$\sigma_{v_{\xi}} = \sqrt{D[v_{\xi}]}, \quad \sigma_{v_{\eta}} = \sqrt{D[v_{\eta}]}, \quad \sigma_{v_{\zeta}} = \sqrt{D[v_{\zeta}]}. \quad (2.69)$$

Пример 2.5. Для условий примера 2.3 вычислить среднеквадратичные и наибольшие значения составляющих линейной скорости точки корабля с координатами $x = 30$ м, $y = 5$ м, $z = -10$ м, обусловленной качкой и орбитальным движением. Дисперсии составляющих линейной скорости орбитального движения ц.т. корабля $D[\dot{\xi}_0] = D[\dot{\eta}_0] = D[\dot{\zeta}_0] = 0,8$ м²/сек².

Решение.

1) В соответствии с примером 2.2, п. 2, дисперсии угловых скоростей качки и рыскания составляют

$$D[\dot{\phi}_p] = 12,18 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-2}, \quad D[\dot{\psi}] = 12,18 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-2}, \\ D[\dot{\theta}_k] = 19 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-2}.$$

2) По формулам (2.68) и (2.69) вычисляем дисперсии, среднеквадратичные и наибольшие значения составляющих линейной скорости заданной точки корабля на качке

$$D[v_{\xi}] = 0,922 \text{ м}^2/\text{сек}^2, \quad D[v_{\eta}] = 1,00 \text{ м}^2/\text{сек}^2, \\ D[v_{\zeta}] = 1,94 \text{ м}^2/\text{сек}^2; \\ \sigma_{v_{\xi}} = 0,96 \text{ м/сек}, \quad \sigma_{v_{\eta}} = 1,00 \text{ м/сек}, \quad \sigma_{v_{\zeta}} = 1,39 \text{ м/сек}; \\ v_{\xi m} = 2,88 \text{ м/сек}, \quad v_{\eta m} = 3,00 \text{ м/сек}, \quad v_{\zeta m} = 4,17 \text{ м/сек}.$$

Из примера следует, что составляющие линейной скорости заданной точки корабля из-за его качки и орбитального движения могут достигать значительных величин.

2. Линейные ускорения. Линейное ускорение w точки O_1 (рис. 2.8) при качке корабля определяется следующим выражением [51]:

$$w = w_0 + \varepsilon \times r_1 + \omega(\omega \cdot r_1) - \omega^2 r_1,$$

где w_0 — линейное ускорение орбитального движения ц.т. корабля.

Проектируя это векторное равенство на корабельные оси $Oxyz$, получим [44]

$$\left. \begin{aligned} w_x &= a_{11}\ddot{\xi}_0 + a_{12}\ddot{\eta}_0 + a_{13}\ddot{\zeta}_0 + \dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - x\omega^2, \\ w_y &= a_{21}\ddot{\xi}_0 + a_{22}\ddot{\eta}_0 + a_{23}\ddot{\zeta}_0 + \dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - y\omega^2, \\ w_z &= a_{31}\ddot{\xi}_0 + a_{32}\ddot{\eta}_0 + a_{33}\ddot{\zeta}_0 + \dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - z\omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ — элементы матрицы A (1.17); $\ddot{\xi}_0, \ddot{\eta}_0, \ddot{\zeta}_0$ — проекции линейного ускорения w_0 ц.т. корабля на оси $O_0 \Xi \Pi Z$ (рис. 2.8), $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции мгновенной угловой скорости

ω корабля на оси $Oxyz$, определяемые соотношениями (1.48), $\dot{\omega}_x = \varepsilon_x$, $\dot{\omega}_y = \varepsilon_y$, $\dot{\omega}_z = \varepsilon_z$ — проекции углового ускорения ε на оси $Oxyz$ (см. (1.53)).

Подставляя в (2.70) соотношения (1.17) (при учете малых второго порядка), (1.49), (1.54) и ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости, получим [70]

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \xi_0 + \ddot{\eta}_0 \varphi_p - \psi \ddot{\zeta}_0 - x(\psi^2 + \varphi_p^2) + y(-\dot{\varphi}_p + \dot{\psi} \theta_k + 2\dot{\psi} \dot{\theta}_k) + \\ &\quad + z(\ddot{\psi} + \dot{\varphi}_p \theta_k + 2\dot{\varphi}_p \dot{\theta}_k), \\ w_y &= -\xi_0 \varphi_p + \ddot{\eta}_0 + \theta_k \ddot{\zeta}_0 + x(\dot{\varphi}_p - \dot{\psi} \theta_k) - y(\dot{\theta}_k^2 + \dot{\varphi}_p^2) - \\ &\quad - z(\dot{\theta}_k - \dot{\varphi}_p \psi - 2\dot{\varphi}_p \dot{\psi}), \\ w_z &= \xi_0 \psi - \ddot{\eta}_0 \theta_k + \ddot{\zeta}_0 - x(\ddot{\psi} + \dot{\varphi}_p \theta_k) + y(\dot{\theta}_k - \dot{\varphi}_p \psi) - \\ &\quad - z(\psi^2 + \dot{\theta}_k^2). \end{aligned} \right\} (2.71)$$

Если принять во внимание слагаемые первого порядка малости, то вместо (2.71) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \xi_0 + z\dot{\psi} - y\dot{\varphi}_p, \\ w_y &= \ddot{\eta}_0 + x\dot{\varphi}_p - z\dot{\theta}_k, \\ w_z &= \ddot{\zeta}_0 + y\dot{\theta}_k - x\dot{\psi}. \end{aligned} \right\} (2.72)$$

Эти выражения непосредственно могут быть получены путем дифференцирования соотношений (2.66).

Формулы для составляющих ускорения w в осях $O\xi\eta\zeta$ (рис. 2.8) получаются путем соответствующего преобразования, аналогичного (1.9),

$$[w_\xi, w_\eta, w_\zeta] = A^{-1} [w_x, w_y, w_z]. \quad (2.73)$$

С учетом слагаемых второго порядка малости согласно (2.71) и (1.17) получим

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \xi_0 - x(\psi^2 + \varphi_p^2 + \dot{\varphi}_p \varphi_p + \dot{\psi} \psi) + y(-\dot{\varphi}_p + \dot{\psi} \theta_k + \dot{\psi} \dot{\theta}_k + \\ &\quad + 2\dot{\psi} \dot{\theta}_k) + z(\ddot{\psi} + \dot{\varphi}_p \theta_k + \dot{\varphi}_p \dot{\theta}_k + 2\dot{\varphi}_p \dot{\theta}_k), \\ w_\eta &= \ddot{\eta}_0 + x\dot{\varphi}_p - y(\dot{\theta}_k^2 + \dot{\varphi}_p^2 + \dot{\varphi}_p \varphi_p + \dot{\theta}_k \theta_k) - \\ &\quad - z(\dot{\theta}_k - \dot{\varphi}_p \psi - \dot{\psi} \varphi_p - 2\dot{\varphi}_p \dot{\psi}), \\ w_\zeta &= \ddot{\zeta}_0 - x\dot{\psi} + y\dot{\theta}_k - z(\psi^2 + \dot{\theta}_k^2 + \dot{\theta}_k \theta_k + \dot{\psi} \psi), \end{aligned} \right\} (2.74)$$

откуда с точностью до слагаемых первого порядка имеем выражения

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \xi_0 + z\dot{\psi} - y\dot{\varphi}_p, \\ w_\eta &= \ddot{\eta}_0 + x\dot{\varphi}_p - z\dot{\theta}_k, \\ w_\zeta &= \ddot{\zeta}_0 + y\dot{\theta}_k - x\dot{\psi}, \end{aligned} \right\} (2.75)$$

совпадающие с (2.72).

В проекциях на оси географической системы координат $O\xi_r\eta_r\zeta_r$, по аналогии с (2.64), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} w_{\xi_r} &= w_{\xi} \cos K_0 - w_{\eta} \sin K_0, \\ w_{\eta_r} &= w_{\xi} \sin K_0 + w_{\eta} \cos K_0, \\ w_{\zeta_r} &= w_{\zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

где w_{ξ} , w_{η} , w_{ζ} определяются формулами (2.74) или (2.75).

Математические ожидания случайных функций $w_{\xi}(t)$, $w_{\eta}(t)$, $w_{\zeta}(t)$ согласно формулам (2.75) будут

$$M[w_{\xi}] = M[w_{\eta}] = M[w_{\zeta}] = 0. \quad (2.77)$$

В качестве примера найдем $M[w_{\xi}]$, исходя из формул (2.74), в которых учтены малые второго порядка. Составляющая $w_{\xi}(t)$ определяется выражением

$$w_{\xi}(t) = \xi_0 - x(\psi^2 + \phi_p^2 + \dot{\phi}_p \phi_p + \dot{\psi}\psi) + \\ + y(-\dot{\phi}_p + \dot{\psi}\theta_k + \psi\ddot{\theta}_k + 2\dot{\psi}\dot{\theta}_k) + z(\ddot{\psi} + \dot{\phi}_p\theta_k + \phi_p\ddot{\theta}_k + 2\dot{\phi}_p\dot{\theta}_k). \quad (2.78)$$

Учитывая свойства случайных функций, характеризующих качку корабля (§ 1.4, п.6), можно показать, что

$$\bar{\xi}_0 = y(-\dot{\phi}_p + \dot{\psi}\theta_k + \psi\ddot{\theta}_k + 2\dot{\psi}\dot{\theta}_k) = z(\ddot{\psi} + \dot{\phi}_p\theta_k + \phi_p\ddot{\theta}_k + 2\dot{\phi}_p\dot{\theta}_k) = 0. \quad (2.79)$$

Тогда

$$M[w_{\xi}(t)] = M[-x(\psi^2 + \phi_p^2 + \dot{\phi}_p\phi_p + \dot{\psi}\psi)]. \quad (2.80)$$

Определим математическое ожидание

$$M[\psi^2 + \dot{\psi}\psi]. \quad (2.81)$$

В согласии с (1.103) имеем

$$M[\psi^2] = D[\psi] = b_1^2 D[\psi].$$

Принимая во внимание (1.115), получим

$$M[\dot{\psi}\psi] = K_{\dot{\psi}\psi}(0) = -b_1^2 D[\psi].$$

Подставим $M[\psi^2]$ и $M[\dot{\psi}\psi]$ в (2.81), тогда

$$M[\psi^2 + \dot{\psi}\psi] = 0. \quad (2.82)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$M[\phi_p^2 + \dot{\phi}_p\phi_p] = 0. \quad (2.83)$$

Следовательно, согласно (2.80), (2.82) и (2.83) $M[w_{\xi}(t)] = 0$, что совпадает с (2.77). Таким же способом, пользуясь выражениями (2.74), легко показать, что $M[w_{\eta}(t)] = M[w_{\zeta}(t)] = 0$. Итак, сред-

ние значения составляющих ускорения w места установки ИУ из-за качки и орбитального движения корабля в земных осях $O\xi\eta\zeta$ (а также в географических осях $O\xi_r\eta_r\zeta_r$) равны нулю.

Для определения дисперсий и среднеквадратичных значений $w_\xi(t)$, $w_\eta(t)$, $w_\zeta(t)$ воспользуемся выражениями (2.75); имеем

$$\left. \begin{aligned} D[w_\xi] &= D[\ddot{\xi}_0] + z^2 D[\ddot{\psi}] + y^2 D[\ddot{\phi}_p], \\ D[w_\eta] &= D[\ddot{\eta}_0] + x^2 D[\ddot{\phi}_p] + z^2 D[\ddot{\theta}_K], \\ D[w_\zeta] &= D[\ddot{\zeta}_0] + y^2 D[\ddot{\theta}_K] + x^2 D[\ddot{\psi}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Соответственно среднеквадратичные значения будут

$$\sigma_{w_\xi} = \sqrt{D[w_\xi]}, \quad \sigma_{w_\eta} = \sqrt{D[w_\eta]}, \quad \sigma_{w_\zeta} = \sqrt{D[w_\zeta]}. \quad (2.85)$$

Пример 2.6. Для условий примеров 2.3 и 2.5 вычислить среднеквадратичные и наибольшие значения составляющих линейного ускорения заданной точки корабля, обусловленного качкой и орбитальным движением. Дисперсии составляющих линейного ускорения орбитального движения ц.т. корабля

$$D[\ddot{\xi}_0] = D[\ddot{\eta}_0] = D[\ddot{\zeta}_0] = 0,6 \text{ м}^2/\text{сек}^4.$$

Решение.

1) В соответствии с примером 2.4, п. 2 дисперсии угловых ускорений качки и рыскания составляют

$$\begin{aligned} D[\ddot{\phi}_p] &= 0,487 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-4}, \quad D[\ddot{\psi}] = 12,18 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-4}, \\ D[\ddot{\theta}_K] &= 4,75 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-4}. \end{aligned}$$

2) По формулам (2.84) и (2.85) вычисляем дисперсии, среднеквадратичные и наибольшие значения составляющих линейного ускорения заданной точки корабля на качке

$$\begin{aligned} \{ D[w_\xi] &= 0,722 \text{ м}^2/\text{сек}^4, \quad D[w_\eta] = 0,648 \text{ м}^2/\text{сек}^4, \\ D[w_\zeta] &= 1,71 \text{ м}^2/\text{сек}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{w_\xi} &= 0,85 \text{ м}/\text{сек}^2, \quad \sigma_{w_\eta} = 0,805 \text{ м}/\text{сек}^2, \quad \sigma_{w_\zeta} = 1,31 \text{ м}/\text{сек}^2; \\ w_{\xi_m} &= 2,55 \text{ м}/\text{сек}^2, \quad w_{\eta_m} = 2,42 \text{ м}/\text{сек}^2, \quad w_{\zeta_m} = 3,93 \text{ м}/\text{сек}^2. \end{aligned}$$

Из примера следует, что составляющие линейного ускорения заданной точки корабля из-за его качки и орбитального движения могут достигать значительных величин.

Дисперсии составляющих $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$ в корабельных осях $Oxyz$ будут также определяться формулами (2.84), что непосредственно следует из сопоставления формул (2.72) и (2.75).

Найдем математические ожидания составляющих $w_x(t)$, $w_y(t)$, $w_z(t)$. Если воспользоваться формулами (2.72), то мы приходим к выражениям типа (2.77). Иной результат получится, если принять во внимание формулы (2.71), в которых учтены слагаемые второго

порядка малости. Применяя к (2.74) операцию нахождения математического ожидания и учитывая формулы типа (1.103), получим

$$\left. \begin{aligned} M[w_x] &= -x \{D[\psi] + D[\varphi_p]\} = -x \{b_1^2 D[\psi] + b_3^2 D[\varphi_p]\}, \\ M[w_y] &= -y \{D[\dot{\theta}_k] + D[\varphi_p]\} = -y \{b_2^2 D[\dot{\theta}_k] + b_3^2 D[\varphi_p]\}, \\ M[w_z] &= -z \{D[\psi] + D[\dot{\theta}_k]\} = -z \{b_1^2 D[\psi] + b_2^2 D[\dot{\theta}_k]\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Следовательно, средние значения составляющих ускорения w места установки ИУ из-за качки и орбитального движения корабля в корабельных осях *Охуз* не равны нулю, что необходимо учитывать при соответствующих исследованиях.

Помимо линейных скоростей и ускорений заданной точки корабля при качке, в ряде случаев могут представить интерес также линейные перемещения этой точки. Решение этой задачи осуществляется аналогичными методами [42, 44].

§ 2.4. Влияние качки на использование ИУ

Качка и орбитальное движение ц.т. корабля существенно влияют на использование различных ИУ на корабле. К рассмотренным ранее вредным последствиям качки относятся: повороты связанной с ИУ координатной системы (§ 2.1); значительные по величине угловые скорости и ускорения наведения двухосного ИУ при косвенном методе стабилизации (§ 2.2); линейные скорости, ускорения и перемещения места установки ИУ из-за качки корабля и его орбитального движения (§ 2.3).

Вопросам влияния качки на использование пеленгационных и, в частности, оптических приборов посвящен ряд работ (см. например, [3, 27, 44, 57, 63]). Вследствие значительных углов поворотов визирной линии от заданного направления на ориентир операторы могут потерять ориентир из поля зрения оптического прибора. Переменный характер угловых скоростей и угловых ускорений наведения этих приборов на качке не позволяет осуществлять визирование с необходимой точностью и плавностью, что связано с запаздыванием в реакции оператора на изменение положения визирной линии относительно ориентира. Эти обстоятельства приводят к необходимости стабилизации на корабле различных оптических приборов, в первую очередь тех, которые применяются для визирования ориентиров, расположенных под большими углами места над ПГ. Стремление в некоторых случаях увеличивать угловые скорости и ускорения наведения не всегда является оправданным, так как приводит к усложнению структуры системы, увеличению ее габаритов и т. д. [6, 53]. Для решения некоторых задач по стабилизации пеленгационных устройств существенный интерес могут представить приводимые в

[57] структурные схемы системы слежения, передаточные функции человека-оператора, корреляционные функции и спектральные плотности ошибок слежения.

В последние годы на кораблях получили применение различные радиолокационные станции (РЛС). Влиянию качки на работу РЛС и рассмотрению вопросов стабилизации антенн РЛС посвящена многочисленная литература (см., например, [23, 53, 87, 89]). Среди факторов, характеризующих вредное влияние качки на использование РЛС, отмечают [87, 89]: уменьшение вероятности захвата ориентира радиолокационным лучом, так как наклон нестабилизированного радиолокационного луча из-за качки может быть настолько большим, что энергетический контакт антенны с ориентиром окажется невозможным; уменьшение дальности и зоны обнаружения ориентиров на качке; увеличение ошибок в определении координат ориентира, так как вызванный качкой наклон радиолокационного луча изменяет величины составляющих суммарных ошибок измерения координат и приводит к появлению дополнительных составляющих полных ошибок. Недостатком косвенной стабилизации антенны при двухосной системе наведения является связь между каналами наведения в азимуте и по углу места; кроме того, возникают ошибки, обусловленные поворотом диаграммы направленности вокруг оси луча [23]. Эти и другие обстоятельства приводят к необходимости стабилизации антенн на качке. Проблема стабилизации антенн возникла в результате развития техники радиолокации, перехода к сантиметровым волнам и необходимости точного управления положением луча в пространстве для полной реализации преимущества, предоставляемого узкой направленностью излучения [53]. При этом пространственная стабилизация антенны необходима не только для удержания ориентира в диаграмме направленности, но и для исключения ошибок, которые могут возникнуть при измерении с помощью РЛС параметров углового движения ориентира [23].

В зависимости от применяемого метода стабилизации, от реализации схемы стабилизации ИУ (число и расположение осей стабилизации и наведения) возникает соответствующая задача преобразования координат, решение которой осуществляется различными приборами (§ 1.1). При этом качка значительно сказывается на точности и других характеристиках работы этих приборов. Принятая схема стабилизации и наведения ИУ определяет необходимые угловые скорости и ускорения стабилизации и наведения, что сказывается на величинах моментов, которые должны развивать соответствующие следящие приводы. Эти обстоятельства в ряде случаев могут оказаться определяющими при решении задач стабилизации ИУ. Наконец следует указать, что качка корабля существенно сказывается на работе операторов, обслуживающих ИУ и связанные с ними системы и приборы [94, 96].

Из сказанного выше следует, что возникает существенная необходимость повышения эффективности использования различных измерительных устройств в условиях качки корабля. Решение этой задачи возможно путем [94, 96]: 1) рационального выбора размеров и параметров корабля; 2) маневрирования корабля относительно направления бега волн с изменением курса и скорости хода; 3) использования средств общей стабилизации корабля и местной стабилизации отдельных устройств и приборов.

Первые два способа имеют лишь ограниченное значение и не решают задачу умерения качки при изменяющихся в широких пределах внешних условиях. Третий способ является наиболее универсальным и эффективным. Поэтому вопросы теории и технические средства реализации этого способа подробно рассматриваются в дальнейшем.

Влияние колебаний самолета на использование РЛС и выводы о необходимости стабилизации самолетных антенн рассматриваются в ряде книг (см., например, [9]). Аналогичные вопросы влияния колебательных движений танка на использование в этих условиях прицельных приспособлений, других устройств и указания о целесообразности их стабилизации содержатся в работе [38].

СУЩНОСТЬ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ СТАБИЛИЗАЦИИ
НА КОРАБЛЕ§ 3.1. Характеристика методов стабилизации
и их классификация

1. **Общая и местная стабилизация.** Наиболее благоприятные условия для эффективного использования различных ИУ на качающемся корабле достигаются путем совместного применения средств общей стабилизации корабля и местной стабилизации отдельных устройств и приборов [94, 96]. К подобному выводу можно прийти путем анализа различных вариантов стабилизации: а) полная стабилизация ИУ, б) полная стабилизация корабля, в) грубая общая стабилизация корабля и местная стабилизация ИУ. Рассматривая эти варианты, отметим следующее. Стабилизация ИУ (см. § 1.1) при значительной качке представляет собой при отсутствии на корабле средств общей стабилизации сложную техническую задачу, так как в указанных условиях необходимы большие угловые скорости и ускорения следящих приводов систем местной стабилизации. Подобные требования приводят к существенному усложнению следящих приводов, к увеличению весов и габаритов систем стабилизации ИУ. Особенно сложным при отсутствии общей стабилизации корабля является реализация косвенного метода местной стабилизации различных пеленгационных устройств, предназначенных для слежения за ориентирами, расположенными под большими углами места над ПГ (см. §§ 2.1, § 2.2, § 2.4).

При рассмотрении вопросов, связанных со стабилизацией корабля, следует указать, что из всех видов колебательных движений корабля в настоящее время обеспечивается умеренное лишь бортовой качки. Стабилизация продольных колебаний, т. е. килевой качки и вертикальных перемещений ц. т. корабля, еще далека от практического осуществления [94, 96]. Общая стабилизация корабля в отношении его бортовой качки повышает его мореходные качества; уменьшает вредные последствия качки (потеря скорости хода, зарывание носа корабля в волну, оголение винтов, ухудшение условий работы различных систем, устройств, механизмов и обслуживающего их персонала и др.); создает более благоприятные условия для работы гироскопических и стабилизационных устройств на корабле, что приводит к повышению их

точности, а следовательно, и точности систем местной стабилизации; расширяет область применения местной стабилизации [94, 96].

Наиболее полной стабилизации корабля можно достичь в настоящее время с помощью активных гироскопических стабилизаторов [59, 94]. Эффективно действующая установка такого типа была осуществлена [59] на итальянском лайнере «Конте ди Саvoyя» водоизмещением в 48 000 т. Расход мощности, потребляемой установкой, составлял 1900 л. с., вес 660 т, рабочая скорость вращения гироскопов 800 об/мин, вес каждого из трех роторов 100 т. Испытания показали [59], что качка уменьшается весьма значительно: при действующем успокоителе амплитуды качки не превышали 3°, при выключенном стабилизаторе размахи ее достигали 23—24°. Этот пример показывает, какой дорогой ценой можно достичь наиболее полной стабилизации всего корабля и притом лишь по бортовой качке. Более просто решается задача умерения качки с помощью бортовых управляемых рулей (см. § 3.2), однако и здесь доведение амплитуд качки до 1—2° является достаточно сложным вопросом [94, 96].

Трудности практического осуществления полной стабилизации бортовой качки и сложность решения проблемы умерения килевой качки подтверждают целесообразность совместного использования средств грубой общей стабилизации корабля и местной стабилизации ИУ. При этом осуществление общей стабилизации облегчает решение задач местной стабилизации.

2. Классификация методов стабилизации. Основными характеристиками применяемой на кораблях стабилизации являются:

I. Вид стабилизации.

II. Степень полноты стабилизации.

III. Параметры стабилизации.

Виды стабилизации:

A. Общая стабилизация корабля.

B. Местная стабилизация ИУ.

B. Каскадная стабилизация, заключающаяся в общей стабилизации корабля и местной стабилизации ИУ.

Классификация общей стабилизации корабля приводится в § 3.2. Характеристиками местной стабилизации являются [23, 53, 84, 87, 89]:

1) Объекты стабилизации

а) пеленгационные и другие корабельные устройства, б) чувствительные элементы систем навигации и управления.

2) Метод стабилизации

а) косвенный, б) непосредственный.

3) Способ стабилизации

а) центральный, б) автономный, в) смешанный.

4) Принцип работы стабилизатора

а) неавтоматический, б) автоматический.

5) Тип следящего привода

а) неавтоматический, б) полуавтоматический, в) автоматический.

Под *пеленгационными устройствами* будем иметь в виду различные визиры, телескопы, секстанты, антенны радиолокаторов и т. д., наведение которых существенным образом зависит от качки корабля. К подлежащим стабилизации чувствительным элементам систем навигации и управления относятся: маятники, акселерометры, некоторые гироскопы, гравиметры, магнитометры и т. п.

Косвенный и непосредственный методы стабилизации подробно были разъяснены в § 1.1. Поясним сущность центрального, автономного и смешанного способов местной стабилизации. *Центральный способ* стабилизации состоит в том, что на корабле имеется, например, общая, или центральная ГВ. Углы качки от этой ГВ с помощью следящих систем передаются на стабилизируемые объекты, где обеспечивается стабилизация площадки относительно ПГ с помощью следящих приводов. Достоинством центральной стабилизации является уменьшение на корабле количества сложных и дорогостоящих ГУ. Недостаток ее состоит в снижении надежности системы стабилизации при выходе из строя центральной ГВ. В связи с этим подобную ГВ иногда приходится дублировать [53]. Кроме того, значительное отстояние ГВ (при центральном способе стабилизации) от объектов местной стабилизации может приводить к ошибкам стабилизации, обусловленным деформациями корабля.

При *автономном способе* стабилизация объекта осуществляется от отдельной, автономной системы стабилизации. Здесь возможны два варианта: а) в непосредственной близости от стабилизируемого объекта устанавливается, например, автономная ГВ, от которой углы качки вводятся на стабилизацию площадки; б) стабилизируемый объект содержит некоторое ГУ, которое обеспечивает гироскопическую стабилизацию площадки. Применяемые здесь ГУ представляют собой ГС, которые по принципу действия делятся на *непосредственные, силовые и индикаторные* [35]. *Непосредственные* ГС — устройства, в которых непосредственно используются стабилизирующие свойства трехстепенного гироскопа. Применяются они в качестве успокоителей бортовой качки корабля (§ 3.2), стабилизаторов вагона однорельсовой ж. д., для стабилизации чувствительных элементов систем управления [74]. *Силовые* ГС (гирорамы) — электромеханические устройства, содержащие, кроме гироскопов, специальные двигатели для преодоления воздействия на стабилизируемый объект внешних возмущающих моментов. *Индикаторные* ГС — системы, в которых ГУ, установленные на стабилизируемом объекте (например, площадке), являются чувствительными или задающими элементами, определяющими положение объекта и управляющими соответствующими

следящими системами; стабилизация же объекта (площадки) осуществляется с помощью следящих систем.

Достоинством автономного способа стабилизации является увеличение надежности работы системы стабилизации и уменьшение ее ошибок из-за деформаций корабля. Недостаток его состоит в увеличении количества ГУ на корабле и стоимости системы стабилизации. Сочетание автономного и центрального способов дает *смешанный способ* стабилизации, при реализации которого необходимо принимать во внимание указанные выше специфические особенности автономной и центральной стабилизации.

По принципу работы системы стабилизации могут быть *неавтоматическими* и *автоматическими*. *Неавтоматический принцип* состоит в том, что учет наклона ПП осуществляется путем непрерывного визирования линии видимого горизонта. Этот принцип работы в настоящее время практически не применяется вследствие очевидных ограничений и значительных ошибок стабилизации. Получивший широкое распространение *автоматический принцип* работы систем стабилизации основан на использовании гироскопических, вычислительных устройств (ВУ) и следящих систем, действие которых не требует вмешательства оператора.

Тип следящего привода стабилизации может быть *неавтоматическим*, или *ручным*, *полуавтоматическим*, т. е. с использованием оператора, и *автоматическим*. В современных системах местной стабилизации в основном используются следящие приводы стабилизации автоматического типа.

Каскадный вид стабилизации представляет собой сочетание различных методов и способов общей стабилизации корабля и местной стабилизации ИУ на корабле.

В зависимости от степени полноты стабилизации различают полную и частичную стабилизацию (см. § 1.1).

Наконец, весьма важной характеристикой стабилизации ИУ являются параметры, необходимые для стабилизации. Здесь возможно деление в зависимости от характера параметров стабилизации и способа их определения.

Характер параметров местной стабилизации зависит от применяемого метода стабилизации — непосредственного или косвенного (см. § 1.1). Параметрами непосредственной стабилизации являются углы рыскания и качки корабля или другие углы наклона ПП. Параметрами косвенной стабилизации служат угловые координаты (в корабельной системе) стабилизируемого направления ИУ. Способы определения параметров стабилизации делятся на *визирный* и *автоматический*. *Визирный способ* основан на определении углов качки или других углов наклона корабля путем визирования линии видимого горизонта и к настоящему времени практически утратил свое значение. *Автоматический способ* базируется на использовании ГУ, ПК и ВУ.

§ 3.2. Краткие сведения об успокоителях качки корабля

1. **Предварительные замечания.** При исследовании ряда вопросов местной стабилизации ИУ на корабле необходимо иметь общее представление об основных типах успокоителей качки (УК), их характеристиках, перспективах развития и областях применения. Поэтому ниже приводятся краткие сведения об УК, заимствованные из литературы (см., например, [7, 41, 42, 59, 94, 96]).

Волнение моря и возникающая вследствие этого качка корабля приводят к ряду вредных последствий, основными из которых являются следующие [59, 89, 94, 96]:

- 1) возможность опрокидывания корабля вследствие потери устойчивости при превышении предельного угла наклона;
- 2) появление дополнительных нагрузок на корпус корабля и на отдельные его конструкции;
- 3) заливание палубы водой из-за зарывания борта или оконечностей корабля под поверхность волны;
- 4) ухудшение условий эксплуатации различных приборов, устройств, систем и механизмов;
- 5) ухудшение управляемости корабля;
- 6) потеря скорости хода корабля из-за возрастания сопротивления корпуса при качке, ухудшение условий работы двигателей и увеличение рыскания корабля;
- 7) ухудшение условий обитаемости для экипажа и пассажиров.

Применение успокоителей уменьшает вредные последствия качки и создает более благоприятные условия для эффективного использования различных ИУ и средств местной стабилизации. Требования к общей стабилизации корабля обуславливаются рядом факторов. В качестве общего соображения можно указать, что так как стабилизация килевой качки пока не получила практического применения, то полезно умерение амплитуд бортовой качки до величин амплитуд килевой качки, которые в зависимости от типа корабля и характеристик волнения могут достигать $5 \div 8^\circ$. В работе [94] указывается, что для создания благоприятных условий для работы экипажа на средних по своим размерам кораблях должно обеспечиваться $3 \div 5$ -кратное умерение качки, что при современном состоянии техники стабилизации вполне реально. При этом создаются и более благоприятные условия для обслуживания корабельных механизмов, устройств, систем и приборов. В той же работе [94, стр. 272] отмечается, что если успокоитель должен осуществлять умерение качки в пределах, обеспечивающих работу систем местной стабилизации различных устройств и механизмов, то требуемая кратность также порядка $3 \div 5$.

Наиболее простая классификация УК предусматривает их деление по двум признакам [59]: 1) в зависимости от рабочего

органа (или устройства), который служит для создания момента, обеспечивающего требуемое умерение качки: 2) по принципу управления успокоителем. В качестве рабочего органа в УК используются: выступающие части, находящиеся во взаимодействии с забортной водой; перемещающиеся твердые грузы; перемещающиеся жидкости; гироскопические стабилизаторы. По принципу управления успокоители делятся на *пассивные* и *активные*. В успокоителях пассивного типа действие рабочих органов является следствием колебательного движения корабля и не требует затраты дополнительной мощности. В успокоителях активного типа рабочие органы приводятся в действие от специальных механизмов, которые обычно управляются автоматическим регулирующим устройством; при этом необходима дополнительная затрата энергии. В более поздних работах [94, 96] приводится классификация успокоителей качки, учитывающая большее количество отличительных признаков. Следует заметить, что ведущим признаком классификации успокоителей является механическая природа сил и моментов, обуславливающих стабилизирующее действие УК.

2. Бортовые кили и бортовые управляемые рули. Одним из простейших средств умерения качки являются бортовые кили, представляющие собой специальные выступающие устройства, которые расположены в подводной части корабля. Действие их основано на повышении сопротивления корпуса корабля при качке, они предотвращают возникновение чрезмерно больших углов качки. При значительном волнении амплитуды качки могут быть уменьшены до 30—40% [59]. Результаты натурных испытаний показывают [94], что на нерегулярном волнении бортовые кили с площадью 2—4% от площади ватерлинии в дрейфе уменьшают амплитуды качки в среднем на 25—30%. Они устанавливаются у большинства современных кораблей в качестве вспомогательного средства стабилизации.

Бортовые кили относятся к успокоителям пассивного типа. Перенесение на них активного принципа привело к разработке бортовых управляемых рулей, действие которых основано на том же принципе, что элеронов у самолета. Поворот рулей осуществляется рулевой машинкой, которая управляется от ГУ. При качке корабля рули устанавливаются в такое положение, при котором в условиях поступательного движения корабля обтекание их водой создает на рулях подъемную силу, направленную вверх с одной стороны и вниз — с другой. Эти силы и дают момент, противодействующий крену корабля. При отсутствии качки рули могут быть убраны внутрь корпуса корабля. Эффективность бортовых рулей возрастает с увеличением скорости хода корабля. С их помощью можно уменьшить качку на сильном волнении приблизительно в 3 раза [59]. К достоинствам бортовых ру-

лей относятся: малые веса и габариты, сравнительно небольшая стоимость установки (в несколько раз дешевле гироскопических успокоителей), возможность создания большого стабилизирующего момента. Недостатками их являются: чувствительность рулей к уменьшению скорости хода, невозможность использования при отсуствии хода, опасность повреждения рулей, так как они выступают за обшивку корпуса корабля. Отмечается [89], что комбинация бортовых рулей с бортовыми килями или с цистернами может обеспечить стабилизацию корабля не только на ходу, но и на стоянке. В работе [94] указывается, что данный вид УК оказался наиболее приемлемым для современных быстроходных судов, а также для крупных океанских лайнеров.

3. Твердые грузы. Сущность действия этого типа успокоителя осно вана на том, что перемещающийся относительно корабля груз своим весом создает стабилизирующий момент, который противодействует кренящему. Однако этот успокоитель вследствие малой эффективности и других недостатков не получил распространения. Дальнейшее усовершенствование данного успокоителя путем перехода к активному принципу привело к использованию перемещающейся по рельсам управляемой тележки. По данным испытаний подобный стабилизатор умерял качку в несколько раз. Достоинством системы является большая компактность всей установки, а недостатками — трудность размещения пути для тележки и небезопасность использования [59]. Эти и другие недостатки ограничивают практическое использование этого типа успокоителей.

4. Жидкостные цистерны. При определенных условиях, зависящих от размеров цистерн, количества в них жидкости и периода свободных колебаний корабля, движение жидкости в цистернах запаздывает по фазе по отношению к качаниям корабля и, таким образом, жидкость своим весом противодействует его колебательному движению. Первоначально жидкостные цистерны изготавливались в виде плоских водяных камер. Они понижали начальную остойчивость корабля и увеличивали период его свободных колебаний, что приводило к уменьшению амплитуд бортовой качки. Дальнейшее развитие пошло путем использования пассивных цистерн Фрама, в которых жидкость перемещается с одного борта на другой под влиянием качки. Различают цистерны 1-го и 2-го рода. В цистернах 1-го рода нижние их части соединяются водяным каналом, а верхние — воздушным. Цистерны 2-го рода вместо водяного соединительного канала сообщаются с забортной водой через отверстия в обшивке корабля. В настоящее время от пассивных цистерн по ряду причин отказались [94].

Последующее развитие жидкостных цистерн связано с использованием активного принципа работы, при котором управляют движением жидкости с помощью турбовоздуховок или специ-

альных насосов таким образом, чтобы достичь наиболее полного погашения колебаний корабля. Подобные цистерны были широко распространены. При этом обеспечивалось умерение качки в несколько раз. В дальнейшем начали использовать частично активизированные и комбинированные цистерны, которые позволяют уменьшить амплитуды качки до нескольких градусов. Применение жидкостных цистерн целесообразно на крупных тихоходных кораблях, где затруднительно использовать, например, бортовые управляемые рули.

5. Гироскопические стабилизаторы. В начале XX столетия немецкий инженер О. Шлик предложил гироскопический успокоитель качки, сущность которого состоит в том, что при установке на качающемся корабле гироскопа возникает гироскопический момент, противодействующий кренящему. Помимо нескольких опытных установок, система Шлика не получила практического применения вследствие ряда недостатков [59, 71].

В дальнейшем пассивный ГС был усовершенствован американским инженером Э. Сперри путем перехода к активному принципу, при котором прецессионное движение гироскопа и соответствующий стабилизирующий момент создаются искусственно с помощью специального (прецессионного) двигателя, управляемого от вспомогательного гироскопа. Вначале активные гироскопические успокоители получили широкое применение в японском и итальянском флотах. Пример использования подобного успокоителя на лайнере «Конте ди Савойя» был рассмотрен в § 3.1. Эти стабилизаторы обладали высокой эффективностью. Однако ряд их недостатков — сложность устройства, высокая стоимость системы, большие веса и габариты, потребление значительной мощности, сложность эксплуатации — ограничивают их широкое применение на кораблях. В работе [94] отмечаются попытки использования гироскопических УК на некоторых кораблях, требующих стабилизации при малой скорости хода или при отсутствии хода.

Из сказанного выше следует, что из большого числа различных УК практическое применение нашли лишь несколько типов. К ним можно отнести [89, 94, 96]:

1) бортовые кили — на кораблях всех типов и классов, за исключением судов (например, ледоколы), которые по условиям эксплуатации не должны иметь уязвимых выступающих частей;

2) жидкостные цистерны, пассивные и частично активизированные, а также другие типы — преимущественно на крупных тихоходных судах, совершающих длительное плавание (рыбопромысловые базы, ледоколы, танкеры);

3) бортовые управляемые рули — на быстроходных кораблях и судах.

При осуществлении успокоителей бортовой качки важная роль отводится разработке высококачественных систем автоматического

управления успокоителями [94]. Среди чувствительных элементов этих систем существенное значение имеют ГУ, которые служат для определения углов крена корабля и их производных. В реализованных успокоителях для измерения углов крена используются ГВ с маятниковой коррекцией, гиромаятники, силовые ГС. Для определения угловых скоростей и угловых ускорений качки применяются гиротахометры и гиротахоакселерометры (см. гл. 7).

§ 3.3. Объекты местной стабилизации, ее параметры и приборы для их определения

К объектам местной стабилизации относятся пеленгационные устройства, чувствительные элементы систем навигации и управления, а также другие корабельные устройства, которые могут изменять свою ориентацию относительно корабля. Объектами стабилизации являются и посты, в которых расположены пеленгационные и другие устройства. Так, например, в работе [44] рассматриваются вопросы стабилизации визирного или дальномерного постов с установленными в них оптическими визирами и дальномерами. В книгах [23, 87] упоминается о стабилизации антенных постов, в которых располагаются антенны судовых РЛС.

Особенность объектов стабилизации типа чувствительных элементов систем навигации и управления состоит в том, что, в отличие от пеленгационных устройств, они не должны изменять своей ориентации относительно земной или инерциальной систем координат.

Применяемый метод стабилизации объекта и схема стабилизирующего устройства определяют другую важную характеристику стабилизации — ее параметры, или данные, необходимые для стабилизации. Параметрами непосредственной стабилизации обычно являются углы рыскания и качки корабля или другие углы наклона ПШ к горизонту. Параметрами косвенной стабилизации служат угловые координаты (в корабельной системе) стабилизируемого направления ИУ. Для определения параметров стабилизации используются приборы типа ГУ, ПК, ВУ.

Применяющиеся в системах местной стабилизации ГУ служат для воспроизведения на корабле некоторой базовой системы координат, а также для определения параметров, характеризующих качку: углов рыскания и качки, их угловых скоростей и ускорений, линейных скоростей и ускорений места установки ИУ.

Основными устройствами этого типа являются: гироскопические стабилизаторы (ГС), осуществляющие непосредственную стабилизацию различных ИУ; гировертикали (ГВ), определяющие углы бортовой, килевой качки или другие углы наклона ПШ к горизонту; гироскопы направления (ГН), дающие углы рыскания; гиросимут-горизонты (ГАГ), предназначенные для нахождения углов качки

и рыскания; гириотаксометры (ГТ), определяющие угловые скорости качки и рыскания; гириотаксоакселерометры (ГТА), которые служат для измерения угловых скоростей и угловых ускорений качки и рыскания; гириотаксокомпасы (ГК), определяющие курс корабля; акселерометры (АК), измеряющие линейные ускорения места установки ИУ; гириотаксоинтеграторы (ГИ) линейных ускорений, которые предназначены для определения линейной скорости места установки ИУ.

При определении параметров косвенной и непосредственной стабилизации применяются ПК, которые осуществляют преобразование сферических координат заданного направления из земной системы координат в корабельную или наоборот. На первом этапе решения подобных задач использовались упрощенные аналитические зависимости, которые реализовывались с помощью простейших счетно-решающих устройств аналогового типа. В дальнейшем задачи преобразования координат на корабле решались теоретически точно с помощью электромеханических устройств построительного, или геометрического, типа [53, 56]. Вследствие сложности ПК механического типа [63] последующее их развитие пошло по пути использования векторно-аналитических принципов [6, 53, 56], реализуемых с помощью синусно-косинусных вращающихся трансформаторов (СКВТ) [85]. Для решения задач преобразования координат возможно также использование цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

В некоторых случаях требуется не текущее значение параметра стабилизации, например, угла бортовой качки корабля, а его значение в некоторый будущий момент времени. Подобные задачи решаются с помощью прогнозирующих устройств (ПУ). Последнее представляет собой электромеханическое устройство, которое осуществляет прогнозирование положения корабля или ИУ на качке.

В системах местной стабилизации ИУ на корабле важное место занимают ВУ. С их помощью решается широкий круг задач, к которым относятся: преобразование координат, построение систем коррекции в гириотаксоинтеграторах и стабилизирующих устройствах, фильтрация и сглаживание вырабатываемых параметров стабилизации, реализация систем слежения и наведения ИУ и др. Применяемые в системах местной стабилизации ВУ основаны на использовании средств аналоговой и цифровой вычислительной техники, при этом в последнее время предпочтение отдается ЦВМ.

При построении систем местной стабилизации применяются следующие системы и системы наведения (следящие приводы), обеспечивающие эффективное использование систем стабилизации в условиях качки корабля. Вопросам теории и практики судовых следящих систем посвящена обширная литература (см., например, [6, 13, 18, 65, 66, 82, 87]).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ§ 4.1. Сущность задач преобразования координат
на корабле и обзор методов их решения

При исследовании геометрии и кинематики корабельных ИУ возникают задачи преобразования координат из одной системы в другую, в частности, из земной системы координат в корабельную и наоборот. К подобным задачам относятся: 1) преобразование углов качки корабля из одних плоскостей в другие; 2) преобразование углов качки в другие углы наклона палубы корабля к ПГ; 3) определение углов поворотов на качке связанной с ИУ координатной системы; 4) преобразование углов наведения ИУ из земной системы координат в корабельную и наоборот; 5) преобразование снимаемых с ГУ углов; 6) преобразование сигналов управления в системах гироскопической стабилизации и др.

Для решения указанных задач используются формулы сферической тригонометрии, методы аналитической геометрии, матричные методы преобразования координат, геометрические методы, базирующиеся на теории малых и конечных поворотов твердого тела [58].

В морской технике первоначально применяли методы сферической тригонометрии. Использование формул сферической тригонометрии приводит иной раз к громоздким выкладкам и требует некоторого навыка в выборе тех «сферических треугольников» на соответствующем вспомогательном чертеже, исходя из которых могут быть получены искомые соотношения между рассматриваемыми сферическими координатами. В ряде случаев, особенно когда заданные и искомые координаты являются элементами одного треугольника, применение формул сферической тригонометрии позволяет наиболее просто решить поставленную задачу.

Широкое применение в рассматриваемой области нашли методы аналитической геометрии. Подобный подход имеет место в работах А. Ю. Ишлинского [27], Б. И. Кудревича [49] и других авторов, в которых используются формулы линейного преобразования координат и таблицы косинусов углов между осями соответствующих систем координат, составление которых в ряде случаев связано с достаточно громоздкими выкладками.

В различных областях математики, механики и физики в последние десятилетия успешно используется матричное исчисление. В частности, с помощью матричных методов в наиболее общем и удобном для приложений виде излагается теория линейных преобразований координат. При этом существенно упрощается процесс составления таблиц косинусов углов, т. е. матрицы преобразования координат, что следует из § 1.3, п. 2. Матричный метод в последние годы получил широкое применение при решении различных задач преобразования координат, встречающихся в прикладной гироскопии, теории стабилизации (см., например, [6, 51, 69—71]) и других областях механики.

В теории стабилизации целесообразно также использовать развитый А. Ю. Ишлинским [27] геометрический метод, основанный на теории бесконечно малых вращений твердого тела, которые можно изобразить в виде векторов, направленных по соответствующим осям вращения. При этом несколько бесконечно малых поворотов тела можно заменить одним, вектор которого равен геометрической сумме векторов отдельных поворотов; порядок поворотов роли не играет. Эти свойства приближенно справедливы и для малых вращений твердого тела. В ряде случаев применение указанного геометрического метода имеет известные преимущества по сравнению с упомянутыми ранее аналитическими методами в смысле наглядности и возможности непосредственного получения упрощенных зависимостей между рассматриваемыми сферическими координатами.

При исследованиях геометрии, кинематики и динамики систем стабилизации на корабле известные перспективы имеют методы, основанные на теории конечных поворотов твердого тела [51] с использованием параметров Родрига — Гамильтона, Кейли — Клейна. Введение этих параметров естественно приводит к применению кватернионов [99], которые выражаются в виде гиперкомплексного числа через параметры Родрига — Гамильтона. При этом сложение, например, двух конечных поворотов представляется в виде умножения соответствующих кватернионов. Теория конечных поворотов твердого тела с применением кватернионов была использована А. Ю. Ишлинским [29] при решении некоторых задач по геометрии кардановых подвесов. Кватернионы и параметры Родрига — Гамильтона применяются в задачах ориентации твердого тела и управления движением различных объектов [10], в прикладной теории гироскопов [22, 39], при рассмотрении некоторых геометрических задач и кинематических вопросов инерциальной навигации [88].

Обращение в последние годы в механике и теории управления к кватернионам, параметрам Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна обусловлено рядом обстоятельств. Эти параметры, в отличие от углов Эйлера, не вырождаются при любом положении твер-

дого тела, т. е. ни сами параметры, ни скорости их изменения не обращаются в бесконечность. Число этих параметров равно четырем, поэтому они имеют одно уравнение связи, в отличие от шести для направляющих косинусов. Использование подобных параметров приводит к описанию движения твердого тела с помощью линейных уравнений, что весьма упрощает их решение с помощью ЦВМ. Так, например, в статье [88] указывается, что известные кинематические уравнения инерциальной навигации [27, 29] являются нелинейными и имеют особенности в точках с широтой $\pm \pi/2$ (Северный и Южный полюсы Земли). Запись кинематических уравнений в параметрах Родрига — Гамильтона приводит к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Дальнейший переход к параметрам Кейли — Клейна позволяет решить задачу инерциальной навигации в околополярных областях.

Применение указанных кинематических параметров связано с использованием кватернионов, которые дают весьма удобный математический аппарат для описания и исследования движения твердого тела, для решения задач управления и др. [40]. На основании сказанного выше представляется целесообразным исследование теории конечных поворотов твердого тела при исследовании вопросов стабилизации ИУ на корабле.

§ 4.2. Использование формул сферической тригонометрии

Рассмотрим несколько задач преобразования координат с использованием основных формул сферической тригонометрии. Одна из первых задач по геометрии наведения морских орудий на качке методами сферической тригонометрии была решена А. Н. Крыловым. Приведем краткое ее изложение, пользуясь работой [15]. Задача состоит в определении поправок в угле возвышения и в целике *) наклон оси цапф орудия. Примем плоскость чертежа (рис. 4.1) за вертикальную плоскость, проходящую через ось цапф орудия OS_0 ; перпендикулярная ей плоскость $OR_0(P)HE_0$ является плоскостью стрельбы. Линия OP пересечения ПГ и ПП совпадает с направлением OR_0 на цель. Пусть OH — ось орудия, так что $R_0H = \varphi$ представляет собой угол возвышения орудия, соответствующий требуемой дальности, когда ось цапф горизонтальна. Точка E_0 соответствует оси поворотного механизма, т. е. оси ГН, круг $S_0R_0N_0$ — сектору ГН, когда ось цапф горизонтальна и направлена (для правой цапфы) по линии OS_0 . Предположим, что ось цапф орудия вместе с палубой наклонилась вокруг оси $OR_0(OP)$ на угол ρ и заняла положение OS_1 , а ось ГН — положе-

*) Под целиком имеется в виду азимутальное упреждение на относительный ход цели и другие факторы [15].

ние OE . В этом случае ось орудия сместится относительно требуемого направления OH . Угол ρ называют *углом наклона оси цапф* (сокращенно угол НОЦ). Для удержания на качке оси орудия в направлении OH надлежит: 1) в ΓH в плоскости $OS_1R_0N_1$ ввести

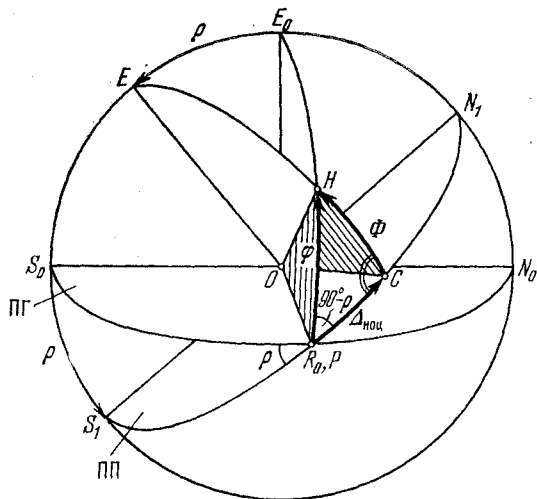


Рис. 4.1. К определению поправок $\Delta\phi$ и $\Delta_{\text{ноц}}$.

поправку в целике $\Delta_{\text{ноц}} = R_0C$, которую называют *поправкой на наклон оси цапф* орудия; 2) в ΓH в плоскости $OS_1R_0N_1$ ввести полный угол $\Gamma H \Phi = CH$.

Для определения $\Delta_{\text{ноц}}$ и Φ рассмотрим сферический треугольник R_0CH , в котором: $\sphericalangle R_0 = 90^\circ - \rho$, $\sphericalangle C = 90^\circ$, $R_0H = \varphi$, $CH = \Phi$. В соответствии с известной формулой сферической тригонометрии имеем

$$\frac{\sin \Phi}{\sin(90^\circ - \rho)} = \frac{\sin \varphi}{1},$$

откуда

$$\sin \Phi = \sin \varphi \cos \rho. \quad (4.1)$$

Из того же треугольника R_0CH находим

$$\text{tg } \Delta_{\text{ноц}} = -\text{tg } \varphi \sin \rho. \quad (4.2)$$

Здесь знак минус поставлен в согласии с принятым направлением отсчета углов и учитывает, что положительное направление оси ΓH обращено вдоль оси OE вниз.

Формулы (4.1) и (4.2) справедливы для рассмотренного частного случая, когда направление на цель OR_0 совпадает с линией OP пересечения ПП и ПГ. Величину $\Delta_{\text{ноц}}$ обычно называют поправкой

сферической тригонометрии весьма громоздкий и намного сложнее способа, основанного на применении простейших формул аналитической геометрии (см. § 2.2, п.2).

Выражения для Q и Φ можно упростить, если положение корабля определять не углами качки ψ , θ_K , а другими углами наклона ПП относительно ПГ. Введем эти углы следующим образом. На рис. 4.2 плоскость OR_0HE_0 представляет собой плоскость ВН при отсутствии качки. Наклон ПП в этой плоскости относительно ПГ определяется углом $e = R_0R_2$, который иногда называют *углом крена корабля в плоскости ВН* (в плоскости визирования). Проведем в ПГ линию OS_0 , являющуюся нормалью к плоскости OR_0HE_0 . Наклон линии OS_0 относительно ПП в плоскости OES_0S_1 , перпендикулярной к ПП, характеризуется углом $\rho_K = S_0S_1$. Параметры e и ρ_K полностью определяют положение ПП относительно ПГ. Они являются функциями углов качки ψ , θ_K , угла ГН $q = A_2R_0$ и определяются формулами

$$\operatorname{tg} e = \operatorname{tg} \psi \cos q - \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\cos \psi} \sin q, \quad (4.3)$$

$$\sin \rho_K = \sin \theta_K \cos q + \sin \psi \cos \theta_K \sin q, \quad (4.4)$$

вывод которых приводится далее.

Заметим, что при $q = 0$

$$e = \psi, \quad \rho_K = \theta_K, \quad (4.5)$$

что непосредственно следует из рис. 4.2.

Воспользуемся формулами сферической тригонометрии для вывода зависимостей

$$\Phi = \Phi(\varphi, e, \rho_K), \quad Q = Q(q, \varphi, e, \rho_K). \quad (4.6)$$

Рассмотрим сферический треугольник R_2CH , в котором: $\sphericalangle R_2 = 90^\circ - \rho_K$, $\sphericalangle C = 90^\circ$, $CH = \Phi$, $R_2H = \varphi - e$. Из этого треугольника имеем

$$\sin \Phi = \sin(\varphi - e) \cos \rho_K. \quad (4.7)$$

Из рис. 4.2 усматриваем, что

$$Q = AC = AR_2 - CR_2. \quad (4.8)$$

Рассмотрим сферический треугольник R_2AE_0 , в котором: $\sphericalangle E_0 = q$, $\sphericalangle R_2 = 90^\circ - \rho_K$, $R_2E_0 = 90^\circ - e$. Из этого треугольника находим AR_2 ; имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} AR_2 \sin(90^\circ - e) &= \\ &= \operatorname{ctg} q \sin(90^\circ - \rho_K) + \cos(90^\circ - e) \cos(90^\circ - \rho_K), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} AR_2 = \frac{\cos e}{\operatorname{ctg} q \cos \rho_K + \sin \rho_K \sin e}, \quad (4.9)$$

или

$$AR_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos e}{\operatorname{ctg} \varphi \cos \rho_K + \sin \rho_K \sin e} \right]. \quad (4.10)$$

Из сферического треугольника R_2CH определяем дугу CR_2

$$\operatorname{ctg}(\varphi - e) \sin CR_2 = \cos CR_2 \sin \rho_K,$$

откуда

$$\operatorname{tg} CR_2 = \operatorname{tg}(\varphi - e) \sin \rho_K \quad (4.11)$$

или

$$CR_2 = \operatorname{arctg} [\operatorname{tg}(\varphi - e) \sin \rho_K]. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.10) и (4.12) в (4.8), получим

$$Q = \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos e}{\operatorname{ctg} \varphi \cos \rho_K + \sin \rho_K \sin e} \right] - \operatorname{arctg} [\operatorname{tg}(\varphi - e) \sin \rho_K]. \quad (4.13)$$

Формулу для Q можно записать в несколько ином виде. В согласии с (4.8)

$$\operatorname{tg} Q = \operatorname{tg}(AR_2 - CR_2) = \frac{\operatorname{tg} AR_2 - \operatorname{tg} CR_2}{1 + \operatorname{tg} AR_2 \cdot \operatorname{tg} CR_2}.$$

Вводя сюда соотношения (4.9) и (4.11), получим

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\cos e - \operatorname{tg}(\varphi - e) \sin \rho_K (\operatorname{ctg} \varphi \cos \rho_K + \sin \rho_K \sin e)}{\operatorname{ctg} \varphi \cos \rho_K + \sin \rho_K \sin e + \cos e \operatorname{tg}(\varphi - e) \sin \rho_K}. \quad (4.14)$$

Сравнение формул (4.7) и (2.38) показывает, что формула (4.7), в которую входят параметры e и ρ_K , значительно проще. Использование этой формулы для определения угла Φ целесообразно в том случае, если на корабле имеется ГВ, которая непосредственно дает углы наклона палубы e и ρ_K . Если же ГВ определяет углы качки ψ , θ_K , то их приходится пересчитывать в e , ρ_K с помощью формул (4.3), (4.4), и в этом случае формула (4.7) не имеет преимуществ по сравнению с (2.38). Сравнение формул (4.13) (или (4.14)) и (2.39) для угла Q показывает, что они примерно одинаковы по сложности.

Сопоставим выражения (4.7), (4.13) для углов Φ и Q с формулами (4.1) и (4.2), полученными для частного случая, когда линии OP и OR_0 совпадают (рис. 4.1). Это имеет место при $e = 0$ (рис. 4.2); полагая в формуле (4.7) $e = 0$, получим

$$\sin \Phi = \sin \varphi \cos \rho_K, \quad (4.15)$$

что совпадает с формулой (4.1), так как при $e = 0$ плоскость OES_0S_1 будет перпендикулярна к ПГ (сравните рис. 4.1 и рис. 4.2) и $\rho_K = \rho$.

Аналогичным образом положим в формуле (4.13) $e = 0$; тогда

$$Q = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \rho_K} \right) - \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \varphi \sin \rho_K). \quad (4.16)$$

Так как в согласии с формулой (4.4) угол ρ_k в практически важных случаях является малым, то, полагая в (4.16) $\cos \rho_k \cong 1$, получим

$$Q = q - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \sin \rho_k). \quad (4.17)$$

При $e = 0$ угол $\rho_k = \rho$ и второе слагаемое в формуле (4.17) совпадает с выражением (4.2); поэтому

$$Q = q + \Delta_{\text{ноц}}, \quad (4.18)$$

т. е. приближенно полный угол ГН Q может быть представлен как сумма угла ГН q и поправки $\Delta_{\text{ноц}}$ на наклон оси цапф.

Из приведенных выше примеров следует, что в ряде простых задач по геометрии стабилизации целесообразно пользоваться методами сферической тригонометрии.

§ 4.3. Применение методов аналитической геометрии

1. Сущность метода. Другой метод решения задач преобразования координат состоит в использовании формул линейного ортогонального преобразования координат, которые устанавливают связь между прямоугольными координатами в одной системе и координатами в некоторой другой системе через направляющие косинусы. Основная сложность в использовании этого метода заключается в необходимости при решении конкретной задачи каждый раз составлять соответствующие таблицы направляющих косинусов, которые в данном методе являются кинематическими параметрами, определяющими положение твердого тела. Напомним несколько основных формул, приводившихся в главе 1.

Рассмотрим земную $O\xi\eta\zeta$ и корабельную $Oxyz$ (рис. 1.4, а) координатные системы. Формулы линейного ортогонального преобразования координат от осей $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Этому преобразованию соответствует таблица косинусов углов

$$\begin{array}{c|ccc} & \xi & \eta & \zeta \\ \hline x & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}, \quad (4.20)$$

элемент a_{ij} , которой равен косинусу угла между соответствующими осями, т. е.

$$a_{11} = \cos(\widehat{x, \xi}), \quad a_{12} = \cos(\widehat{x, \eta}), \quad \dots, \quad a_{33} = \cos(\widehat{z, \zeta}). \quad (4.21)$$

Обратное преобразование координат, т. е. от осей $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$, записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ \eta &= a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ \zeta &= a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

2. **Линейные преобразования координат при качке.** В преобразователях координат, основанных на использовании векторно-аналитического метода (см. гл. 8), применяются последовательные линейные преобразования координат на плоскости, реализуемые с помощью соответствующих электрических устройств. Рассмотрим преобразования координат при наличии качки корабля. Пусть

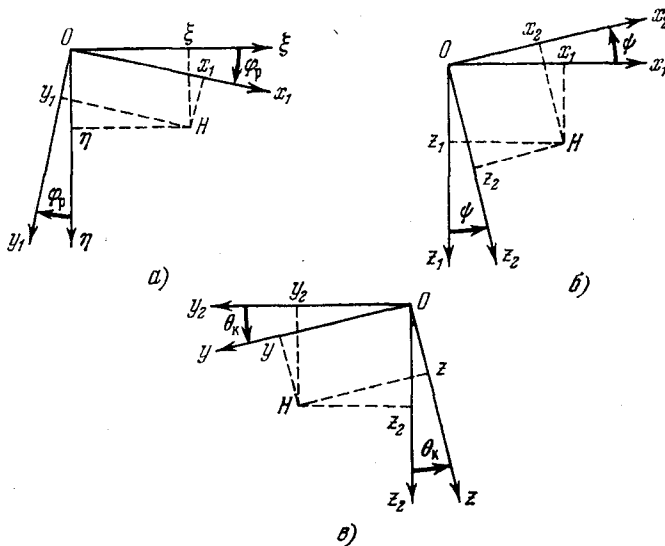


Рис. 4.3. Схема перехода от земных координат к корабельным.

даны линейные координаты ξ , η , ζ некоторой точки H пространства (рис. 4.3) в земной системе координат $O\xi\eta\zeta$. Требуется найти линейные координаты x , y , z той же точки H в корабельной системе координат $Oxyz$. Взаимное положение координатных осей $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ определяется углами рыскания φ_p , килевой качки ψ , бортовой качки θ_k (рис. 1.4, а). Введем последовательно три поворота осей $Oxyz$.

1) Повернем систему $Oxyz$ (из ее исходного положения $O\xi(x)\eta(y)\zeta(z)$) на угол φ_p (рис. 4.3, а); при этом оси Ox и Oy займут соответственно положения Ox_1 и Oy_1 , а ось Oz (Oz_1) останется совпадающей с осью $O\xi$. В системе $Ox_1y_1z_1$ (ξ) точка H будет

ИМЕТЬ КООРДИНАТЫ

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi \cos \varphi_p + \eta \sin \varphi_p, \\ y_1 &= -\xi \sin \varphi_p + \eta \cos \varphi_p, \\ z_1 &= \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

2) Повернем промежуточную систему координат $Ox_1y_1z_1$ вокруг оси Oy_1 на угол ψ (рис. 4.3, б); при этом оси Ox_1 и Oz_1 займут соответственно положения Ox_2 и Oz_2 , а ось Oy_2 совпадает с осью Oy_1 . В системе $Ox_2y_2z_2$ точка H будет иметь координаты

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \psi - z_1 \sin \psi, \\ y_2 &= y_1, \\ z_2 &= x_1 \sin \psi + z_1 \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

3) Повернем промежуточную систему координат $Ox_2y_2z_2$ вокруг оси Ox_2 на угол θ_K (рис. 4.3, в); при этом оси Oy_2 и Oz_2 совпадут соответственно с осями Oy и Oz , а ось Ox_2 — с осью Ox . В системе координат $Oxyz$ точка H будет иметь координаты

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2, \\ y &= y_2 \cos \theta_K + z_2 \sin \theta_K, \\ z &= -y_2 \sin \theta_K + z_2 \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Подставляя в (4.25) выражения (4.24) и (4.23), получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi_p \cos \psi + \eta \sin \varphi_p \cos \psi - \zeta \sin \psi, \\ y &= \xi (\cos \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K - \sin \varphi_p \cos \theta_K) + \\ &\quad + \eta (\cos \varphi_p \cos \theta_K + \sin \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K) + \zeta \cos \psi \sin \theta_K, \\ z &= \xi (\sin \varphi_p \sin \theta_K + \cos \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K) + \\ &\quad + \eta (\sin \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K - \cos \varphi_p \sin \theta_K) + \zeta \cos \psi \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

В формулах (4.26) коэффициенты при ξ , η , ζ обозначим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi_p \cos \psi, \\ a_{12} &= \sin \varphi_p \cos \psi, \\ a_{13} &= -\sin \psi, \\ a_{21} &= \cos \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K - \sin \varphi_p \cos \theta_K, \\ a_{22} &= \cos \varphi_p \cos \theta_K + \sin \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K, \\ a_{23} &= \cos \psi \sin \theta_K, \\ a_{31} &= \sin \varphi_p \sin \theta_K + \cos \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K, \\ a_{32} &= \sin \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K - \cos \varphi_p \sin \theta_K, \\ a_{33} &= \cos \psi \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Тогда (4.26) можно записать в виде (4.19), где направляющие косинусы $a_{\mu\nu}$ выражаются формулами (4.27), которые совпадают с соответствующими элементами матрицы (1.17).

Соотношения (4.27) легко также получить, используя выражения для скалярных произведений единичных векторов соответствующих координатных осей (см. § 1.2, п. 2).

Заметим, что А. Ю. Иплинским [27] развиты некоторые общие соображения, позволяющие существенно упростить процесс составления таблиц направляющих косинусов.

3. Решение задач. При использовании рассматриваемого метода преобразования координат могут иметь место два подхода:

1) Преобразование одной системы координат в другую путем различных последовательных поворотов осей координат приводит к составлению двух таблиц косинусов углов, выраженных через заданные и искомые сферические координаты. Сравнение соответствующих элементов этих таблиц позволяет получить интересующие нас формулы преобразования координат. Легко видеть, что этот подход [27, 51] полностью аналогичен матричному методу решения задач преобразования координат, основанному на сравнении элементов матрицы линейного преобразования от одной системы координат к другой, которые выражены через заданные и искомые сферические координаты. Этот метод был подробно рассмотрен в § 2.1.

2) Выбор единичного вектора заданного направления, определение его проекций в рассматриваемых координатных системах и нахождение из выражений типа (4.19) искомым формул преобразования координат [27, 49, 53].

Так как примеры применения первого подхода были рассмотрены в § 2.1 и этот метод в его матричном варианте широко используется в дальнейшем, то мы ограничимся рассмотрением второго подхода. Выведем выражения для углов наклона палубы относительно ПГ $e = R_0 R_2$ и $\rho_K = S_0 S_1$ (рис. 4.2). Рассмотрим координатные системы $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Oxyz$. Формулы преобразования координат при переходе от осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ к $Oxyz$, по аналогии с (4.19), могут быть записаны таким образом:

$$\left. \begin{aligned} x &= a'_{11}\xi_1 + a'_{12}\eta_1 + a'_{13}\zeta_1, \\ y &= a'_{21}\xi_1 + a'_{22}\eta_1 + a'_{23}\zeta_1, \\ z &= a'_{31}\xi_1 + a'_{32}\eta_1 + a'_{33}\zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Это преобразование в матричном виде было представлено выражением (1.19). Соответствующая таблица направляющих косинусов, если принять во внимание матрицу (1.21), может быть записана так:

	ξ_1	η_1	ζ_1	
x	$\cos \psi$	0	$-\sin \psi$	(4.29)
y	$\sin \psi \sin \theta_K$	$\cos \theta_K$	$\cos \psi \sin \theta_K$	
z	$\sin \psi \cos \theta_K$	$-\sin \theta_K$	$\cos \psi \cos \theta_K$	

Обозначим единичный вектор направления OR_2 (рис. 4.2) через r . Проекции вектора r на оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Oxyz$ будут

$$r_{\xi_1} = \cos e \cos q, \quad r_{\eta_1} = \cos e \sin q, \quad r_{\zeta_1} = -\sin e; \quad (4.30)$$

$$r_x = \cos AR_2, \quad r_y = \sin AR_2, \quad r_z = 0. \quad (4.31)$$

Для определения угла наклона e воспользуемся третьей строкой преобразования (4.28). Вводя в нее вместо z проекцию r_z (4.31), а вместо ξ_1, η_1 и ζ_1 соответственно $r_{\xi_1}, r_{\eta_1}, r_{\zeta_1}$ (4.30) и учитывая таблицу (4.29), получим

$$\operatorname{tg} e = \operatorname{tg} \psi \cos q - \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\cos \psi} \sin q. \quad (4.32)$$

Для определения угла ρ_K введем единичный вектор s направления OS_0 . Проекции вектора s на оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Oxyz$ будут

$$s_{\xi_1} = -\sin q, \quad s_{\eta_1} = \cos q, \quad s_{\zeta_1} = 0; \quad (4.33)$$

$$s_x = -\sin S_1B \cos \rho_K, \quad s_y = \cos S_1B \cos \rho_K, \quad s_z = -\sin \rho_K. \quad (4.34)$$

Для нахождения выражения угла ρ_K вновь воспользуемся третьей строкой преобразования (4.28). Вводя в нее вместо z проекцию s_z (4.34), а вместо ξ_1, η_1, ζ_1 соответственно $s_{\xi_1}, s_{\eta_1}, s_{\zeta_1}$ (4.33) и учитывая (4.29), имеем

$$\sin \rho_K = \sin \theta_K \cos q + \sin \psi \cos \theta_K \sin q. \quad (4.35)$$

Рассмотрим еще один пример, связанный с определением зависимости между углами качки ψ и ψ_K . Обозначим единичный вектор направления OA_1 (рис. 1.5) через a . Проекции вектора a на оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Oxyz$ будут

$$a_{\xi_1} = \cos A_1A_2, \quad a_{\eta_1} = \cos A_1B_1, \quad a_{\zeta_1} = 0, \quad (4.36)$$

$$a_x = \cos \psi_K, \quad a_y = 0, \quad a_z = \sin \psi_K. \quad (4.37)$$

Для определения угла ψ воспользуемся выражением, аналогичным третьей строке преобразования (4.22); имеем

$$\zeta_1 = a'_{13}x + a'_{23}y + a'_{33}z. \quad (4.38)$$

Вводя в (4.38) соотношения (4.36), (4.37) и учитывая (4.29), получим

$$0 = -\sin \psi \cos \psi_K + \cos \psi \cos \theta_K \sin \psi_K, \quad (4.39)$$

откуда находим выражение

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \psi_K \cos \theta_K, \quad (4.40)$$

совпадающее с формулой (1.28).

Приведенные примеры показывают, что решение задач преобразования координат путем нахождения проекций единичного

вектора заданного направления и использования формул преобразования координат и таблицы направляющих косинусов позволяет быстро находить интересующие нас сферические координаты.

§ 4.4. Матричный метод преобразования координат

Сущность рассматриваемого метода состоит в сравнении элементов матрицы линейного преобразования от одной системы координат к другой, выраженных через заданные и искомые сферические координаты (см. § 2.1).

В качестве примера на использование матричного метода преобразования координат рассмотрим одну из важных задач геометрии ГУ, связанную с определением так называемой *кардановой ошибки* [69] установленного на корабле ГН, который предназначен

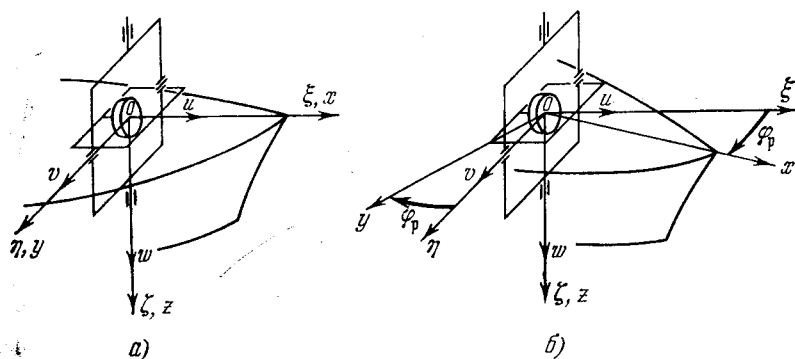


Рис. 4.4. Установка ГН на корабле.

для измерения углов рыскания корабля. Если ГН установлен не на стабилизированном основании, то при наличии качки у него возникает чисто геометрическая погрешность, называемая *кардановой*. На рис. 4.4 показана одна из возможных схем установки ГН на корабле. Оси $Ouvw$, связанные с наружным кардановым кольцом ГН, совпадают с корабельными осями $Oxyz$ (рис. 4.4, а); ось собственного вращения гироскопа направлена вдоль оси $O\xi$ (Ox). При повороте корабля вокруг оси $O\xi$ на угол рыскания φ_p (рис. 4.4, б) со шкалы прибора может быть снят указанный угол поворота φ_p . Найдем, какой угол будет снят со шкалы прибора, если помимо рыскания φ_p корабль имеет дифферент ψ и крен θ_k , принимая во внимание, что ось Ow вращения наружного карданова кольца направлена по нормали Oz к палубе корабля.

В этом случае положение корабельных осей $Oxyz$ (рис. 4.5) относительно земных осей $O\xi\eta\zeta$ определяется тремя углами φ_p ,

ψ , θ_k . Ось собственного вращения гироскопа по-прежнему будет направлена вдоль оси $O\xi$; положение системы координат $Ouvw$ относительно осей $O\xi\eta\zeta$ определяется углами ψ'_k и θ' , а относительно осей $Oxyz$ — углом $\varphi'_p = M_1A$. Следовательно, со шкалы

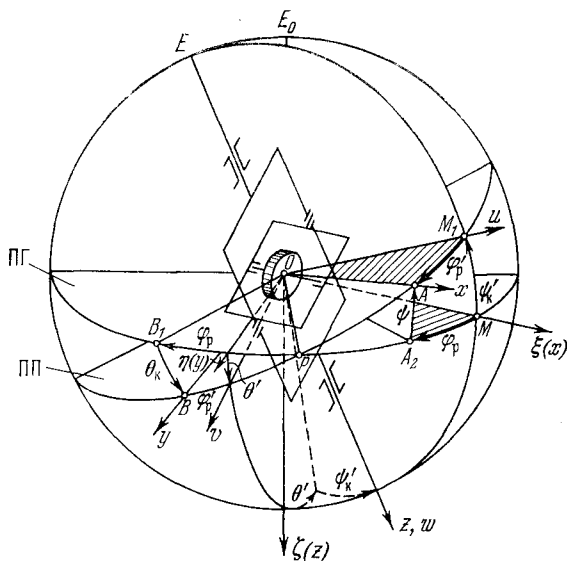


Рис. 4.5. К определению кардановой погрешности ГН.

ГН будет снят угол $\varphi'_p = M_1A$ вместо действительного угла вращения корабля $\varphi_p = MA_2$. Величина

$$\Delta\varphi_p = \varphi'_p - \varphi_p \quad (4.41)$$

представляет собой карданову погрешность ГН, для определения которой необходимо найти выражение угла φ'_p . В общем случае рассматриваемая задача преобразования координат состоит в нахождении аналитических зависимостей параметров φ'_p , ψ'_k , θ' от углов φ_p , ψ , θ_k :

$$\varphi'_p = \varphi'_p(\varphi_p, \psi, \theta_k), \quad \psi'_k = \psi'_k(\varphi_p, \psi, \theta_k), \quad \theta' = \theta'(\varphi_p, \psi, \theta_k). \quad (4.42)$$

Воспользуемся преобразованием осей $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$, которое записано в матричном виде (1.6), где матрица A определяется (1.17), в которой элементы $a_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) выражены через углы φ_p , ψ , θ_k .

С другой стороны, преобразование (1.6) можно представить в виде

$$[x, y, z] = B [\xi, \eta, \zeta], \quad (4.43)$$

где элементы матрицы

$$B = \| b_{\mu\nu} \| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \quad (4.44)$$

могут быть выражены через искомые параметры $\varphi'_p, \psi'_k, \theta'$.

Сопоставляя (1.6) и (4.43), видим, что матрицы A и B должны быть равны

$$A = B, \quad (4.45)$$

или

$$\| a_{\mu\nu} \| = \| b_{\mu\nu} \| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (4.46)$$

Из равенства матриц A и B следует, что должны быть равны тождественно и соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$a_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (4.47)$$

Таким образом, мы получили выражение одной и той же матрицы ($A = B$) преобразования осей $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ через различные углы, которое позволяет найти все возможные соотношения между параметрами $\varphi_p, \psi, \theta_k$ и $\varphi'_p, \psi'_k, \theta'$.

Для матрицы B тем же способом, который был использован для определения матрицы A (1.17), находим

$$B = \begin{vmatrix} \cos \varphi'_p \cos \psi'_k & \sin \varphi'_p \cos \theta' + & \sin \varphi'_p \sin \theta' - \\ & + \cos \varphi'_p \sin \psi'_k \sin \theta' & - \cos \varphi'_p \sin \psi'_k \cos \theta' \\ - \sin \varphi'_p \cos \psi'_k & \cos \varphi'_p \cos \theta' - & \cos \varphi'_p \sin \theta' + \\ & - \sin \varphi'_p \sin \psi'_k \sin \theta' & + \sin \varphi'_p \sin \psi'_k \cos \theta' \\ \sin \psi'_k & - \cos \psi'_k \sin \theta' & \cos \psi'_k \cos \theta' \end{vmatrix}. \quad (4.48)$$

Пользуясь условиями (4.47) и (4.48), получим

$$- \operatorname{tg} \varphi'_p = b_{21}/b_{11} = a_{21}/a_{11}.$$

Подставляя сюда элементы матрицы (1.17), находим

$$\operatorname{tg} \varphi'_p = \operatorname{tg} \varphi_p \frac{\cos \theta_k}{\cos \psi} - \operatorname{tg} \psi \sin \theta_k. \quad (4.49)$$

Вводя (4.49) в (4.41), получим формулу кардановой погрешности ГН

$$\Delta \varphi_p = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \varphi_p \frac{\cos \theta_k}{\cos \psi} - \operatorname{tg} \psi \sin \theta_k \right) - \varphi_p. \quad (4.50)$$

При малых углах качки и рыскания формулу (4.49) можно записать приближенно в виде

$$\varphi'_p = \varphi_p - \psi \theta_k. \quad (4.51)$$

Подставим (4.51) в (4.41), тогда

$$\Delta\varphi_p = -\psi\theta_k. \quad (4.52)$$

Сопоставляя (4.52) с приближенным выражением (1.35), видим, что при $\psi_k \cong \psi$ карданова погрешность ГН $\Delta\varphi_p$ равна по величине кардановой погрешности γ , возникающей при наклоне палубы корабля на качке. Это обусловлено тем, что физическая природа обеих погрешностей одна и та же.

Определим выражение для угла ψ'_k , который может быть снят с внутреннего карданова кольца ГН (рис. 4.5). Пользуясь условиями (4.47) и (4.48), имеем

$$b_{31} = a_{31}.$$

Подставляя сюда значения элементов матриц из (1.17) и (4.48), получим

$$\sin \psi'_k = \sin \psi \cos \varphi_p \cos \theta_k + \sin \varphi_p \sin \theta_k. \quad (4.53)$$

Приближенно при малых углах качки и рыскания имеем

$$\psi'_k = \psi + \varphi_p \theta_k. \quad (4.54)$$

Карданова погрешность $\Delta\psi = \psi'_k - \psi$ измерения угла килевой качки составит

$$\Delta\psi = \varphi_p \theta_k. \quad (4.55)$$

Угол наклона θ' не может быть измерен с помощью рассматриваемого ГН. Его аналитическое выражение согласно условиям (4.47) и (4.48) имеет вид

$$-\operatorname{tg} \theta' = \frac{b_{32}}{b_{33}} = \frac{a_{32}}{a_{33}}.$$

Подставляя сюда соответствующие элементы матрицы (1.17), получим

$$\operatorname{tg} \theta' = \operatorname{tg} \theta_k \frac{\cos \varphi_p}{\cos \psi} - \operatorname{tg} \psi \sin \varphi_p. \quad (4.56)$$

Из примера видно, что матричный метод преобразования координат достаточно прост и сравнительно быстро позволяет получить необходимые соотношения между искомыми и заданными сферическими координатами.

§ 4.5. Метод преобразования координат, основанный на теории малых поворотов твердого тела

1. Сущность метода. Рассматриваемый геометрический метод базируется на теории малых поворотов твердого тела, согласно которой малые вращения можно изображать векторами, направленными по соответствующим осям вращения. Несколько малых

вращений независимо от их порядка можно заменить одним, вектор которого равен геометрической сумме векторов отдельных вращений. Изменение порядка малых вращений твердого тела сказывается лишь на слагаемых второго порядка малости, которые в ряде задач можно не учитывать. Достоинства этого метода состоят в простоте его применения и наглядности.

Для пояснения сущности рассматриваемого метода воспользуемся рис. 4.6, на котором показаны неподвижные оси $O\xi\eta\zeta$ и подвижные оси $Oxyz$, связанные с твердым телом. Оси $Oxyz$ повернуты

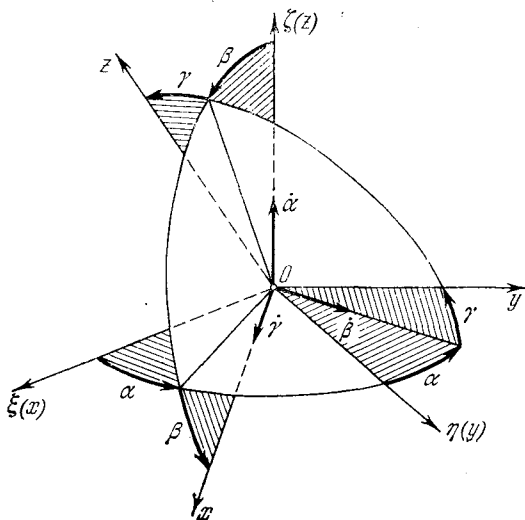


Рис. 4.6. Взаимное расположение осей $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$.

относительно $O\xi\eta\zeta$ на малые углы α , β , γ . Преобразование осей $O\xi\eta\zeta$ к $Oxyz$ в матричном виде записывается следующим образом:

$$[x, y, z] = A [\xi, \eta, \zeta], \quad (4.57)$$

где матрица преобразования A , если принять во внимание малость углов α , β и γ , будет

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.58)$$

Так как оси $Oxyz$ повернуты на малые углы, то рассматриваемому преобразованию можно поставить в соответствие некоторый вектор, длина пропорциональна углу поворота, а направление совпадает с осью, вокруг которой этот поворот происходит.

Представим матрицу A в виде

$$A = E + \Theta, \quad (4.59)$$

где единичная матрица E и матрица Θ будут

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Theta = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.60)$$

Здесь Θ является матрицей малого поворота. Обратная матрица по отношению к (4.59) будет

$$A^{-1} = E - \Theta, \quad (4.61)$$

так как в этом случае выполняется соотношение

$$AA^{-1} = (E + \Theta)(E - \Theta) \cong E \quad (4.62)$$

с точностью до членов второго порядка малости относительно Θ . Но для ортогонального преобразования обратная матрица совпадает с транспонированной, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} A^T &= E + \Theta^T = \{E; -\Theta, \} \\ \Theta^T &= -\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Из (4.60) видно, что матрица малого поворота Θ — кососимметричная, что является общим свойством малого поворота. Таким образом, если обозначить

$$\Theta = \|\vartheta_{\mu\nu}\| \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \quad (4.64)$$

то

$$\vartheta_{\mu\nu} = -\vartheta_{\nu\mu}. \quad (4.65)$$

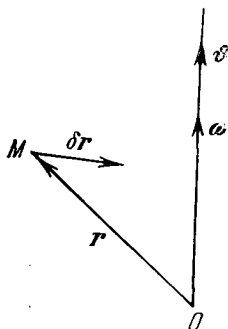


Рис. 4.7. Вектор малого поворота ϑ .

Предположим, что система координат $O\xi\eta\zeta$ сохраняет неизменное относительно Земли положение, а оси $Oxyz$ вращаются относительно $O\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью ω . В проекциях на оси $Oxyz$ вектор ω можно представить в виде

$$\omega = \omega_x x^0 + \omega_y y^0 + \omega_z z^0, \quad (4.66)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора ω на оси Ox, Oy, Oz , x^0, y^0, z^0 — единичные векторы соответствующих осей.

Рассмотрим вектор $r = \vec{OM}$ (рис. 4.7) с началом в неподвижной точке O . Сообщим телу малый поворот, вектор которого обозначим через ϑ . Тогда вектор малого перемещения δr точки M перпендикулярен вектору r и может быть записан в виде

$$\delta r = \vartheta \times r. \quad (4.67)$$

Линейная скорость v конца вектора r будет

$$v = \omega \times r. \quad (4.68)$$

Так как $\delta r = v dt$, то получим

$$\delta r = \omega dt. \quad (4.69)$$

Умножим векторное равенство (4.66) слева и справа на dt , имеем

$$\omega dt = \omega_x dt x^0 + \omega_y dt y^0 + \omega_z dt z^0. \quad (4.70)$$

Здесь слева, согласно (4.69), имеем вектор малого поворота ϑ , а справа — его составляющие по осям $Oxyz$, т. е.

$$\vartheta_x = \omega_x dt, \quad \vartheta_y = \omega_y dt, \quad \vartheta_z = \omega_z dt. \quad (4.71)$$

Следовательно, (4.70) можно записать в виде

$$\vartheta = \vartheta_x x^0 + \vartheta_y y^0 + \vartheta_z z^0. \quad (4.72)$$

Так как $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ представляют собой малые угловые повороты осей $Oxyz$ вокруг Ox, Oy, Oz соответственно, то они связаны с введенными ранее малыми углами α, β, γ (рис. 4.6) приближенными соотношениями

$$\vartheta_x = \gamma, \quad \vartheta_y = \beta, \quad \vartheta_z = \alpha. \quad (4.73)$$

Тогда матрицы A и Θ , согласно (4.58) и (4.60), можно переписать в виде

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \vartheta_z & -\vartheta_y \\ -\vartheta_z & 1 & \vartheta_x \\ \vartheta_y & -\vartheta_x & 1 \end{vmatrix}, \quad \Theta = \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_z & -\vartheta_y \\ -\vartheta_z & 0 & \vartheta_x \\ \vartheta_y & -\vartheta_x & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.74)$$

Рассмотрим матрицу Ω , составленную следующим образом:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.75)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — составляющие вектора угловой скорости ω осей $Oxyz$ относительно $O\xi\eta\zeta$.

Между матрицами A и Ω существует связь, устанавливаемая следующим кинематическим уравнением [51]:

$$A \frac{dA^T}{dt} = \Omega. \quad (4.76)$$

Если A заменить выражением (4.59), а A^T — формулой (4.63), то, учитывая (4.74) и обозначая $d\vartheta_i/dt = \omega_i$ ($i = x, y, z$), легко видеть, что с точностью до слагаемых первого порядка малости левая часть уравнения (4.76) будет равна матрице (4.75).

Приведенное выше поясняет сущность метода и показывает, каким образом с помощью теории малых поворотов твердого тела составляется таблица косинусов углов между осями рассматриваемых координатных систем.

2. Решение задачи. Определим поправки в углы наведения корабельного пеленгационного устройства, например визира, при изменении углов килевой и бортовой качки. Близкая к этому задача решена в книге [27].

Предположим, что визир имеет двухосную схему наведения (рис. 2.4). Свяжем с визиром оси $Ox_{в}y_{в}z_{в}$; ось $Ox_{в}$ направлена

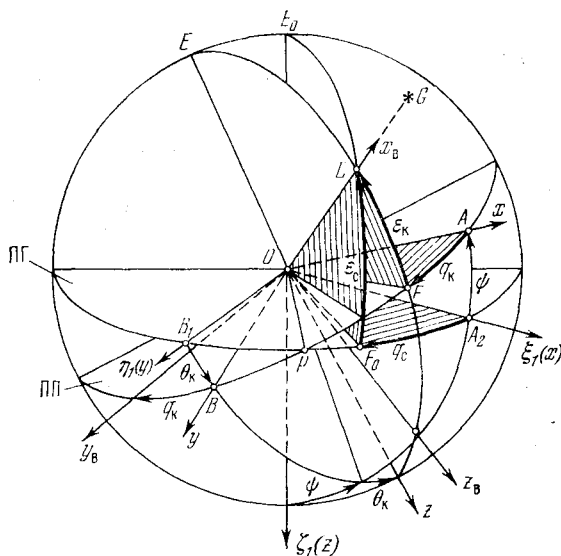


Рис. 4.8. Геометрия наведения визира на качке.

вдоль оптической линии визира, ось $Oy_{в}$ — вдоль оси цапф (оси ВН), а ось $Oz_{в}$ — перпендикулярно первым двум осям. Для выявления геометрии наведения визира в условиях качки воспользуемся рис. 4.8, который аналогичен рис. 2.5. На рис. 4.8 показана полуподвижная система координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, с которой в исходный момент совмещены корабельные оси $Oxyz$. При качке эти оси займут положение $Ox_{в}y_{в}z_{в}$ и образуют с осями $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ углы ψ и θ_k . Зададим на единичной сфере направление OL на ориентир G . Положение точки L на сфере относительно осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ характеризуется двумя сферическими координатами $q_c = A_2 F_0$ и $\epsilon_c = F_0 L$. Угол q_c расположен в ПГ и представляет собой стабилизированный курсовой угол на ориентир G ; угол ϵ_c расположен в вертикальной плоскости OE_0LF_0 (плоскость визирования) и является стабилизированным углом места на ориентир G .

Для приведения оси Ox_B в совмещение с линией OL при наличии качки следует: 1) повернуть визир в ПП вокруг оси ГН Oz на угол $q_K = AF$, при этом ось ВН визира (ось цапф) займет положение Oy_B ; 2) повернуть визир в плоскости ВН $OELFz$ вокруг оси цапф Oy_B на угол $\varepsilon_K = FL$; при этом ось Ox_B совместится с направлением OL , а система координат визира займет положение $Ox_{B'y_Bz_B}$, определяемое относительно осей $Oxyz$ углами q_K и ε_K . Угол q_K расположен в ПП и представляет собой нестабилизированный (корабельный) курсовой угол; угол ε_K расположен в плоскости ВН визира и является нестабилизированным (корабельным) углом места.

Сопоставляя рис. 4.8 и 2.5, видим, что углы q_c, ε_c аналогичны углам q, φ , а углы q_K, ε_K — углам Q, Φ . Поэтому преобразование стабилизированных координат q_c, ε_c точки L (рис. 4.8) в корабельные координаты q_K, ε_K определяется формулами (2.39) и (2.38) при замене углов q на q_c, φ на ε_c, Q на q_K и Φ на ε_K .

Поставленная ранее задача может быть сформулирована следующим образом. Углы качки корабля ψ, θ_K изменяются на малые углы $\delta\psi, \delta\theta_K$, которым соответствуют векторы малых поворотов корабля. При этом ось Ox_B визира сместится относительно направления OL . Для придания оси Ox_B требуемого направления OL в углы наведения визира необходимо ввести соответствующие поправки $\delta\varepsilon_K, \delta q_K$, которые являются векторами малых поворотов визира. Пользуясь теорией малых вращений твердого тела, найдем соотношения между $\delta\varepsilon_K, \delta q_K$ и $\delta\psi, \delta\theta_K$.

Обозначим вектор малого поворота корабля при изменении углов качки через ϑ , тогда

$$\vartheta = \delta\psi + \delta\theta_K. \quad (4.77)$$

Проекция вектора ϑ на оси $Oxyz$ определяются следующими соотношениями:

$$\vartheta_x = \delta\theta_K, \quad \vartheta_y = \delta\psi; \quad \vartheta_z = -\delta\psi \cdot \theta_K. \quad (4.78)$$

Найдем проекции вектора ϑ на оси Oy_B и Oz_B :

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{y_B} &= \delta\psi \cos q_K - \delta\theta_K \sin q_K, \\ \vartheta_{z_B} &= (\delta\theta_K \cos q_K + \delta\psi \sin q_K) \sin \varepsilon_K - \delta\psi \cdot \theta_K \cos \varepsilon_K. \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Обозначим вектор малого поворота осей $Ox_B y_B z_B$ относительно корабельных осей $Oxyz$ через γ , тогда

$$\gamma = \delta\varepsilon_K + \delta q_K. \quad (4.80)$$

Определим проекции вектора γ на оси Oy_B и Oz_B ; имеем

$$\gamma_{y_B} = \delta\varepsilon_K, \quad \gamma_{z_B} = \delta q_K \cos \varepsilon_K. \quad (4.81)$$

Суммарный вектор малого поворота осей $Ox_B y_B z_B$ относительно системы $O\xi_1 \eta_1 \zeta_1$ обозначим через ν . Очевидно, имеет место

зависимость

$$v = \vartheta + \gamma. \quad (4.82)$$

Найдем проекции вектора v на оси Oy_B и Oz_B ; имеем

$$v_{y_B} = \vartheta_{y_B} + \gamma_{y_B}, \quad v_{z_B} = \vartheta_{z_B} + \gamma_{z_B}. \quad (4.83)$$

Вводя в (4.83) соотношения (4.79) и (4.81), получим

$$\left. \begin{aligned} v_{y_B} &= \delta\psi \cos q_K - \delta\theta_K \sin q_K + \delta\varepsilon_K, \\ v_{z_B} &= (\delta\theta_K \cos q_K + \delta\psi \sin q_K) \sin \varepsilon_K - \delta\psi \cdot \theta_K \cos \varepsilon_K + \delta q_K \cos \varepsilon_K. \end{aligned} \right\} (4.84)$$

Для удержания оси Ox_B в заданном направлении OL должны выполняться следующие условия:

$$v_{y_B} = v_{z_B} = 0. \quad (4.85)$$

Тогда из формул (4.84) находим выражения для поправок $\delta\varepsilon_K$ и δq_K в углы наведения визира

$$\left. \begin{aligned} \delta\varepsilon_K &= \delta\theta_K \sin q_K - \delta\psi \cos q_K, \\ \delta q_K &= \delta\psi \cdot \theta_K - (\delta\theta_K \cos q_K + \delta\psi \sin q_K) \operatorname{tg} \varepsilon_K, \end{aligned} \right\} (4.86)$$

откуда следует, что поправка $\delta\varepsilon_K$ в угле места зависит от изменений углов качки $\delta\psi$, $\delta\theta_K$ и курсового угла q_K . Поправка δq_K в курсовом угле содержит два слагаемых. Первое обусловлено изменением угла килевой качки $\delta\psi$ и величиной угла бортовой качки θ_K .

Пример 4.1. Определить величину первого слагаемого поправки в курсовом угле при $\delta\psi = 1^\circ$, $\theta_K = 15^\circ$.

Решение.

1) Это слагаемое определяется зависимостью (см. (4.86))

$$\delta q'_K = \delta\psi \cdot \theta_K.$$

2) Вычисляем величину $\delta q'_K$

$$\delta q'_K = 16 \text{ угл. мин.}$$

Второе слагаемое поправки δq_K зависит от изменений углов качки $\delta\psi$, $\delta\theta_K$, курсового угла q_K и от угла места ε_K ; оно растёт с увеличением ε_K .

Пример 4.2. Найти величину второго слагаемого поправки в курсовом угле при $\delta\psi = 1^\circ$, $\delta\theta_K = 1^\circ$, $q_K = 45^\circ$, $\varepsilon_K = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$.

Решение.

1) Это слагаемое определяется формулой (см. (4.86))

$$\delta q''_K = -(\delta\theta_K \cos q_K + \delta\psi \sin q_K) \operatorname{tg} \varepsilon_K.$$

2) Вычисляем величину $\delta q''_K$; соответствующие значения сведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

ε_K	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$-\delta q''_K$	0°	$0^\circ 23'$	$0^\circ 49'$	$1^\circ 25'$	$2^\circ 27'$	$5^\circ 17'$

Из таблицы следует, что с ростом угла места ε_K величина поправки $\delta q''_K$ существенно увеличивается, что ограничивает эффективность использования двухосных визиров в условиях качки при больших углах места (см. гл. 5).

Таким образом, применение методов теории малых поворотов твердого тела позволило сравнительно просто решить достаточно сложную задачу преобразования координат чисто геометрическим способом. Это подтверждает целесообразность использования данного метода при исследовании ряда вопросов геометрии и кинематики систем стабилизации.

§ 4.6. Метод преобразования координат, базирующийся на теории конечных поворотов твердого тела

1. Основные соотношения теории конечных поворотов. Приведем краткие сведения из теории конечных поворотов твердого тела [51]. Пусть имеем твердое тело (рис. 4.9) с неподвижной точкой O , которое совершает поворот на угол χ вокруг оси OO_1 , единичный вектор которой обозначен через e . При этом радиус-вектор $r = \overrightarrow{OM}$ точки M тела переходит в положение $r' = \overrightarrow{OM}'$. Связь между векторами r и r' устанавливается формулой Родрига

$$r' = r + \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \vartheta^2} \vartheta \times \left(r + \frac{1}{2} \vartheta \times r \right), \quad (4.87)$$

где вектор конечного поворота

$$\vartheta = 2e \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \quad (4.88)$$

направлен по оси единичного вектора e и равен по величине

$$\vartheta = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}. \quad (4.89)$$

Разложим вектор e по единичным векторам i_1, i_2, i_3 координатной системы $O\xi\eta\zeta$

$$e = i_1 \cos \alpha + i_2 \cos \beta + i_3 \cos \gamma, \quad (4.90)$$

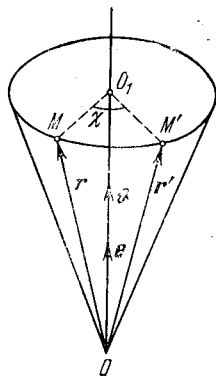


Рис. 4.9. Вектор конечного поворота.

где α , β и γ — углы, составляемые вектором e с единичными векторами i_1, i_2, i_3 . Тогда вектор конечного поворота Φ можно представить в виде

$$\Phi = \vartheta_1 i_1 + \vartheta_2 i_2 + \vartheta_3 i_3, \quad (4.91)$$

где

$$\vartheta_1 = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cos \alpha, \quad \vartheta_2 = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cos \beta, \quad \vartheta_3 = 2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cos \gamma \quad (4.92)$$

— проекции вектора Φ на указанные оси.

Формулы теории конечных поворотов упрощаются, если пользоваться не проекциями вектора поворота Φ , а пропорциональными им величинами

$$\frac{1}{2} \vartheta_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_0}, \quad (4.93)$$

которые выбираются из условия

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (4.94)$$

Величины λ_s называются параметрами Родрига — Гамильтона и определяются следующими соотношениями:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2}, \quad \lambda_1 = \cos \alpha \sin \frac{\chi}{2}, \quad \lambda_2 = \cos \beta \sin \frac{\chi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \gamma \sin \frac{\chi}{2}. \quad (4.95)$$

Если через $O\xi\eta\zeta$ обозначить неподвижную систему координат, а через $Oxyz$ — подвижную, связанную с твердым телом, то направляющие косинусы между указанными осями будут выражаться через параметры Родрига — Гамильтона следующей таблицей:

	ξ	η	ζ
x	$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2$	$2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2)$	$2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)$
y	$2(-\lambda_0\lambda_3 + \lambda_2\lambda_1)$	$\lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 - \lambda_1^2$	$2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)$
z	$2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1)$	$2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2)$	$\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2$

(4.96)

Весьма важное значение имеет вопрос о сложении конечных поворотов. Предположим, что телу сообщается поворот, характеризуемый вектором ϑ_1 , на угол χ_1 вокруг оси с единичным вектором e_1 , а затем — второй поворот ϑ_2 на угол χ_2 вокруг оси с единичным вектором e_2 . Угол между указанными осями обозначим через Φ , т. е.

$$e_1 \cdot e_2 = \cos \Phi, \quad |e_1 \times e_2| = \sin \Phi. \quad (4.97)$$

На основании теоремы Эйлера — Даламбера всякое перемещение тела около неподвижной точки можно осуществить с помощью

одного поворота вокруг оси, которая проходит через эту точку. Обозначим вектор суммарного поворота через Φ , угол поворота через χ , единичный вектор оси вращения через e . При этом имеют место следующие соотношения:

$$\cos \frac{\chi}{2} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} - \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} \cos \Phi \quad (4.98)$$

или

$$\cos \frac{\chi}{2} = \cos \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \Phi_1 \cdot \Phi_2 \right) \quad (4.99)$$

и

$$e = \frac{1}{\sin \frac{\chi}{2}} \left(e_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \cos \frac{\chi_2}{2} + e_2 \sin \frac{\chi_2}{2} \cos \frac{\chi_1}{2} + \right. \\ \left. + e_2 \times e_1 \sin \frac{\chi_1}{2} \sin \frac{\chi_2}{2} \right). \quad (4.100)$$

Правило сложения конечных поворотов дается выражением

$$\Phi = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \Phi_1 \cdot \Phi_2} \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \frac{1}{2} \Phi_2 \times \Phi_1 \right). \quad (4.101)$$

Наличие в нем слагаемого $\Phi_2 \times \Phi_1$ указывает на некоммутативность конечных поворотов. Векторы поворотов Φ_1 и Φ_2 , а также вектор суммарного поворота Φ могут быть выражены через параметры Родрига — Гамильтона (см. п. 2 и п. 3).

В рассматриваемой теории устанавливается связь между параметрами Родрига — Гамильтона и эйлеровыми углами (см. п. 3). Положение твердого тела может также определяться параметрами Кейли — Клейна α , β , γ , δ , которые представляют комплексные комбинации параметров Родрига — Гамильтона, т. е.

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3, \quad \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1, \quad \gamma = \lambda_2 + i\lambda_1, \quad \delta = \lambda_0 - i\lambda_3. \quad (4.102)$$

2. Понятия о кватернионах. Использование указанных выше кинематических параметров приводит к введению кватернионов. Рассмотрим необходимые для дальнейшего свойства кватернионов [10]. Под кватернионом понимают число, составленное из действительной единицы 1 и трех мнимых единиц i_1 , i_2 , i_3 с действительными элементами λ_k ($k = 0, 1, 2, 3$) вида

$$\Lambda = \lambda_0 1 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3. \quad (4.103)$$

Сложение кватернионов и умножение их на скаляр подчиняются правилам обычной алгебры. Единицы 1, i_1 , i_2 , i_3 можно рассматривать как единичные векторы некоторого четырехмерного пространства. В этом пространстве кватернион представляется радиусом-вектором.

Для дальнейшего важным является правило умножения кватернионов, обозначаемое символом \circ . Правила умножения единиц $1, i_1, i_2, i_3$ таковы:

$$\left. \begin{aligned} 1 \circ i_k &= i_k \circ 1 = i_k, & 1 \circ 1 &= 1 & (k = 1, 2, 3), \\ i_k \circ i_k &= -1, \\ i_1 \circ i_2 &= -i_2 \circ i_1 = i_3, & i_3 \circ i_1 &= -i_1 \circ i_3 = i_2, & i_2 \circ i_3 &= -i_3 \circ i_2 = i_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

Отсюда следует, что произведение двух кватернионов также является кватернионом. Умножение кватернионов некоммутативно.

Компонент 1 является обычным вещественным скаляром, и при написании кватерниона его можно опустить. Кватернион можно рассматривать как сумму скалярной и векторной частей, т. е.

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda. \quad (4.105)$$

Кватернионом, *сопряженным* данному кватерниону, называется следующий кватернион:

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \lambda. \quad (4.106)$$

Нормой кватерниона является скаляр

$$\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2. \quad (4.107)$$

Если норма $\|\Lambda\| = 1$, то кватернион называется *нормированным*.

Произведение двух кватернионов Λ и M дает кватернион *)

$$N = M \circ \Lambda, \quad (4.108)$$

элементы ν_s которого выражаются через элементы λ_s кватерниона Λ и элементы μ_s кватерниона M соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3, \\ \nu_1 &= \lambda_1 \mu_0 + \lambda_0 \mu_1 + \lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3, \\ \nu_2 &= \lambda_2 \mu_0 + \lambda_0 \mu_2 + \lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1, \\ \nu_3 &= \lambda_3 \mu_0 + \lambda_0 \mu_3 + \lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

Кватернионом, *обратным* данному кватерниону Λ , называется кватернион Λ^{-1} , для которого выполняется равенство

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1. \quad (4.110)$$

*) Принятый в правой части равенства (4.108) порядок сомножителей имеет следующий физический смысл. Если кватернионы Λ и M характеризуют последовательные вращения координатной системы, то кватернион результирующего преобразования N находится как произведение кватернионов составляющих преобразований согласно формуле (4.108).

Любой кватернион с действительными элементами

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 \quad (4.111)$$

можно представить в виде

$$\Lambda = \Lambda (\lambda_0/\Lambda + \lambda/\Lambda), \quad (4.112)$$

где

$$\Lambda = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}. \quad (4.113)$$

Введем единичный вектор ξ , направленный по вектору λ :

$$\xi = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \quad (4.114)$$

Обозначим

$$\cos \chi = \frac{\lambda_0}{\Lambda}, \quad \sin \chi = \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{\Lambda}, \quad 0 \leq \chi < \pi. \quad (4.115)$$

Тогда кватернион Λ можно записать в виде

$$\Lambda = \Lambda (\cos \chi + \xi \sin \chi). \quad (4.116)$$

Очевидно, нормированный кватернион будет

$$\Lambda = \cos \chi + \xi \sin \chi. \quad (4.117)$$

Кватернион Λ может быть представлен дугой большого круга (рис. 4.10), плоскость которого определяется вектором ξ , а длина — углом χ . Направление кватерниона задается направлением вектора ξ , при этом положение дуги Λ на ее большом круге является произвольным. Обратному, т. е. сопряженному кватерниону $\Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda} = \cos \chi - \xi \sin \chi$, соответствует дуга обратного направления. Кватернион Λ может быть представлен как произведение векторов b и a^{-1}

$$\Lambda = b \circ a^{-1},$$

причем

$$a = b, \quad a = \sqrt{\|a\|}, \quad b = \sqrt{\|b\|}.$$

Произведению кватернионов соответствует операция геометрического сложения дуг на сфере. Применительно к произведению (4.108) имеем

$$\arg \Lambda + \arg M = \arg (M \circ \Lambda), \quad (4.118)$$

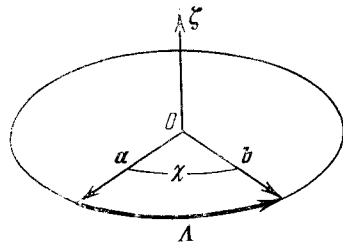


Рис. 4.10. Представление кватерниона на сфере.

т. е. векторная сумма нескольких дуг больших кругов, каждая из которых задается кватернионом, дает дугу большого круга, определяемую произведением этих кватернионов в обратном порядке.

Использование кватернионов позволяет представить конечный поворот (преобразование) в пространстве в простой и удобной форме. Так, преобразование вектора r в вектор r' в случае, когда кватернион Λ , задающий преобразование вращения, является нормированным, может быть записано в виде,

$$r' = \Lambda \circ r \circ \tilde{\Lambda}. \quad (4.119)$$

При этом легко показать, что связь между компонентами векторов r и r' в неподвижной и подвижной координатных системах определяется направляющими косинусами, которые через параметры Родрига — Гамильтона выражаются формулами (4.96).

Преобразование вектора r' в вектор r определяется выражением

$$r = \tilde{\Lambda} \circ r' \circ \Lambda. \quad (4.120)$$

Из сказанного выше следует, что компоненты кватерниона могут служить кинематическими параметрами, определяющими положение одной системы координат относительно другой.

В дальнейшем нам понадобится преобразование компонент неизменного вектора при переходе от одной системы координат к другой, т. е. за счет изменения базиса. Рассмотрим неизменный вектор r . Введем кватернионы, составленные из компонент вектора r в некоторых базисах E (неподвижном) и X (подвижном):

$$\left. \begin{aligned} R_E &= r_{1E}i_1 + r_{2E}i_2 + r_{3E}i_3, \\ R_X &= r_{1X}i_1 + r_{2X}i_2 + r_{3X}i_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

Эти кватернионы называют *отображениями* вектора r на базисы E и X соответственно.

Так как орты базиса X выражаются через орты базиса E с помощью операции вращения типа (4.119), то

$$R_X = \tilde{\Lambda} \circ R_E \circ \Lambda, \quad (4.122)$$

т. е. имеет место теорема [10]: если преобразование единичных векторов базиса E в векторы базиса X определяется операцией вращения (4.119), то преобразование координат неизменного вектора на эти базисы задается обратной операцией (4.122), выполняемой над отображениями.

В согласии с этой теоремой, учитывая (4.120), имеем

$$R_E = \Lambda \circ R_X \circ \tilde{\Lambda}. \quad (4.123)$$

Заметим, что компоненты r_{iX} вектора r могут быть найдены по компонентам r_{iE} , если в формуле (4.122) выполнить умножение кватернионов и приравнять элементы при соответствующих ортах.

Покажем связь кватерниона преобразования Λ с вектором конечного поворота ϑ [см. (4.88)]. Запишем на основании (4.103) и (4.105)

$$\frac{\Lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} i_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} i_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} i_3 = 1 + \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{1}{2} \vartheta,$$

т. е. вектор конечного поворота ϑ связан с векторной частью λ кватерниона Λ соотношением

$$\vartheta = 2 \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (4.124)$$

Если воспользоваться записью (4.116), то вместо (4.124) получим выражение

$$\vartheta = 2\xi \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}, \quad (4.125)$$

совпадающее с точностью до обозначений с (4.88). Аналогичным образом, используя зависимость (4.119), можно прийти к формуле Родрига (4.87).

При записи кватерниона в форме (4.116) его компоненты имеют вид (4.95). По аналогии с (4.121) введем понятие отображения кватерниона Λ в рассматриваемом базисе и обозначим его через Λ_{Ξ} или Λ_X . Можно показать [10], что $\Lambda_X = \Lambda_{\Xi}$, т. е. компоненты кватерниона Λ в базисах Ξ и X одинаковы. Компоненты кватерниона в базисе, преобразуемом этим кватернионом, заданные в форме (4.95), и называются параметрами Родрига — Гамильтона. Этот кватернион имеет равные компоненты в двух системах координат, так как этим кватернионом определяется переход от одной системы координат к другой. Иногда кватернионы, составленные из параметров Родрига — Гамильтона, называют «собственными» кватернионами преобразования.

3. Решение задачи. Применим рассмотренный выше метод, основанный на теории конечных поворотов твердого тела и понятия кватернионов, для решения задачи преобразования земных координат q , φ наведения ИУ в корабельные координаты Q , Φ (рис. 2.5). Эта задача методами аналитической геометрии была решена в § 2.2, п. 2. Воспользуемся рис. 4.11, который аналогичен рис. 2.5. На рис. 4.11 введены земные оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ (система отсчета) и корабельные оси $Oxyz$, составляющие с $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ углы килевой ψ и бортовой θ_K качки. На единичной сфере задано направление OH . Сферические координаты точки H в осях $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, т. е. $q = A_2 R_0$, $\varphi = R_0 H$, известны. Требуется найти сферические координаты точки H , а именно $Q = AC$, $\Phi = CH$, в осях $Oxyz$. Систему координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ условно будем обозначать базисом Ξ , а систему координат $Oxyz$ — базисом X . Перевод базиса Ξ в базис X осуществляется путем двух плоских вращений на углы ψ и θ_K . Найдем

собственные кватернионы последовательных плоских поворотов. Первому повороту, происходящему вокруг оси $O\eta_1$ на угол ψ ,

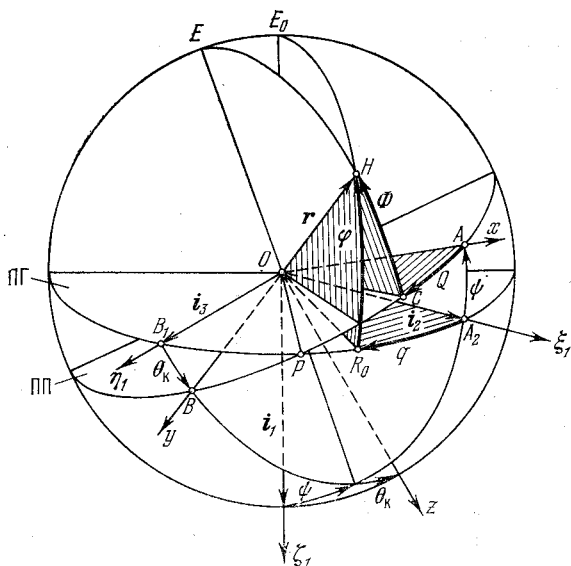


Рис. 4.11. Преобразование углов q, φ в углы Q, Φ .

соответствует кватернион Ψ , который по аналогии с (4.117) при учете формул (4.95) можно записать в виде

$$\Psi = \cos \frac{\psi}{2} + i_3 \sin \frac{\psi}{2}. \quad (4.126)$$

Второму повороту вокруг оси Ox на угол θ_k отвечает кватернион Θ

$$\Theta = \cos \frac{\theta_k}{2} + i_2 \sin \frac{\theta_k}{2}. \quad (4.127)$$

Прежде чем определить кватернион результирующего поворота, следует сделать одно замечание. Предположим, что кватернионы Λ и M характеризуют последовательные повороты координатной системы; тогда кватернион N результирующего поворота в согласии с (4.108) определяется по правилу умножения кватернионов

$$N = M \circ \Lambda,$$

при этом компоненты ν_s кватерниона N будут выражаться через компоненты λ_s кватерниона Λ и компоненты μ_s кватерниона M соотношениями (4.109).

Согласно одной из теорем [10], если Λ, M, N являются «собственными» кватернионами (их компоненты — параметры Родрига—

Гамильтона) соответственно первого, второго и результирующего поворотов, то сомножители берутся в обратном по отношению к (4.108) порядке, т. е.

$$N = \Lambda^{\circ} M,$$

при этом компоненты v_s кватерниона N также определяются формулами (4.109) с тем отличием, что в них изменяются знаки у двух последних членов векторной части кватерниона N , т. е. у v_1 , v_2 и v_3 .

В согласии со сказанным в рассматриваемой задаче кватернион результирующего поворота будет

$$N = \Psi^{\circ} \Theta. \quad (4.128)$$

Введем сюда (4.126) и (4.127), тогда

$$N = \left(\cos \frac{\psi}{2} + i_3 \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\theta_K}{2} + i_2 \sin \frac{\theta_K}{2} \right). \quad (4.129)$$

Произведя перемножение кватернионов и учитывая правила (4.104), получим следующие выражения для компонентов кватерниона N через углы ψ и θ_K :

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta_K}{2}, & v_2 &= \sin \frac{\theta_K}{2} \cos \frac{\psi}{2}, \\ v_1 &= -\sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\theta_K}{2}, & v_3 &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta_K}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.130)$$

Рассмотрим единичный вектор r направления OH (рис. 4.11). Его отображение на базис Ξ по аналогии с (4.121) можно записать в виде

$$R_{\Xi} = r_{1\Xi} i_1 + r_{2\Xi} i_2 + r_{3\Xi} i_3, \quad (4.131)$$

где $r_{1\Xi} \dots$ — компоненты вектора r в базисе Ξ .

В согласии с рис. 4.11 имеем:

$$r_{1\Xi} = -\sin \varphi, \quad r_{2\Xi} = \cos q \cos \varphi, \quad r_{3\Xi} = \sin q \cos \varphi. \quad (4.132)$$

Аналогичным образом отображение вектора r на базис X будет

$$R_X = r_{1X} i_1 + r_{2X} i_2 + r_{3X} i_3, \quad (4.133)$$

где

$$r_{1X} = -\sin \Phi, \quad r_{2X} = \cos Q \cos \Phi, \quad r_{3X} = \sin Q \cos \Phi. \quad (4.134)$$

Согласно (4.122) преобразование координат неизменного вектора r при переходе от базиса Ξ к базису X задается операцией над отображениями R_{Ξ} и R_X , т. е.

$$R_{X_1} = \tilde{N} \circ R_{\Xi} \circ N. \quad (4.135)$$

Тогда, учитывая (4.131) и (4.106), получим

$$\begin{aligned} R_X = (v_0 - v_1 i_1 - v_2 i_2 - v_3 i_3) \circ (r_{1\Xi} i_1 + r_{2\Xi} i_2 + r_{3\Xi} i_3) \circ \\ \circ (v_0 + v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Производя умножение кватернионов, найдем кватернион, у которого скалярная часть равна нулю. Если соответствующие элементы полученного кватерниона приравнять элементам кватерниона R_X [см. (4.133)], то будем иметь

$$\left. \begin{aligned} r_{1X} &= (v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) r_{1\Xi} + 2(v_0 v_3 + v_1 v_2) r_{2\Xi} + 2(v_1 v_3 - v_0 v_2) r_{3\Xi}, \\ r_{2X} &= 2(v_1 v_2 - v_0 v_3) r_{1\Xi} + (v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) r_{2\Xi} + 2(v_0 v_1 + v_2 v_3) r_{3\Xi}, \\ r_{3X} &= 2(v_0 v_2 + v_1 v_3) r_{1\Xi} + 2(v_2 v_3 - v_0 v_1) r_{2\Xi} + (v_0^2 + v_3^2 - v_1^2 - v_2^2) r_{3\Xi}. \end{aligned} \right\} \quad (4.137)$$

Таким образом, мы получили формулы преобразования координат вектора r при переходе от базиса Ξ (осей $O\xi_1 \eta_1 \zeta_1$) к базису X (осям $Oxyz$). Коэффициенты при проекциях $r_{1\Xi}$, $r_{2\Xi}$, $r_{3\Xi}$ представляют собой направляющие косинусы, выраженные через параметры Родрига — Гамильтона. Заметим, что входящие в (4.137) направляющие косинусы с точностью до обозначений совпадают с элементами (4.96).

Подставляя в (4.137) выражения (4.132) и (4.134), получим

$$\sin \Phi = (v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \sin \varphi - 2(v_0 v_3 + v_1 v_2) \cos \varphi \cos q + \\ + 2(v_0 v_2 - v_1 v_3) \sin q \cos \varphi; \quad (4.138)$$

$$\operatorname{tg} Q = \frac{-2(v_0 v_2 + v_1 v_3) \sin \varphi + 2(v_2 v_3 - v_0 v_1) \cos q \cos \varphi + (v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \sin q \cos \varphi}{2(v_0 v_3 - v_1 v_2) \sin \varphi + (v_0^2 + v_2^2 - v_1^2 - v_3^2) \cos q \cos \varphi + 2(v_0 v_1 + v_2 v_3) \sin q \cos \varphi}, \quad (4.139)$$

где параметры Родрига — Гамильтона v_s связаны с углами качки ψ , θ_k формулами (4.130).

Если в (4.138) и (4.139) ввести соотношения (4.130), то получим формулы (2.38) и (2.39) для Φ и Q , выраженные через сферические координаты φ , q и углы качки ψ , θ_k .

Таким образом, применение в данной задаче методов теории конечных поворотов твердого тела с использованием кватернионов приводит к чисто аналитическим выкладкам, которые не требуют каких-либо геометрических построений, связанных с необходимостью пространственных представлений. В этом смысле данный метод обладает известной общностью по сравнению с методом, рассмотренными в предыдущих параграфах. Однако следует заметить, что окончательные формулы типа (4.138) и (4.139) являются достаточно громоздкими, и вопрос о целесообразности расче-

тов по этим формулам с помощью ЦВМ нуждается в специальном рассмотрении.

Таким образом, применение методов теории конечных поворотов твердого тела в теории местной стабилизации ИУ на корабле может оказаться полезным, особенно при решении сложных задач по кинематике и динамике стабилизации. Они могут быть также полезны при рассмотрении отдельных геометрических задач.

Примеры применения подобных методов в задачах гироскопии, навигации, теории управления движением, ориентации и наведения объектов содержатся в ряде работ (см., например, [10, 22, 29, 39, 51, 88]).

§ 4.7. Сравнительная оценка различных методов решения задач преобразования координат

Выше были рассмотрены различные методы решения задач преобразования координат, возникающих в теории стабилизации ИУ на корабле.

Переходя к сравнительной оценке этих методов, заметим следующее. Метод, основанный на использовании формул сферической тригонометрии, требует построения соответствующего чертежа. При этом нужны некоторые навыки в выборе сферических треугольников, с помощью которых могут быть получены необходимые соотношения между рассматриваемыми сферическими координатами. Если заданные и искомые величины являются элементами одного сферического треугольника, то использование формул сферической тригонометрии значительно проще других методов. В более сложных случаях целесообразность применения этих формул зависит от опыта и склонностей исследователя.

Применение методов аналитической геометрии основано на использовании формул преобразования координат от одной системы к другой. В качестве кинематических параметров, определяющих положение твердого тела, рассматриваются направляющие косинусы. Составление таблиц направляющих косинусов приводит иной раз к громоздким выкладкам и требует известных навыков. Этот метод целесообразно применять при решении не очень сложных задач по геометрии стабилизации. Наиболее просто реализуется вариант этого метода, когда выбирается единичный вектор заданного направления, находятся его проекции в рассматриваемых координатных системах и с помощью формул линейного преобразования координат выводятся соотношения между заданными и искомыми сферическими координатами.

Дальнейшее развитие этого метода связано с использованием теории матриц. Матричный метод решения задач преобразования координат получил в теории местной стабилизации ИУ наиболее широкое применение. Достоинством этого метода является

простота получения преобразующей матрицы (таблицы направляющих косинусов) путем перемножения матриц последовательных линейных преобразований. Другое достоинство метода состоит в том, что путем сравнения соответствующих элементов матрицы преобразования от одной координатной системы к другой, выраженных через различные углы, устанавливаются все возможные соотношения между заданными и искомыми сферическими координатами. Метод сравнительно прост и позволяет быстро решать разнообразные задачи по геометрии стабилизации.

Отдельные задачи по геометрии и кинематике систем стабилизации могут быть достаточно просто решены с использованием метода теории малых поворотов твердого тела. Этот метод, основанный на геометрическом подходе, обладает необходимой наглядностью, хорошо поясняет физическую сущность решаемой задачи, позволяет непосредственно получить упрощенные зависимости между расматриваемыми сферическими координатами.

Известные перспективы в теории местной стабилизации имеют методы теории конечных поворотов твердого тела с использованием параметров Родрига — Гамильтона, Кейли — Клейна, применение которых в общем случае приводит к кватернионам. Этот метод связан с чисто аналитическими выкладками, которые не требуют каких-либо геометрических построений. Достоинством метода является то обстоятельство, что указанные кинематические параметры не вырождаются при любом положении твердого тела. Использование этих параметров приводит к описанию движения твердого тела с помощью линейных уравнений, что упрощает их решение с помощью ЦВМ. Однако окончательные формулы преобразования координат в функции параметров Родрига — Гамильтона являются достаточно громоздкими, и вопрос о целесообразности расчетов по этим формулам с помощью ЦВМ нуждается в специальном рассмотрении. Можно полагать, что методы теории конечных поворотов твердого тела окажутся полезными при решении сложных задач по кинематике и динамике стабилизации, а также при исследовании отдельных геометрических задач.

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА КОСВЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИУ

§ 5.1. Сущность метода косвенной стабилизации

Косвенный метод стабилизации ИУ состоит в удержании некоторой связанной с ним оси в заданном относительно Земли или ориентира направлении в условиях качки корабля путем введения поправок на качку и рыскание на вращение ИУ вокруг соответствующих осей наведения.

В общем случае с помощью сочетания косвенного метода и непосредственной стабилизации относительно одной оси может быть осуществлена стабилизация связанной с ИУ координатной системы. Примером косвенной стабилизации, например, установленного на палубе корабля визира, является введение поправок на качку и рыскание корабля на вращение визира относительно его осей наведения (стабилизации).

Техническая реализация метода косвенной стабилизации в ряде случаев проще, чем непосредственной стабилизации. Это прежде всего относится к корабельным пеленгационным устройствам, которые в большинстве случаев имеют значительные веса и габариты. Стабилизацию подобных устройств целесообразно осуществлять косвенным методом, если его применение в конкретной системе не связано с какими-либо специфическими особенностями. Расширению области эффективного использования метода косвенной стабилизации способствуют два обстоятельства: а) осуществление общей стабилизации корабля, которая приводит к уменьшению углов, угловых скоростей и ускорений качки; б) создание высококачественных следящих приводов наведения ИУ, обеспечивающих значительные мощности, угловые скорости и ускорения, при сохранении необходимой точности и плавности наведения.

Вопросы геометрии и кинематики косвенной стабилизации будут рассматриваться применительно к пеленгационным устройствам. Полученные результаты в равной мере относятся и к другим корабельным устройствам.

При решении задач стабилизации чувствительных элементов систем навигации и управления обычно используют непосредственный метод. Однако и здесь иногда применяют методы, близкие к косвенным и заключающиеся в преобразовании данных, например, от магнитометров [14], ориентированных в корабельной

системе, в соответствующие данные в земной системе координат. Подобный способ иногда называют «способом стабилизации данных» [81].

Связанная с косвенной стабилизацией задача преобразования угловых координат из земной системы в корабельную решается с помощью ПК, на вход которого поступают углы качки от ГУ. Сказанное поясняется схемой косвенной стабилизации ИУ, приведенной на рис. 1.2. Здесь в ПК вводятся угловые координаты на некоторый ориентир в земной системе; ПК преобразовывает их в угловые координаты в корабельной системе. Последние поступают, например, на наведение визира по отношению к корабельным осям. Благодаря этому оптическая ось визира будет сохранять направление на заданный ориентир независимо от качки и рыскания корабля, т. е. осуществляется косвенная стабилизация оси визира. Для этого требуется двухосная система наведения ИУ. Если же с помощью косвенного метода в сочетании с непосредственным необходимо осуществлять стабилизацию связанной с ИУ координатной системы, то система наведения должна быть трехосной (см. § 5.3).

Выбор косвенного метода стабилизации и схемы его реализации определяет и другую важную характеристику системы — параметры, или данные, необходимые для стабилизации, и способ их выработки. Анализ косвенной стабилизации ИУ на качающемся основании приводится в ряде работ (см. например, [4, 14, 23, 53, 81, 87, 89]).

§ 5.2. Угловые координаты осей ИУ; углы наклона палубы корабля

Среди различных ИУ с косвенной стабилизацией наибольшее распространение получили ИУ с двумя осями наведения. Поэтому в данном параграфе будут рассматриваться угловые координаты и углы наклона палубы на качке применительно к двухосным ИУ [23, 27, 29, 44, 53, 89]. Аналогичные вопросы для одноосного и трехосного ИУ излагаются в § 5.3.

Рассмотрим двухосный оптический визир, схема наведения которого приведена на рис. 5.1 [53] (см. также рис. 2.4). Визир имеет две оси наведения: ось ГН и ось ВН (ось цапф). Введем систему координат $Ox_{в.0}y_{в.0}z_{в.0}$, связанную с основанием визира, и систему координат $Ox_{в.в}y_{в.в}z_{в.в}$, которая жестко скреплена с самим визиром или с его оптическим элементом. Здесь $Ox_{в.0}$ — нулевая ось визира, от которой отсчитывается угол места на ориентир; $Oy_{в.0}$ — ось цапф визира (ось ВН), вокруг которой осуществляется наведение по углу места; $Oz_{в.0}$ — ось ГН, вокруг которой производится наведение по курсовому углу. Ось $Oz_{в.0}$ перпендикулярна к ПП, а оси $Oy_{в.0}$ и $Ox_{в.0}$ расположены в ПП. Плоскость $Ox_{в.0}z_{в.0}$

называется *плоскостью ВН* визира. Ось Ox_B направлена вдоль оптической оси визира; ось Oy_B совмещена с осью цапф $Oy_{B,0}$, а ось Oz_B перпендикулярна первым двум осям.

Рассмотрим углы наведения визира при отсутствии качки, когда корабль движется заданным курсом вдоль линии $O\xi$ (рис. 5.2). Предположим, что визир должен быть наведен на находящийся в пространстве ориентир G . Для приведения оптической оси визира Ox_B в направление OG (OL) необходимо: 1) повернуть визир вокруг оси $Oz_{B,0}$ на угол $q_{c0} = MF_0$; 2) повернуть качающуюся часть визира вокруг оси цапф $Oy_{B,0}$ (Oy_B) в плоскости визирования (ПВ) $OE_0LF_0\xi$ на угол $\epsilon_c = F_0L$. Угол q_{c0} представляет собой *курсовой угол на ориентир*, измеренный в ПГ, т. е. *стабилизированный* курсовой угол. Индексом «0» отмечается начальное значение курсового угла, отсчитанное от линии $O\xi$ заданного кораблю курса.

Угол ϵ_c является *углом места на ориентир*, измеренным в вертикальной плоскости визирования, т. е. *стабилизированным* углом места. Этот угол отсчитывается от линии пересечения ПВ и ПГ.

Пусть корабль повернулся вокруг оси $O\xi$ на угол рыскания $\varphi_p = MA_2$. При этом полуподвижный трехгранник займет положение $O\xi_1\eta_1\xi_1$, с которым совмещены корабельные оси $Oxyz$. Точка A_2 , лежащая на оси $O\xi_1$, служит нулем отсчета углов в ПГ. Следовательно, при наличии рыскания корабля визир измерит курсовой угол на ориентир $q_c = A_2F_0$, отсчитанный от нулевой линии OA_2 .

Из рис. 5.2 следует, что

$$q_{c0} = q_c + \varphi_p. \quad (5.1)$$

Курс корабля K измеряется дугой NA_2 , а угол $\Pi = NF_0$, определяемый формулой

$$\Pi = K + q_c, \quad (5.2)$$

представляет собой пеленг или азимут на ориентир.

Определим углы наведения визира при качке корабля, характеризуемой углами φ_p , ψ , θ_K (рис. 5.3). Вначале будем полагать, что ориентир G расположен в ПГ на направлении OF_0 . При качке полуподвижные оси займут положение $O\xi_1\eta_1\xi_1$, а корабельные —

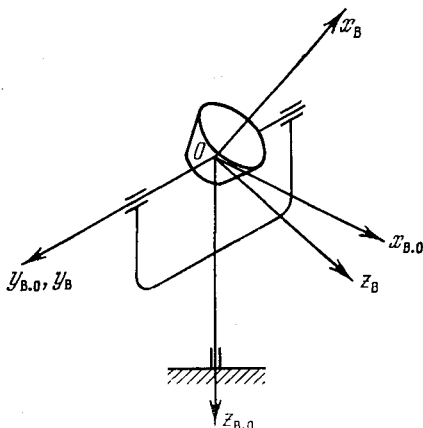


Рис. 5.1. Схема наведения двухосного визира.

Оуз. Предположим, что в исходный момент координатные системы визира $Ox_{в.0}y_{в.0}z_{в.0}$ и $Ox_{в}y_{в}z_{в}$ совмещены с корабельными осями $Ox_{уз}$. Для приведения оптической оси визира $Ox_{в}$ в направление $OF_0'(OG)$ следует: 1) повернуть визир вокруг оси $Oz_{в.0}$ на угол

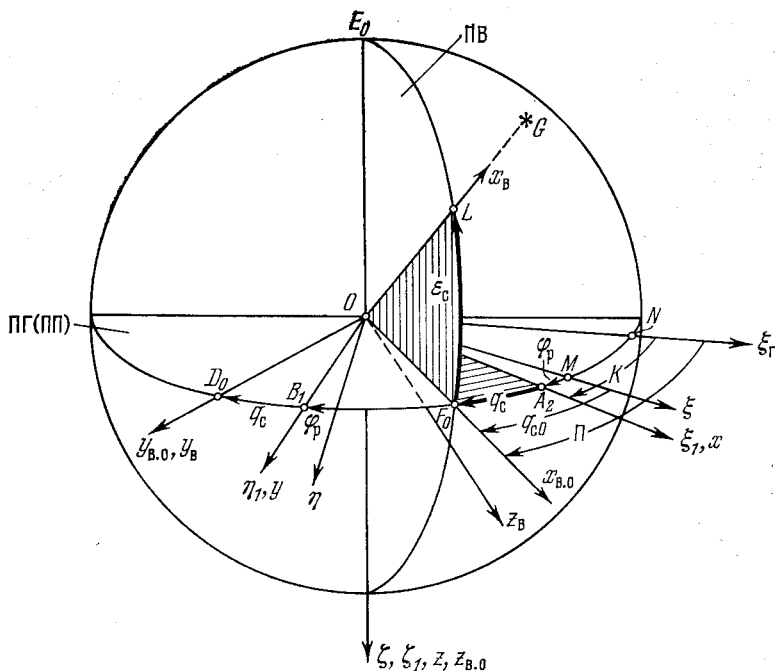


Рис. 5.2. Стабилизированный курсовой угол q_c и угол места ϵ_c .

$q_K = AF_1$; 2) повернуть качающуюся часть визира вокруг оси цапф $Oy_{в.0}(Oy_{в})$ на угол $F_1F_0 = -e_{к.в}$. После этого оси $Ox_{в.0}y_{в.0}z_{в.0}$ и $Ox_{в}y_{в}z_{в}$ займут положение, показанное на рис. 5.3. Угол q_K представляет собой курсовой угол на ориентир, измеренный в ПП, т. е. *нестабильзированный* (корабельный) курсовой угол. Он отсчитывается от продольной оси Ox корабля до линии OF_1 пересечения плоскости ВН визира OEF_1F_0z с ПП. Угол $e_{к.в}$ является *углом крена корабля в плоскости ВН визира* *). Таким образом, при качке двухосный визир измеряет углы $q_K, e_{к.в}$. Положение оси цапф визира $Oy_{в.0}(Oy_{в})$ характеризуется углом НОЦ $\rho_{к.в} = D_0D_1$ в плоскости OD_1D_0E , перпендикулярной к ПП. Наклоны осей $Ox_{в.0}$ и

*) Угол $e_{к.в} = F_0F_1$ характеризует наклон нулевой оси $Ox_{в.0}$ относительно ПГ.

$Oy_{в.0}$ относительно ПГ можно также характеризовать углами $e_{в.0} = F_2F_1$ и $\rho_{в.0} = D_2D_1$, измеренными в вертикальных плоскостях.

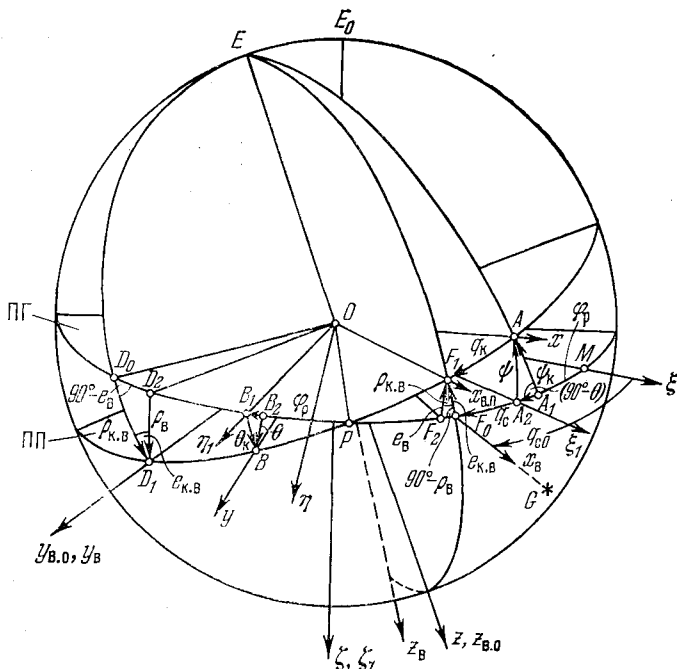


Рис. 5.3. Курсовой угол q_K в ПП, углы наклона ПП.

Так как по построению $F_1D_1 = F_0D_2 = F_2D_0 = 90^\circ$, то элементы треугольников $F_1F_0F_2$ и $D_1D_0D_2$ будут

$$\begin{aligned} F_0F_1 &= e_{к.в.}, & D_0D_1 &= \rho_{к.в.}, \\ F_2F_1 &= e_{в.}, & D_2D_1 &= \rho_{в.}, \\ \sphericalangle F_1 &= \rho_{к.в.}, & \sphericalangle D_1 &= e_{к.в.}, \\ \sphericalangle F_2 &= 90^\circ, & \sphericalangle D_2 &= 90^\circ, \\ \sphericalangle F_0 &= 90^\circ - \rho_{в.}, & \sphericalangle D_0 &= 90^\circ - e_{в.} \end{aligned}$$

Приведем формулы для углов наклона палубы $e_{в.}$, $e_{к.в.}$, $\rho_{в.}$ и $\rho_{к.в.}$. Сопоставляя рис. 2.5 и 5.3, видим, что при $\varphi = 0$, $\Phi = -e_{к.в.}$, $q = q_c$; тогда из формулы (2.38) имеем

$$\sin e_{к.в.} = \sin \psi \cos \theta_K \cos q_c - \sin \theta_K \sin q_c, \quad (5.3)$$

где согласно (5.1)

$$q_c = q_{c0} - \Phi_p. \quad (5.4)$$

Сравнивая рис. 4.2 и 5.3, видим, что при $q = q_c$ $\rho_K = \rho_{K.B}$; тогда на основании формулы (4.35) имеем

$$\sin \rho_{K.B} = \sin \theta_K \cos q_c + \sin \psi \cos \theta_K \sin q_c. \quad (5.5)$$

Соотношения для углов наклона ПП $e_{K.B}$ и $\rho_{K.B}$ в функции углов качки и нестабилизированного курсового угла q_K имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} e_{K.B} &= \operatorname{tg} \psi_K \cos q_K - \operatorname{tg} \theta_K \sin q_K, \\ \operatorname{tg} \rho_{K.B} &= \operatorname{tg} \theta_K \cos q_K + \operatorname{tg} \psi_K \sin q_K, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где угол килевой качки ψ_K выражается через угол ψ , определяемый

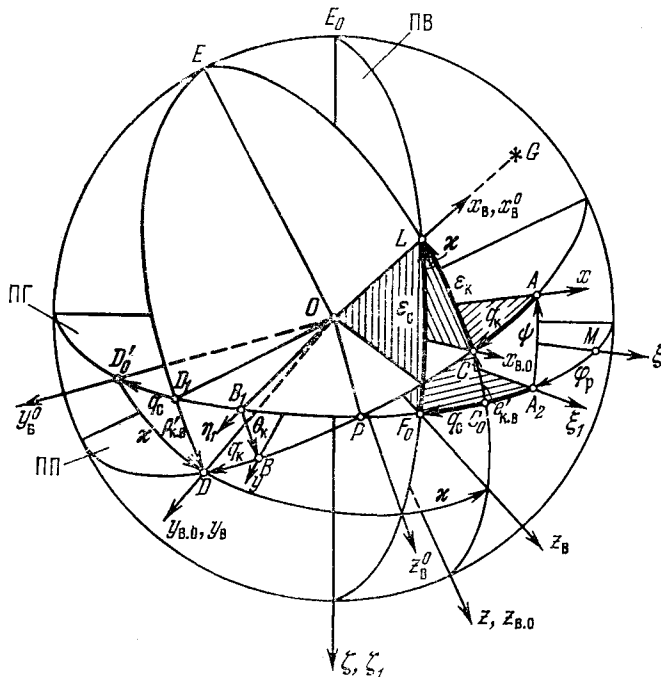


Рис. 5.4. Нестабильные курсовой угол q_K и угол места ϵ_K .

ГВ, с помощью формулы (1.28). Аналогичные зависимости можно получить для углов наклона ПП e_B и ρ_B

$$\left. \begin{aligned} \sin e_B &= \sin \psi \cos q_K - \sin \theta \sin q_K, \\ \sin \rho_B &= \sin \psi \sin q_K + \sin \theta \cos q_K, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

где угол бортовой качки θ выражается через угол θ_K , определяемый ГВ, с помощью соотношения (1.28).

Перейдем к определению углов наведения визира и углов наклона ПП для случая, когда ориентир G находится в пространстве (рис. 5.4). Для приведения оптической оси визира Ox_B в направле-

ние OL (OG) при качке следует: 1) повернуть визир вокруг оси $Oz_{в.о}$ на угол $q_K = AC$; 2) повернуть качающуюся часть визира вокруг оси цапф $Oy_{в.о}$ ($Oy_{в}$) на угол $\epsilon_K = CL$. После этого оси $Ox_{в.о}y_{в.о}z_{в.о}$ и $Ox_{в}y_{в}z_{в}$ займут положение, показанное на рис. 5.4. Угол q_K представляет собой курсовой угол на ориентир, измеренный в ПП, т. е. *нестабилизированный* (корабельный) курсовой угол. Он отсчитывается от продольной оси Ox корабля до линии пересечения OC плоскости ВН визира $OELCz$ с ПП. Угол ϵ_K является углом места на ориентир, измеренным в плоскости ВН визира. Введение углов q_K и ϵ_K обеспечивает косвенную стабилизацию оптической оси визира $Ox_{в}$. Наклон нулевой оси визира $Ox_{в.о}$ относительно ПГ определяется углом крена $e'_{к.в} = C_0C$ в плоскости ВН визира $OELCC_0z$. Положение оси цапф визира $Oy_{в.о}$ ($Oy_{в}$) характеризуется углом НОЦ $\rho'_{к.в} = D_1D$ в плоскости ODD_1E , перпендикулярной к ПП. Наиболее простые формулы для $e'_{к.в}$ и $\rho'_{к.в}$ имеют вид соотношений (5.6), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} e'_{к.в} &= \operatorname{tg} \psi_K \cos q_K - \operatorname{tg} \theta_K \sin q_K, \\ \operatorname{tg} \rho'_{к.в} &= \operatorname{tg} \theta_K \cos q_K + \operatorname{tg} \psi_K \sin q_K. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Однако в формулах (5.6) и (5.8) углы q_K — разные (сравните рис. 5.3 и 5.4).

§ 5.3. Геометрия и кинематика наведения ИУ при различных схемах косвенной стабилизации

1. Характеристика схем наведения ИУ.

Предварительные замечания. Геометрия и кинематика наведения ИУ существенно зависят от применяемой схемы стабилизации (схемы наведения), числа осей наведения и их расположения. По числу осей наведения различают одноосные, двухосные и трехосные ИУ. Заметим, что в трехосных ИУ две оси наведения обеспечивают косвенную стабилизацию заданного направления (например, оптической оси визира), а третья ось наведения по существу является осью непосредственной стабилизации. Однако, так как задача удержания на качке заданного направления ИУ в требуемом положении осуществляется с помощью метода косвенной стабилизации, то трехосные ИУ будем условно относить к системам с косвенной стабилизацией.

Двухосные и трехосные ИУ могут иметь различные варианты (типы) схем наведения. Здесь приводятся несколько типов схем наведения двухосных и трехосных ИУ, а далее рассматриваются лишь те, которые нашли практическое применение.

Классификация схем наведения ИУ и их анализ приводятся в ряде работ (см., например, [6, 23, 53, 87, 89]). При этом основное внимание уделяется схемам наведения антенн РЛС; аналогичные

схемы применяются в различных пеленгационных и в других корабельных устройствах.

Одноосное ИУ. На рис. 5.5 приведена схема наведения одноосного ИУ (антенны) [53, 89] с осью ГН 1, которая перпендикулярна к ПП.

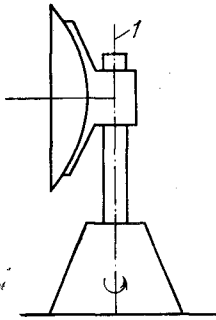


Рис. 5.5. Схема одноосного ИУ; 1 — ось ГН.

Поправка на качку корабля вводится в ПП, т. е. в курсовой угол. Для приведения плоскости симметрии диаграммы направленности антенны в направление OF_0 на ориентир G (рис. 5.3) в ГН следует ввести курсовой угол $q_k = AF_1$. Однако вследствие отсутствия ВН антенны ось луча будет смещена относительно направления OF_0 на угол $e_{к.в} = F_0F_1$ в плоскости OEF_1F_0 . В книге [23] указывается, что одноосные антенны применяются в системах обнаружения, а также в системах автосопровождения с круговым обзором. При этом ширина диаграммы направленности в плоскости ВН должна быть больше угла $2e_{к.в}$, чтобы предотвратить потерю контакта с ориентиром. [В

одноосном ИУ параметром косвенной стабилизации является курсовой угол q_k в ПП. Некоторые специфические особенности использования одноосных схем в антенных устройствах рассматриваются в работе [23]. В визирных устройствах одноосные схемы наведения не применяются.

Двухосные ИУ. В различных пеленгационных и в других корабельных устройствах двухосные схемы наведения получили широкое применение. На рис. 5.6 приведены основные типы схем наведения двухосных ИУ с косвенной стабилизацией [53, 89]. В схеме на рис. 5.6, а имеются ось ГН 1, перпендикулярная к ПП, и ось ВН (ось цапф) 2, расположенная в ПП. Здесь поправки на качку корабля вводятся в ГН и в ВН. Если ориентир G расположен в ПГ (рис. 5.3), то для приведения луча антенны (оптической оси визира) в направление OF_0 на ориентир в ГН следует ввести курсовой угол $q_k = AF_1$, а в ВН — угол места $e_k = -e_{к.в} = F_1F_0$. Если ориентир G находится в пространстве (рис. 5.4), то в ГН вводится курсовой угол $q_k = AC$, а в ВН — угол места $e_k = CL$. Следовательно, в двухосном ИУ первого типа (рис. 5.6, а) параметрами косвенной стабилизации являются курсовой угол q_k в ПП и угол места e_k в плоскости ВН. В § 2.2, п. 2 была исследована кинематика косвенной стабилизации рассматриваемого двухосного ИУ (см. рис. 2.4 и 5.6, а) и выявлена существенная зависимость угловых скоростей и угловых ускорений ГН $\dot{Q} = \dot{q}_k$, $\ddot{Q} = \ddot{q}_k$ на качке от угла возвышения (угла места), которые достигают весьма больших значений в области, близкой к зениту. В связи с этим в книге [6] указано, что в данной двухосной системе на качке при

больших углах места возникает некоторая «мертвая зона», в которой не обеспечивается косвенная стабилизация ИУ. Аналогичные выводы делаются в работах [23, 53], где отмечается, что угловые скорости и ускорения ГН на качке резко увеличиваются при углах места, больших 70° .

Другим недостатком данного типа двухосного ИУ является наличие связи между каналами ГН и ВН. Это вызвано тем, что при изменении азимута или угла места ориентира в земной системе

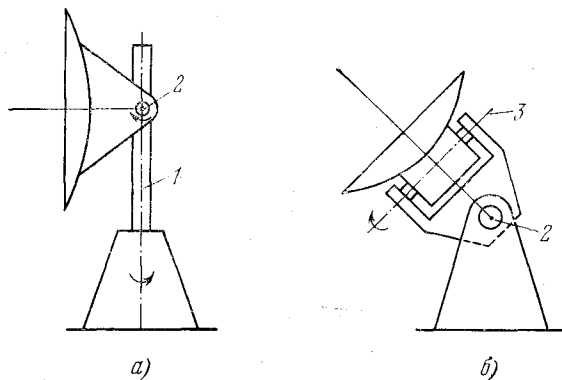


Рис. 5.6. Схемы двухосных ИУ; 1 — ось ГН, 2 — ось ВН, 3 — поперечная ось наведения.

координат в условиях качки необходимо осуществлять одновременно горизонтальное и вертикальное наведение ИУ. Кроме того, в двухосных ИУ возникает на качке вращательное движение (наклон) плоскости симметрии диаграммы направленности антенны (перекрестия визира) вокруг оси луча (оптической оси визира), что затрудняет наведение и вызывает дополнительные ошибки (см. § 5.3, п. 3). Рассматриваемая схема двухосного ИУ широко используется в устройствах, где углы места не достигают околозенитной области. При этом осуществление общей стабилизации корабля и применение высококачественных следящих приводов наведения позволяют значительно уменьшить «мертвую зону» двухосных ИУ.

В схеме наведения двухосного ИУ, приведенной на рис. 5.6, б, имеются ось ВН 2, расположенная в ПП, и поперечная ось наведения 3, которая может занимать переменное относительно ПП положение. Так, например, при отсутствии качки и при $\epsilon_c = 0$ ось 3 вертикальна и вращение антенны вокруг нее осуществляется по курсовому углу в ПГ. При $\epsilon_c \neq 0$ ось 3 занимает наклонное положение, и вращение антенны вокруг нее осуществляется в наклонной плоскости. При $\epsilon_c = 90^\circ$ ось 3 горизонтальна, и при вращении вокруг нее антенна проходит через зенит. Параметрами

косвенной стабилизации в данной схеме являются угол места в плоскости, перпендикулярной к ПП, и «курсовой угол» в наклонной плоскости, который в предельном случае ($\varepsilon_c = 90^\circ$) переходит в изменение угла места. Анализ [6] угловых скоростей и угловых ускорений наведения на качке в рассматриваемой схеме двухосного ИУ показывает, что при вращении вокруг оси 3 они не превосходят угловых скоростей и угловых ускорений качки. Необходимые угловые скорости и угловые ускорения наведения вокруг оси 2 могут достигать весьма больших значений, когда ось луча антенны приближается к оси 2. Одно из существенных достоинств схемы двухосного наведения второго типа состоит в том, что здесь обеспечивается возможность слежения за ориентиром, находящимся вблизи зенита. Наоборот, при малых углах места, вследствие указанного выше недостатка, подобная схема наведения неэффективна. Поэтому она практически не применяется в корабельных системах [23].

Трехосные ИУ. На рис. 5.7 приведены основные типы схем наведения трехосных ИУ с косвенной стабилизацией [53, 89].

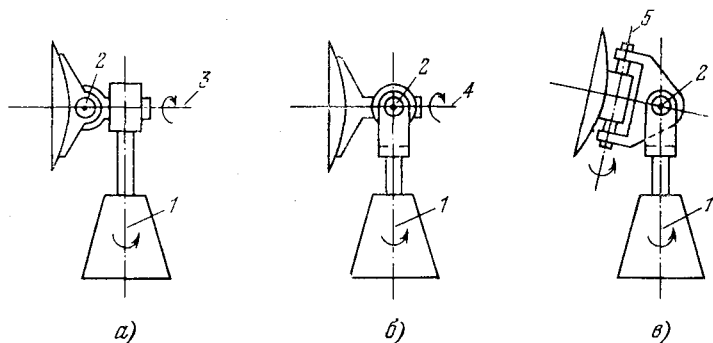


Рис. 5.7. Схемы трехосных ИУ; 1 — ось ГН, 2 — ось ВН, 3 — ось стабилизации оси цапф, 4 — ось поперечной стабилизации антенны, 5 — поперечная ось наведения.

В трехосных ИУ, в отличие от двухосных, имеется возможность слежения за ориентирами, расположенными в околзенитной области; практически устраняется связь между каналами ГН и ВН; компенсируется поперечный наклон плоскости симметрии диаграммы направленности антенны (перекрестия визира).

В схеме наведения на рис. 5.7, а имеются: ось ГН 1, перпендикулярная к ПП; ось ВН (ось цапф) 2, расположенная в ПГ; ось стабилизации оси цапф 3, которая находится в ПП. Геометрия и кинематика этой схемы подробно будут рассматриваться в § 5.3, п. 4. Здесь лишь укажем, что ГН антенны вокруг оси 1 осуществляется в ПП. При вращении качающейся части антенны вокруг оси 3

(добавочная, третья ось наведения, ось стабилизации) ось цапф (ось ВН) 2 удерживается при качке корабля в ПГ. Благодаря этому ВН антенны вокруг оси 2 будет осуществляться в вертикальной плоскости, проходящей через ориентир (плоскость визирования), следовательно, устраняется поперечный наклон плоскости симметрии диаграммы направленности антенны, а также взаимная связь между каналами ВН и ГН. Таким образом, в трехосном ИУ первого типа (рис. 5.7, а) параметрами косвенной стабилизации являются: курсовой угол в ПП, угол места в ПВ, угол стабилизации оси цапф. Как будет показано в п. 4, в данной схеме необходимые угловые скорости и ускорения ВН и стабилизации оси цапф при качке имеют порядок угловых скоростей и ускорений качки, а угловые скорости и ускорения ГН не зависят от угла места. Это обстоятельство обусловило применение в пеленгационных и в других корабельных устройствах трехосных схем наведения с косвенной стабилизацией, особенно при необходимости слежения за ориентирами, расположенными в околозенитной области.

Трехосное ИУ второго типа (рис. 5.7, б) имеет ось ГН 1 и ось ВН 2, расположенные как и в двухосном ИУ первого типа (рис. 5.6, а), а также ось 4 поперечной стабилизации антенны, которая направлена по оси луча. Вращение антенны вокруг оси 4 позволяет устранить возникающий в условиях качки наклон плоскости симметрии диаграммы направленности. В остальном рассматриваемая схема трехосного ИУ обладает основными недостатками двухосного ИУ первого типа (рис. 5.6, а) и поэтому не получила распространения; отдельные случаи ее применения упоминаются в работах [23, 53].

Трехосное ИУ третьего типа (рис. 5.7, в) имеет ось ГН 1 и ось ВН 2, расположенные как в устройстве второго типа (рис. 5.7, б), а также поперечную ось наведения 5, аналогичную таковой в двухосном ИУ второго типа (рис. 5.6, б). С помощью данного ИУ можно обеспечить слежение на качке за ориентирами, расположенными в околозенитной области, с угловыми скоростями и ускорениями наведения, которые могут быть реализованы на практике. Однако для определения данных для наведения (параметров косвенной стабилизации) трехосного ИУ третьего типа необходимо сложное ВУ [23, 53].

Учитывая сказанное выше, анализ геометрии и кинематики систем косвенной стабилизации проводится далее применительно к одноосному ИУ, двухосному и трехосному ИУ первого типа.

2. Геометрия и кинематика одноосного ИУ.

Курсовой угол в плоскости палубы. В п. 1 было указано, что одноосные системы наведения (рис. 5.5) применяются в антеннах РЛС обнаружения и в РЛС автосопровождения с круговым обзором. Будем полагать, что пеленгуемый ориентир G расположен в ПГ (рис. 5.3), а ширина диаграммы направленно-

сти в плоскости ВН больше угла $2e_{к.в.}$. Параметром косвенной стабилизации антенны является курсовой угол q_k в ПП. Выведем соотношение, связывающее нестабилизированный курсовой угол $q_k = AF_1$ (рис. 5.3) в ПП и стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2F_0$ в ПГ. Для этого воспользуемся формулой (2.39). Из сопоставления рис. 2.5 и 5.3 видно, что при $\varphi = 0$ и $q = q_c$ угол $Q = q_k$. Поэтому согласно (2.39) имеем

$$\operatorname{tg} q_k = \operatorname{tg} q_c \frac{\cos \theta_k}{\cos \psi} + \sin \theta_k \operatorname{tg} \psi, \quad (5.9)$$

откуда следует, что при нахождении ориентира G в ПГ разница между курсовыми углами q_k и q_c невелика, так как при малых углах бортовой и килевой качки $\cos \theta_k / \cos \psi \cong 1$, а слагаемое $\sin \theta_k \operatorname{tg} \psi$ обычно мало.

Если воспользоваться выражением (5.4), то (5.9) можно заметить формулой

$$\operatorname{tg} q_k = \operatorname{tg} (q_{c0} - \varphi_p) \frac{\cos \theta_k}{\cos \psi} + \sin \theta_k \operatorname{tg} \psi, \quad (5.10)$$

которая позволяет по заданному углу q_{c0} и определяемым с помощью ГУ углам φ_p , ψ , θ_k вычислить курсовой угол q_k в ПП.

Поправка в курсовой угол. Как известно, сущность метода косвенной стабилизации состоит во введении поправки на качку и рыскание корабля в наведение ИУ. Для нахождения формулы этой поправки воспользуемся рис. 5.8 (см. также рис. 5.3), на котором показаны курсовые углы и углы наклона ПП.

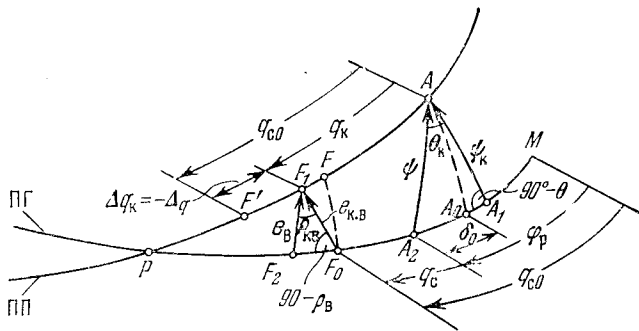


Рис. 5.8. К определению поправки в курсовой угол на качку.

Предположим, что при отсутствии качки и рыскания корабля измерен курсовой угол в ПГ $q_{c0} = MF_0$. При рыскании и наклоне палубы оптическая ось визира (ось луча антенны) из положения OF_0 перейдет в OF' , причем $AF' = MF_0 = q_{c0}$. Для приведения визира в плоскость ВН необходимо в курсовой угол ввести поправ-

ку $\Delta_q = F'F_1$, при этом ось визира составит с продольной осью корабля курсовой угол $q_K = AF_1$ в ПП, т. е. требуемый параметр косвенной стабилизации одноосного ИУ.

Составим разность курсовых углов

$$\Delta q_K = q_{c0} - q_K. \quad (5.11)$$

Тогда

$$\Delta_q = -\Delta q_K = -(q_{c0} - q_K). \quad (5.12)$$

Проведем из полюса P дуги $PA = PA_0$ и $PF = PF_0$, тогда имеем

$$MF_0 = MA_0 + A_0F_0 = MA_2 - A_0A_2 + A_0F_0.$$

Обозначим $\delta_0 = A_0A_2$, $\varphi_P = MA_2$, следовательно,

$$MF_0 = \varphi_P - \delta_0 + A_0F_0. \quad (5.13)$$

Рассмотрим дугу AF' , имеем

$$AF' = AF + FF_1 + F_1F' = AF + FF_1 + \Delta q_K. \quad (5.14)$$

Но $MF_0 = AF'$ и $A_0F_0 = AF$, тогда с учетом (5.13) и (5.14) получим

$$\varphi_P - \delta_0 = FF_1 + \Delta q_K,$$

откуда

$$\Delta q_K = \varphi_P - (\delta_0 + FF_1),$$

или, учитывая (5.12), имеем

$$\Delta_q = -\varphi_P + (\delta_0 + FF_1). \quad (5.15)$$

Для угла δ_0 в согласии с рис. 5.8 имеем

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\operatorname{tg} PA - \operatorname{tg} PA_2}{1 + \operatorname{tg} PA \operatorname{tg} PA_2}. \quad (5.16)$$

Из прямоугольного сферического треугольника $PA A_2$ находим

$$\cos \sphericalangle P = \frac{\operatorname{tg} PA_2}{\operatorname{tg} PA},$$

откуда

$$\operatorname{tg} PA = \frac{\operatorname{tg} PA_2}{\cos \sphericalangle P}.$$

Введем это выражение в формулу (5.16)

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{1 - \cos \sphericalangle P}{\operatorname{ctg} PA_2 \cos \sphericalangle P + \operatorname{tg} PA_2}. \quad (5.17)$$

Из треугольника $PA_2 A$

$$\cos \sphericalangle P = \sin(90^\circ - \theta_K) \cos \psi = \cos \theta_K \cos \psi. \quad (5.18)$$

Аналогично из треугольника PBB_1 (рис. 5.3)

$$\cos(90^\circ - \psi) = \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\operatorname{tg} PB_1}.$$

Так как $A_2B_1 = 90^\circ$, то $PB_1 = 90^\circ - PA_2$; тогда

$$\cos(90^\circ - \psi) = \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\operatorname{tg}(90^\circ - PA_2)}$$

или

$$\operatorname{ctg} PA_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\sin \psi}. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.18) и (5.19) в (5.17), получим

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\sin \psi \sin \theta_K}{\cos \psi + \cos \theta_K}. \quad (5.20)$$

Для угла $\delta_0 = A_0A_2 = PA - PA_2$ можно также найти приближенную формулу

$$\sin \delta_0 = \frac{1}{2} \sin \psi_K \sin \theta_K, \quad (5.21)$$

которая при малых углах качки дает результат, близкий к точному выражению (5.20).

Теперь определим дугу FF_1 ; имеем

$$FF_1 = PF - PF_1 = PF_0 - PF_1,$$

тогда

$$\operatorname{tg} FF_1 = \frac{\operatorname{tg} PF_0 - \operatorname{tg} PF_1}{1 + \operatorname{tg} PF_0 \cdot \operatorname{tg} PF_1}. \quad (5.22)$$

Из треугольника PF_1F_0 находим

$$\operatorname{ctg} PF_0 \sin e_{K.B} = \cos e_{K.B} \cos(90^\circ - \rho_B),$$

откуда

$$\operatorname{tg} PF_0 = \frac{\operatorname{tg} e_{K.B}}{\sin \rho_B}. \quad (5.23)$$

Из того же треугольника

$$\operatorname{ctg} PF_1 \sin e_{K.B} = \operatorname{ctg}(90^\circ - \rho_B),$$

откуда

$$\operatorname{tg} PF_1 = \frac{\sin e_{K.B}}{\operatorname{tg} \rho_B}. \quad (5.24)$$

Подставим (5.23) и (5.24) в (5.22), тогда

$$\operatorname{tg} FF_1 = \frac{\sin e_{K.B} \sin \rho_B}{\cos e_{K.B} + \cos \rho_B}. \quad (5.25)$$

Для дуги $FF_1 = PF_0 - PF_1$ можно также найти приближенное выражение

$$\sin FF_1 = \frac{1}{2} \sin e_{K.B} \sin \rho_{K.B}, \quad (5.26)$$

которое при малых углах качки дает результат, близкий к точной формуле (5.25).

Подставим (5.20) и (5.25) в выражение (5.15), получим

$$\Delta_q = -\varphi_p + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K}{\cos \psi + \cos \theta_K} \right] + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin e_{K.B} \sin \rho_B}{\cos e_{K.B} + \cos \rho_B} \right], \quad (5.27)$$

где первое слагаемое обусловлено рысканием корабля, а второе и третье — качкой. Обозначим

$$\Delta_q^K = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K}{\cos \psi + \cos \theta_K} \right] + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin e_{K.B} \sin \rho_B}{\cos e_{K.B} + \cos \rho_B} \right]. \quad (5.28)$$

Тогда выражение (5.27) можно записать в виде

$$\Delta_q = -\varphi_p + \Delta_q^K. \quad (5.29)$$

Если воспользоваться приближенными формулами (5.24) и (5.26), то вместо (5.27) будем иметь

$$\Delta_q = -\varphi_p + \operatorname{arcsin} \left[\frac{1}{2} \sin \psi_K \sin \theta_K \right] + \operatorname{arcsin} \left[\frac{1}{2} \sin e_{K.B} \sin \rho_{K.B} \right]. \quad (5.30)$$

Аналогичным образом вместо формулы (5.28) получим

$$\Delta_q^K = \operatorname{arcsin} \left[\frac{1}{2} \sin \psi_K \sin \theta_K \right] + \operatorname{arcsin} \left[\frac{1}{2} \sin e_{K.B} \sin \rho_{K.B} \right]. \quad (5.31)$$

Найдем выражение для поправки Δ_q в функции угла q_c и углов φ_p , ψ , θ_K . На основании (5.11) и (5.12) можно записать

$$\operatorname{tg} \Delta_q^K = \operatorname{tg} (q_K - q_c) = \frac{\operatorname{tg} q_K - \operatorname{tg} q_c}{1 + \operatorname{tg} q_K \operatorname{tg} q_c}$$

или, принимая во внимание формулу (5.9), получим

$$\operatorname{tg} \Delta_q^K = \frac{\sin \psi \sin \theta_K + (\cos \theta_K - \cos \psi) \operatorname{tg} q_c}{\cos \psi + (\cos \theta_K \operatorname{tg} q_c + \sin \psi \sin \theta_K) \operatorname{tg} q_c}, \quad (5.32)$$

откуда

$$\Delta_q^K = \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K + (\cos \theta_K - \cos \psi) \operatorname{tg} q_c}{\cos \psi + (\cos \theta_K \operatorname{tg} q_c + \sin \psi \sin \theta_K) \operatorname{tg} q_c} \right]. \quad (5.33)$$

Вводя (5.33) в (5.29), имеем

$$\Delta_q = -\varphi_p + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K + (\cos \theta_K - \cos \psi) \operatorname{tg} q_c}{\cos \psi + (\cos \theta_K \operatorname{tg} q_c + \sin \psi \sin \theta_K) \operatorname{tg} q_c} \right]. \quad (5.34)$$

Из формулы (5.12) следует, что

$$\Delta_q = q_k - q_{c0} \quad (5.35)$$

или, учитывая (5.1), имеем

$$\Delta_q = -\varphi_p + (q_k - q_c). \quad (5.36)$$

Сопоставляя (5.36) с формулой (5.29), находим

$$\Delta_q^k = q_k - q_c. \quad (5.37)$$

Таким образом, на основании (5.35) и (5.37) получаем следующие две формулы для курсового угла q_k в ПП, выраженные через стабилизированные курсовые углы q_{c0} , q_c и поправки Δ_q , Δ_q^k :

$$q_k = q_{c0} + \Delta_q, \quad (5.38)$$

$$q_k = q_c + \Delta_q^k, \quad (5.39)$$

при этом поправки Δ_q и Δ_q^k связаны соотношением (5.29).

Связь поправок на качку и на НОЦ. При приближенном способе учета качки вместо поправки Δ_q^k вводят поправку $\Delta_{\text{НОЦ}}$ на НОЦ визира. Формулу для $\Delta_{\text{НОЦ}}$ можно получить, если в (4.13) заменить Q на q_k , q на q_c и положить $\varphi = 0$ (ориентир G находится в ПГ); при малых углах наклона ПП e и ρ_k имеем

$$q_k = q_c + \arctg [\text{tg } e \sin \rho_k]. \quad (5.40)$$

При визировании ориентира $e \cong e_{k.v}$ и $\rho_k = \rho_{k.v}$; тогда получим общепринятое выражение поправки на НОЦ

$$\text{tg } \Delta_{\text{НОЦ}} = \text{tg } e_{k.v} \sin \rho_{k.v}. \quad (5.41)$$

При этом формулу (5.40) можно записать в виде

$$q_k = q_c + \Delta_{\text{НОЦ}}, \quad (5.42)$$

аналогичном (5.39)

Сравним поправку $\Delta_{\text{НОЦ}}$ с точной поправкой наклон ПП Δ_q^k . Из прямоугольного сферического треугольника $F_2 F_0 F_1$ (рис. 5.8) имеем

$$\text{tg } F_0 F_2 = \text{tg } e_{k.v} \sin \rho_v. \quad (5.43)$$

Полагая $\rho_v \cong \rho_{k.v}$ и учитывая (5.41), получим

$$\Delta_{\text{НОЦ}} \cong F_0 F_2. \quad (5.44)$$

Согласно (5.15) и (5.29) для поправки Δ_q^k имеем

$$\Delta_q^k = \delta_0 + FF_1 = A_0 A_2 + FF_1. \quad (5.45)$$

Рассматривая рис. 5.8 и сравнивая формулы (5.44) и (5.45), видим, что $\Delta_{\text{ноц}} \neq \Delta_q^k$. Следовательно, учет поправки на наклон палубы в ГН визира по формуле (5.41) является приближенным. Поэтому в системах стабилизации при решении задачи преобразования углов q_c в q_k или наоборот не применяются упрощенные поправочные формулы, а используются точные аналитические зависимости, реализуемые в ПК [63].

Выведем еще одну зависимость, связывающую углы q_k и q_c . Для этого воспользуемся треугольником EA_1F_0 (рис. 5.3), в котором: $\sphericalangle E = q_k$, $EF_0 = 90^\circ + e_{k.в.}$, $\sphericalangle A_1 = 90^\circ - \theta$; получим

$$\sin A_1F_0 = \sin q_k \frac{\cos e_{k.в.}}{\cos \theta}. \quad (5.46)$$

В согласии с (1.33) для $A_1A_2 = \gamma$ имеем

$$\sin A_1A_2 = \sin \psi_k \sin \theta_k. \quad (5.47)$$

Из рис. 5.3 следует, что

$$q_c = A_2F_0 = A_1F_0 - A_1A_2. \quad (5.48)$$

Подставляя сюда формулы (5.46) и (5.47), получим

$$q_c = \arcsin \left(\sin q_k \frac{\cos e_{k.в.}}{\cos \theta} \right) - \arcsin (\sin \psi_k \sin \theta_k). \quad (5.49)$$

При малых углах качки $\cos e_{k.в.}/\cos \theta \cong 1$; тогда, принимая во внимание выражение (1.33) для кардановой ошибки γ , получим

$$q_k \cong q_c + \gamma, \quad (5.50)$$

при этом угол γ может быть вычислен по приближенной формуле (1.35). При $\psi = 5^\circ$ и $\theta_k = 15^\circ$ угол $\gamma = 1^\circ 20'$, следовательно, этой величине в данном случае и будет равна разность курсовых углов ($q_k - q_c$).

При одноосной схеме наведения ось антенны (ось визира) занимает положение OF_1 , отклоненное от направления OF_0 на ориентир G (рис. 5.3) на угол крена корабля $e_{k.в.} = F_0F_1$ в плоскости OEF_1F_0 . Кроме того, плоскость симметрии диаграммы направленности антенны $Ox_{в.о}z_{в.о}$ (перекрестие визира) будет повернута вокруг оси $Ox_{в.о}$ на угол $\rho_{k.в.}$, т. е. угол поперечного наклона указанной плоскости составит

$$\kappa = \rho_{k.в.} \quad (5.51)$$

Кинематика одноосного ИУ. Угловую скорость q_k и угловое ускорение \dot{q}_k наведения ИУ на качке можно определить двумя способами. Первый из них состоит в следующем. Учитывая формулы (5.38) и (5.29), имеем

$$q_k = q_{c0} - \varphi_p + \Delta_q^k. \quad (5.52)$$

При определении угловой скорости ГН \dot{q}_k , обусловленной рысканием и качкой корабля, стабилизированный курсовой угол q_{c0} можно считать медленно изменяющейся функцией по сравнению с изменениями углов рыскания и качки. Тогда, в согласии с (5.52), получим

$$\dot{q}_k = -\dot{\varphi}_p + \dot{\Delta}_q^k. \quad (5.53)$$

Аналогичным образом, для углового ускорения имеем

$$\ddot{q}_k = -\ddot{\varphi}_p + \ddot{\Delta}_q^k. \quad (5.54)$$

Случайные функции $\dot{\varphi}_p(t)$ и $\ddot{\varphi}_p(t)$ задаются своими вероятностными характеристиками (см. § 1.4, п. 5). Для определения $\dot{\Delta}_q^k$ и $\ddot{\Delta}_q^k$ следует воспользоваться приведенными ранее приближенными формулами для Δ_q^k .

Другой способ нахождения \dot{q}_k и \ddot{q}_k состоит в использовании методов кинематики, которые были применены в § 2.2, п. 2 при определении угловых скоростей и ускорений наведения двухосного ИУ на качке. Полагая в формуле (2.44) $Q = \dot{q}_k$, $\Phi = -e_{k.v}$, $Q = q_k \cong q_{c0}$ и учитывая выражения (5.3) и (5.4), с точностью до малых второго порядка получим

$$\dot{q}_k = -\dot{\varphi}_p - \frac{1}{2}(\dot{\theta}_k \theta_k - \dot{\psi}\psi) \sin 2q_{c0} + (\dot{\psi}\theta_k + \dot{\theta}_k \psi) \cos^2 q_{c0}. \quad (5.55)$$

При конкретных расчетах в зависимости от заданных числовых значений параметров качки и рыскания корабля отдельными слагаемыми в формуле (5.55) можно пренебречь.

Выражение для \ddot{q}_k может быть получено путем дифференцирования соотношения (5.55). Тогда при $q_{c0} = \text{const}$ получим

$$\ddot{q}_k = -\ddot{\varphi}_p - \frac{1}{2}(\ddot{\theta}_k \theta_k + \dot{\theta}_k^2 - \ddot{\psi}\psi - \dot{\psi}^2) \sin 2q_{c0} + (\ddot{\psi}\theta_k + 2\dot{\psi}\dot{\theta}_k + \ddot{\theta}_k \psi) \cos^2 q_{c0}. \quad (5.56)$$

Аналогичным образом находятся угловые скорости и ускорения в схеме одноосной стабилизации для вертикального отклонения

$$\varepsilon_k^0 = e_{k.v} \quad (5.57)$$

оси луча антенны от направления на ориентир и для угла поперечного наклона плоскости симметрии диаграммы направленности, характеризуемого формулой (5.51). Принимая во внимание выражения (5.3), (5.4) и (5.5), имеем

$$\dot{\varepsilon}_k^0 = -\dot{\theta}_k \sin q_{c0} + \dot{\psi} \cos q_{c0}. \quad (5.58)$$

$$\ddot{\varepsilon}_k^0 = -\ddot{\theta}_k \sin q_{c0} + \ddot{\psi} \cos q_{c0}. \quad (5.59)$$

и

$$\dot{\kappa} = \dot{\theta}_K \cos q_{c0} + \dot{\psi} \sin q_{c0}, \quad (5.60)$$

$$\ddot{\kappa} = \ddot{\theta}_K \cos q_{c0} + \ddot{\psi} \sin q_{c0}. \quad (5.61)$$

3. Геометрия и кинематика двухосного ИУ.

Ориентир расположен в ПГ. Для схемы двухосного ИУ, приведенной на рис. 5.6, а, вначале разберем случай, когда пеленгуемый ориентир G (рис. 5.3) расположен в ПГ и параметрами стабилизации являются курсовой угол в ПП $q_K = AF_1$ и угол места $\epsilon_K = -\epsilon_{K.B} = F_1F_0$ в плоскости OEF_1F_0 ВН визира или антенны. Для угла q_K справедливы формулы, которые были получены в п. 2 настоящего параграфа для одноосного ИУ. Выражение для угла места ϵ_K легко получить, если на основании сопоставления рис. 2.5 и 5.3 в формуле (2.38) положить $\Phi = \epsilon_K$, $\varphi = 0$, $q = q_c$; тогда имеем

$$\sin \epsilon_K = \sin \theta_K \sin q_c - \sin \psi \cos \theta_K \cos q_c. \quad (5.62)$$

Принимая во внимание (5.4), формулу (5.62) можно записать в виде

$$\sin \epsilon_K = \sin \theta_K \sin (q_{c0} - \varphi_p) - \sin \psi \cos \theta_K \cos (q_{c0} - \varphi_p). \quad (5.63)$$

Она позволяет по заданному углу q_{c0} и определяемым с помощью ГУ углам φ_p , ψ , θ_K вычислить угол места ϵ_K . Наличие в двухосном ИУ вертикального наведения приводит к тому, что здесь, в отличие от одноосного ИУ, отсутствует вертикальное отклонение оси визира от направления на ориентир. Однако и в двухосном ИУ имеет место поперечный наклон перекрестия визира (см. (5.51)).

Определим угловые скорости и ускорения наведения двухосного ИУ на качке при нахождении ориентира в ПГ. Для угловых скоростей \dot{q}_K и угловых ускорений \ddot{q}_K ГН справедливы формулы (5.55) и (5.56). Для угловых скоростей $\dot{\epsilon}_K$ и угловых ускорений $\ddot{\epsilon}_K$ ВН сохраняются формулы (2.48) и (2.52), если в них заменить Φ на ϵ_K , $\dot{\Phi}$ на $\dot{\epsilon}_K$ и q_0 на q_{c0} ; тогда получим

$$\dot{\epsilon}_K = \dot{\theta}_K \sin q_{c0} - \dot{\psi} \cos q_{c0}. \quad (5.64)$$

$$\ddot{\epsilon}_K = \ddot{\theta}_K \sin q_{c0} - \ddot{\psi} \cos q_{c0}. \quad (5.65)$$

Угловые скорости $\dot{\kappa}$ и угловые ускорения $\ddot{\kappa}$ поперечного наклона перекрестия визира на качке определяются формулами (5.60) и (5.61).

Ориентир находится в пространстве. Перейдем к анализу геометрии двухосного ИУ для случая, когда пеленгуемый ориентир G находится в пространстве на направлении OL (рис. 5.4) и параметрами косвенной стабилизации явля-

ются углы $q_K = AC$ и $\varepsilon_K = CL$. Эти углы определяются формулами (2.38) и (2.39), если в них положить $\Phi = \varepsilon_K$, $\varphi = \varepsilon_C$, $q = q_C$, $Q = q_K$; тогда получим

$$\sin \varepsilon_K = \sin \varepsilon_C \cos \psi \cos \theta_K + \cos \varepsilon_C (\sin q_C \sin \theta_K - \cos q_C \sin \psi \cos \theta_K), \quad (5.66)$$

$$\operatorname{tg} q_K = \frac{\cos \varepsilon_C (\cos q_C \sin \psi \sin \theta_K + \sin q_C \cos \theta_K) - \sin \varepsilon_C \cos \psi \sin \theta_K}{\cos q_C \cos \varepsilon_C \cos \psi + \sin \varepsilon_C \sin \psi}. \quad (5.67)$$

Если воспользоваться формулой (5.4), то в приведенные выражения можно ввести угол q_{C0} и угол рыскания φ_P .

На качке плоскость ВН визира $OELC$, а следовательно, и его перекрестие нитей будет повернуто вокруг оси Ox_B на угол κ (рис. 5.4). Для определения этого угла воспользуемся матричным методом решения задачи преобразования координат, который одновременно позволит дать общий вывод формул (5.66) и (5.67).

Введем на рис. 5.4 поворот осей $Ox_B y_B z_B$ на угол $-\kappa$ вокруг оси Ox_B ; тогда рассматриваемая система координат займет положение $Ox_B^0 y_B^0 z_B^0$. Запишем преобразование осей $Oxyz$ к $Ox_B^0 y_B^0 z_B^0$ в матричном виде

$$[x_B^0, y_B^0, z_B^0] = K [x, y, z]. \quad (5.68)$$

Матрица K определяется последовательными поворотами на углы q_K , ε_K , $-\kappa$; тогда

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \varepsilon_K & 0 & -\sin \varepsilon_K \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_K & 0 & \cos \varepsilon_K \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos q_K & \sin q_K & 0 \\ -\sin q_K & \cos q_K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перемножая указанные матрицы, получим

$$K = \begin{vmatrix} \cos \varepsilon_K \cos q_K & \sin q_K \cos \varepsilon_K & -\sin \varepsilon_K \\ -\cos q_K \sin \varepsilon_K \sin \kappa - \sin q_K \cos \kappa & \cos q_K \cos \kappa - \sin q_K \sin \varepsilon_K \sin \kappa & -\cos \varepsilon_K \sin \kappa \\ -\sin q_K \sin \kappa + \cos q_K \sin \varepsilon_K \cos \kappa & \sin q_K \sin \varepsilon_K \cos \kappa + \cos q_K \sin \kappa & \cos \varepsilon_K \cos \kappa \end{vmatrix}. \quad (5.69)$$

Преобразование координат (5.68) можно также записать в виде

$$[x_B^0, y_B^0, z_B^0] = M [x, y, z], \quad (5.70)$$

где матрицу M представим так:

$$M = PA_1^{-1}, \quad (5.71)$$

при этом матрицы A_1^{-1} и P характеризуют следующие преобразования координат

$$[\xi_1, \eta_1, \zeta_1] = A_1^{-1} [x, y, z], \quad (5.72)$$

$$[x_B^0, y_B^0, z_B^0] = P [\xi_1, \eta_1, \zeta_1]. \quad (5.73)$$

Матрица A_1^{-1} определяется в согласии с (1.21) следующей таблицей:

$$A_1^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \sin \theta_K & \sin \psi \cos \theta_K \\ 0 & \cos \theta_K & -\sin \theta_K \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (5.74)$$

Матрица P получается последовательными поворотами на углы q_c и ε_c

$$P = \begin{vmatrix} \cos \varepsilon_c & 0 & -\sin \varepsilon_c \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_c & 0 & \cos \varepsilon_c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos q_c & -\sin q_c & 0 \\ -\sin q_c & \cos q_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перемножая указанные матрицы, получим

$$P = \begin{vmatrix} \cos q_c \cos \varepsilon_c & \sin q_c \cos \varepsilon_c & -\sin \varepsilon_c \\ -\sin q_c & \cos q_c & 0 \\ \cos q_c \sin \varepsilon_c & \sin q_c \sin \varepsilon_c & \cos \varepsilon_c \end{vmatrix}. \quad (5.75)$$

В согласии с (5.71) надо перемножить матрицы (5.74) и (5.75); тогда получим следующие выражения для элементов матрицы M :

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= \cos \varepsilon_c \cos q_c \cos \psi + \sin \varepsilon_c \sin \psi, \\ m_{12} &= \cos \varepsilon_c \cos q_c \sin \psi \sin \theta_K + \\ &\quad + \cos \varepsilon_c \sin q_c \cos \theta_K - \sin \varepsilon_c \cos \psi \sin \theta_K, \\ m_{13} &= \cos \varepsilon_c \cos q_c \sin \psi \cos \theta_K - \cos \varepsilon_c \sin q_c \sin \theta_K - \\ &\quad - \sin \varepsilon_c \cos \psi \cos \theta_K, \\ m_{21} &= -\sin q_c \cos \psi, \\ m_{22} &= -\sin q_c \sin \psi \sin \theta_K + \cos q_c \cos \theta_K, \\ m_{23} &= -\sin q_c \sin \psi \cos \theta_K - \cos q_c \sin \theta_K, \\ m_{31} &= \cos q_c \sin \varepsilon_c \cos \psi - \cos \varepsilon_c \sin \psi, \\ m_{32} &= \cos q_c \sin \varepsilon_c \sin \psi \sin \theta_K + \sin q_c \sin \varepsilon_c \cos \theta_K + \\ &\quad + \cos \varepsilon_c \cos \psi \sin \theta_K, \\ m_{33} &= \cos q_c \sin \varepsilon_c \sin \psi \cos \theta_K - \sin q_c \sin \varepsilon_c \sin \theta_K + \\ &\quad + \cos \varepsilon_c \cos \psi \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

Согласно (5.68) и (5.70)

$$K = M, \quad (5.77)$$

следовательно,

$$k_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (5.78)$$

Тогда имеем

$$k_{13} = m_{13}.$$

Подставляя сюда выражения из (5.69) и (5.76), получим формулу (5.66). Далее

$$\operatorname{tg} q_K = \frac{k_{12}}{k_{11}} = \frac{m_{12}}{m_{11}}$$

и, учитывая (5.76), находим выражение (5.67).

Имеем

$$-\operatorname{tg} \kappa = \frac{k_{23}}{k_{33}} = \frac{m_{23}}{m_{33}}.$$

Вводя сюда выражения из (5.76), получим

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\sin q_c \sin \psi \cos \theta_K + \cos q_c \sin \theta_K}{\sin \varepsilon_c (\cos q_c \sin \psi \cos \theta_K - \sin q_c \sin \theta_K) + \cos \varepsilon_c \cos \psi \cos \theta_K}. \quad (5.79)$$

Иначе

$$k_{23} = m_{23}$$

и

$$\sin \kappa = \frac{1}{\cos \varepsilon_c} (\sin q_c \sin \psi \cos \theta_K + \cos q_c \sin \theta_K). \quad (5.80)$$

Из рис. 5.9 наглядно видно влияние наклона перекрестия нитей визира κ . При $\kappa = 0$ измеряемые линейные отклонения y

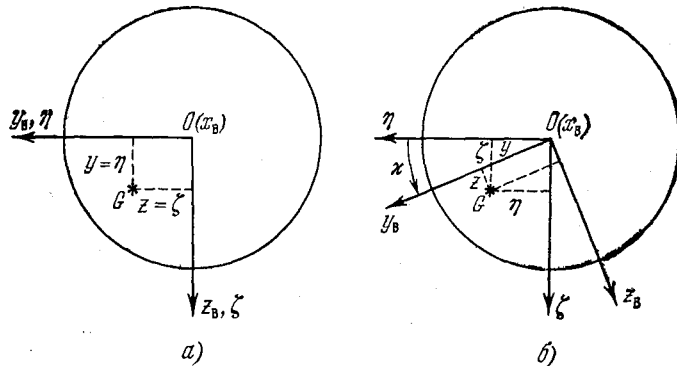


Рис. 5.9. Поворот осей Ox_B, y_B, z_B на угол κ .

и z ориентира G от центра перекрестия равны действительным отклонениям η и ζ , т. е.

$$y = \eta, \quad z = \zeta.$$

При $\kappa \neq 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \eta &= y \cos \kappa - z \sin \kappa, \\ \zeta &= y \sin \kappa + z \cos \kappa, \end{aligned} \right\}$$

следовательно, отклонения y и z будут «выбираться» обоими операторами визира, что приводит к взаимному влиянию горизонтального и вертикального каналов наведения. Для исключения последнего в ряде случаев необходима стабилизация перекрестия нитей визира (плоскости симметрии диаграммы направленности антенны) путем введения угла

$$\beta = -\kappa \quad (5.81)$$

на поворот соответствующих элементов визира или антенны вокруг оси Ox_B (рис. 5.4).

Таким образом, параметрами косвенной стабилизации двухосного ИУ являются углы q_K , ϵ_K , а в общем случае и угол поперечной стабилизации β .

Выше были даны формулы для q_K , ϵ_K , β , выраженных через углы q_c , ϵ_c и углы качки. В некоторых случаях бывают полезны соотношения для q_K , ϵ_K , β , выраженных через другие углы наклона ПП относительно горизонта. Для вывода этих соотношений воспользуемся рис. 5.10. На этом рисунке в дополнение к рис. 5.4 показаны углы наклона ПП $e_B^T = F_0 F_1'$ и $\rho_{K.B}^T = D_0 D_1'$. Угол e_B^T представляет собой угол крена корабля в ПВ $OE_0 L F_1' F_0$. Далее, проведем в ПГ линию OD_0 , перпендикулярную к OF_0 . Тогда можно сказать, что $\rho_{K.B}^T$ является углом наклона линии OD_0 относительно ПП, измеренным в плоскости, перпендикулярной к ПП. Если сопоставить рис. 5.10 и 4.2, то видно, что угол e_B^T аналогичен e , а угол $\rho_{K.B}^T$ аналогичен ρ_K . Тогда, заменяя в формулах (4.32) и (4.35) e на e_B^T , ρ_K на $\rho_{K.B}^T$, а угол q на q_c , получим для углов наклона e_B^T и $\rho_{K.B}^T$ следующие соотношения *):

$$\operatorname{tg} e_B^T = \operatorname{tg} \psi \cos q_c - \frac{\operatorname{tg} \theta_K}{\cos \psi} \sin q_c, \quad (5.82)$$

$$\sin \rho_{K.B}^T = \sin \theta_K \cos q_c + \sin \psi \cos \theta_K \sin q_c. \quad (5.83)$$

Найдем формулы для углов q_K , ϵ_K , β , выраженных через углы наклона ПП e_B^T и $\rho_{K.B}^T$. Для этого сопоставим рис. 4.2 и 5.10. Если в формуле (4.7) положить $\Phi = \epsilon_K$, $\varphi = \epsilon_c$, $e = e_B^T$ и $\rho_K = \rho_{K.B}^T$, то получим следующую формулу для угла места ϵ_K :

$$\sin \epsilon_K = \sin (\epsilon_c - e_B^T) \cos \rho_{K.B}^T. \quad (5.84)$$

*) Индекс «Т» указывает, что рассматриваемые угловые координаты относятся к трехосной установке.

Угол q_k можно записать в виде

$$q_k = AC = AF'_1 - CF'_1. \quad (5.85)$$

Сравнивая рис. 4.2 и 5.10, видим, что дуга AR_2 аналогична дуге AF'_1 , а дуга CR_2 — дуге CF'_1 . Поэтому, производя в формулах

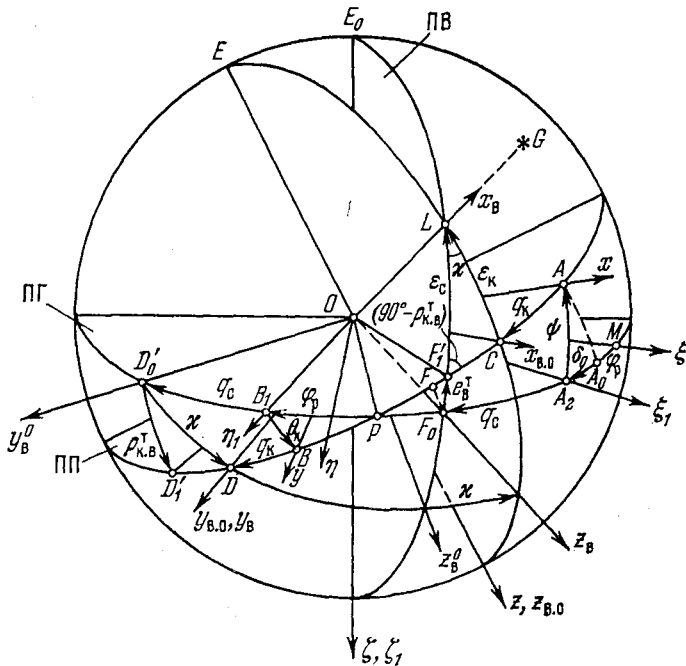


Рис. 5.10. Углы наклона ПП e_B^T , $\rho_{K.B}^T$.

(4.9) и (4.11) упомянутую ранее замену углов, получим

$$\operatorname{tg} AF'_1 = \frac{\cos e_B^T}{\operatorname{ctg} q_c \cos \rho_{K.B}^T + \sin \rho_{K.B}^T \sin e_B^T}, \quad (5.86)$$

$$\operatorname{tg} CF'_1 = \operatorname{tg} (\epsilon_c - e_B^T) \sin \rho_{K.B}^T. \quad (5.87)$$

Вводя (5.86) и (5.87) в формулу (5.85), имеем

$$q_k = \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos e_B^T}{\operatorname{ctg} q_c \cos \rho_{K.B}^T + \sin \rho_{K.B}^T \sin e_B^T} \right] - \operatorname{arctg} [\operatorname{tg} (\epsilon_c - e_B^T) \sin \rho_{K.B}^T]. \quad (5.88)$$

Наконец, если в согласии с (5.85) записать

$$\operatorname{tg} q_k = \operatorname{tg} (AF'_1 - CF'_1) = \frac{\operatorname{tg} AF'_1 - \operatorname{tg} CF'_1}{1 + \operatorname{tg} AF'_1 \cdot \operatorname{tg} CF'_1},$$

то, принимая во внимание формулы (5.86) и (5.87), получим

$$\operatorname{tg} q_k = \frac{\cos e_B^T - \operatorname{tg} (e_c - e_B^T) \sin \rho_{K. B}^T (\operatorname{ctg} q_c \cos \rho_{K. B}^T + \sin \rho_{K. B}^T \sin e_B^T)}{\operatorname{ctg} q_c \cos \rho_{K. B}^T + \sin \rho_{K. B}^T \sin e_B^T + \cos e_B^T \operatorname{tg} (e_c - e_B^T) \sin \rho_{K. B}^T}. \quad (5.89)$$

По аналогии с одноосным ИУ определим выражения для поправок в ВН и ГН на качку для двухосного ИУ. Поправка в ВН визира на качку будет

$$\Delta_\varepsilon = -(\varepsilon_c - \varepsilon_k). \quad (5.90)$$

Вводя сюда (5.84), получим

$$\Delta_\varepsilon = \arcsin [\sin (\varepsilon_c - e_B^T) \cos \rho_{K. B}^T] - \varepsilon_c. \quad (5.91)$$

Поправка в ГН визира на качку по аналогии с (5.12) имеет вид

$$\Delta_q = -(q_{c0} - q_k). \quad (5.92)$$

Проведем на рис. 5.10 из полюса P дуги $PA = PA_0$ и $PF = PF_0$; имеем

$$AF = A_0F_0$$

или

$$AC + CF'_1 + F'_1F = A_0A_2 + A_2F_0,$$

но $AC = q_k$; CF'_1 определяется формулой (5.87), $\delta_0 = A_0A_2$ (рис. 5.8) характеризуется соотношением (5.20), $A_2F_0 = q_c$; тогда

$$q_k + CF'_1 + F'_1F = \delta_0 + q_c.$$

Так как $q_c = q_{c0} - \varphi_p$, то, принимая во внимание (5.92), получим

$$\Delta_q = -\varphi_p - CF'_1 - F'_1F + \delta_0. \quad (5.93)$$

Определим дугу F'_1F ; из рис. 5.10 имеем

$$F'_1F = PF'_1 - PF = PF'_1 - PF_0;$$

тогда

$$\operatorname{tg} F'_1F = \frac{\operatorname{tg} PF'_1 - \operatorname{tg} PF_0}{1 + \operatorname{tg} PF'_1 \cdot \operatorname{tg} PF_0}. \quad (5.94)$$

Из треугольника $F_1'F_0P$ находим

$$\operatorname{tg} PF_1' \sin e_B^T = \cos e_B^T \sin \rho_{K. B}^T; \quad \operatorname{tg} PF_1' = \frac{\operatorname{tg} e_B^T}{\sin \rho_{K. B}^T}, \quad (5.95)$$

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \rho_{K. B}^T) = \frac{\operatorname{tg} PF_0'}{\sin e_B^T}; \quad \operatorname{tg} PF_0' = \frac{\sin e_B^T}{\operatorname{tg} \rho_{K. B}^T}. \quad (5.96)$$

Подставляя (5.95) и (5.96) в (5.94), получим

$$\operatorname{tg} F_1'F = \frac{\sin e_B^T \sin \rho_{K. B}^T}{\cos e_B^T + \cos \rho_{K. B}^T}. \quad (5.97)$$

Вводя в (5.93) соотношения (5.87), (5.97) и (5.20), имеем

$$\Delta_q = -\varphi_D - \operatorname{arctg} [\operatorname{tg} (e_c - e_B^T) \sin \rho_{K. B}^T] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin e_B^T \sin \rho_{K. B}^T}{\cos e_B^T + \cos \rho_{K. B}^T} \right] + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K}{\cos \psi + \cos \theta_K} \right]. \quad (5.98)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено рысканием корабля, а остальные слагаемые — качкой. Обозначая

$$\Delta_q^K = -\operatorname{arctg} [\operatorname{tg} (e_c - e_B^T) \sin \rho_{K. B}^T] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin e_B^T \sin \rho_{K. B}^T}{\cos e_B^T + \cos \rho_{K. B}^T} \right] + \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_K}{\cos \psi + \cos \theta_K} \right], \quad (5.99)$$

получим для Δ_q формулу

$$\Delta_q = -\varphi_D + \Delta_q^K, \quad (5.100)$$

аналогичную (5.29).

Следовательно, и в данном случае угол q_K может выразиться формулами (5.38) и (5.39), в которых Δ_q определяется выражением (5.98), а Δ_q^K — соотношением (5.99).

Как указывалось в § 4.2 и в § 5.3, п. 2, при приближенном определении поправки в ГН на качку корабля иногда пользуются понятием поправки на НОЦ. Эта поправка в согласии с (4.18) и (4.13) определяется формулой

$$\operatorname{tg} \Delta_{\text{НОЦ}} = -\operatorname{tg} (\varphi - e) \sin \rho_K. \quad (5.101)$$

Так как из сопоставления рис. 4.2 и 5.10 следует, что $\varphi = e_c$, $e = e_B^T$, $\rho_K = \rho_{K. B}^T$, то

$$\operatorname{tg} \Delta_{\text{НОЦ}} = -\operatorname{tg} (e_c - e_B^T) \sin \rho_{K. B}^T. \quad (5.102)$$

Точное значение поправки на наклон ПП Δ_q^K определяется формулой (5.99), в которой (5.102) является первым слагаемым,

следовательно, $\Delta_q^K \neq \Delta_{\text{ноц}}$. Поэтому решение задачи преобразования углов q_c , ε_c в q_K , ε_K или обратное осуществляется в ПК с использованием теоретически точных зависимостей (5.66) и (5.67).

Для нахождения соотношения для угла κ как функции углов наклона ПП e_B^T и $\rho_{K.B}^T$ рассмотрим прямоугольный сферический треугольник LCF'_1 (рис. 5.10), в котором: $\sphericalangle L = \kappa$, $LF'_1 = \varepsilon_c - e_B^T$, $\sphericalangle F'_1 = 90^\circ - \rho_{K.B}^T$; имеем

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{\operatorname{tg} \rho_{K.B}^T}{\cos(\varepsilon_c - e_B^T)}. \quad (5.103)$$

Из формулы следует, что угол κ поперечного наклона перекрестия визира (плоскости симметрии диаграммы направленности антенны) растет с увеличением угла места ε_c .

Пример 5.1. Вычислить угол κ для следующих исходных данных: $\psi = 5^\circ$, $\theta_K = 15^\circ$, $q_c = 45^\circ$, $\varepsilon_c = 0,15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$.

Решение.

1) По формуле (5.82) находим угол e_B^T

$$e_B^T = -7^\circ 19'.$$

2) В согласии с выражением (5.83) вычисляем угол $\rho_{K.B}^T$

$$\rho_{K.B}^T = 14^\circ 02'.$$

3) Используя зависимость (5.103), для различных значений угла места ε_c вычисляем угол κ ; результаты расчета сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

ε_c	0°	15°	30°	45°	60°	75°
κ	$14^\circ 09'$	$15^\circ 09'$	$17^\circ 26'$	$22^\circ 14'$	$32^\circ 57'$	$61^\circ 51'$

Из таблицы следует, что при больших углах ε_c поперечный наклон κ достигает весьма существенных значений. При этом, как будет показано далее, угловая скорость и угловое ускорение изменения этого угла также становятся недопустимо большими, что затрудняет стабилизацию перекрестия нитей визира (плоскости симметрии диаграммы направленности антенны) по углу $\beta = -\kappa$ (см. (5.81)) при больших значениях ε_c .

Кинематика двухосного ИУ. Определим угловые скорости \dot{q}_K , $\dot{\varepsilon}_K$, $\dot{\beta}$ и угловые ускорения \ddot{q}_K , $\ddot{\varepsilon}_K$, $\ddot{\beta}$. Для угловых скоростей ВН и ГН, заменяя в формулах (2.48) Φ на ε_K ,

\dot{Q} на \dot{q}_K и q_0 на q_{c0} , получим

$$\dot{\epsilon}_K = \dot{\theta}_K \sin q_{c0} - \dot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (5.104)$$

$$\dot{q}_K = -\dot{\varphi}_p - (\dot{\psi} \sin q_{c0} + \dot{\theta}_K \cos q_{c0}) \operatorname{tg} \epsilon_c. \quad (5.105)$$

Производя аналогичные замены в формулах (2.52), находим следующие зависимости для угловых ускорений ВН и ГН на качке:

$$\ddot{\epsilon}_K = \ddot{\theta}_K \sin q_{c0} - \ddot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (5.106)$$

$$\ddot{q}_K = -\ddot{\varphi}_p - (\ddot{\psi} \sin q_{c0} + \ddot{\theta}_K \cos q_{c0}) \operatorname{tg} \epsilon_c. \quad (5.107)$$

Из формул (5.104) — (5.107) следуют те же выводы, какие были сделаны в § 2.2, п. 2 из аналогичных формул (2.48) и (2.52). При $\epsilon_c > 45^\circ$ \dot{q}_K и \ddot{q}_K достигают весьма больших величин, что ограничивает возможность осуществления косвенного метода стабилизации двухосного ИУ при значительных углах ϵ_c .

Для вывода соотношений угловой скорости $\dot{\beta} = -\dot{\chi}$ и углового ускорения $\ddot{\beta} = -\ddot{\chi}$ воспользуемся методом, который был применен в § 2.2, п. 2. Через Ω обозначим мгновенную угловую скорость осей $Ox_B y_B z_B$ на качке (рис. 5.10), для которой справедливо выражение (2.26); имеем

$$\dot{\beta} = -\Omega_{x_B}, \quad (5.108)$$

где Ω_{x_B} — проекция вектора Ω на ось Ox_B .

Для Ω_{x_B} , принимая во внимание формулы (2.40) и (2.41), при $\Phi = \dot{\epsilon}_K$ и $\dot{Q} = \dot{q}_K$ получим

$$\Omega_{x_B} = (\omega + \omega_N) \cdot x_B^0 = (\omega + \dot{\epsilon}_K y_B^0 + \dot{q}_K z_B^0) \cdot x_B^0.$$

Согласно (2.43) и (5.108) находим

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{\cos \epsilon_K} (\omega_x \cos q_K + \omega_y \sin q_K) \quad (5.109)$$

или, подставляя (1.48),

$$\begin{aligned} \dot{\beta} = & -\frac{1}{\cos \epsilon_K} [\dot{\varphi}_p (\cos \psi \sin \theta_K \sin q_K - \sin \psi \cos q_K) + \\ & + \dot{\psi} \cos \theta_K \sin q_K + \dot{\theta}_K \cos q_K]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Для практических расчетов, учитывая слагаемые первого порядка и заменяя ϵ_K на ϵ_c и q_K на q_{c0} , вместо (5.110) будем иметь

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{\cos \epsilon_c} (\dot{\theta}_K \cos q_{c0} + \dot{\psi} \sin q_{c0}). \quad (5.111)$$

Для углового ускорения $\ddot{\beta}$, дифференцируя (5.111) по времени и полагая $\varepsilon_c = \text{const}$ и $q_{c0} = \text{const}$, получим

$$\ddot{\beta} = - \frac{1}{\cos \varepsilon_c} (\ddot{\theta}_k \cos q_{c0} + \dot{\psi} \sin q_{c0}). \quad (5.112)$$

Из формул (5.111) и (5.112) следует, что угловая скорость $\dot{\beta}$ и угловое ускорение $\ddot{\beta}$ на качке будут расти с увеличением угла места ε_c .

4. Геометрия и кинематика трехосного ИУ.

П а р а м е т р ы с т а б и л и з а ц и и. При рассмотрении вопросов геометрии и кинематики трехосного ИУ будем иметь в виду наиболее распространенную схему, приведенную на рис. 5.7, а. В данной схеме параметрами косвенной стабилизации являются: курсовой угол в ПП, угол места в ПВ и угол стабилизации оси цапф. Выявим геометрию трехосного ИУ, пользуясь рис. 5.11.

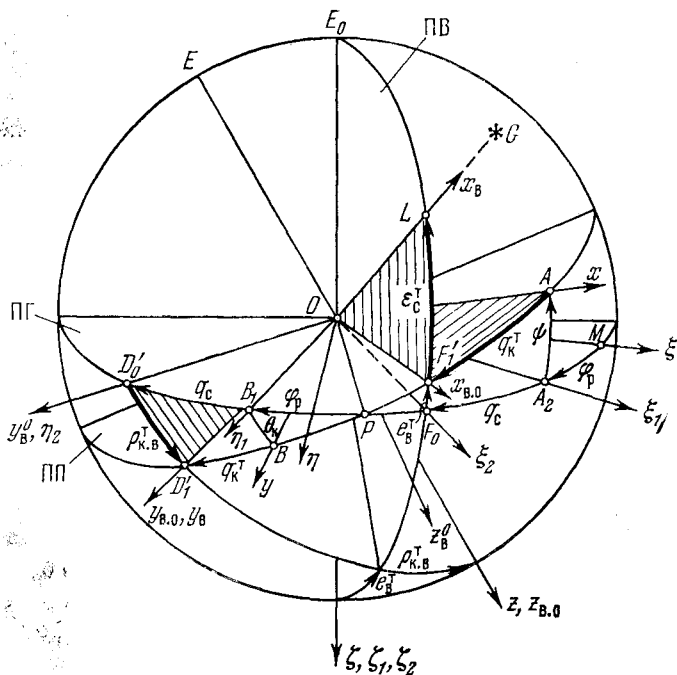


Рис. 5.11. К геометрии трехосного ИУ.

Здесь показаны оси $O\xi\eta\zeta$, $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $Oxyz$. Параметры косвенной стабилизации трехосной установки — углы q_k^T , ε_c^T и τ — получаются: 1) поворотом визира в ПП вокруг оси $Oz_{в.о}$ на курсовой угол

$q_K^T = AF_1'$; при этом нулевая ось займет положение $Ox_{в.0}$, а ось цапф визира — положение Oy_B ; 2) поворотом качающейся части визира вокруг нулевой оси $Ox_{в.0}$ (оси стабилизации) на угол поперечной стабилизации (угол НОЦ) $\tau = D_1'D_0' = -\rho_{К.В}^T$; при этом ось цапф займет положение Oy_B^0 , совпадающее с линией OD_0' , перпендикулярной к ПВ OE_0LF_0 ; 3) поворотом визира вокруг оси цапф Oy_B^0 в ПВ на угол места $\varepsilon_C^T = F_1'L$; при этом оси визира займут положение $Ox_2y_2^0z_2^0$.

Выведем формулы для параметров стабилизации q_K^T , ε_C^T , τ . Введем на рис. 5.11 вспомогательные оси $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, повернутые вокруг оси $O\xi$ на угол q_c относительно системы $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. Воспользуемся преобразованием осей $Oxyz$ к $O\xi_2\eta_2\zeta_2$, которое запишем в матричном виде

$$[\xi_2, \eta_2, \zeta_2] = L [x, y, z], \quad (5.113)$$

где элементы матрицы L можно выразить через курсовой угол q_c и углы качки ψ , θ_K . Матрицу L представим так:

$$L = MA_1^{-1}, \quad (5.114)$$

где матрицы A_1^{-1} и M характеризуют следующие преобразования координат:

$$[\xi_1, \eta_1, \zeta_1] = A_1^{-1} [x, y, z], \quad (5.115)$$

$$[\xi_2, \eta_2, \zeta_2] = M [\xi_1, \eta_1, \zeta_1]. \quad (5.116)$$

Матрица A_1^{-1} определяется табл. (5.74). Для матрицы M имеем

$$M = \begin{vmatrix} \cos q_c & \sin q_c & 0 \\ -\sin q_c & \cos q_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.117)$$

Вводя (5.74) и (5.117) в (5.114), после перемножения матриц получим

$$L = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos q_c & \cos \theta_K \sin q_c + \sin \theta_K \sin \psi \cos q_c & -\sin \theta_K \sin q_c + \\ & & + \sin \psi \cos \theta_K \cos q_c \\ -\cos \psi \sin q_c & \cos \theta_K \cos q_c - \sin q_c \sin \psi \sin \theta_K & -\cos q_c \sin \theta_K - \\ & & -\sin q_c \sin \psi \cos \theta_K \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (5.118)$$

Рассматриваемое преобразование осей представим также в виде

$$[\xi_2, \eta_2, \zeta_2] = N [x, y, z], \quad (5.119)$$

где элементы матрицы N можно выразить через искомые параметры q_K^T , ε_B^T , $\rho_{К.В}^T$. Матрицу N представим в виде произведения

матриц T и S^{-1} , т. е.

$$N = S^{-1}T, \quad (5.120)$$

характеризующих следующие преобразования координат:

$$[x_{B.0}, y_{B.0}, z_{B.0}] = T[x, y, z], \quad (5.121)$$

$$[\xi_2, \eta_2, \zeta_2] = S^{-1}[x_{B.0}, y_{B.0}, z_{B.0}]. \quad (5.122)$$

Матрицу T получим, заменив в (5.117) q_c на q_R^T :

$$T = \begin{vmatrix} \cos q_R^T & \sin q_R^T & 0 \\ -\sin q_R^T & \cos q_R^T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.123)$$

Матрицу S^{-1} можно найти, заменив в (5.74) ψ на e_B^T и θ_K на $\rho_{K.B}^T$; тогда получим

$$S^{-1} = \begin{vmatrix} \cos e_B^T & \sin e_B^T \sin \rho_{K.B}^T & \sin e_B^T \cos \rho_{K.B}^T \\ 0 & \cos \rho_{K.B}^T & -\sin \rho_{K.B}^T \\ -\sin e_B^T & \cos e_B^T \sin \rho_{K.B}^T & \cos e_B^T \cos \rho_{K.B}^T \end{vmatrix}. \quad (5.124)$$

Вводя (5.123) и (5.124) в (5.120), находим

$$N = \begin{vmatrix} \cos q_R^T \cos e_B^T - & \sin q_R^T \cos e_B^T + & \sin e_B^T \cos \rho_{K.B}^T \\ -\sin q_R^T \sin e_B^T \sin \rho_{K.B}^T & + \sin e_B^T \sin \rho_{K.B}^T \cos q_R^T & \\ -\sin q_R^T \cos \rho_{K.B}^T & \cos q_R^T \cos \rho_{K.B}^T & -\sin \rho_{K.B}^T \\ -\sin e_B^T \cos q_R^T - & \sin \rho_{K.B}^T \cos e_B^T \cos q_R^T - & \cos e_B^T \cos \rho_{K.B}^T \\ -\cos e_B^T \sin \rho_{K.B}^T \sin q_R^T & -\sin e_B^T \sin q_R^T & \end{vmatrix}. \quad (5.125)$$

Сопоставляя (5.113) и (5.119), имеем

$$L = N, \quad (5.126)$$

следовательно,

$$l_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (5.127)$$

Согласно (5.127) и (5.118), (5.125), имеем

$$l_{23} = n_{23},$$

откуда получаем формулу (5.83) для $\rho_{K.B}^T$. Следовательно, для угла τ стабилизации оси цапф ИУ получим

$$\sin \tau = -(\sin \theta_K \cos q_c + \sin \psi \cos \theta_K \sin q_c). \quad (5.128)$$

Далее,

$$\operatorname{tg} e_B^T = \frac{l_{13}}{l_{33}} = \frac{n_{13}}{n_{33}},$$

откуда находим формулу (5.82) для угла e_B^T .

Затем имеем

$$- \operatorname{tg} q_{\text{K}}^{\text{T}} = \frac{l_{21}}{l_{22}} = \frac{n_{21}}{n_{22}}, \quad \operatorname{tg} q_{\text{K}}^{\text{T}} = \frac{\cos \psi}{\cos \theta_{\text{K}} \operatorname{ctg} q_{\text{C}} - \sin \psi \sin \theta_{\text{K}}}. \quad (5.129)$$

Из рис. 5.11 непосредственно имеем

$$\varepsilon_{\text{C}}^{\text{T}} = \varepsilon_{\text{C}} - \varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}} \quad (5.130)$$

или, принимая во внимание формулу (5.82), получим

$$\varepsilon_{\text{C}}^{\text{T}} = \varepsilon_{\text{C}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\operatorname{tg} \psi \cos q_{\text{C}} - \frac{\operatorname{tg} \theta_{\text{K}}}{\cos \psi} \sin q_{\text{C}} \right). \quad (5.131)$$

Для угла q_{K}^{T} можно вывести и другие соотношения; так как

$$l_{21} = n_{21}, \quad l_{33} = n_{33},$$

то

$$\sin q_{\text{K}}^{\text{T}} = \sin q_{\text{C}} \frac{\cos \psi}{\cos \rho_{\text{K. B}}^{\text{T}}} = \sin q_{\text{C}} \frac{\cos \varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}}}{\cos \theta_{\text{K}}}. \quad (5.132)$$

Наконец, для $q_{\text{K}}^{\text{T}} = AF_1'$ мы имели формулу (5.86), т. е.

$$\operatorname{tg} q_{\text{K}}^{\text{T}} = \frac{\cos \varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}}}{\operatorname{ctg} q_{\text{C}} \cos \rho_{\text{K. B}}^{\text{T}} + \sin \rho_{\text{K. B}}^{\text{T}} \sin \varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}}}. \quad (5.133)$$

Из формул (5.132) следует, что угол q_{K}^{T} мало отличается от угла q_{C} , так как при малом наклоне палубы $\frac{\cos \psi}{\cos \rho_{\text{K. B}}^{\text{T}}} \cong 1$, $\frac{\cos \varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}}}{\cos \theta_{\text{K}}} \cong 1$.

Введение индекса «т» у параметров q_{K}^{T} , $\varepsilon_{\text{C}}^{\text{T}}$, $\varepsilon_{\text{B}}^{\text{T}}$, $\rho_{\text{K. B}}^{\text{T}}$ обусловлено тем, что они соответствуют углам наведения трехосной установки.

По аналогии с ранее рассмотренными типами ИУ курсовой угол q_{K}^{T} можно записать в виде

$$q_{\text{K}}^{\text{T}} = q_{\text{C}} + \Delta_q^{\text{K. T}}, \quad (5.134)$$

где $\Delta_q^{\text{K. T}}$ — поправка на наклон палубы.

Тем же способом, что и для одноосного и двухосного ИУ, для $\Delta_q^{\text{K. T}}$ можно получить формулу, которую приводим без вывода:

$$\operatorname{tg} \Delta_q^{\text{K. T}} = \frac{\frac{1}{2} (\cos \psi - \cos \theta_{\text{K}}) \sin 2q_{\text{C}} + \sin \psi \sin \theta_{\text{K}} \sin^2 q_{\text{C}}}{\cos \theta_{\text{K}} \cos^2 q_{\text{C}} + \cos \psi \sin^2 q_{\text{C}} - \frac{1}{2} \sin \psi \sin \theta_{\text{K}} \sin 2q_{\text{C}}}. \quad (5.135)$$

При малых углах качки эту формулу можно существенно упростить (см. § 5.4).

Кинематика трехосного ИУ. Определим угловые скорости и угловые ускорения наведения трехосного ИУ

на качке, ограничиваясь выводом приближенных расчетных формул. Воспользуемся выражением (5.131), которое при малых углах качки и замене угла q_c на q_{c0} запишем в виде

$$\varepsilon_c^T = \varepsilon_c - (\psi \cos q_{c0} - \theta_K \sin q_{c0}). \quad (5.136)$$

Дифференцируя это выражение по времени и полагая $\varepsilon_c = \text{const}$, $q_{c0} = \text{const}$, получим

$$\dot{\varepsilon}_c^T = \dot{\theta}_K \sin q_{c0} - \dot{\psi} \cos q_{c0}. \quad (5.137)$$

Формула (5.128) при малых углах качки и замене q_c на q_{c0} имеет вид

$$\tau = -(\theta_K \cos q_{c0} + \psi \sin q_{c0}), \quad (5.138)$$

откуда по аналогии с (5.137) имеем

$$\dot{\tau} = -(\dot{\theta}_K \cos q_{c0} + \dot{\psi} \sin q_{c0}). \quad (5.139)$$

Из формул (5.137) и (5.139) следует, что угловые скорости $\dot{\varepsilon}_c^T$ и $\dot{\tau}$ имеют порядок угловых скоростей качки.

Найдем угловую скорость ГН \dot{q}_K^T . Для этого воспользуемся формулой (5.134), которую с учетом (5.4) и (5.135) при малых углах качки приближенно запишем следующим образом:

$$q_K^T = q_{c0} - \Phi_p + \psi \theta_K \sin^2 q_{c0} + \frac{1}{4} (\theta_K^2 - \psi^2) \sin 2q_{c0}, \quad (5.140)$$

откуда при $q_{c0} = \text{const}$ получим

$$\dot{q}_K^T = -\dot{\Phi}_p + (\dot{\psi} \theta_K + \dot{\theta}_K \psi) \sin^2 q_{c0} + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_K \theta_K - \dot{\psi} \psi) \sin 2q_{c0}, \quad (5.141)$$

т. е. угловая скорость ГН \dot{q}_K^T трехосного ИУ, в отличие от угловой скорости ГН \dot{q}_K двухосного ИУ (см. (5.105)), не зависит от угла места. При этом она может оказаться даже меньшей, чем угловые скорости $\dot{\varepsilon}_c^T$ и $\dot{\tau}$. Это указывает на целесообразность применения на качающемся основании трехосных ИУ, особенно при необходимости пеленгования ориентиров, расположенных в околорезной области.

Для угловых ускорений $\ddot{\varepsilon}_c^T$, $\ddot{\tau}$ и \ddot{q}_K^T на основании (5.137), (5.139) и (5.141) имеем следующие выражения (при $q_{c0} = \text{const}$):

$$\ddot{\varepsilon}_c^T = \ddot{\theta}_K \sin q_{c0} - \ddot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (5.142)$$

$$\ddot{\tau} = -(\ddot{\theta}_K \cos q_{c0} + \ddot{\psi} \sin q_{c0}), \quad (5.143)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_K^T = & -\ddot{\Phi}_p - (\ddot{\psi} \theta_K + 2\dot{\psi} \dot{\theta}_K + \ddot{\theta}_K \psi) \sin^2 q_{c0} + \\ & + \frac{1}{2} (\ddot{\theta}_K \theta_K + \dot{\theta}_K^2 - \ddot{\psi} \psi - \dot{\psi}^2) \sin 2q_{c0}, \end{aligned} \quad (5.144)$$

обладающие теми же свойствами, что и соотношения для $\dot{\varepsilon}_c^T$, $\dot{\tau}$, \dot{q}_K^T .

X_{Γ} , Y_{Γ} , Z_{Γ} составляющие вектора T в географической системе координат $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ (северная, восточная и вертикальная составляющие). В этой системе положение вектора T определяется углом магнитного склонения $D = NF_0$ и углом магнитного наклонения $J = F_0L$. Обозначим составляющие вектора T в корабельных осях $Ox_Ky_Kz_K$ через X_K , Y_K , Z_K . Положение вектора T относительно корабельных осей определяется углом $q_K = AF_1$ в ПП и углом $J_K = F_1L$ в плоскости, перпендикулярной к ПП. Углы q_K

Трехосный феррозондовый магнитометр

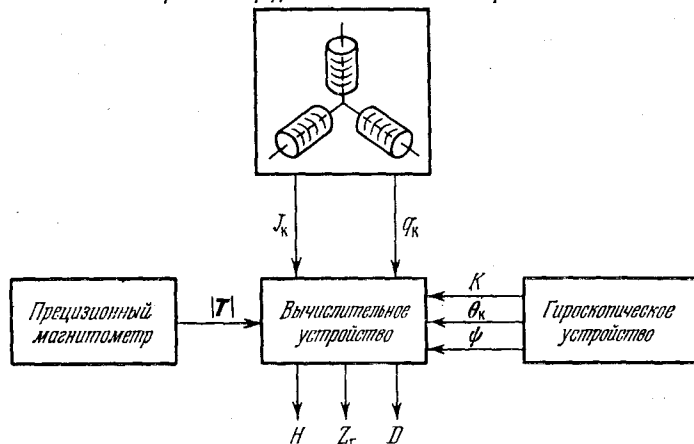


Рис. 5.13. Принципиальная схема измерения и выработки величин H , Z_{Γ} и D .

и J_K измеряются с помощью трехосного феррозондового магнитометра и поступают в вычислительное устройство (рис. 5.13).

Преобразование осей $Ox_Ky_Kz_K$ к осям $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$, согласно (1.23), запишем в виде

$$[\xi_{\Gamma}, \eta_{\Gamma}, \zeta_{\Gamma}] = A_{\Gamma}^{-1} [x, y, z], \quad (5.145)$$

где матрица A_{Γ}^{-1} с учетом (1.24) характеризуется следующей таблицей:

$$A_{\Gamma}^{-1} = \begin{vmatrix} \cos K \cos \psi & \cos K \sin \psi \sin \theta_K - \sin K \cos \theta_K & \sin K \sin \theta_K + \\ & & + \cos K \sin \psi \cos \theta_K \\ \sin K \cos \psi & \sin K \sin \psi \sin \theta_K + \cos K \cos \theta_K & \sin K \sin \psi \cos \theta_K - \\ & & - \cos K \sin \theta_K \\ - \sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (5.146)$$

Для определения интересующих нас параметров воспользуемся методом, который был применен в § 2.2, п.2. Проекция вектора

T на оси $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$ выражаются формулами

$$X_{\Gamma} = T \cos J \cos D, \quad Y_{\Gamma} = T \cos J \sin D, \quad Z_{\Gamma} = T \sin J. \quad (5.147)$$

Аналогичным образом проекции T на оси $Oxyz$ будут

$$X_K = T \cos J_K \cos q_K, \quad Y_K = T \cos J_K \sin q_K, \quad Z_K = T \sin J_K. \quad (5.148)$$

Принимая во внимание (5.146) — (5.148), перепишем преобразование (5.145) в виде

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} T \cos J \cos D \\ T \cos J \sin D \\ T \sin J \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \cos K \cos \psi & \cos K \sin \psi \sin \theta_K - \sin K \cos \theta_K & \sin K \sin \theta_K + \cos K \sin \psi \cos \theta_K \\ \sin K \cos \psi & \sin K \sin \psi \sin \theta_K + \cos K \cos \theta_K & \sin K \sin \psi \cos \theta_K - \cos K \sin \theta_K \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix} \times \\ & \quad \times \begin{vmatrix} T \cos J_K \cos q_K \\ T \cos J_K \sin q_K \\ T \sin J_K \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Из (5.149) находим

$$\sin J = -\cos J_K \cos q_K \sin \psi + \cos J_K \sin q_K \cos \psi \sin \theta_K + \sin J_K \cos \psi \cos \theta_K$$

или

$$\sin J = \sin J_K \cos \psi \cos \theta_K + \cos J_K (\sin q_K \cos \psi \sin \theta_K - \cos q_K \sin \psi). \quad (5.150)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \cos J \cos D &= \cos J_K \cos q_K \cos K \cos \psi + \cos J_K \sin q_K (\cos K \sin \psi \sin \theta_K - \\ &\quad - \sin K \cos \theta_K) + \sin J_K (\sin K \sin \theta_K + \cos K \sin \psi \cos \theta_K), \\ \cos J \sin D &= \cos J_K \cos q_K \sin K \cos \psi + \cos J_K \sin q_K (\sin K \sin \psi \sin \theta_K + \\ &\quad + \cos K \cos \theta_K) + \sin J_K (\sin K \sin \psi \cos \theta_K - \cos K \sin \theta_K), \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg} D = \frac{\operatorname{tg} K \cos q_K \cos \psi + \sin q_K (\operatorname{tg} K \sin \psi \sin \theta_K - \cos \theta_K) + \operatorname{tg} J_K (\operatorname{tg} K \sin \psi \cos \theta_K - \sin \theta_K)}{\cos q_K \cos \psi + \sin q_K (\sin \psi \sin \theta_K - \operatorname{tg} K \cos \theta_K) + \operatorname{tg} J_K (\operatorname{tg} K \sin \theta_K + \sin \psi \cos \theta_K)}. \quad (5.151)$$

С помощью формул (5.150) и (5.151) по данным J_K , q_K от трехосного феррозондового магнитометра (рис. 5.13) и углам K , ψ , θ_K от ГУ вычисляются углы J и D наклоения и склонения МПЗ. Затем, получая от прецизионного магнитометра величину T (модуль вектора T), по формулам (5.147) определяются проекции X_{Γ} , Y_{Γ} , Z_{Γ} вектора T на географические оси $O\xi_{\Gamma}\eta_{\Gamma}\zeta_{\Gamma}$. Горизонтальная составляющая H вектора T выражается соотношением

$$H = \sqrt{X_{\Gamma}^2 + Y_{\Gamma}^2}. \quad (5.152)$$

Таким образом решается задача преобразования данных геомагнитных измерений из корабельной системы координат в географическую. В статье [14] определяются среднеквадратичные ошибки параметров J и D , обусловленные погрешностями геомагнитных измерений (из-за ошибок измерительной аппаратуры, влияния внешних факторов и др.) и погрешностями ГУ. На основании соответствующих расчетов обосновываются требования к точности ГУ.

Рассмотренный выше метод преобразования данных от чувствительного элемента (ЧЭ) магнитометра обладает рядом преимуществ: не требуется создания гиросtabilизированной платформы (ГСП) для установки на ней ЧЭ; отсутствуют помехи от магнитных масс ГСП; упрощается учет девиаций от магнитных полей корабля, так как ЧЭ сохраняет неизменную ориентацию относительно корабельных осей. Некоторые вопросы косвенной стабилизации магнитометров рассматриваются в работе [61].

§ 5.4. Схемы стабилизации ИУ при косвенном методе *)

1. Схемы стабилизации одноосного ИУ.

Упрощенное решение. Под «схемой стабилизации ИУ» будем иметь в виду схему определения параметров стабилизации с помощью приборов. В одноосном ИУ параметром косвенной стабилизации является курсовой угол в ПП $q_k = AF_1$ (рис. 5.3). На практике применяются упрощенное и точное определение параметра q_k . Вначале рассмотрим упрощенную схему стабилизации одноосного ИУ (рис. 5.14) [89]. Оператор с помощью маховика ГН I вводит на суммирующее устройство (СУ) 2 пеленг $\Pi = NF_0$ (рис. 5.2) на ориентир. На то же СУ от гирокомпаса 3 поступает текущий курс корабля $K = NA_2$. Алгебраическое суммирование Π и K дает курсовой угол на ориентир, который поступает на привод ГН измерительного устройства 4. Выясним, какой курсовой угол вводится на ИУ. В согласии

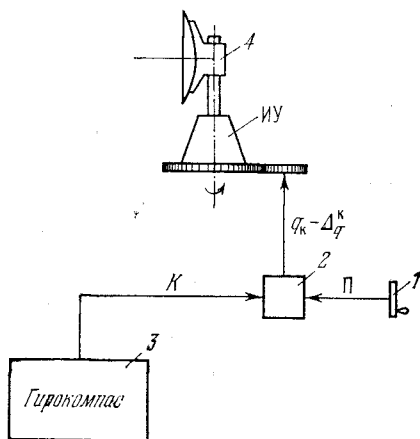


Рис. 5.14. Схема стабилизации одноосного ИУ (упрощенное решение).

*) Рассматриваемые ниже схемы стабилизации ИУ при косвенном методе составлены по работам [4, 23, 53, 56, 63, 87, 89].

с формулой (5.2)

$$\Pi - K = q_c. \quad (5.153)$$

Подставляя сюда выражение (5.39), имеем

$$\Pi - K = q_k - \Delta_q^k. \quad (5.154)$$

Следовательно, разность $(\Pi - K)$, образующаяся на СУ 2, отличается от параметра косвенной стабилизации q_k одноосного ИУ на величину Δ_q^k , обусловленную наклоном ПП. Из формулы (5.29) для полной поправки Δ_q на рыскание корабля и на наклон ПП следует, что в данной схеме стабилизации (рис. 5.14) угол рыскания φ_p корабля учитывается благодаря наличию в схеме гирокомпаса (см. (1.25)), а поправка Δ_q^k на наклон ПП не компенсируется и должна «выбираться» оператором в процессе слежения за ориентиром. В этом и состоит сущность приближенного решения задачи косвенной стабилизации одноосного ИУ.

В согласии с (5.154) в рассматриваемой схеме ошибка азимутальной стабилизации $\delta_{a.c}$ определяется зависимостью

$$\delta_{a.c} = -\Delta_q^k. \quad (5.155)$$

Вводимая в ГН измерительного устройства поправка Δ_q учитывает лишь рыскание корабля (см. (5.29)), т. е.

$$\Delta_q \cong -\varphi_p. \quad (5.156)$$

Так как угол рыскания $\varphi_p(t)$ корабля является случайной функцией времени, то и поправка $\Delta_q(t)$ также будет случайной функцией времени. Ее математическое ожидание с учетом (1.65) равно

$$M[\Delta_q] = 0, \quad (5.157)$$

а среднееквадратичное значение

$$\sigma_{\Delta_q} = \sigma_{\varphi_p}, \quad (5.158)$$

где σ_{φ_p} — среднееквадратичное значение угла рыскания корабля.

В силу (5.156)

$$\dot{\Delta}_q = -\dot{\varphi}_p, \quad \ddot{\Delta}_q = -\ddot{\varphi}_p. \quad (5.159)$$

Легко видеть, что

$$M[\dot{\Delta}_q] = M[\ddot{\Delta}_q] = 0. \quad (5.160)$$

По аналогии с (1.103) и (1.105) дисперсии $D[\dot{\Delta}_q]$ и $D[\ddot{\Delta}_q]$ определяются зависимостями

$$D[\dot{\Delta}_q] = b_3^2 D[\dot{\varphi}_p], \quad D[\ddot{\Delta}_q] = b_3^4 D[\ddot{\varphi}_p]. \quad (5.161)$$

Пример 5.2. Определить вероятностные характеристики поправки Δ_q для условий примера 2.2: $\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ$, $\lambda_3 = 0,2 \text{ сек}^{-1}$.

Решение.

1) По формуле (5.158) находим σ_{Δ_q} и Δ_{qm} ; имеем

$$\sigma_{\Delta_q} = 1^\circ, \quad \Delta_{qm} = 3\sigma_{\Delta_q} = 3^\circ.$$

2) В согласии с (5.161) вычисляем $\sigma_{\dot{\Delta}_q}$ и $\sigma_{\ddot{\Delta}_q}$, а также $\dot{\Delta}_{qm}$ и $\ddot{\Delta}_{qm}$; так как по условию примера 2.2 $\mu_3 < \lambda_3$, то

$$\sigma_{\dot{\Delta}_q} \cong \lambda_3 \sigma_{\varphi_p} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \quad \sigma_{\ddot{\Delta}_q} \cong \lambda_3^2 \sigma_{\varphi_p} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-2}.$$

3) Наибольшие значения $\dot{\Delta}_{qm}$ и $\ddot{\Delta}_{qm}$ будут

$$\dot{\Delta}_{qm} = 3\sigma_{\dot{\Delta}_q} = 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \quad \ddot{\Delta}_{qm} = 3\sigma_{\ddot{\Delta}_q} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-2}.$$

Перейдем к анализу методической ошибки азимутальной стабилизации $\delta_{a.c}$ (см. (5.155)). Учитывая выражение (5.32), имеем

$$\delta_{a.c} = -\arctg \left[\frac{\sin \psi \sin \theta_k + (\cos \theta_k - \cos \psi) \operatorname{tg} q_c}{\cos \psi + (\cos \theta_k \operatorname{tg} q_c + \sin \psi \sin \theta_k) \operatorname{tg} q_c} \right]. \quad (5.162)$$

Пример 5.3. Вычислить значения ошибки азимутальной стабилизации одноосного ИУ для следующих исходных данных: $\psi = 5^\circ$, $\theta_k = 15^\circ$, $q_c = 0 \div 180^\circ$.

Решение.

1) По формуле (5.162) определяем ошибку $\delta_{a.c}$ для различных значений курсового угла q_c ; результаты расчета сведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

q_c	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\delta_{a.c}$	$-1^\circ 18'$	$-0^\circ 47'$	$-0^\circ 13'$	$0^\circ 14'$	$0^\circ 26'$	$0^\circ 21'$	0°
q_c	105°	120°	135°	150°	165°	180°	
$\delta_{a.c}$	$-0^\circ 32'$	$-1^\circ 07'$	$-1^\circ 34'$	$-1^\circ 45'$	$-1^\circ 40'$	$-1^\circ 18'$	

2) По данным таблицы построен график ошибки $\delta_{a.c}$, приведенный на рис. 5.15.

Пример показывает, что ошибка азимутальной стабилизации $\delta_{a.c}$ из-за наклона ПП имеет тот же порядок, что и вводимая в схему стабилизации (рис. 5.14) поправка на рыскание корабля.

Ошибка $\delta_{a.c}$ является также случайной функцией времени. Из формулы (5.162) для нее можно получить следующее приближенное выражение:

$$\delta_{a.c} = -\Delta q = -\left[\psi\theta_R \cos^2 q_{c0} - \frac{1}{4}(\theta_R^2 - \psi^2) \sin 2q_{c0}\right]. \quad (5.163)$$

Другая методическая ошибка рассматриваемой схемы косвенной стабилизации состоит в смещении оси луча антенны на угол

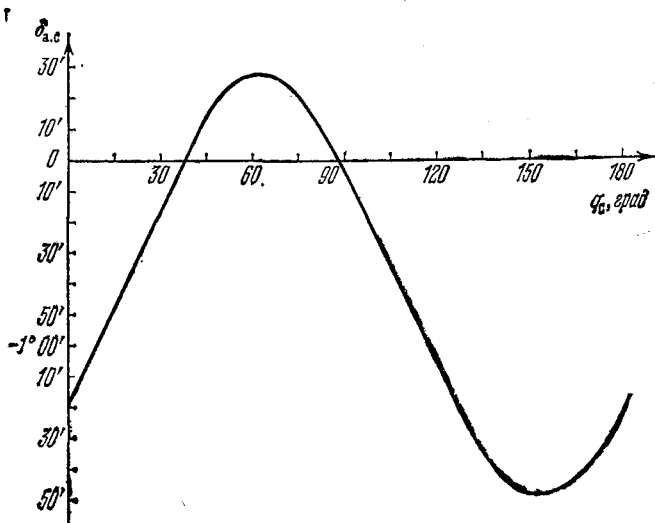


Рис. 5.15. График ошибки азимутальной стабилизации одноосного ИУ.

$e_{к.в}$ (рис. 5.3). Следовательно, ошибка горизонтальной стабилизации будет

$$\delta_{г.с} = e_{к.в} \quad (5.164)$$

или, принимая во внимание формулы (5.3) и (5.4), для случая малых углов качки имеем

$$\delta_{г.с} = \psi \cos q_{c0} - \theta_R \sin q_{c0}, \quad (5.165)$$

откуда

$$M[\delta_{г.с}] = 0 \quad (5.166)$$

и

$$D[\delta_{г.с}] = D[\psi] \cos^2 q_{c0} + D[\theta_R] \sin^2 q_{c0}. \quad (5.167)$$

Пример 5.4. Найти вероятностные характеристики ошибки горизонтальной стабилизации одноосного ИУ для исходных данных примера 2.1:

$$\sigma_\psi = 2^\circ, \quad \sigma_{\theta_R} = 5^\circ \quad \text{и} \quad q_{c0} = 45^\circ.$$

Р е ш е н и е.

1) По формуле (5.167) вычисляем дисперсию $D[\delta_{г.с}]$

$$D[\delta_{г.с}] = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад}^2.$$

2) Соответственно среднеквадратичное и наибольшее значения будут

$$\sigma_{\delta_{г.с}} = 3,8^\circ, \quad \delta_{г.с}^m = 3\sigma_{\delta_{г.с}} = 11,4^\circ.$$

В данной схеме стабилизации имеет место наклон плоскости симметрии диаграммы направленности антенны на угол κ , определяемый формулой (5.51). Следовательно, возникает ошибка поперечной стабилизации

$$\delta_{п.с} = \rho_{к.в}, \quad (5.168)$$

или, принимая во внимание формулы (5.5) и (5.4), для случая малых углов качки имеем

$$\delta_{п.с} = \theta_k \cos q_{с0} + \psi \sin q_{с0}, \quad (5.169)$$

откуда

$$M[\delta_{п.с}] = 0 \quad (5.170)$$

и

$$D[\delta_{п.с}] = D[\theta_k] \cos^2 q_{с0} + D[\psi] \sin^2 q_{с0}, \quad (5.174)$$

т. е. получили выражение, аналогичное (5.167).

Рассмотренная выше схема косвенной стабилизации одноосного ИУ путем введения курса (углов рыскания) корабля от ГК получила широкое применение в различных судовых РЛС. Так, например, в справочном руководстве [89] рассматриваются судовые РЛС типа «Донец-2», «Дон», «Океан», в которых применяется стабилизация радиолокационного изображения в азимуте с использованием курса корабля от ГК. Аналогичные схемы стабилизации приводятся в книгах [4, 87] и др. Как указано в [4], большинство навигационных РЛС имеют два режима ориентации радиолокационного изображения: «курс», — когда изображение ориентируется относительно диаметральной плоскости по курсу (изображение поворачивается на угол, равный изменению курса судна); «север» — изображение ориентируется относительно плоскости истинного меридиана, при этом оператор может непосредственно измерять пеленг на ориентир (рис. 5.14).

Т о ч н о е р е ш е н и е. Перейдем к рассмотрению схемы стабилизации одноосного ИУ, обеспечивающей теоретически точное решение задачи ГН измерительного устройства. Это решение основано на том, что преобразование курсовых углов из земной системы координат в корабельную или наоборот осуществляется не с помощью приближенных поправочных формул, а путем

использования точных аналитических зависимостей, реализуемых в ПК [63]. Такая схема стабилизации дана на рис. 5.16 [23, 89]. Она построена по образцу схем наведения и стабилизации двухосных и трехосных антенн, приведенных в [89, стр. 183]. Для пояснения схемы на рис. 5.16 воспользуемся одновременно рис. 5.3.

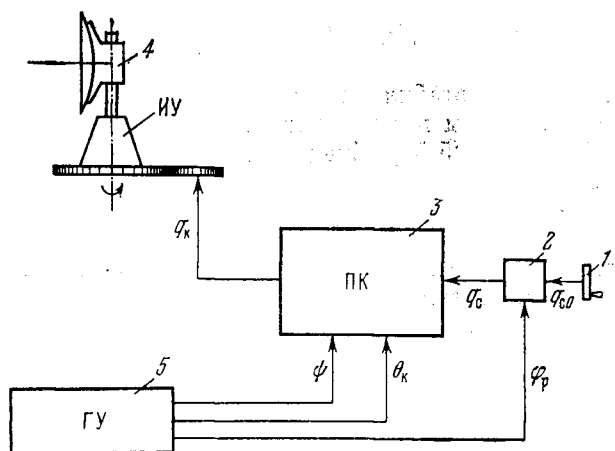


Рис. 5.16. Схема стабилизации одноосного ИУ (точное решение).

Предположим, что корабль движется заданным курсом вдоль направления $O\xi$, ориентир G расположен в ПГ, курсовой угол на него $q_{c0} = MF_0$ известен. Угол q_{c0} вводится оператором с помощью маховика 1 в суммирующее устройство 2, куда также поступает угол рыскания φ_p от ГУ 5. В СУ 2 по формуле (5.4) вырабатывается курсовой угол в ПГ $q_c = A_2 F_0$. Последний поступает в ПК 3, куда также вводятся от ГУ углы качки ψ и θ_k . В ПК с помощью точной формулы (5.9) осуществляется преобразование стабилизированного курсового угла $q_c = A_2 F_0$ в курсовой угол в ПП $q_k = AF_1$. Последний поступает на ГИ измерительного устройства 4. Если, например, ИУ представляет собой антенну РЛС, то в схеме на рис. 5.16 введение угла q_{c0} осуществляется путем подбора, пока на индикаторе не будет получено радиолокационное изображение ориентира G . При этом ИУ будет развернуто в ПП на требуемый курсовой угол q_k .

Обычно угол рыскания φ_p на корабле не определяется, а известен курс корабля K . Тогда в СУ 2 будет поступать курс K , а оператор маховиком 1 будет подбирать пеленг Π (см. рис. 5.14). В этом случае с СУ 2 будет по-прежнему сниматься курсовой угол q_c (см. рис. 5.2).

Выражение (5.52) для угла q_k , учитывая (5.163), приближенно можно записать в виде

$$q_k = q_{c0} - \varphi_p + \psi \theta_k \cos^2 q_{c0} - \frac{1}{4} (\theta_k^2 - \psi^2) \sin 2q_{c0}. \quad (5.172)$$

Так как угол q_{c0} является медленно изменяющейся функцией времени по сравнению с изменением углов качки и рыскания корабля, то вместо анализа курсового угла q_k в ПП можно исследовать характер поправки Δ_q , которая в согласии с (5.38) и (5.172) определяется следующей приближенной формулой:

$$\Delta_q = -\varphi_p + \psi \theta_k \cos^2 q_{c0} - \frac{1}{4} (\theta_k^2 - \psi^2) \sin 2q_{c0}. \quad (5.173)$$

Обозначим

$$k_1 = \cos^2 q_{c0}, \quad k_2 = \sin 2q_{c0}. \quad (5.174)$$

Тогда выражение (5.173) запишем в виде

$$\Delta_q = -\varphi_p + k_1 \psi \theta_k - \frac{k_2}{4} (\theta_k^2 - \psi^2). \quad (5.175)$$

Согласно (5.175) для математического ожидания поправки Δ_q имеем выражение

$$M[\Delta_q] = -\frac{k_2}{4} \{D[\theta_k] - D[\psi]\}. \quad (5.176)$$

Обычно $D[\theta_k] \gg D[\psi]$, поэтому приближенно

$$M[\Delta_q] = -\frac{k_2}{4} D[\theta_k]. \quad (5.177)$$

Дисперсия $D[\Delta_q]$ определяется формулой

$$D[\Delta_q] = D[\varphi_p] + k_1^2 D[\psi] D[\theta_k] + \frac{k_2^2}{8} \{(D[\theta_k])^2 + (D[\psi])^2\}. \quad (5.178)$$

По тем же соображениям, которые были указаны выше, вместо (5.178) можно принять

$$D[\Delta_q] = D[\varphi_p] + k_1^2 D[\psi] D[\theta_k] + \frac{k_2^2}{8} \{D[\theta_k]\}^2. \quad (5.179)$$

Пример 5.5. Определить вероятностные характеристики поправки Δ_q в ГН одноосного ИУ для исходных данных примера 2.1: $\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ$, $\sigma_\psi = 2^\circ$, $\sigma_{\theta_k} = 5^\circ$, $q_{c0} = 45^\circ$.

Решение.

1) По формулам (5.174) находим

$$k_1 = 0,5, \quad k_2 = 1.$$

2) В согласии с (5.177) вычисляем $M[\Delta_q]$

$$M[\Delta_q] = -6 \text{ угл. мин.}$$

3) Пользуясь выражением (5.179), определяем дисперсию $D[\Delta_q]$, а также среднеквадратичное значение σ_{Δ_q}

$$D[\Delta_q] = 4 \cdot 10^{-4} \text{ рад}^2, \quad \sigma_{\Delta_q} = 1^\circ 09'.$$

Из примера следует, что величина $M[\Delta_q]$ мала. Расчет σ_{Δ_q} показывает, что основное влияние на поправку Δ_q оказывает рыскание корабля ($\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ$). Однако при больших значениях углов качки ψ и θ_k наклон ПП будет существенно влиять на поправку Δ_q .

Угловые скорость $\dot{\Delta}_q$ и ускорение $\ddot{\Delta}_q$ в согласии с (5.38) будут $\dot{\Delta}_q = \dot{q}_k$ и $\ddot{\Delta}_q = \ddot{q}_k$. Для \dot{q}_k и \ddot{q}_k были получены формулы (5.55) и (5.56), которые можно использовать для определения вероятностных характеристик $\dot{\Delta}_q$ и $\ddot{\Delta}_q$.

Для схемы стабилизации одноосного ИУ, приведенной на рис. 5.16, ошибка азимутальной стабилизации будет

$$\delta_{a.c} = 0. \quad (5.180)$$

Что касается ошибок горизонтальной стабилизации $\delta_{г.с}$ и поперечной стабилизации $\delta_{п.с}$, то они и здесь определяются формулами (5.164) и (5.168), как и для схемы на рис. 5.14.

В некоторых пеленгационных устройствах (визирах, антеннах и др.) применяется одноосная схема горизонтальной стабилизации. В согласии с рис. 5.3 параметр горизонтальной стабилизации

$$e_k = -e_{к.в}, \quad (5.181)$$

где $e_{к.в} = F_0 F_1$ — угол крена в плоскости ВН $OEF_1 F_0$ визира.

Принимая во внимание формулу (5.3), вместо (5.181) имеем

$$e_k = -\arcsin(\sin \psi \cos \theta_k \cos q_c - \sin \theta_k \sin q_c). \quad (5.182)$$

Схема горизонтальной косвенной стабилизации антенны [53, 89] приведена на рис. 5.17. В ПК 3 поступает курсовой угол q_c от привода ГН антенны 4;

в ПК вводятся также углы качки ψ , θ_k от ГУ 5. Выработанный в ПК угол $e_k = -e_{к.в}$ поступает через СУ 2 в привод ВН антенны. На СУ 2 оператор с помощью маховика 1 может вводить необходимые корректуры.

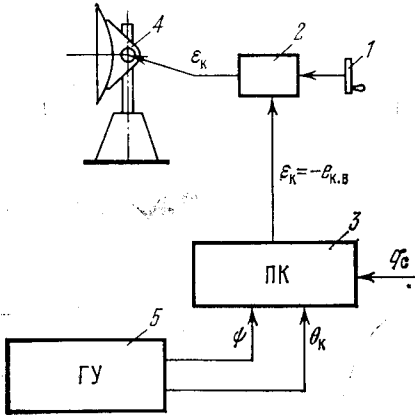


Рис. 5.17. Схема горизонтальной стабилизации ИУ.

Приближенное выражение для угла ε_K согласно (5.182) запишем в виде

$$\varepsilon_K = \theta_K \sin q_{c0} - \psi \cos q_{c0}, \quad (5.183)$$

откуда находим

$$M[\varepsilon_K] = 0 \quad (5.184)$$

и

$$D[\varepsilon_K] = D[\theta_K] \sin^2 q_{c0} + D[\psi] \cos^2 q_{c0}, \quad (5.185)$$

т. е. формулы, аналогичные (5.166) и (5.167).

Угловая скорость $\dot{\varepsilon}_K$ и угловое ускорение $\ddot{\varepsilon}_K$, учитывая (5.183), определяются формулами (при $q_{c0} = \text{const}$)

$$\dot{\varepsilon}_K = \dot{\theta}_K \sin q_{c0} - \dot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (5.186)$$

$$\ddot{\varepsilon}_K = \ddot{\theta}_K \sin q_{c0} - \ddot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (5.187)$$

которые могут быть использованы для нахождения вероятностных характеристик случайных функций $\dot{\varepsilon}_K(t)$ и $\ddot{\varepsilon}_K(t)$.

В рассматриваемой схеме (рис. 5.17) ошибка горизонтальной стабилизации

$$\delta_{г.с} = 0. \quad (5.188)$$

2. Схемы стабилизации двухосного ИУ.

Ориентир расположен в ПГ. Рассмотрим наиболее распространенную схему наведения двухосного ИУ, приведенную на рис. 5.6, а. Вначале разберем случай, когда пеленгуемый ориентир G расположен в ПГ (рис. 5.3), и параметрами косвенной стабилизации являются курсовой угол в ПП $q_K = AF_1$ и угол места $\varepsilon_K = -\varepsilon_{к.в} = F_1F_0$ в плоскости ВН визира или антенны OEF_1F_0 . Точные формулы для этих параметров даются соотношениями (5.9) и (5.62). Определение параметра q_K , как и в случае одноосного ИУ (п. 1), может быть осуществлено с помощью упрощенного (рис. 5.14) или точного (рис. 5.16) решений. Нахождение параметра ε_K обычно осуществляется в соответствии со схемой на рис. 5.17.

Рассмотрим схему [89] точного определения параметров косвенной стабилизации q_K и ε_K (рис. 5.18). Эта схема с учетом рис. 5.16, 5.17 (см. п. 1) не требует подробного пояснения. Заметим лишь, что оператор ГН вводит с помощью маховика 1 курсовой угол q_{c0} на СУ 2, куда также поступает угол рыскания φ_p от ГУ 5. С СУ 2 курсовой угол $q_c = q_{c0} - \varphi_p$ вводится в ПК 3, куда также поступают от ГУ углы качки ψ и θ_K . В ПК вырабатываются в согласии с формулами (5.9) и (5.62) курсовой угол q_K и угол места ε_K . Угол q_K поступает на ГН измерительного устройства 4. Угол $\varepsilon_K = -\varepsilon_{к.в}$ вводится через СУ 7 в привод ВН. На СУ 7 оператор

ВН с помощью маховика b может вводить необходимые корректуры.

Вероятностные характеристики параметров стабилизации q_k , ϵ_k , а также их угловых скоростей и ускорений были рассмотрены в п. 1.

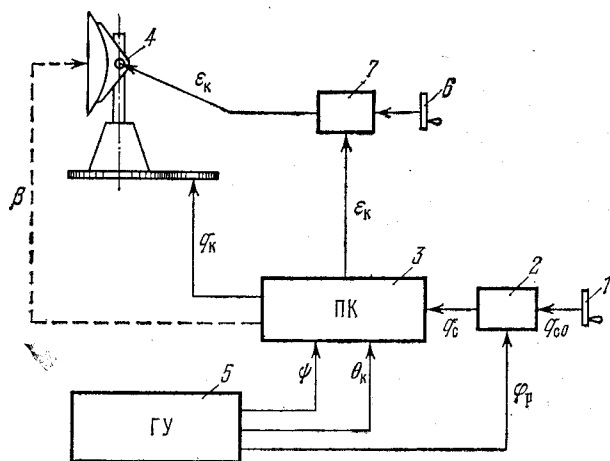


Рис. 5.18. Схема стабилизации двухосного ИУ ($\epsilon_c = 0$).

В схеме на рис. 5.18 азимутальная и горизонтальная стабилизация осуществляются теоретически точно, т. е.

$$\delta_{a.c} = 0, \quad \delta_{г.c} = 0. \quad (5.189)$$

Ошибка поперечной стабилизации $\delta_{п.c}$ и в данной схеме определяется формулой (5.168). В принципе, с помощью ПК можно вырабатывать по формулам (5.5) и (5.51) угол $\kappa = \rho_{к.в}$ поперечного наклона перекрестия визира (плоскости симметрии диаграммы направленности антенны) и вводить соответствующий параметр стабилизации $\beta = -\kappa$ (см. (5.81)) на ИУ. Эта линия показана на рис. 5.18 штрихами. В этом случае двухосное ИУ становится трехосным.

Ориентир находится в пространстве. Перейдем к рассмотрению случая, когда пеленгуемый ориентир G находится в пространстве (рис. 5.4). Здесь параметрами косвенной стабилизации являются углы $q_k = AC$ и $\epsilon_k = CL$. Курсовой угол q_k в ПП определяется формулой (5.67), угол места ϵ_k — соотношением (5.66). Схема выработки параметров стабилизации q_k и ϵ_k и в данном случае остается такой же, как и на рис. 5.18. При этом изменится лишь линия ВН. В результате получим схему стабилизации двухосного ИУ при $\epsilon_c \neq 0$, приведенную на

рис. 5.19 [89]. Она отличается от схемы на рис. 5.18 несколькими особенностями. Оператор ВН с помощью маховика b вводит в ПК стабилизированный угол места $\varepsilon_c = F_0 L$ (рис. 5.4). ПК преобразует стабилизированные углы q_c , ε_c в параметры косвенной стабилизации q_k и ε_k , используя формулы (5.67) и (5.66). Выработанные в ПК параметры q_k и ε_k поступают на следящие приводы

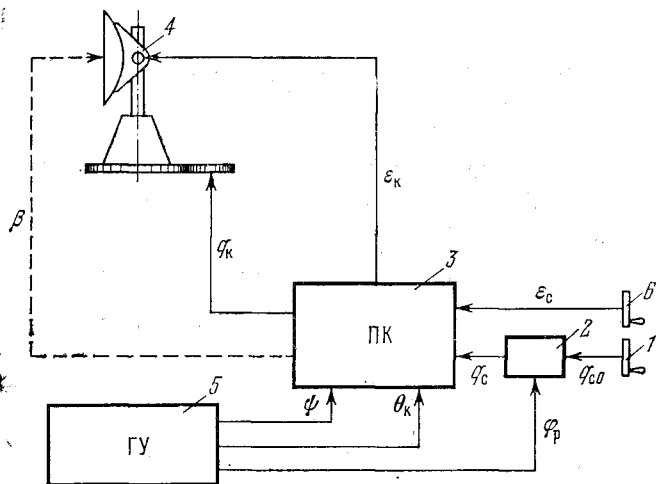


Рис. 5.19. Схема стабилизации двухосного ИУ ($\varepsilon_c \neq 0$).

ГН и ВН измерительного устройства. В данной схеме введение стабилизированных углов q_{c0} (с учетом угла рыскания φ_p) и ε_c осуществляется путем подбора, пока в перекрестии визира не окажется ориентир G или пока его радиолокационное изображение не будет получено на индикаторе РЛС. Подобная схема наведения и стабилизации двухосной системы рассмотрена в книге [89, стр. 183].

В схеме на рис. 5.19 азимутальная и горизонтальная стабилизация осуществляются без методических погрешностей, т. е.

$$\delta_{a.c} = 0, \quad \delta_{г.c} = 0. \quad (5.190)$$

Однако здесь, как и во всех двухосных ИУ, возникает ошибка поперечной стабилизации

$$\delta_{п.c} = \kappa, \quad (5.191)$$

где угол κ определяется формулами (5.79) или (5.80). При необходимости ПК может выработать угол κ и ввести параметр стабилизации $\beta = -\kappa$ (см. (5.81)) на ИУ. Эта линия показана на рис. 5.19 штрихами.

При нерегулярной качке корабля параметры косвенной стабилизации $q_K(t)$, $\varepsilon_K(t)$ и $\beta(t)$ являются случайными функциями времени. Рассмотрим вопрос об определении их вероятностных характеристик, а также характеристик угловых скоростей и ускорений изменения этих параметров. Найдем приближенную формулу для q_K , пользуясь рис. 5.10, из которого имеем

$$q_K = q_K^T - CF_1'. \quad (5.192)$$

Обозначая $\Delta = -CF_1'$, получим выражение

$$q_K = q_K^T + \Delta, \quad (5.193)$$

связывающее курсовые углы для двухосного и трехосного ИУ.

Из формул (5.132) следует, что приближенно можно принять $q_K^T \cong q_c = q_{c0} - \varphi_p$. Тогда (5.193) примет вид

$$q_K = q_{c0} - \varphi_p + \Delta. \quad (5.194)$$

Величина $\Delta = -CF_1'$ определяется выражением (5.87). С точностью до малых первого порядка

$$\text{tg } \Delta = -\rho_{K.B}^T \text{tg } \varepsilon_c.$$

Так как угол $\rho_{K.B}^T$ практически не превосходит углов качки корабля, то при не слишком больших значениях $\text{tg } \varepsilon_c$ можно записать

$$\Delta = -\rho_{K.B}^T \text{tg } \varepsilon_c. \quad (5.195)$$

Подставляя (5.195) в (5.194), получим

$$q_K = q_{c0} - \varphi_p - \rho_{K.B}^T \text{tg } \varepsilon_c \quad (5.196)$$

или, принимая во внимание (5.83) и (5.4), с точностью до малых первого порядка имеем

$$q_K = q_{c0} - \varphi_p - (\theta_K \cos q_{c0} + \psi \sin q_{c0}) \text{tg } \varepsilon_c. \quad (5.197)$$

Для математического ожидания $M[q_K]$ имеем

$$M[q_K] = q_{c0}, \quad (5.198)$$

т. е. среднее значение курсового угла q_K в ПП равно стабилизированному курсовому углу q_{c0} в ПГ.

Далее, по аналогии с (5.38), можно записать

$$q_K = q_{c0} + \Delta_q, \quad (5.199)$$

где Δ_q — поправка на рыскание и качку корабля, которая в согласии с (5.197) определяется приближенной зависимостью

$$\Delta_q = -\varphi_p - (\theta_K \cos q_{c0} + \psi \sin q_{c0}) \text{tg } \varepsilon_c. \quad (5.200)$$

Точная формула Δ_q для двухосного ИУ характеризуется соотношением (5.98).

Пользуясь формулой (5.200), имеем

$$M[\Delta_q] = 0, \quad (5.201)$$

$$D[\Delta_q] = D[\varphi_p] + \{D[\theta_k] \cos^2 q_{c0} + D[\psi] \sin^2 q_{c0}\} \operatorname{tg}^2 \varepsilon_c, \quad (5.202)$$

следовательно, дисперсия поправки Δ_q существенно зависит от угла места ε_c .

Пример 5.6. Определить вероятностные характеристики поправки в ГН измерительного устройства на рыскание и качку корабля для следующих исходных данных: $\sigma_{\varphi_p} = 1^\circ$, $\sigma_\psi = 2^\circ$, $\sigma_{\theta_k} = 5^\circ$, $q_{c0} = 45^\circ$, $\varepsilon_c = 0 \div 75^\circ$.

Решение.

1) По формуле (5.202) вычисляем дисперсию $D[\Delta_q]$ для разных значений угла места ε_c ; результаты расчета сведены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

ε_c	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$D[\Delta_q], \text{рад}^2$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$17,5 \cdot 10^{-4}$	$46,5 \cdot 10^{-4}$	$133 \cdot 10^{-4}$	$609 \cdot 10^{-4}$

2) Находим среднеквадратичные значения $\sigma_{\Delta_q} = \sqrt{D[\Delta_q]}$ и наибольшие значения поправки $\Delta_{qm} = 3\sigma_{\Delta_q}$ (табл. 5.4).

3) По данным расчета на рис. 5.20 построен график $\sigma_{\Delta_q} = f(\varepsilon_c)$.

Из примера и графика на рис. 5.20 следует, что с ростом угла места ε_c существенно увеличивается значение поправки Δ_q в ГН двухосного ИУ на качке, что ограничивает практическое осуществление косвенной стабилизации при значительных ε_c .

Для угловых скоростей \dot{q}_k и угловых ускорений \ddot{q}_k ГН были получены формулы (5.105) и (5.107), из которых следует, что они увеличиваются с ростом ε_c (см. § 2.2, п. 2 и пример 2.3).

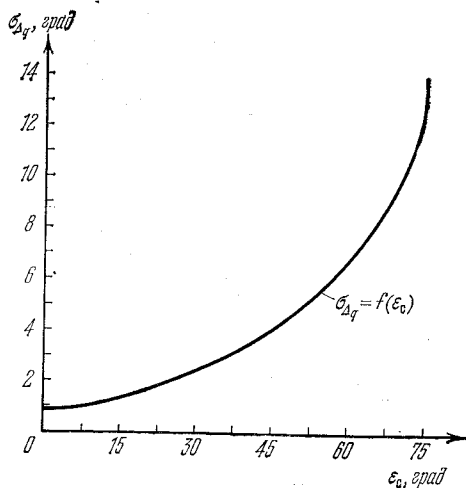


Рис. 5.20. График зависимости $\sigma_{\Delta_q} = f(\varepsilon_c)$.

Таблица 5.4

ε_c	0°	15°	30°	45°	60°	75°
σ_{Δ_q}	59'	1°24'	2°24'	3°30'	6°37'	13°54'
Δq_m	2°57'	4°12'	7°12'	10°30'	19°51'	41°42'

В согласии с формулами (5.84), (5.82) и (5.4) для угла ε_K с точностью до малых первого порядка имеем

$$\varepsilon_K = \varepsilon_c - (\psi \cos q_{co} - \theta_K \sin q_{co}), \quad (5.203)$$

откуда

$$M[\varepsilon_K] = \varepsilon_c, \quad (5.204)$$

т. е. среднее значение угла места ε_K в плоскости ВН измерительного устройства равно стабилизированному углу места ε_c .

В дальнейшем полезно использовать понятие о поправке Δ_e в ВН на качку, характеризуемой формулой (5.90). Вводя в нее (5.203), имеем

$$\Delta_e = \theta_K \sin q_{co} - \psi \cos q_{co}, \quad (5.205)$$

откуда

$$M[\Delta_e] = 0, \quad (5.206)$$

$$D[\Delta_e] = D[\theta_K \sin^2 q_{co} + D[\psi] \cos^2 q_{co}]. \quad (5.207)$$

Таким образом, поправка Δ_e в ВН двухосного ИУ на качке не зависит от угла места и имеет порядок углов качки корабля.

Для угловых скоростей $\dot{\varepsilon}_K$ и угловых ускорений $\ddot{\varepsilon}_K$ ВН на качке были получены зависимости (5.104) и (5.106), анализ которых аналогичен приведенному в § 2.2, п. 2.

Рассмотрим характеристики параметра поперечной стабилизации $\beta = -\kappa$, например, перекрестия нитей визира. Принимая во внимание формулу (5.80), для малых углов качки и при замене угла ε_K его математическим ожиданием (5.204) имеем

$$\beta = -\frac{1}{\cos \varepsilon_c} (\psi \sin q_{co} + \theta_K \cos q_{co}). \quad (5.208)$$

Из формулы и примера 5.1 следует, что при значительных углах места ε_c поперечная стабилизация перекрестия нитей визира становится затруднительной.

Для угловых скоростей $\dot{\beta}$ и угловых ускорений $\ddot{\beta}$ поперечной стабилизации были получены формулы (5.111) и (5.112), которые подтверждают сделанный выше вывод.

3. Схема стабилизации трехосного ИУ. Рассмотрим наиболее распространенную схему трехосного ИУ, приведенную на рис. 5.7, а.

В данной схеме параметрами косвенной стабилизации являются: курсовой угол в ПП $q_K^T = AF'_1$ (рис. 5.11), угол места $\varepsilon_c^T = F'_1L$ в ПВ OE_0LF_0 и угол поперечной стабилизации $\tau = D'_1D'_0 = -\rho_{K.B}^T$. В § 5.3, п. 4 были выведены точные аналитические зависимости для указанных параметров: (5.129) для угла q_K^T , (5.131) для угла ε_c^T и (5.128) для угла τ . На рис. 5.21 приведена схема стабилизации

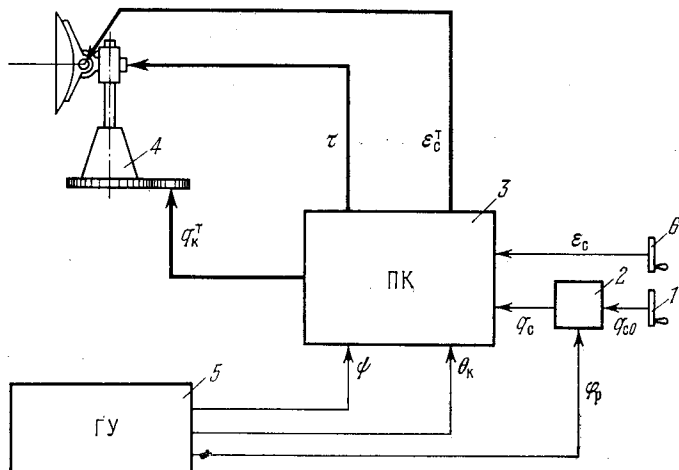


Рис. 5.21. Схема стабилизации трехосного ИУ.

трехосного ИУ [53, 89], которая по своей структуре близка к схеме стабилизации двухосного ИУ (рис. 5.19). Здесь оператор ГН с помощью маховика *1* вводит в ПК курсовой угол q_c в ПП, а оператор ВН маховиком *б* вводит в ПК стабилизированный угол места ε_c . В ПК также поступают углы качки от ГУ. По упомянутым ранее формулам в ПК вырабатываются параметры стабилизации q_K^T , ε_c^T , τ . Курсовой угол q_K^T вводится в ГН антенны, угол места ε_c^T поступает в ВН антенны, а угол τ — на стабилизацию оси цапф в ПП.

В схеме, приведенной на рис. 5.21, стабилизация антенны осуществляется без методических ошибок, т. е.

$$\delta_{a.c} = 0, \quad \delta_{г.c} = 0, \quad \delta_{п.c} = 0. \quad (5.209)$$

При нерегулярной качке корабля углы $q_K^T(t)$, $\varepsilon_c^T(t)$, $\tau(t)$ являются случайными функциями времени. Их вероятностные характеристики могут быть определены на основании формул, которые были приведены в § 5.3, п. 4. Для курсового угла q_K^T с учетом слагаемых второго порядка малости было получено соотношение

(5.140). Если ввести обозначения

$$k_1 = \sin^2 q_{c0}, \quad k_2 = \sin 2q_{c0}, \quad (5.210)$$

то имеем

$$q_K^T = q_{c0} - \varphi_p + k_1 \psi \theta_K + \frac{k_2}{4} (\theta_K^2 - \psi^2). \quad (5.211)$$

Тогда

$$M [q_K^T] = q_{c0} + \frac{k_2}{4} \{D[\theta_K] - D[\psi]\}, \quad (5.212)$$

$$D[q_K^T] = D[\varphi_p] + k_1^2 D[\psi] D[\theta_K] + \frac{k_2^2}{8} \{(D[\theta_K])^2 + (D[\psi])^2\}. \quad (5.213)$$

Для угловой скорости \dot{q}_K^T была получена формула (5.141), которая с учетом обозначений (5.210) может быть записана в виде

$$\dot{q}_K^T = -\dot{\varphi}_p + \frac{k_2}{2} (\dot{\theta}_K \theta_K - \dot{\psi} \psi) + k_1 (\dot{\psi} \theta_K + \dot{\theta}_K \psi). \quad (5.214)$$

Из этой формулы следует, что в трехосном ИУ угловая скорость ГН не зависит от угла места. Поэтому подобные ИУ могут быть использованы для пеленгования ориентиров, находящихся в околозенитных областях.

Для \ddot{q}_K^T была получена формула (5.144), которая с учетом обозначений (5.210) может быть переписана в виде

$$\ddot{q}_K^T = -\ddot{\varphi}_p - k_1 (\ddot{\psi} \theta_K + 2\dot{\psi} \dot{\theta}_K + \dot{\theta}_K \dot{\psi}) + \frac{k_2}{2} (\ddot{\theta}_K \theta_K + \dot{\theta}_K^2 - \ddot{\psi} \psi - \dot{\psi}^2). \quad (5.215)$$

С помощью формул (5.214) и (5.215) легко определяются вероятностные характеристики случайных функций $\dot{q}_K^T(t)$ и $\ddot{q}_K^T(t)$. Для нахождения вероятностных характеристик угла места $\varepsilon_c^T(t)$ и его производных можно воспользоваться приближенными формулами (5.136), (5.137), (5.142). Определение же вероятностных характеристик угла поперечной стабилизации $\tau(t)$ возможно с использованием приближенной формулы (5.138), а для $\tau(t)$ и $\ddot{\tau}(t)$ — зависимостей (5.139) и (5.143).

**ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА
НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИУ****§ 6.1. Сущность метода непосредственной стабилизации**

Сложность практической реализации в ряде случаев косвенного метода стабилизации пеленгационных и других корабельных устройств в условиях качки, желание обеспечить более высокую точность и другие обстоятельства приводят к необходимости использования непосредственного метода стабилизации. Этот же метод применяется для стабилизации различных чувствительных элементов систем навигации и управления: акселерометров, гироскопов, маятниковых устройств, магнитометров, гравиметров и др.

Непосредственный метод стабилизации состоит в удержании ИУ в неизменном относительно ПГ и заданного азимута положении путем введения углов качки и рыскания на вращение площадки с установленным на ней ИУ вокруг осей стабилизации *). Примером непосредственного метода стабилизации ИУ является размещение его на площадке, установленной в кардановом подвесе, на вращение колец которого вводятся углы качки, а на поворот площадки в азимуте — угол рыскания корабля. При данном методе оси стабилизации и оси наведения ИУ по отношению к площадке различны. Сущность непосредственного метода стабилизации ИУ поясняется схемой на рис. 1.1, в которой стабилизирующее устройство состоит из карданова подвеса и следящих приводов, вводящих углы качки и рыскания от ГУ на вращение кардановых колец и площадки. Если при этом информация об углах качки и рыскании корабля поступает от центрального ГУ, то способ стабилизации называется центральным (см. § 3.1). Возможно также применение одного из вариантов автономного способа стабилизации, при котором ИУ имеет отдельное (обычно расположенное вблизи ИУ) гироскопическое устройство, а связь между ГУ и стабилизирующим устройством осуществляется при помощи следящих систем. Другой тип СУ, основанный на принципах гироскопической стабилизации, рассматривается в гл. 7.

*) В некоторых случаях непосредственный метод используется для стабилизации измерительных устройств относительно инерциального пространства или любой другой системы координат.

Помимо полной (трехосной) непосредственной стабилизации, при которой исключается влияние бортовой, килевой качки и рыскания, применяется также частичная непосредственная стабилизация. При двухосной стабилизации компенсируется влияние бортовой и килевой качки, т. е. стабилизация ИУ осуществляется относительно ПГ; при одноосной стабилизации исключается влияние одного из углов качки, обычно бортовой.

При установке осей карданова подвеса параллельно продольной или поперечной осям корабля параметрами непосредственной стабилизации являются углы качки и рыскания (курс) корабля, а также их угловые скорости и угловые ускорения. Иногда применяется так называемый поворотный карданов подвес, у которого оси вращения кардановых колец повернуты на некоторый угол относительно продольной оси корабля. При этом параметрами стабилизации служат не углы качки, а другие углы наклона ПП к горизонту (см. § 5.2).

Вопросы геометрии и кинематики непосредственной стабилизации ИУ излагаются в ряде работ [3, 6, 23, 27, 29, 35, 38, 41, 44, 48, 51, 53, 58, 71, 76, 81, 87, 89].

§ 6.2. Карданов подвес и его основные элементы

В гироскопических и стабилизационных устройствах широкое применение получили различные кардановы подвесы. Карданов подвес представляет собой совокупность колец (рамок), оси вращения которых пересекаются в одной точке, называемой *центром* или *точкой подвеса*. На стабилизированном элементе подвеса установлено ИУ (или подлежащий стабилизации прибор), благодаря чему оно изолировано от угловых колебательных движений объекта. Теории кардановых подвесов посвящены работы А. Н. Крылова [43, 44], А. Ю. Ишлинского [27, 29], А. И. Лурье [51], Б. И. Кудревича [48] и др.

На рис. 6.1, а приведена простейшая схема карданова подвеса. Он состоит из наружного 1 и внутреннего 2 колец. Ось aa вращения кольца 1, называемая *главной осью* стабилизации, укреплена в подшипниках, жестко связанных с кораблем. Обычно ось aa ориентируется параллельно продольной оси корабля. Ось bb вращения кольца 2, называемая *внутренней осью* стабилизации, укреплена в подшипниках, жестко связанных с наружным кольцом 1. Оси aa и bb взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O , называемой *центром подвеса*. Проведем в плоскости внутреннего кольца 2 ось np , перпендикулярную оси bb и называемую *нулевой осью* внутреннего кольца. С кольцом 2 связано подлежащее стабилизации ИУ.

Пусть с наружным кольцом 1 связана система координат $Ox_1y_1z_1$, а с внутренним кольцом 2 — $Ox_2y_2z_2$. Их положение отно-

сительно земных осей $O\xi\eta\zeta$ и корабельных осей $Oxyz$ показано на рис. 6.2. Предполагается, что при отсутствии качки корабля и вращения колец подвеса по отношению к кораблю указанные координатные системы совмещены.

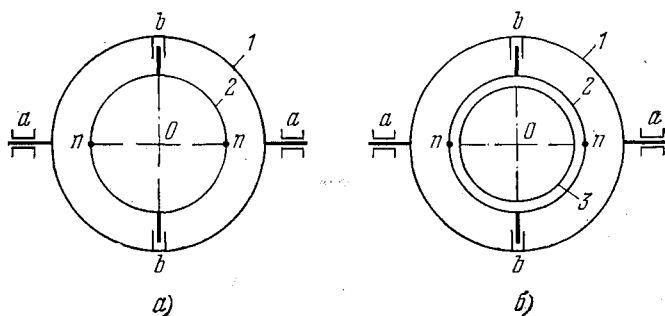


Рис. 6.1. Схема карданова подвеса.

По отношению к корабельным осям $Oxyz$ наружное кольцо обладает одной степенью свободы, а внутреннее кольцо — двумя.

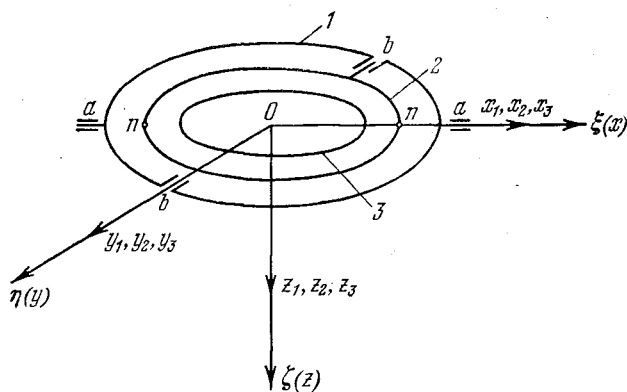


Рис. 6.2. Координатные системы $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$.

Обозначим через α угол поворота наружного кольца вокруг оси aa по отношению к осям $Oxyz$, а через β — угол поворота внутреннего кольца вокруг оси bb по отношению к наружному кольцу. Взаимное положение осей $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ и $Ox_2y_2z_2$ показано на рис. 6.3. Преобразование осей $Oxyz$ к $Ox_1y_1z_1$ запишем в матричном виде

$$[x_1, y_1, z_1] = B_\alpha [x, y, z], \quad (6.4)$$

где матрица преобразования B_α может быть записана следующим образом:

$$B_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}. \quad (6.2)$$

Аналогично преобразование осей $Ox_1y_1z_1$ к $Ox_2y_2z_2$ имеет вид

$$[x_2, y_2, z_2] = B_\beta [x_1, y_1, z_1], \quad (6.3)$$

где

$$B_\beta = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (6.4)$$

Тогда преобразование корабельных осей $Oxyz$ к осям внутреннего кольца $Ox_2y_2z_2$ будет

$$[x_2, y_2, z_2] = B_1 [x, y, z], \quad (6.5)$$

Рис. 6.3. Углы α и β поворотов наружного и внутреннего колец подвеса.

где матрица B_1 равна

$$B_1 = B_\beta B_\alpha. \quad (6.6)$$

Перемножая матрицы (6.2) и (6.4), получим

$$B_1 = \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (6.7)$$

В системах стабилизации часто применяется трехосный подвес, один из вариантов которого приведен на рис. 6.1, б. Во внутреннем кольце 2 установлена стабилизируемая площадка 3, которая имеет свободу вращения по отношению к кольцу 2 вокруг нормали к нему. Площадка 3 обладает относительно корабля тремя степенями свободы. Поэтому установленное на площадке ИУ полностью развязано от угловых колебательных движений корабля, т. е. имеет полную (трехосную) стабилизацию.

Свяжем с площадкой 3 систему координат $Ox_3y_3z_3$. Ее положение при отсутствии качки корабля, а также вращения колец и площадки показано на рис. 6.2. Обозначим через χ угол поворота площадки по отношению к внутреннему кольцу вокруг нормали к последнему. Взаимное положение осей $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$ показано на рис. 6.4.

Преобразование осей $Ox_2y_2z_2$ к $Ox_3y_3z_3$ в матричном виде будет

$$[x_3, y_3, z_3] = B_\chi [x_2, y_2, z_2], \quad (6.8)$$

где для матрицы B_χ имеем

$$B_\chi = \begin{vmatrix} \cos \chi & \sin \chi & 0 \\ -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Рассмотрим преобразование корабельных осей $Oxyz$ к осям

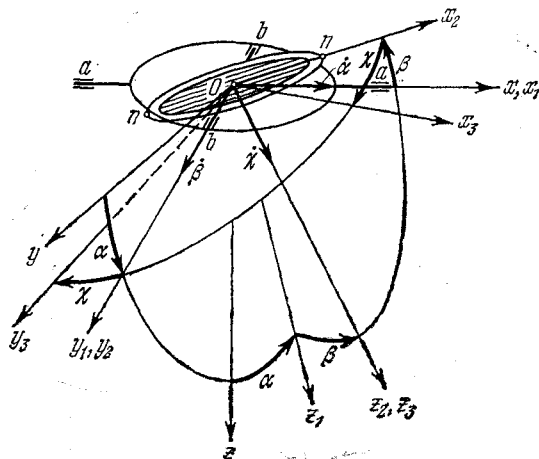


Рис. 6.4. Углы α , β , χ поворотов наружного, внутреннего колец и стабилизируемой площадки.

площадки $Ox_3y_3z_3$, записав его в матричной форме

$$[x_3, y_3, z_3] = B [x, y, z]. \quad (6.10)$$

Сопоставляя (6.5), (6.8) и (6.10), видим, что

$$B = B_\chi B_1. \quad (6.11)$$

Принимая во внимание (6.7) и (6.9), получим

$$B = \begin{vmatrix} \cos \beta \cos \chi & \sin \alpha \sin \beta \cos \chi + & -\cos \alpha \sin \beta \cos \chi + \\ & + \cos \alpha \sin \chi & + \sin \alpha \sin \chi \\ -\cos \beta \sin \chi & -\sin \alpha \sin \beta \sin \chi + & \cos \alpha \sin \beta \sin \chi + \\ & + \cos \alpha \cos \chi & + \sin \alpha \cos \chi \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (6.12)$$

Матрицы B_1 и B используются далее при решении задач геометрии и кинематики карданова подвеса.

§ 6.3. Геометрия и кинематика карданова подвеса

1. **Предварительные замечания.** Под геометрией карданова подвеса будем иметь в виду задачу определения параметров, которые следует вводить на поворот колец подвеса для приведения внутреннего кольца на качающемся основании в горизонтальное положение. В более общем случае рассматривается задача приведения внутреннего кольца вместе со стабилизируемой площадкой в ПГ и придания площадке требуемой азимутальной ориентации. Указанная задача решается для различных случаев установки карданова подвеса на корабле.

При исследовании геометрии карданова подвеса намечилось два подхода. В работах [27, 43, 51] в основном используется аналитический метод, а в работе [48] — геометрический. В настоящей книге применяются оба подхода, при этом наибольшее внимание уделяется геометрическому, как наиболее простому и наглядному.

2. **Главная ось стабилизации параллельна продольной оси корабля.** Наиболее часто на практике главная ось стабилизации карданова подвеса параллельна продольной оси корабля. На рис. 6.5

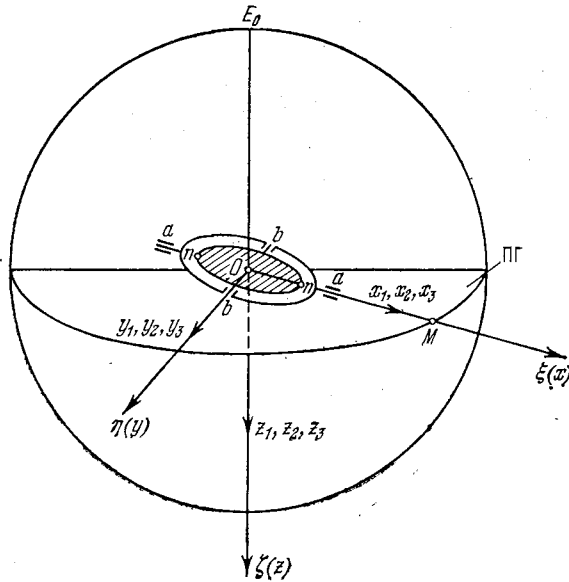


Рис. 6.5. Положение карданова подвеса при отсутствии качки (главная ось стабилизации совпадает с продольной осью корабля).

показано положение карданова подвеса при отсутствии качки, корабельные оси $Oxuz$ совпадают с земными осями $O\xi\eta\zeta$, главная ось стабилизации aa и нулевая ось nn направлены вдоль продольной

оси корабля Ox . Внутренняя ось стабилизации bb совпадает с поперечной осью корабля Oy . Координатные системы $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$, связанные с наружным, внутренним кардановыми кольцами и площадкой, совмещены с корабельными осями $Oxyz$.

На рис. 6.6 показано положение карданова подвеса при качке и рыскании, когда ориентация корабельных осей $Oxyz$ относительно земных $O\xi\eta\zeta$ характеризуется углом рыскания $\varphi_p = MA_2$,

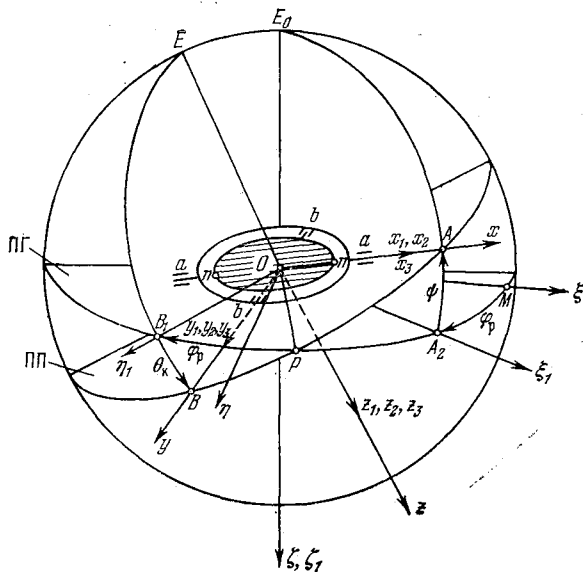


Рис. 6.6. Положение карданова подвеса на качке.

углом килевой качки $\psi = A_2A$ и углом бортовой качки $\theta_k = B_1B$. Плоскость, содержащая наружное, внутреннее кольца и площадку, параллельна ПП. Положение осей aa , bb , nn и координатных систем $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$ относительно осей $Oxyz$ сохраняется такое же, что и до качки корабля (рис. 6.5).

Рассмотрим задачу приведения внутреннего карданова кольца и площадки в ПП, а затем площадки в исходное азимутальное направление. Первый из указанных этапов состоит в совмещении координатных систем $Ox_2y_2z_2$ с $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, а второй — в совмещении осей $Ox_3y_3z_3$ с $O\xi\eta\zeta$. Решим эту задачу вначале аналитически.

В согласии с (1.19) преобразование системы $Oxyz$ к $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ в матричном виде будет

$$[\xi_1, \eta_1, \zeta_1] = A_1^{-1} [x, y, z], \quad (6.13)$$

где матрица A_1^{-1} — обратная по отношению к A_1 .

Принимая во внимание (1.21) и известные свойства ортогональных преобразований, имеем

$$A_1^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \psi & \sin \psi \sin \theta_K & \sin \psi \cos \theta_K \\ 0 & \cos \theta_K & -\sin \theta_K \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (6.14)$$

Ранее было получено преобразование (6.5) системы $Oxyz$ к $Ox_2y_2z_2$, матрица которого B_1 выражается через угол α поворота наружного кольца и угол β поворота внутреннего кольца (см. (6.7)). Из сопоставления (6.13) и (6.5) следует, что для приведения внутреннего кольца с площадкой в ПГ, т. е. для совмещения координатных систем $Ox_2y_2z_2$ с $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, должно выполняться условие

$$B_1 = A_1^{-1}, \quad (6.15)$$

откуда

$$b_{1\mu\nu} = a_{1\mu\nu}^{-1} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (6.16)$$

Соотношения (6.16) позволяют определить углы α и β поворотов колец подвеса для приведения на качке внутреннего кольца и площадки в ПГ. Действительно,

$$b_{123} = a_{123}^{-1} = a_{132}, \quad b_{131} = a_{131}^{-1} = a_{113}$$

или, учитывая (6.7) и (6.14), находим

$$\alpha = -\theta_K, \quad \beta = -\psi, \quad (6.17)$$

т. е. угол поворота наружного кольца равен взятому с обратным знаком углу бортовой качки, а угол поворота внутреннего кольца — взятому с обратным знаком углу килевой качки.

Определим угол азимутального поворота площадки, при котором будут совмещены координатные системы $Ox_3y_3z_3$ и $O\xi\eta\zeta$.

Согласно (1.9) преобразование системы $Oxyz$ к $O\xi\eta\zeta$ имеет вид

$$[\xi, \eta, \zeta] = A^{-1} [x, y, z], \quad (6.18)$$

где матрица A^{-1} , если принять во внимание (1.17), будет

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_p \cos \psi & \cos \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K - & \sin \varphi_p \sin \theta_K + \\ & -\sin \varphi_p \cos \theta_K & + \cos \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K \\ \sin \varphi_p \cos \psi & \cos \varphi_p \cos \theta_K + & \sin \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K - \\ & + \sin \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K & - \cos \varphi_p \sin \theta_K \\ -\sin \psi & \cos \psi \sin \theta_K & \cos \psi \cos \theta_K \end{vmatrix}. \quad (6.19)$$

Ранее было получено преобразование (6.10) системы $Oxyz$ к $Ox_3y_3z_3$, матрица которого B выражается через углы α и β поворо-

тов кардановых колец и угол χ поворота площадки (см. (6.12)). Из сопоставления (6.18) и (6.10) следует, что для придания площадке исходной азимутальной ориентации, т. е. для совмещения координатных систем $Ox_3y_3z_3$ и $O\xi\eta\zeta$, должно выполняться условие

$$B = A^{-1}, \quad (6.20)$$

откуда

$$b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}^{-1} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \quad (6.21)$$

В согласии с (6.12) и (6.21)

$$-\operatorname{tg} \chi = \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{a_{21}^{-1}}{a_{11}^{-1}} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$$

или с учетом (6.19)

$$\chi = -\varphi_p, \quad (6.22)$$

т. е. угол поворота стабилизируемой площадки равен взятому с обратным знаком углу рыскания корабля.

Таким образом, согласно (6.17) и (6.22), в данном случае параметрами стабилизации площадки в кардановом подвесе являются углы качки.

Применим для решения этой же задачи геометрический подход [48]. Для приведения внутреннего карданова кольца и площадки в ПГ поступим следующим образом (рис. 6.7):

а) повернем наружное карданово кольцо вокруг оси стабилизации aa на угол $\alpha = -\theta_k$; при этом внутренняя ось стабилизации опишет дугу $bb_1 = -\theta_k$ и займет горизонтальное положение b_1b_1 , совпадающее с линией OB_1 пересечения плоскости шпангоута OEB_1B с ПГ, а оси, связанные с наружным кольцом, займут положение $Ox_1y_1z_1$; оси $Ox_1y_1z_1$ повернуты относительно корабельных осей $Oxyz$ на угол $\alpha = -\theta_k$;

б) повернем внутреннее карданово кольцо вместе с площадкой вокруг оси b_1b_1 , которая занимает горизонтальное положение, на угол $\beta = -\psi$; при этом нулевая ось внутреннего кольца опишет дугу $nn_2 = -\psi$ и примет горизонтальное положение n_2n_2 , совпадающее с проекцией OA_2 продольной оси корабля Ox на ПГ, а оси, связанные с внутренним кольцом, займут положение $Ox_2y_2z_2$; оси $Ox_2y_2z_2$ повернуты относительно осей $Ox_1y_1z_1$ наружного кольца на угол $\beta = -\psi$.

Следовательно, внутреннее кольцо и площадка примут горизонтальное положение, а нулевая ось внутреннего кольца будет направлена вдоль линии OA_2 . Если на стабилизируемую площадку установить визир и определять курсовой угол на ориентир G (рис. 5.3) путем вращения визира вместе с площадкой в ПГ, то этот угол будет отсчитываться от линии OA_2 (n_2n_2), т. е. будет измеряться стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2F_0$. Заметим,

что при отсутствии качки и рыскания (рис. 6.5) нулевая ось np внутреннего кольца совпадает с направлением $O\xi$ заданного кораблю курса (с ним совпадает и продольная ось корабля Ox). После наклона ПП и приведения внутреннего кольца и площадки в ПГ нулевая ось займет положение $n_2n_2(OA_2)$ (рис. 6.7), т. е. повернется в ПГ на угол рыскания $\varphi_p = MA_2$. Если необходимо нуль отсчета

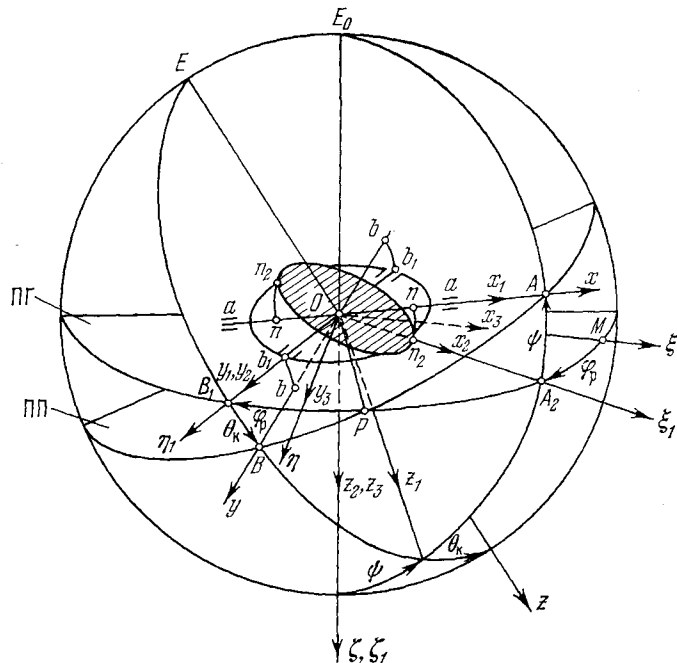


Рис. 6.7. Приведение стабилизируемой площадки в ПГ.

курсовых углов в ПГ сохранить на направлении $O\xi$ заданного кораблю курса, то площадку следует повернуть вокруг вертикали $O\xi$ (Oz_2) на угол $\chi = -\varphi_p$ в ПГ. При этом оси, связанные с площадкой, займут положение $Ox_3y_3z_3$; оси $Ox_3y_3z_3$ совпадают с земными осями $O\xi\eta\zeta$ и повернуты относительно осей $Ox_2y_2z_2$ внутреннего кольца на угол $\chi = -\varphi_p$. Если теперь повернуть визир вместе с площадкой в ПГ до направления на ориентир G (рис. 5.3), то при этом будет измерен стабилизированный курсовой угол $q_{co} = MF_0$.

Геометрическое рассмотрение задачи показало, что для полной стабилизации установленной в кардановом подвесе площадки необходимо повернуть наружное кольцо подвеса на угол $\alpha = -\theta_k$, внутреннее кольцо — на угол $\beta = -\psi$ и площадку — на угол $\chi = -\varphi_p$, что полностью совпадает с приведенным ранее аналити-

чекским решением (см. (6.17) и (6.22)). Путем аналогичных геометрических построений легко показать [48], что изменение порядка вращения колец и площадки не влияет на их окончательное положение.

Таким образом, если главная ось стабилизации карданова подвеса параллельна продольной оси корабля, то для приведения внутреннего кольца вместе с площадкой в ПГ надлежит наружное кольцо повернуть на угол $\alpha = -\theta_k$, а внутреннее кольцо — на угол $\beta = -\psi$. При этом нулевая ось внутреннего кольца будет направлена вдоль проекции главной оси стабилизации (продольной оси корабля) на ПГ. Для полной стабилизации площадки ее необходимо повернуть в ПГ на угол $\chi = -\varphi_p$.

Выше предполагалось, что стабилизация площадки осуществляется точно, т. е. оси $Ox_3y_3z_3$ будут совмещены с осями $O\xi\eta\zeta$. В реальных условиях возникают погрешности стабилизации (см. § 6.4, п. 8). Найдем условие точной стабилизации. Для этого запишем преобразование системы координат $Ox_3y_3z_3$ к $O\xi\eta\zeta$ в матричном виде

$$[\xi, \eta, \zeta] = C [x_3, y_3, z_3]. \quad (6.23)$$

Матрица преобразования C характеризует наличие погрешностей стабилизации площадки (осей $Ox_3y_3z_3$) относительно земной системы координат $O\xi\eta\zeta$. Совмещение этих осей, т. е. отсутствие ошибок стабилизации, имеет место в том случае, когда матрица C является единичной

$$C = E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.24)$$

Появление в матрице C ненулевых недиагональных элементов свидетельствует о наличии погрешностей стабилизации. Чтобы выявить это обстоятельство, установим связь между матрицей C и введенными ранее матрицами B и A^{-1} . В согласии с (6.10), (6.18) и (6.23) имеем

$$CB = A^{-1}.$$

Умножая обе части равенства справа на матрицу B^{-1} и принимая во внимание, что $BB^{-1} = E$, имеем

$$C = A^{-1}B^{-1}. \quad (6.25)$$

Запишем таблицу для C , пользуясь матрицами (6.19), (6.12) и удерживая в матрице C малые первого порядка; имеем

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -(\varphi_p + \chi) & \psi + \beta \\ \chi + \varphi_p & 1 & -(\theta_k + \alpha) \\ -(\psi + \beta) & \theta_k + \alpha & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.26)$$

Если углы α , β и χ удовлетворяют требуемым соотношениям (6.17) и (6.22), то матрица C становится единичной и условие (6.24) точной стабилизации будет соблюдено. Если соотношения (6.17) и (6.22) не удовлетворяются, то недиагональные элементы (6.26) характеризуют погрешности стабилизации колец и площадки. Для этих погрешностей введем следующие обозначения:

$$\delta\alpha = \theta_k + \alpha, \quad \delta\beta = \psi + \beta, \quad \delta\chi = \varphi_p + \chi. \quad (6.27)$$

Тогда (6.26) можно записать в виде

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -\delta\chi & \delta\beta \\ \delta\chi & 1 & -\delta\alpha \\ -\delta\beta & \delta\alpha & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.28)$$

Матрицу C , учитывая (4.59), можно представить так:

$$C = E + \Theta, \quad (6.29)$$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Theta = \begin{vmatrix} 0 & -\delta\chi & \delta\beta \\ \delta\chi & 0 & -\delta\alpha \\ -\delta\beta & \delta\alpha & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.30)$$

где по аналогии с (4.60) кососимметричная матрица Θ является матрицей малого поворота.

Таким образом, мы пришли к рассмотренному в § 4.5 вопросу о том, что в случае малого рассогласования осей $Ox_3y_3z_3$ площадки с земной системой координат $O\xi\eta\zeta$ поворот площадки можно характеризовать некоторым вектором малого поворота ϑ , составляющие которого относительно осей $Ox_3y_3z_3$ связаны с введенными выше погрешностями стабилизации площадки следующими приближенными соотношениями:

$$\vartheta_x = \delta\alpha, \quad \vartheta_y = \delta\beta, \quad \vartheta_z = \delta\chi. \quad (6.31)$$

3. Главная ось стабилизации параллельна поперечной оси корабля. Рассмотрим случай, когда главная ось стабилизации карданова подвеса параллельна поперечной оси корабля. На рис. 6.8 показано положение карданова подвеса при отсутствии качки, главная ось стабилизации aa и нулевая ось nn направлены вдоль поперечной оси корабля Oy . Внутренняя ось стабилизации bb совпадает с продольной осью корабля Ox . Координатные системы $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$, связанные с наружным, внутренним кардановыми кольцами и площадкой, совмещены с корабельными осями $Oxuz$. На рис. 6.9 показано положение палубы корабля при наличии качки и рыскания (положение колец подвеса для простоты не приводится). До поворота колец и площадки они параллельны $ПП$, а положение осей aa , bb , nn и координатных систем $Ox_1y_1z_1$, $Ox_2y_2z_2$, $Ox_3y_3z_3$ относительно корабельных осей $Oxuz$

сохраняется тем же, что и до качки корабля (рис. 6.8). Рассмотрим задачу приведения на качке внутреннего кольца подвеса и площадки в ПГ. При этом ограничимся геометрическим решением

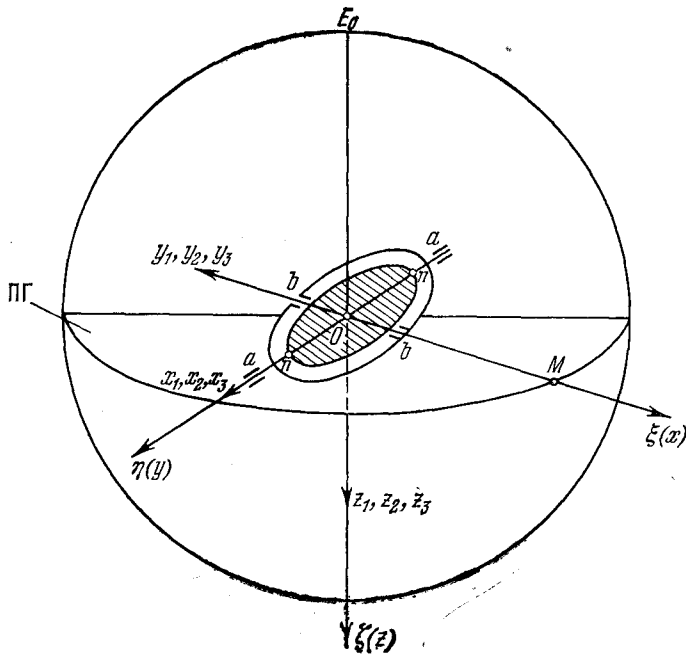


Рис. 6.8. Положение карданова подвеса при отсутствии качки (главная ось стабилизации совпадает с поперечной осью корабля).

задачи. Для приведения внутреннего карданова кольца и площадки в ПГ поступим следующим образом [48] (рис. 6.9):

а) повернем наружное кольцо вокруг главной оси стабилизации aa на угол $\alpha' = -\psi_k$; при этом внутренняя ось стабилизации опишет дугу $bb_1 = -\psi_k$, займет горизонтальное положение b_1b_1 и совпадет с линией OA_1 пересечения диаметральной плоскости $OEAA_1$ с ПГ, а оси, связанные с наружным кольцом, займут положение $Ox_1y_1z_1$; оси $Ox_1y_1z_1$ повернуты относительно корабельных осей $Oxyz$ на угол $\alpha' = -\psi_k$;

б) повернем внутреннее кольцо вместе с площадкой вокруг оси b_1b_1 , которая занимает горизонтальное положение, на угол $\beta' = \theta$; при этом нулевая ось внутреннего кольца опишет дугу $pn_2 = \theta$, примет горизонтальное положение n_2n_2 и совпадет с проекцией OB_2 поперечной оси корабля Oy на ПГ, а оси, связанные с внутренним кольцом, займут положение $Ox_2y_2z_2$; оси $Ox_2y_2z_2$

повернуты относительно осей $Ox_1y_1z_1$ наружного кольца на угол $\beta' = \theta$.

Следовательно, внутреннее кольцо и площадка примут горизонтальное положение, а нулевая ось внутреннего кольца будет направлена вдоль линии OB_2 . Таким образом, при данной установке карданова подвеса на корабле необходимые углы поворота

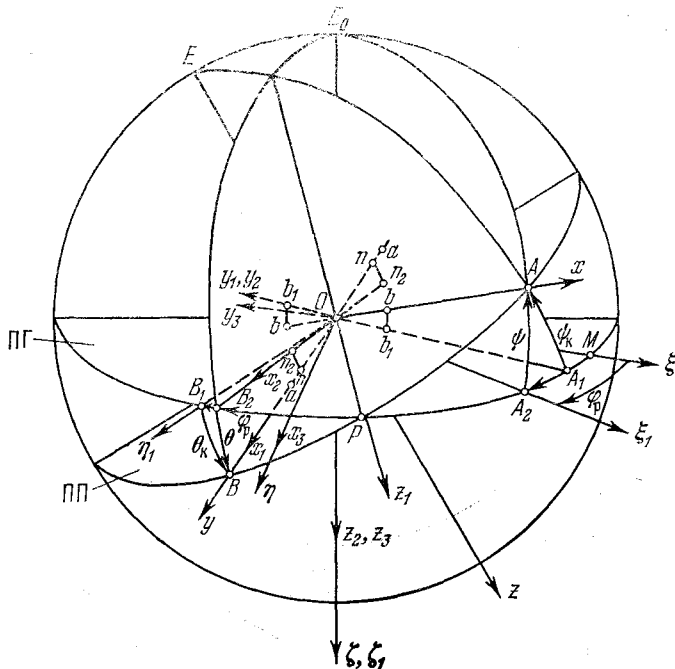


Рис. 6.9. Приведение стабилизируемой площадки в ПГ.

наружного и внутреннего кардановых колец на качке составляют

$$\alpha' = -\psi_k, \quad \beta' = \theta. \quad (6.32)$$

Если на площадку установить визир, то он будет измерять курсовой угол в ПГ, отсчитываемый от проекции поперечной оси корабля Oy на ПГ. Если необходимо нуль отсчета курсовых углов в ПГ сохранить на направлении $O\eta$ (рис. 6.8), то площадку следует повернуть вокруг вертикали $O\xi$ (Oz_2) в ПГ на угол

$$\chi' = -\varphi_p. \quad (6.33)$$

При этом оси, связанные с площадкой, займут положение $Ox_3y_3z_3$ (рис. 6.9) и совпадут с земными осями $O\xi\eta\zeta$, повернутыми относительно осей $Ox_2y_2z_2$ внутреннего кольца на угол $\chi' = -\varphi_p$.

Таким образом, если главная ось стабилизации карданова подвеса параллельна поперечной оси корабля, то для приведения внутреннего кольца вместе с площадкой в ПГ надлежит наружное кольцо повернуть на угол $\alpha' = -\psi_k$, а внутреннее кольцо — на угол $\beta' = \theta$. При этом нулевая ось внутреннего кольца будет направлена вдоль проекции главной оси стабилизации (поперечной оси корабля) на ПГ. Для полной стабилизации площадки ее необходимо повернуть в ПГ на угол $\chi' = -\varphi_D$. Изменение порядка поворотов колец и площадки не влияет на их окончательное положение [48].

Из сопоставления (6.17) и (6.32) следует, что углы поворотов колец в рассмотренных двух случаях установки кардановых подвесов на корабле не равны, а углы поворотов площадок одинаковы (см. (6.22) и (6.33)). Установим связь между углами α , α' и β , β' . На основании формул (6.17), (6.32) и (1.28) имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \beta' &= -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Пример 6.1. В момент времени $t = t_1$ корабельная ГВ измерила текущие значения углов бортовой качки $\theta_k(t_1) = 12^\circ$ и килевой качки $\psi(t_1) = 4^\circ$. На корабле установлено два кардановых подвеса, у одного из которых главная ось стабилизации параллельна продольной оси корабля, а у другого — поперечной оси корабля. Требуется определить углы поворотов колец указанных подвесов, необходимые для приведения внутренних колец в ПГ.

Решение.

1) С помощью формул (6.17) находим углы поворотов наружного и внутреннего колец первого подвеса

$$\alpha(t_1) = -12^\circ, \quad \beta(t_1) = -4^\circ.$$

2) Пользуясь формулами (6.34), определяем соответственно углы поворотов колец второго подвеса

$$\alpha'(t_1) = -4^\circ 05', \quad \beta'(t_1) = 11^\circ 59'.$$

Из примера видно, что углы качки, определяемые ГВ, обеспечивают точную стабилизацию внутреннего кольца первого подвеса. Углы α' и β' , необходимые для стабилизации внутреннего кольца второго карданова подвеса, отличаются от тех углов качки, которые дает ГВ. Следовательно, расположение осей карданова подвеса на корабле имеет существенное значение для решения задач стабилизации.

4. Два кардановых подвеса с взаимно перпендикулярными осями стабилизации. Рассмотрим случай установки на корабле двух кардановых подвесов [48]. У подвеса I главная ось стабилизации парал-

лельна продольной оси корабля Ox ; у подвеса II главная ось стабилизации параллельна поперечной оси корабля Oy . При горизонтальном положении III и при наклонном ее положении, но до поворота карданных колец, угол между нулевыми осями внутренних колец подвесов I и II равен 90° . Как было показано ранее, после приведения внутренних колец подвесов I и II в ПГ нулевая ось подвеса I направлена вдоль проекции OA_2 (рис. 6.9) продольной оси корабля Ox на ПГ, а у подвеса II — вдоль проекции OB_2 поперечной оси корабля Oy на ПГ. Таким образом после приведения внутренних колец подвесов I и II в ПГ угол δ между их нулевыми осями будет равен A_2B_2 . Следовательно, возникает угол взаимного поворота нулевых осей в ПГ

$$\gamma = 90^\circ - \delta = 90^\circ - A_2B_2.$$

Но $A_2B_2 = 90^\circ - A_1A_2 = 90^\circ - B_1B_2$, поэтому

$$\gamma = A_1A_2 = B_1B_2. \quad (6.35)$$

Для угла γ было получено выражение (1.33)

$$\sin \gamma = \sin \psi_K \sin \theta_K. \quad (6.36)$$

Угол γ взаимного поворота нулевых осей внутренних колец подвесов I и II называют *кардановой ошибкой* [27]. Этот термин был введен Г. В. Чеховичем.

Наличие кардановой ошибки имеет весьма важные последствия. Так, например, если на внутренних кольцах подвесов I и II разместить стабилизируемые площадки, а на последних установить визиры, то измеряемые с помощью этих визиров курсовые углы в ПГ на один и тот же ориентир G (рис. 5.3) как раз и будут отличаться на величину кардановой ошибки γ . Для избежания указанной ошибки необходимо соответствующие оси карданных подвесов устанавливать параллельно друг другу. При этом главные оси стабилизации подвесов целесообразно располагать параллельно продольной оси корабля. Высказанное положение является одним из основных в теории местной стабилизации ИУ на корабле.

Формула (6.36) справедлива для рассмотренного выше частного случая. Анализ общей формулы кардановой ошибки, когда главные оси стабилизации двух карданных подвесов параллельны III и образуют друг с другом произвольный угол, приводится в работе [27]. Аналогичный случай исследуется далее.

5. Поворотный карданов подвес. Рассмотрим поворотный карданов подвес [53, 76], у которого главная ось стабилизации может изменять свое положение в III относительно корабельных осей. Его кинематическая схема показана на рис. 6.10. На основании 1, жестко связанном с палубой корабля, установлен зубчатый погон 2, который может поворачиваться относительно основания вокруг

оси, перпендикулярной к ПП. Зубчатый погон скреплен с кардановой вилкой 3, в которой установлен карданов подвес, состоящий из наружного кольца 4, внутреннего кольца 5 и стабилизируемой площадки 6. При вращении зубчатого погона 2 вместе с кардановой вилкой 3 главная ось стабилизации aa , внутренняя ось стабилизации bb и нулевая ось внутреннего кольца nn изменяют свое положение относительно корабельных осей.

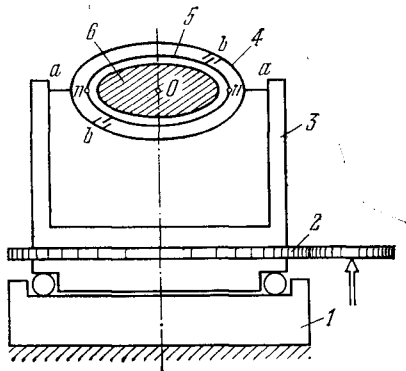


Рис. 6.10. Кинематическая схема поворотного карданова подвеса.

Рассмотрим несколько случаев ориентации осей подвеса. Предположим, зубчатый погон 2 и карданова вилка 3 (рис. 6.10) повернуты в ПП на курсовой угол $q_k = AF_1$ (рис. 5.3), главная ось стабилизации aa и нулевая ось nn направлены вдоль линии OF_1 , а внутренняя ось стабилизации bb — вдоль линии OD_1 . Для приведения внутреннего кольца и площадки в ПГ необходимо наружное кольцо повернуть вокруг оси aa (OF_1) на угол $\alpha = -\rho_{к.в.}$, а внутреннее кольцо — вокруг оси bb , которая приняла горизонтальное положение OD_0 , на угол $\beta = -e_v$. Таким образом, в данном случае параметрами непосредственной стабилизации являются углы

$$\alpha = -\rho_{к.в.}, \quad \beta = -e_v. \quad (6.37)$$

При этом нулевая ось nn придет также в ПГ и будет направлена вдоль проекции OF_2 главной оси стабилизации aa (OF_1) на ПГ. Если на стабилизируемой площадке установлен, например, визир, то при повороте кардановой вилки в ПП на курсовой угол $q_k = AF_1$ площадка повернется в ПГ на курсовой угол $q_c = A_2F_2$. Заметим, что при $q_k = 0$ ось aa совпадает с осью Ox , а ось nn — с линией OA_2 . Угол q_c можно представить в виде

$$q_c = A_2F_2 = A_2F_0 + F_0F_2. \quad (6.38)$$

Из рис. 5.3 следует, что $A_2F_0 = q_c$, а из прямоугольного сферического треугольника $F_1F_0F_2$ определяем

$$\sin F_0F_2 = \sin e_{к.в.} \sin \rho_{к.в.}. \quad (6.39)$$

Формула (6.39) имеет ту же структуру, что и выражение (6.36) для кардановой ошибки γ ; при $q_k = 0$ $e_{к.в.} = \psi_k$, $\rho_{к.в.} = \theta_k$ и $F_0F_2 = A_1A_2 = \gamma$.

Учитывая (6.39), формулу (6.38) можно записать в виде

$$\dot{q}_c = q_c + \arcsin [\sin e_{к.в} \sin \rho_{к.в}]. \quad (6.40)$$

Таким образом, установленный на площадке визир измерит курсовой угол \dot{q}_c , который отличается от стабилизированного курсового угла q_c на ориентир G на величину кардановой ошибки, определяемой формулой (6.39). Следовательно, применение в данном случае поворотного карданова подвеса приведет к необходимости учета кардановой ошибки в курсовом угле. Кроме того, для определения параметров стабилизации α и β , характеризуемых формулами (6.37), понадобится ПК или специальная ГВ, в которой также применен поворотный карданов подвес (см. § 6.6, п. 3).

Рассмотрим случай, когда главная ось стабилизации aa составляет с продольной осью корабля угол $(90^\circ + q_k)$. При этом ось aa и нулевая ось nn направлены вдоль линии OD_1 , а внутренняя ось стабилизации — вдоль линии OF_1 . Для приведения внутреннего кольца и площадки в ПГ необходимо наружное кольцо повернуть вокруг оси aa (OD_1) на угол $\alpha' = -e_{к.в}$, а внутреннее кольцо — вокруг оси bb , которая приняла горизонтальное положение OF_0 , на угол $\beta' = \rho_v$. Таким образом, в данном случае параметрами непосредственной стабилизации являются углы

$$\alpha' = -e_{к.в}, \quad \beta' = \rho_v. \quad (6.41)$$

При этом нулевая ось nn придет также в ПГ и будет направлена вдоль проекции OD_2 главной оси стабилизации aa (OD_1) на ПГ. Легко показать, что здесь, как и в предыдущем случае, в измерении курсового угла в ПГ на ориентир будет возникать карданова ошибка D_2D_0 , определяемая формулой (6.39), так как из построения рис. 5.3 следует, что $D_2D_0 = F_0F_2$.

Пусть на корабле имеется два поворотных кардановых подвеса с взаимно перпендикулярными осями стабилизации. У подвеса I главная ось стабилизации повернута в ПП на угол $q_k = AF_1$, а у подвеса II — на угол $(90^\circ + q_k) = AD_1$. Для подвеса I параметры стабилизации определяются формулами (6.37), а для подвеса II — формулами (6.41). В согласии со сказанным ранее, после поворотов колец подвесов на указанные углы у подвеса I нулевая ось nn будет направлена вдоль линии OF_2 , а у подвеса II — вдоль линии OD_2 . При этом угол между нулевыми осями подвесов I и II составит $\delta = F_2D_2$. Тогда угол γ взаимного поворота в ПГ площадок подвесов I и II будет

$$\gamma = 90^\circ - \delta = 90^\circ - F_2D_2.$$

Но

$$F_2D_2 = 90^\circ - F_0F_2 = 90^\circ - D_2D_0,$$

следовательно, $\gamma = F_0 F_2 = D_2 D_0$ или, учитывая (6.39), имеем выражение для кардановой ошибки

$$\sin \gamma = \sin e_{\text{к. в}} \sin \rho_{\text{к. в}}. \quad (6.42)$$

Рассмотрим случай совместной работы неподвижного и поворотного кардановых подвесов. Пусть у неподвижного подвеса I главная ось стабилизации aa направлена вдоль продольной оси Ox корабля, а у поворотного подвеса II — повернута в ПП на угол $q_{\text{к}} = AF_1$ и направлена вдоль линии OF_1 . У подвеса I параметрами стабилизации являются углы, характеризующие формулы (6.17), а у подвеса II параметры стабилизации определяются выражениями (6.37). После введения указанных параметров внутренние кольца и площадки подвесов I и II займут горизонтальное положение. При этом у подвеса I нулевая ось nn будет направлена вдоль линии OA_2 , а у подвеса II — вдоль линии OF_2 . Следовательно, угол между нулевыми осями будет $\delta = A_2 F_2$. Угол δ можно представить в виде

$$\delta = A_1 F_0 + F_0 F_2 - A_1 A_2. \quad (6.43)$$

Дуги $F_0 F_2$, $A_1 A_2$ и $A_1 F_0$ определяются формулами (6.39), (6.36) и (5.46). Поэтому (6.43) можно записать так:

$$\delta = \arcsin \left[\sin q_{\text{к}} \frac{\cos e_{\text{к. в}}}{\cos \theta} \right] - \arcsin [\sin \psi_{\text{к}} \sin \theta_{\text{к}}] + \arcsin [\sin e_{\text{к. в}} \sin \rho_{\text{к. в}}]. \quad (6.44)$$

Угол γ взаимного поворота нулевых осей подвесов I и II после их приведения в ПГ составит

$$\gamma = q_{\text{к}} - \delta \quad (6.45)$$

или, учитывая (6.44), получим

$$\gamma = q_{\text{к}} - \left\{ \arcsin \left[\sin q_{\text{к}} \frac{\cos e_{\text{к. в}}}{\cos \theta} \right] - \arcsin [\sin \psi_{\text{к}} \sin \theta_{\text{к}}] + \arcsin [\sin e_{\text{к. в}} \sin \rho_{\text{к. в}}] \right\}. \quad (6.46)$$

Так как формула (6.46) весьма сложна, то применение на корабле неподвижного и поворотного кардановых подвесов при необходимости совместной их работы и обеспечения взаимной ориентации устанавливаемых на них ИУ вряд ли является целесообразным.

Формулу (6.46) можно несколько упростить. Так как $\frac{\cos e_{\text{к. в}}}{\cos \theta} \cong 1$, то приближенно

$$\gamma = \arcsin [\sin \psi_{\text{к}} \sin \theta_{\text{к}}] - \arcsin [\sin e_{\text{к. в}} \sin \rho_{\text{к. в}}].$$

При $q_k = 0$ углы $e_{к.в} = \psi_k$, $\rho_{к.в} = \theta_k$ и $\gamma = 0$; это связано с тем, что в данном случае главные оси стабилизации подвесов I и II параллельны продольной оси корабля Ox .

Рассмотрим еще один случай установки на корабле поворотного карданова подвеса, который может представить практический интерес. Предположим, что карданов подвес повернут в ПП на курсовой угол $q_k^T = AF_1'$ (рис. 5.11). При этом главная ось стабилизации aa и нулевая ось nn совмещены с линией OF_1' пересечения ПВ $OE_0LF_1'F_0$ с ПГ, а внутренняя ось стабилизации bb направлена вдоль линии OD_1' . Для приведения внутреннего кольца и площадки в ПП необходимо наружное кольцо повернуть вокруг оси aa (OF_1') на угол $\alpha = -\rho_{к.в.}^T$, а внутреннее кольцо — вокруг оси bb , которая приняла горизонтальное положение OD_0' , на угол $\beta = -e_B^T$. Таким образом, в данном случае параметрами непосредственной стабилизации являются углы

$$\alpha = -\rho_{к.в.}^T, \quad \beta = -e_B^T. \quad (6.47)$$

При этом нулевая ось nn также придет в горизонтальное положение и будет направлена вдоль проекции OF_0' главной оси стабилизации aa (OF_1') на ПГ. Если на стабилизируемой площадке установлен, например, визир, то при повороте кардановой вилки в ПП на курсовой угол $q_k^T = AF_1'$ площадка повернется в ПГ на стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2F_0$. Здесь, как и раньше, предполагается, что при $q_k^T = 0$ ось aa совпадает с осью Ox , а ось nn — с линией OA_2 .

Сравнивая изложенное выше с материалом § 5.3, п. 4, можно заметить, что в данном случае геометрия поворотного карданова подвеса полностью аналогична геометрии трехосного ИУ со стабилизацией оси цапф в ПГ (рис. 5.7, а). Таким образом, при использовании трехосного поворотного карданова подвеса с параметрами стабилизации, определяемыми формулами (6.47), при измерении путем визирования ориентира G (рис. 5.11) курсового угла $q_k^T = AF_1'$ в ПП со стабилизируемой площадки может быть снят курсовой угол $q_c = A_2F_0$ в ПГ. Следовательно, поворотный карданов подвес частично выполняет роль ПК, так как он осуществляет геометрическое преобразование курсового угла q_k^T в ПП в стабилизированный курсовой угол q_c , а также обратное преобразование. Если на азимутальный поворот площадки ввести угол

$$\chi = -\varphi_p, \quad (6.48)$$

то визир будет измерять курсовой угол $q_{c0} = MF_0$, отсчитанный от линии $O\xi$ заданного кораблю курса. Кроме того, визир измеряет стабилизированный угол места $\epsilon_c = F_0L$ (рис. 5.2). Сле-

довательно, в данном случае поворотный карданов подвес обладает всеми достоинствами, которые имеет трехосное ИУ, особенно при пеленговании ориентиров, находящихся в околоразенитной области (см. § 5.3, п. 4).

Из сказанного выше следует, что при рассматриваемой установке поворотного подвеса карданова ошибка отсутствует. Заметим, что возникновение этой ошибки связано с непараллельной установкой главных осей стабилизации кардановых подвесов различных ИУ. Если сформулированное ранее необходимое условие параллельности осей стабилизации кардановых подвесов выполнено, то карданова ошибка не возникает. При этом изменение положения нулей отсчета азимутальных углов при рыскании и качке корабля у всех подвесов получается одинаковым. Если же на азимутальную стабилизацию площадок, установленных в кардановых подвесах, вводить углы рыскания корабля (см. (6.48)), то нули отсчета различных углов в ПГ (курсовые углы, курс и др.) будут сохранять неизменное положение относительно земной системы координат.

6. Кинематика карданова подвеса. Определим угловые скорости и угловые ускорения, которые должна обрабатывать система стабилизации *). Общая методика решения этой задачи состоит в следующем [6]. Обозначим через ω угловую скорость колебаний корабля; пусть Ω — угловая скорость площадки в кардановом подвесе, которую ей должна сообщать система стабилизации. При осуществлении точной стабилизации имеет место равенство

$$\Omega + \omega = 0. \quad (6.49)$$

Вектор угловой скорости ω согласно (1.46) и (1.47) можно записать в виде

$$\omega = \varphi_p \zeta^0 + \psi \eta^0 + \theta_K x^0 \quad (6.50)$$

или

$$\omega = \omega_x x^0 + \omega_y y^0 + \omega_z z^0. \quad (6.51)$$

Аналогично

$$\Omega = \dot{\alpha} x^0 + \dot{\beta} \eta^0 + \dot{\chi} \zeta^0, \quad (6.52)$$

где $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\chi}$ — угловые скорости поворотов наружного, внутреннего колец и площадки.

Запишем равенство (6.49) в проекциях на оси земной системы координат $O\xi\eta\zeta$, с которой при точной стабилизации площадки должны быть совмещены связанные с ней оси $Ox_3y_3z_3$ (рис. 6.7):

$$\Omega_\xi + \omega_\xi = 0, \quad \Omega_\eta + \omega_\eta = 0, \quad \Omega_\zeta + \omega_\zeta = 0. \quad (6.53)$$

Выразим составляющие ω_ξ , ω_η и ω_ζ через проекции вектора ω на корабельные оси $Oxuz$; принимая во внимание преобразование

*) Иногда эти величины называют угловыми скоростями и ускорениями обкатки колец подвеса [6].

(6.18) и (6.19), найдем

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= \omega_x \cos \varphi_p \cos \psi + \omega_y (\cos \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K - \sin \varphi_p \cos \theta_K) + \\ &\quad + \omega_z (\sin \varphi_p \sin \theta_K + \cos \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K), \\ \omega_{\eta} &= \omega_x \sin \varphi_p \cos \psi + \omega_y (\cos \varphi_p \cos \theta_K + \sin \varphi_p \sin \psi \sin \theta_K) + \\ &\quad + \omega_z (\sin \varphi_p \sin \psi \cos \theta_K - \cos \varphi_p \sin \theta_K), \\ \omega_{\zeta} &= -\omega_x \sin \psi + \omega_y \cos \psi \sin \theta_K + \omega_z \cos \psi \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} (6.54)$$

Для составляющих вектора Ω на оси $O\xi\eta\zeta$ находим

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\xi} &= \dot{\alpha} \cos \psi \cos \varphi_p - \dot{\beta} \sin \varphi_p, \\ \Omega_{\eta} &= \dot{\alpha} \cos \psi \sin \varphi_p + \dot{\beta} \cos \varphi_p, \\ \Omega_{\zeta} &= \dot{\chi} - \dot{\alpha} \sin \psi. \end{aligned} \right\} (6.55)$$

Подставим (6.55) в выражения (6.53) и разрешим полученную систему уравнений относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ и $\dot{\chi}$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{1}{\cos \psi} (\omega_{\xi} \cos \varphi_p + \omega_{\eta} \sin \varphi_p), \\ \dot{\beta} &= \omega_{\xi} \sin \varphi_p - \omega_{\eta} \cos \varphi_p, \\ \dot{\chi} &= -\omega_{\zeta} - (\omega_{\xi} \cos \varphi_p + \omega_{\eta} \sin \varphi_p) \operatorname{tg} \psi. \end{aligned} \right\} (6.56)$$

Вводя сюда (6.54), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\omega_x - (\omega_y \sin \theta_K + \omega_z \cos \theta_K) \operatorname{tg} \psi, \\ \dot{\beta} &= \omega_z \sin \theta_K - \omega_y \cos \theta_K, \\ \dot{\chi} &= -\frac{1}{\cos \psi} (\omega_y \sin \theta_K + \omega_z \cos \theta_K). \end{aligned} \right\} (6.57)$$

Формулы (6.56) и (6.57) определяют угловые скорости системы стабилизации через проекции вектора ω на земные оси $O\xi\eta\zeta$ и на корабельные оси $Oxyz$. Для ω_x , ω_y и ω_z были получены соотношения (1.48). Аналогичным образом можно найти

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= \dot{\theta}_K \cos \psi \cos \varphi_p - \dot{\psi} \sin \varphi_p, \\ \omega_{\eta} &= \dot{\theta}_K \cos \psi \sin \varphi_p + \dot{\psi} \cos \varphi_p, \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\varphi}_p - \dot{\theta}_K \sin \psi. \end{aligned} \right\} (6.58)$$

Подставляя (1.48) в (6.57) или (6.58) в (6.56), получим

$$\dot{\alpha} = -\dot{\theta}_K; \quad \dot{\beta} = -\dot{\psi}; \quad \dot{\chi} = -\dot{\varphi}_p. \quad (6.59)$$

Тот же результат можно получить более просто, если в (6.53) ввести формулы (6.55) и (6.58). Наконец, формулы (6.59) можно непосредственно получить путем дифференцирования выражений (6.17) и (6.22) по времени. Весьма простой вид соотношений (6.59) для угловых скоростей стабилизации обусловлен тем, что при рассматриваемой установке карданова подвеса (рис. 6.5 и 6.7) оси вращения кардановых колец и площадки совпадают с осями из-

менения углов качки θ_k , ψ , φ_p . В общем же случае для определения угловых скоростей стабилизации следует пользоваться приведенной выше методикой.

Угловые ускорения стабилизации в согласии с (6.59) будут

$$\ddot{\alpha} = -\ddot{\theta}_k, \quad \ddot{\beta} = -\ddot{\psi}, \quad \ddot{\chi} = -\ddot{\varphi}_p. \quad (6.60)$$

Из формул (6.59) и (6.60) следует, что в условиях нерегулярной качки корабля угловые скорости и ускорения стабилизации являются случайными функциями времени, их вероятностные характеристики будут приведены далее.

§ 6.4. Типы кардановых подвесов и их свойства

1. Классификация кардановых подвесов. В корабельных системах стабилизации применяются различные типы кардановых подвесов, которые можно классифицировать по следующим признакам [6, 27, 29, 53].

- 1) По числу осей подвеса.
- 2) В зависимости от ориентации осей подвеса по отношению к корабельным осям.
- 3) По конструктивному расположению осей подвеса.
- 4) В зависимости от типа применяющегося стабилизирующего устройства.
- 5) По виду механизма вращения элементов карданова подвеса.
- 6) По числу ступеней стабилизации.

Рассмотрим каждый из перечисленных признаков.

2. Характеристика числа осей подвеса. По числу осей подвеса, или осей стабилизации, различают одноосные, двухосные, трехосные и многоосные подвесы. Одноосный подвес показан на рис. 6.11, а [6]. Здесь площадка 1 имеет одну степень свободы, т. е. может поворачиваться вокруг главной оси стабилизации aa' . Если ось aa' направлена вдоль продольной оси корабля Ox , то для удержания площадки в горизонтальном положении угол ее поворота α в согласии с (6.17) будет

$$\alpha = -\theta_k. \quad (6.61)$$

Одноосная стабилизация в отношении бортовой качки иногда применяется в антеннах РЛС [23, 53]. При исследовании многоосных систем стабилизации их условно расчленяют на одноосные, когда взаимное влияние каналов стабилизации может не учитываться или может быть оценено отдельно.

Схема двухосного подвеса показана на рис. 6.11, б. Здесь площадка (внутреннее карданово кольцо) 2 установлена в наружном кольце 1, следовательно, имеет две степени свободы. Подобный подвес обеспечивает стабилизацию площадки относительно ПГ. Применение двухосного подвеса позволяет осуществить стаби-

лизацию заданного направления ИУ, например, визирной линии относительно пеленгуемого ориентира. Если главную ось стабилизации aa направить вдоль продольной оси корабля Ox , то углы α и β поворотов наружного кольца вокруг оси aa и площадки вокруг оси bb будут определяться соотношениями (6.17).

Схема трехосного подвеса приведена на рис. 6.11, в (см. также рис. 6.1, б). Здесь площадка 3 подвешена во внутреннем кольце 2,

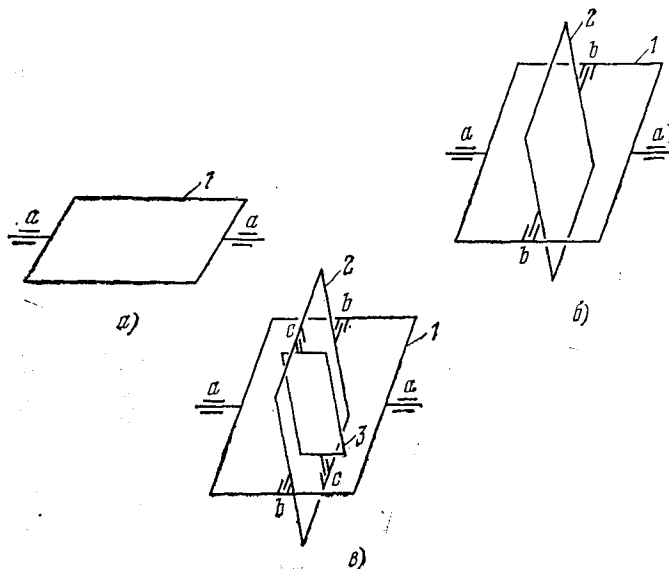


Рис. 6.11. Схемы одноосного, двухосного и трехосного подвесов.

которое в свою очередь установлено в наружном кольце 1. При этом площадка обладает тремя степенями свободы. Благодаря этому обеспечивается полная (трехосная) стабилизация площадки. При установке трехосного подвеса на корабле так, что ось aa направлена по продольной оси корабля Ox , а ось bb — по поперечной оси Oy , для приведения внутреннего кольца вместе с площадкой в ПГ и площадки в заданное азимутальное направление угол α поворота наружного кольца вокруг оси aa , угол β поворота внутреннего кольца вокруг оси bb и угол χ поворота площадки вокруг оси cc в согласии с (6.17) и (6.22) будут

$$\alpha = -\theta_k, \quad \beta = -\psi, \quad \chi = -\varphi_p. \quad (6.62)$$

Другие случаи установки трехосного подвеса на корабле были рассмотрены в § 6.3.

Отметим одну особенность трехосного подвеса. Предположим, объект, например самолет, совершает поворот вокруг оси bb

(рис. 6.11, в), при этом ось aa подвеса начнет приближаться к оси cc вращения площадки. При совмещении указанных осей («складывание рамок») подвес теряет одну степень свободы, и стабилизация установленного в кардановом подвесе ИУ относительно трех осей становится практически невозможной.

Для устранения указанного выше недостатка иногда применяется четырехосный подвес [6, 25, 26, 55, 64], схема которого приведена на рис. 6.12 [6]. Здесь, в отличие от схемы на рис. 6.11, в, имеется дополнительное карданово кольцо 4, ось вращения dd которого находится в подшипниках, жестко связанных с кораблем. В кольце 4 установлен трехосный подвес, состоящий из наружного кольца 1, внутреннего кольца 2 и стабилизируемой площадки 3. Если, как и в случае трехосного подвеса, объект, например самолет, повернется вокруг оси bb на угол в 90° , то оси aa и cc совпадут, но благодаря введению дополнительной оси стабилизации dd площадка 3 будет иметь три степени свободы, что необходимо для осуществления ее полной стабилизации. Четырехосный подвес используется обычно в том случае, когда два угла поворота объекта могут достигать больших значений. Если же из трех углов поворота объекта один является большим, то можно ограничиться применением трехосного подвеса. При этом его главную ось стабилизации aa надо установить параллельно той оси объекта, вокруг которой он может поворачиваться на большой угол. В работе [26] отмечается, что углы поворотов таких объектов, как корабли и транспортные самолеты, сравнительно невелики и здесь нет необходимости применять четырехосные подвесы. В системах непосредственной стабилизации корабельных ИУ обычно используются трехосные подвесы.

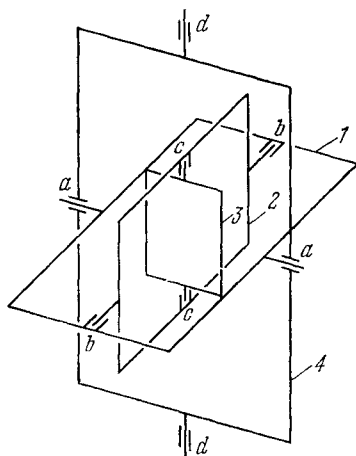


Рис. 6.12. Схема четырехосного подвеса.

3. **Ориентация осей подвеса.** В зависимости от ориентации осей подвеса по отношению к корабельным осям различают неподвижный и поворотный кардановые подвесы. В неподвижном подвесе главная ось стабилизации занимает неизменное положение по отношению к корабельной системе координат. В системах непосредственной стабилизации главная ось стабилизации карданова подвеса обычно устанавливается параллельно продольной оси корабля.

В поворотном кардановом подвесе предусматривается возможность изменения положения главной оси стабилизации по отноше-

нию к корабельным осям. В системах непосредственной стабилизации корабельных ИУ поворотные подвесы используются редко. Близкие к ним по схеме трехосные системы наведения различных пеленгационных устройств со стабилизацией оси цапф в плоскости горизонта (§ 5.4, п. 3) применяются более часто, особенно при необходимости обеспечить слежение за ориентиром в околорезной области.

4. Особенности конструктивного расположения осей подвеса.

По конструктивному расположению осей подвеса различают наружный и внутренний подвесы.

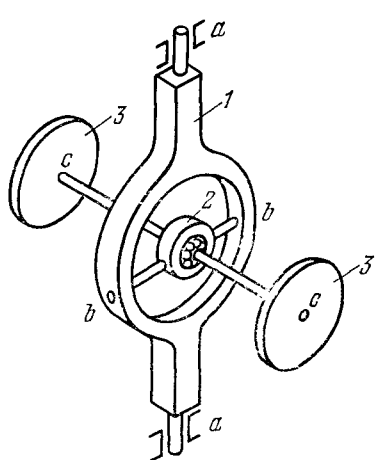


Рис. 6.13. Схема внутреннего карданова подвеса.

Рассмотренные ранее подвесы: двухосный, трехосный и четырехосный относятся к наружным подвесам. В них стабилизируемый элемент — площадка — окружен системой кардановых колец. Иногда в системах стабилизации и в ГУ применяется внутренний подвес [55], один из вариантов которого показан на рис. 6.13. Здесь трехосный подвес состоит из траверсы 1, играющей роль наружного кольца; кольца 2, которое несет функции внутреннего кольца, и площадки 3, которая состоит из двух половин; на них могут быть установлены подлежащие стабилизации устройства.

Наружный и внутренний кардановы подвесы имеют свои достоинства и недостатки. Выбор типа подвеса определяется назначением системы стабилизации, условиями ее работы, весами и габаритами подлежащих стабилизации ИУ [25, 26, 55]. Достоинствами наружного подвеса являются: возможность обеспечить компактность и достаточную жесткость стабилизируемого элемента, что весьма важно для достижения точного взаимного положения стабилизируемых ИУ (акселерометры, гироскопы, гравиметры и др.); удобство при проектировании малогабаритных систем стабилизации; возможность функционирования при значительных углах поворотов объекта относительно исходного положения. К недостаткам наружного подвеса относятся: возможность деформаций системы вследствие наличия в ряде конструкций значительных по габаритам кардановых колец; трудность обеспечить малые габариты и веса системы стабилизации при значительных весах и габаритах стабилизируемых ИУ; ограничение поля зрения стабилизируемых оптических приборов и других пеленгационных уст-

ройств; возникновение явления «складывания» колец; трудность обеспечить равновесность механической системы подвеса, когда кольца испытывают большие нагрузки вследствие ускорений и вибраций, в результате чего может возникнуть возмущающий момент, который действует на стабилизируемое устройство.

Внутренний карданов подвес позволяет получить более компактную конструкцию при значительных весах и габаритах стабилизируемых устройств. Имеется возможность обеспечить более жесткую систему подвеса. Вариант внутреннего подвеса, приведенный на рис. 6.13, удобно применять, если стабилизируемые элементы можно разделить на две примерно равные части. При наличии внутреннего подвеса можно обеспечить большее поле зрения у подлежащих стабилизации пеленгационных устройств. Недостатком внутреннего подвеса является возможность изгибных деформаций оси $сс$, что приводит к изменению взаимной ориентации устанавливаемых на площадках $З$ устройств.

Указанные выше особенности наружного и внутреннего кардановых подвесов следует учитывать при обосновании целесообразного типа подвеса в системах стабилизации.

5. Стабилизирующие устройства. В зависимости от типа применяющегося стабилизирующего устройства различают подвесы, у которых вращение кардановых колец и площадки осуществляется с помощью следящих приводов; при этом углы качки и рыскания поступают в систему стабилизации от ГУ по линиям синхронной передачи. Другой тип СУ основан на использовании гиростабилизаторов; при этом стабилизация площадки относительно ПГ и заданного азимутального направления осуществляется чисто гироскопическим способом, автономно.

Достоинством первого типа СУ является сравнительная простота устройства, возможность использования данных от центрального ГУ. Его недостаток состоит в том, что при значительном удалении карданова подвеса от ГУ возможны дополнительные ошибки стабилизации из-за деформаций корабля. Кроме того, здесь сказываются также ошибки следящих систем.

Достоинствами СУ второго типа являются автономность, возможность обеспечения высокой точности стабилизации, независимость ее от наличия деформаций корабля. Недостаток СУ этого типа состоит в технической сложности решения задачи гироскопической стабилизации ИУ, особенно если оно обладает значительными весами и габаритами. Поэтому при решении вопроса о выборе типа СУ карданова подвеса следует принимать во внимание назначение ИУ, требования к точности стабилизации, к его автономности, учитывать веса и габариты ИУ, а также ряд других факторов.

6. Механизмы вращения. Одним из наиболее существенных характеристик кардановых подвесов является тип механизма враще-

ния*) (МВ) элементов подвеса. Здесь определяющим является кинематическая схема МВ, который обеспечивает на качке повороты наружного, внутреннего колец и стабилизируемой площадки.

В корабельных системах стабилизации использовались различные кинематические схемы МВ. При выборе схемы МВ учитывались: параметры стабилизации, определяемые корабельным ГУ; требуемая точность стабилизации; конструктивные соображения и др. Наиболее подробно различные кинематические схемы МВ рассмотрены в работах [27, 29]. Ниже приводится анализ в основном двух схем МВ, которые используются на практике.

На рис. 6.14 [27] дана схема МВ простейшего типа, которая в настоящее время наиболее широко применяется. Характерная особенность этого МВ состоит в том, что двигатель, вращающий внутреннее кольцо подвеса, установлен на наружном кольце, а двигатель, который поворачивает площадку в азимуте, расположен на внутреннем кольце. Карданов подвес на рис. 6.14 состоит из наружного кольца 1, внутреннего кольца 2 и стабилизируемой площадки 3. Механизм вращения состоит из двигателей 4, 6, поворачивающих наружное и внутреннее кольца подвеса, и двигателя (на рис. 6.14 не показан), который поворачивает площадку в азимуте, а также из соответствующих приводов стабилизации. Двигатель 4 привода стабилизации наружного кольца установлен на палубе корабля и через зубчатый сектор 5 вращает кольцо 1 вокруг главной оси стабилизации aa . Двигатель 6 привода стабилизации внутреннего кольца, установленный на кронштейне 7, который жестко связан с кольцом 1, через зубчатый сектор 8 поворачивает кольцо 2 вокруг внутренней оси стабилизации bb . Двигатель привода стабилизации площадки 3 в азимуте (на рис. 6.14 не показан), укрепленный на кольце 2, через зубчатую передачу связан с площадкой 3, благодаря чему поворачивает ее в азимуте вокруг оси, перпендикулярной к плоскости внутреннего кольца.

Рис. 6.14. Схема механизма вращения простейшего типа.

Обозначим, как и ранее, углы поворотов наружного, внутреннего колец и площадки через α , β и χ соответственно. Если глав-

*) В ряде работ (см., например, [27, 58]) подобное устройство называется стабилизирующим.

ную ось стабилизации aa подвеса установить параллельно продольной оси корабля, то для приведения на качке внутреннего кольца и площадки в ПГ и удержания площадки в заданном азимутальном направлении углы α , β и χ должны удовлетворять равенствам (6.62). Таким образом, при наличии углов θ_K , ψ , φ_P , определяемых ГУ, механизм вращения простейшего типа (рис. 6.14) обеспечивает точную стабилизацию площадки.

Если главную ось стабилизации aa карданова подвеса расположить параллельно поперечной оси корабля, то потребные на качке углы α' , β' , χ' поворотов наружного, внутреннего колец и площадки в согласии с (6.32) и (6.33) должны определяться равенствами

$$\alpha' = -\psi_K, \quad \beta' = \theta, \quad \chi' = -\varphi_P. \quad (6.63)$$

Следовательно, при данной установке карданова подвеса необходимо иметь углы качки ψ_K , θ , которые корабельные ГУ обычно не вырабатывают. Поэтому такой способ ориентации осей подвеса на кораблях применяется редко.

Анализируя механизм вращения, приведенный на рис. 6.14, следует отметить простоту кинематической схемы МВ, что существенно облегчает ее техническую реализацию. Другое важное достоинство МВ данного типа состоит в том, что при наличии обычно определяемых корабельными ГУ углов θ_K , ψ , φ_P обеспечивается теоретически точная стабилизация элементов карданова подвеса на качке.

Перейдем к рассмотрению другого типа механизма вращения [27, 58, 87]. Схема этого МВ, который обычно называют «механизмом вращения с бугелем», приведена на рис. 6.15. Здесь карданов подвес состоит из наружного кольца 1, внутреннего кольца 2 и стабилизируемой площадки (на рис. 6.15 не показана). Механизм вращения состоит из двигателей 6, 8, поворачивающих наружное

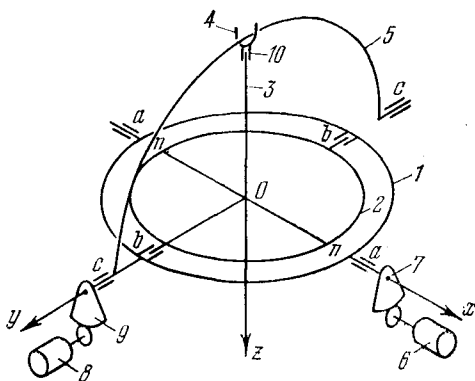


Рис. 6.15. Схема механизма вращения с бугелем.

и внутреннее кольца подвеса, и двигателя (на рис. 6.15 не показан), который поворачивает площадку в азимуте, а также из соответствующих приводов стабилизации. Двигатель 6 привода стабилизации наружного кольца, установленный на палубе корабля, поворачивает через зубчатый сектор 7 наружное кольцо 1 вокруг главной оси стабилизации aa . Двигатель 8 привода стабилизации

внутреннего кольца, установленный также на палубе корабля, через зубчатый сектор 9 поворачивает бугель (дугу) 5 вокруг оси $сс$, которая перпендикулярна к главной оси стабилизации aa ; движение бугеля через вилку 4, подшипник 10 и шток 3, который жестко связан с внутренним кольцом 2, передается этому кольцу, что заставляет его поворачиваться вокруг внутренней оси стабилизации bb . Устройство и принцип действия привода азимутальной стабилизации площадки такой же, как и в МВ простейшего типа (рис. 6.14).

В работе [27] указывается, что подвес, изображенный на рис. 6.15, представляет собой как бы сочетание двух простейших кардановых подвесов. Первый из них состоит из колец 1 и 2; его главная ось стабилизации aa обычно направлена вдоль продольной оси корабля. Второй подвес состоит из бугеля 5, который через вилку 4, подшипник 10 и шток 3 связан с первым подвесом. Здесь бугель, ось вращения $сс$ которого перпендикулярна к главной оси стабилизации aa , играет роль наружного кольца второго подвеса, а вилка 4 — роль его внутреннего кольца. Подшипник 10 необходим для того, чтобы в условиях качки корабля и работы приводов стабилизации внутренние элементы обоих подвесов (кольцо 2 и вилка 4) могли поворачиваться в азимуте друг относительно друга на угол кардановой ошибки γ (см. (6.36)). Вследствие указанной особенности карданов подвес, приведенный на рис. 6.15, часто называют *бикардановым подвесом* [27].

Рассмотрим геометрию бикарданова подвеса. Для этого воспользуемся геометрическими построениями на рис. 6.16. Пусть главная ось стабилизации aa направлена вдоль продольной оси корабля Ox , а ось вращения бугеля $сс$ — по поперечной оси Oy . При наклоне ПП, но до поворотов наружного кольца и бугеля, основные оси занимают следующее положение: нулевая ось nn совпадает с осью aa (Ox); внутренняя ось стабилизации bb направлена вдоль оси Oy (совпадает с осью $сс$ вращения бугеля); бугель лежит в плоскости шпангоута OEB_1B , а шток занимает положение Om , перпендикулярное к ПП; указанное положение бугеля и штока на рис. 6.16 отмечено штрихами.

Для приведения внутреннего кольца в ПП: а) повернем наружное кольцо вокруг главной оси стабилизации aa на угол $\alpha = -\theta_k$; при этом внутренняя ось стабилизации опишет в плоскости OEB_1B дугу $bb_1 = \theta_k$ и займет горизонтальное положение b_1b_1 , совпадающее с линией OB_1 ; шток будет перемещаться вдоль бугеля в плоскости OEB_1B , конец его опишет дугу $mm_1 = \theta_k$ и займет положение Om_1 , перпендикулярное к плоскости внутреннего кольца; б) повернем бугель вокруг оси $сс$ на угол $\beta_1 = -\psi_k$; при этом точка m бугеля опишет в диаметральной плоскости корабля OEA_1A_1 дугу $mm_1 = \psi_k$; бугель придет в вертикальную плоскость OE_0B_2B , проходящую через поперечную ось корабля Oy ; бугель через вил-

ку заставит перемещаться шток, который повернет внутреннее карданово кольцо вокруг внутренней оси стабилизации (занимающей после поворота наружного кольца на угол $\alpha = -\theta_k$ горизонтальное положение b_1b_1) на угол $\beta = -\psi$; при этом внутреннее кольцо займет горизонтальное положение, показанное на рис. 6.16, а шток, описав дугу $m_1m_0 = \psi$ в вертикальной плоскости OE_0AA_2 , придет в вертикальное положение Om_0 ; нулевая

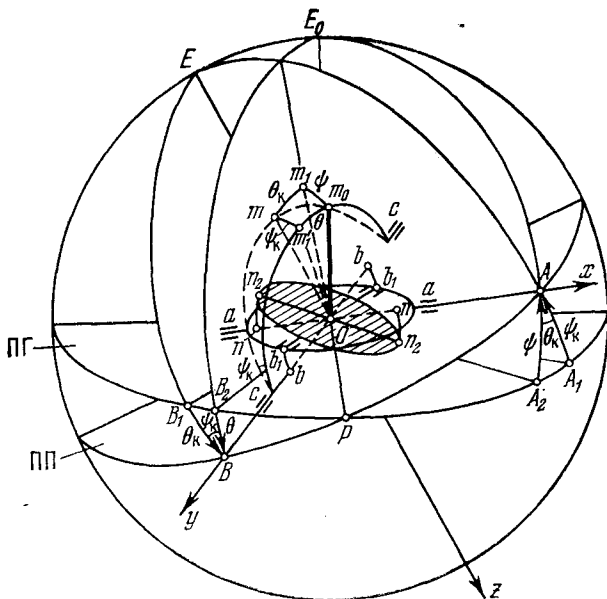


Рис. 6.16. К геометрии бикарданова подвеса.

ось займет горизонтальное положение n_2n_2 , совпадающее с линией OA_2 . После поворотов на указанные углы наружное кольцо будет составлять с ПП угол θ_k , а внутреннее с наружным — угол ψ .

Таким образом, если главная ось стабилизации бикарданова подвеса aa направлена по продольной оси корабля, то для приведения внутреннего кольца вместе с площадкой в ПГ необходимо повернуть наружное кольцо и бугель на углы α и β_1 , определяемые равенствами

$$\alpha = -\theta_k, \quad \beta_1 = -\psi_k. \quad (6.64)$$

При этом внутреннее кольцо повернется на угол

$$\beta = -\psi. \quad (6.65)$$

Параметром азимутальной стабилизации площадки, как и в

предыдущем случае, будет угол

$$\chi = -\Psi_p. \quad (6.66)$$

Результат стабилизации не изменится, если вначале повернуть бугель, а затем наружное карданово кольцо.

Пользуясь рис. 6.16 и рассуждениями, аналогичными предыдущим, можно показать, что при совмещении главной оси стабилизации aa бикарданова подвеса с поперечной осью корабля Oy для приведения на качке внутреннего кольца в ПГ необходимо повернуть наружное кольцо вокруг оси aa (Oy) на угол $\alpha' = -\Psi_k$ и бугель — вокруг оси cc (Ox) на угол $\beta'_1 = \theta_k$, т. е. в данном случае параметрами стабилизации будут

$$\alpha' = -\Psi_k, \quad \beta'_1 = \theta_k. \quad (6.67)$$

После введения этих углов наружное кольцо будет составлять с ПП угол Ψ_k , а внутреннее кольцо с наружным — угол θ , т. е. внутреннее кольцо повернется на угол

$$\beta' = \theta. \quad (6.68)$$

Таким образом, в обоих рассмотренных выше случаях ориентации главной оси стабилизации бикарданова подвеса для приведения внутреннего кольца в ПГ необходимо располагать углами качки θ_k и Ψ_k .

Анализируя схему МВ с бугелем, следует заметить, что она значительно сложнее схемы, приведенной на рис. 6.14. В бикардановом подвесе требуется угол килевой качки Ψ_k , тогда как обычно ГВ определяет угол килевой качки ψ в вертикальной плоскости. Положительная особенность бикарданова подвеса состоит в том, что здесь оба двигателя стабилизации бортовой и килевой качки установлены на палубе корабля. Это позволяет сделать конструкцию системы стабилизации более надежной и жесткой, что особенно важно, когда стабилизируемое ИУ имеет значительные вес и габариты. Пример использования подобного подвеса для непосредственной стабилизации антенного поста, применяемого в судовой РЛС, приведен в работе [87].

Определим погрешности горизонтальной стабилизации при совместной работе подвесов с различными типами МВ [27]. Предположим, в корабельной ГВ применен бикарданов подвес (рис. 6.15) и вследствие этого она определяет углы качки θ_k и Ψ_k (см. § 6.5), которые с помощью следящих приводов вводятся на непосредственную стабилизацию ИУ, установленного в кардановом подвесе с МВ простейшего типа (рис. 6.14) при ориентации главной оси стабилизации параллельно продольной оси корабля. В этом случае необходимые параметры стабилизации определяются соотношениями (6.62), т. е. $\alpha = -\theta_k$ и $\beta = -\psi$.

Так как ГВ определяет требуемый угол θ_k , то погрешность стабилизации наружного кольца

$$\delta\alpha = 0. \quad (6.69)$$

Для точной стабилизации внутреннего кольца необходимо знание угла $\beta = -\psi$, тогда как ГВ определяет угол $\beta_1 = -\psi_k$; следовательно, погрешность стабилизации внутреннего кольца составит

$$\delta\beta = \beta_1 - \beta = -\psi_k - (-\psi) = \psi - \psi_k. \quad (6.70)$$

Для нахождения $\delta\beta$ воспользуемся формулой (1.28), связывающей углы ψ и ψ_k , которую при малых углах качки можно приближенно записать в виде

$$\psi = \psi_k \left(1 - \frac{\theta_k^2}{2} \right). \quad (6.71)$$

Подставляя (6.71) в (6.70), получим

$$\delta\beta = -\psi_k \frac{\theta_k^2}{2}. \quad (6.72)$$

Пример 6.2. Определить ошибку $\delta\beta$ стабилизации внутреннего кольца относительно ПГ при следующих исходных данных: $\psi_k = 5^\circ$, $\theta_k = 15^\circ$.

Решение. По формуле (6.72) находим

$$\delta\beta = -10 \text{ угл. мин.}$$

Из примера видно, что ошибка $\delta\beta$ горизонтальной стабилизации внутреннего кольца является существенной. В данном случае она вызвана тем, что в кардановых подвесах ГВ и стабилизируемого ИУ используются МВ различных типов (см. § 6.5).

7. Число ступеней стабилизации. Различают одноступенчатую и двухступенчатую стабилизацию [6]. Рассмотренные ранее типы кардановых подвесов обеспечивают одноступенчатую стабилизацию. При двухступенчатой стабилизации установленная в кардановом подвесе площадка является элементом первой ступени стабилизации. Если на ней подвесить в кардане другую площадку, то получится система двухступенчатой стабилизации. Очевидно, что площадка второй ступени работает в более благоприятных условиях и ее стабилизация осуществляется точнее, чем у первой площадки. Двухступенчатую систему стабилизации применяют в том случае, когда требуемая точность не может быть достигнута в одноступенчатой. Примером двухступенчатой системы является местная стабилизация площадки на корабле при одновременном осуществлении общей стабилизации корабля по бортовой качке. Другой пример системы двухступенчатой стабилизации [6] приве-

ден на рис. 6.17. Здесь площадка Π_1 установлена в трехосном подвесе первой ступени. На ней размещен второй подвес с площадкой Π_2 , которые относятся ко второй ступени стабилизации. В зависи-

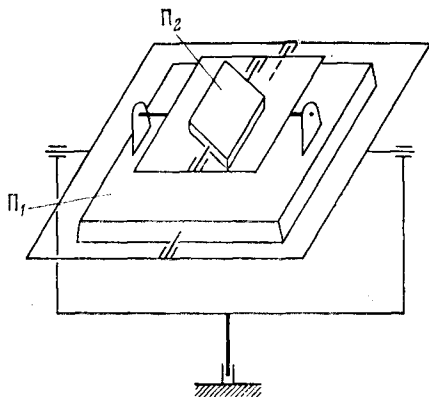


Рис. 6.17. Схема двухступенчатой системы стабилизации.

мости от требуемой точности подлежащие стабилизации ИУ устанавливаются на площадке Π_1 или Π_2 .

8. О погрешностях стабилизации. При использовании карданова подвеса в системах стабилизации на корабле возникают погрешности стабилизации, которые обусловлены рядом факторов.

1) Отсутствие строгой параллельности осей подвеса ИУ и осей подвеса корабельного ГУ, определяющего параметры стабилизации (углы качки и рыскания).

- 2) Нарушение взаимной перпендикулярности осей подвеса ИУ.
- 3) Неидентичность кинематики механизмов вращения в кардановых подвесах стабилизируемых ИУ и ГУ.
- 4) Погрешности определения углов качки и рыскания в ГУ.
- 5) Ошибки следящих систем, передающих в систему стабилизации данные от ГУ.
- 6) Возмущающие моменты, действующие по осям подвеса ИУ, и др.

Факторы, указанные в пп. 1 и 2, характеризуют инструментальные погрешности установки («монтажа») подвеса; вопрос о влиянии неидентичности кинематики МВ кардановых подвесов на точность стабилизации был рассмотрен выше (п.6); факторы, упомянутые в пп. 4 — 6 и оказывающие влияние на точность системы стабилизации в динамике, будут исследованы в гл. 10. Здесь рассмотрим погрешности стабилизации, обусловленные чисто геометрическими факторами (пп. 1 и 2). Основные исследования этих погрешностей были выполнены А. Ю. Ишлинским. В работах [27, 29] рассмотрены ошибки стабилизации, вызванные неточностью монтажа кардановых подвесов. Здесь исследуется влияние на совместную работу двух бикардановых подвесов непараллельности осей их внешних колец и бугелей, обусловленной поворотом на малый угол корпуса одного подвеса относительно корпуса другого. Получены зависимости для ошибок стабилизации как функции углов качки корабля и углов рассогласования осей обоих подвесов, которые позволяют обосновать требования к точности взаимной установки корпусов подвесов.

К этому же направлению относится и работа [28], где рассмотрен вопрос об азимутальном рассогласовании двух кардановых подвесов. При этом предполагается, что корпус одного подвеса установлен с некоторым перекосом по отношению к корпусу другого подвеса. Получены формулы для азимутального рассогласования указанных подвесов как функции углов качки корабля и некоторых угловых параметров, характеризующих перекос во взаимном расположении корпусов обоих подвесов. Влияние ошибок монтажа подвеса на точность стабилизации площадки анализируется также в книге [51].

Рассмотрим методику расчета ошибок стабилизации из-за неточности установки на корабле корпуса карданова подвеса [29], который имеет перекос, характеризуемый малыми углами μ и ν (рис. 6.18).

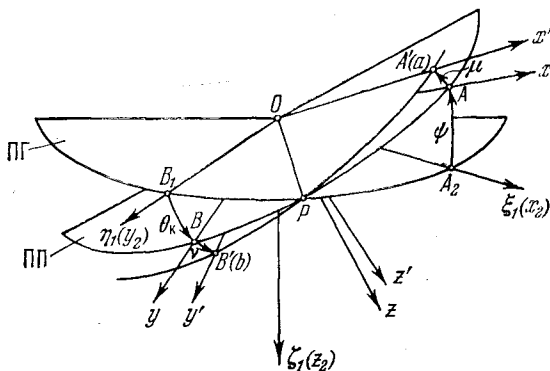


Рис. 6.18. Влияние ошибок установки корпуса подвеса на точность горизонтальной стабилизации.

Здесь положение корабельных осей $Oxyz$ по отношению к полуподвижным осям $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ определяется углом килевой качки $\psi = A_2A$ и углом бортовой качки $\theta_k = B_1B$. Введем систему осей $Ox'y'z'$, связанную с корпусом подвеса. Положение осей $Ox'y'z'$ относительно $Oxyz$ характеризуется малыми углами μ и ν . Главная ось стабилизации aa направлена вдоль оси Ox' ; до поворота колец внутренняя ось стабилизации bb совпадает с линией Oy' , а плоскости наружного и внутреннего колец параллельны плоскости $OA'B'$, проходящей через оси Ox' и Oy' . На корабле имеется ГВ, определяющая углы качки ψ и θ_k . Если $\mu = \nu = 0$, то, как было показано ранее (см. (6.17)), при введении указанных углов качки система координат внутреннего кольца $Ox_2y_2z_2$ будет точно совмещена с полуподвижными осями $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, т. е. внутреннее кольцо и площадка займут горизонтальное положение. Если $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, то при введении параметров стабилизации (6.17) внутреннее кольцо не займет горизонтального положения. Определим погрешности

горизонтальной стабилизации внутреннего кольца в указанных условиях.

Обозначим через α' и β' углы поворотов наружного и внутреннего колец, при введении которых внутреннее кольцо придет в ПГ при наличии ошибок установки подвеса μ и ν . По аналогии с (6.5) запишем преобразование осей $Ox'y'z'$ к осям $Ox_2y_2z_2$; имеем

$$[x_2, y_2, z_2] = B'_1 [x', y', z'], \quad (6.73)$$

где матрица B'_1 определяется формулой (6.7), если в ней заменить углы α и β на α' и β' соответственно:

$$B'_1 = \begin{vmatrix} \cos \beta' & \sin \alpha' \sin \beta' & -\cos \alpha' \sin \beta' \\ 0 & \cos \alpha' & \sin \alpha' \\ \sin \beta' & -\sin \alpha' \cos \beta' & \cos \alpha' \cos \beta' \end{vmatrix}. \quad (6.74)$$

Для решения поставленной задачи необходимо выразить преобразование (6.73) через углы качки ψ , θ_K и ошибки установки корпуса карданова подвеса μ , ν . Рассмотрим преобразование осей $Ox'y'z'$ к $Oxyz$:

$$[x, y, z] = D^{-1} [x', y', z']. \quad (6.75)$$

Если предположить, что поворот осей $Ox'y'z'$ происходил вначале на угол μ вокруг оси Oy , а затем на угол ν вокруг оси Ox' , то матрицу D^{-1} можно получить на основании (6.14), если в ней заменить ψ на μ и θ_K на ν ; имеем

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \cos \mu & \sin \mu \sin \nu & \sin \mu \cos \nu \\ 0 & \cos \nu & -\sin \nu \\ -\sin \mu & \cos \mu \sin \nu & \cos \mu \cos \nu \end{vmatrix}. \quad (6.76)$$

Далее рассмотрим преобразование координатной системы $Ox'y'z'$ к $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, которое запишем в матричном виде

$$[\xi_1, \eta_1, \zeta_1] = F_1^{-1} [x', y', z'], \quad (6.77)$$

где матрица F_1^{-1} , если принять во внимание преобразования (6.75), (6.13) и (6.77), может быть представлена произведением матриц D^{-1} и A_1^{-1} , т. е.

$$F_1^{-1} = A_1^{-1} D^{-1}. \quad (6.78)$$

Тогда, учитывая (6.76) и (6.14), получим для элементов матрицы F_1^{-1} следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} f_{11}^{-1} &= \cos \psi \cos \mu - \sin \psi \cos \theta_K \sin \mu, \\ f_{12}^{-1} &= \cos \psi \sin \mu \sin \nu + \sin \psi \sin \theta_K \cos \nu + \sin \psi \cos \theta_K \cos \mu \sin \nu, \\ f_{13}^{-1} &= \cos \psi \sin \mu \cos \nu - \sin \psi \sin \theta_K \sin \nu + \sin \psi \cos \theta_K \cos \mu \cos \nu, \\ f_{21}^{-1} &= \sin \theta_K \sin \mu, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 f_{22}^{-1} &= \cos \theta_R \cos v - \sin \theta_R \cos \mu \sin v, \\
 f_{23}^{-1} &= -\cos \theta_R \sin v - \sin \theta_R \cos \mu \cos v, \\
 f_{31}^{-1} &= -\sin \psi \cos \mu - \cos \psi \cos \theta_R \sin \mu, \\
 f_{32}^{-1} &= -\sin \psi \sin \mu \sin v + \cos \psi \sin \theta_R \cos v + \cos \psi \cos \theta_R \cos \mu \sin v, \\
 f_{33}^{-1} &= -\sin \psi \sin \mu \cos v - \cos \psi \sin \theta_R \sin v + \cos \psi \cos \theta_R \cos \mu \cos v.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

Сопоставляя (6.77) и (6.73), видим, что для приведения внутреннего кольца с площадкой в ПГ, т. е. для совмещения осей $Ox_2y_2z_2$ с $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, должно выполняться условие

$$B'_1 = F_1^{-1} \quad (6.80)$$

и, следовательно,

$$b'_{1ij} = f_{1ij}^{-1} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6.81)$$

На основании (6.81), имеем

$$b'_{123} = f_{123}^{-1} = f_{132}, \quad b'_{131} = f_{131}^{-1} = f_{113}$$

или, принимая во внимание (6.74) и (6.79), получим

$$\left. \begin{aligned}
 \sin \alpha' &= -(\sin \theta_R \cos \mu \cos v + \cos \theta_R \sin v), \\
 \sin \beta' &= -(\sin \psi \cos \mu + \cos \psi \cos \theta_R \sin \mu),
 \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

откуда следует, что углы поворотов α' , β' колец подвеса зависят от углов качки ψ , θ_R и ошибок установки подвеса μ , v . Если в (6.82) положить $\mu = v = 0$, то получим

$$\alpha' = \alpha = -\theta_R, \quad \beta' = \beta = -\psi, \quad (6.83)$$

т. е. формулы (6.17) для параметров стабилизации при точной установке корпуса подвеса на корабле.

Пользуясь формулами (6.82), определим ошибки горизонтальной стабилизации внутреннего кольца. При учете слагаемых первого порядка малости имеем

$$\alpha' = -(\theta_R + v), \quad \beta' = -(\psi + \mu), \quad (6.84)$$

что непосредственно следует из рис. 6.18.

Так как в действительности на вращение колец подвеса вводятся параметры стабилизации α и β (6.17), то погрешности стабилизации колец подвеса будут

$$\delta\alpha = \alpha - \alpha', \quad \delta\beta = \beta - \beta', \quad (6.85)$$

или с учетом (6.84)

$$\delta\alpha = v, \quad \delta\beta = \mu, \quad (6.86)$$

т. е. они непосредственно равны ошибкам в установке корпуса карданова подвеса.

Определим погрешности $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ с учетом слагаемых более высокого порядка малости. Из формул (6.82) имеем

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= - \left[\theta_K \left(1 - \frac{\mu^2 + \nu^2}{2} \right) + \nu \left(1 - \frac{\theta_K^2}{2} \right) \right], \\ \beta' &= - \left[\psi \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \right) + \mu \left(1 - \frac{\theta_K^2 + \psi^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

Так как ошибки установки корпуса подвеса μ и ν не превосходят нескольких угловых минут, то формулы (6.87) можно упростить:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= - \left[\theta_K + \nu \left(1 - \frac{\theta_K^2}{2} \right) \right], \\ \beta' &= - \left[\psi + \mu \left(1 - \frac{\theta_K^2 + \psi^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

Принимая во внимание (6.85), (6.88) и (6.17), получим следующие формулы для погрешностей стабилизации колец подвеса:

$$\delta\alpha = \nu \left(1 - \frac{\theta_K^2}{2} \right), \quad \delta\beta = \mu \left(1 - \frac{\theta_K^2 + \psi^2}{2} \right). \quad (6.89)$$

Пример 6.3. Вычислить погрешности горизонтальной стабилизации внутреннего кольца карданова подвеса, обусловленные ошибками установки корпуса подвеса на корабле для следующих исходных данных: $\psi = 5^\circ$; $\theta_K = 15^\circ$, $\mu = \nu = 2'$.

Решение.

1) По формулам (6.86) находим

$$\delta\alpha = \delta\beta = 2'.$$

2) Пользуясь выражениями (6.89), имеем

$$\delta\alpha = 1,93', \quad \delta\beta = 1,92'.$$

Из примера видно, что обычно для расчета ошибок горизонтальной стабилизации можно пользоваться формулами (6.86) первого приближения.

§ 6.5. Геометрия и кинематика наведения ИУ при различных схемах непосредственной стабилизации

1. Характеристика схем наведения ИУ. Геометрия и кинематика наведения ИУ при непосредственной стабилизации существенно зависят от типа применяемого карданова подвеса, числа осей подвеса и их ориентации по отношению к корабельным осям.

Анализ схем наведения ИУ с непосредственной стабилизацией (в основном антенн РЛС) приводится в ряде работ (см., например, [6, 23, 27, 53, 58, 89]). Подобные схемы наведения применяются в различных пеленгационных и в других корабельных устройствах.

В зависимости от числа осей стабилизации карданова подвеса будем различать ИУ с одноосной, двухосной и трехосной стабилизацией.

На рис. 6.19 [53] приведены схемы одноосной стабилизации ИУ (антенны). Здесь имеется ось 1 стабилизации по бортовой качке,

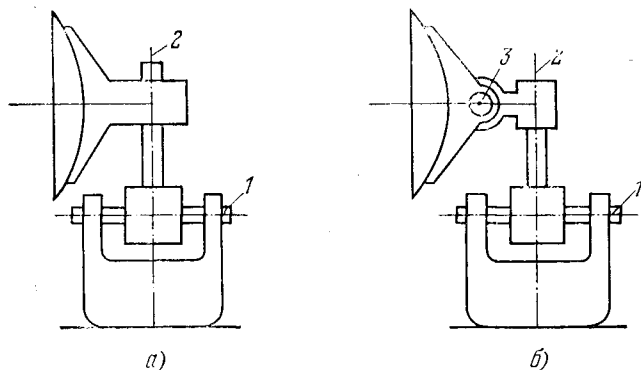


Рис. 6.19. Схемы одноосной стабилизации ИУ; 1 — ось стабилизации по бортовой качке, 2 — ось ГН, 3 — ось ВН.

которая параллельна продольной оси корабля, ИУ установлено на наружном кардановом кольце. Параметр стабилизации, поступающий на вращение наружного кольца, в согласии с (6.17) $\alpha = -\theta_k$. На рис. 6.19, а ИУ имеет ось 2 ГН, которая перпендикулярна к плоскости наружного кольца, а на рис. 6.19, б, помимо оси 2 ГН, имеется еще ось 3 ВН, параллельная плоскости наружного кольца. В работе [53] указано, что схема на рис. 6.19, а является наиболее простой схемой стабилизации антенн. Хотя здесь не учитывается угол килевой качки, но при достаточной ширине диаграммы направленности это обстоятельство не играет большой роли. Благодаря наличию стабилизации по бортовой качке ГН антенны существенно облегчается, особенно при значительных углах места ориентира (рис. 6.19, б). В книге [89] исследуются зоны обнаружения ориентиров, отмечается определенный выигрыш в дальности и в вероятности обнаружения ориентиров за счет введения стабилизации.

На рис. 6.20 [53] дана схема двухосной стабилизации ИУ. Здесь имеется ось 1 стабилизации по бортовой качке и ось 2 стабилизации по килевой качке, ИУ установлено на внутреннем

кольце подвеса. Параметры стабилизации, используемые для вращения наружного и внутреннего кардановых колец, в согласии с (6.17) $\alpha = -\theta_k$ и $\beta = -\psi$. ИУ имеет ось 3 ГН, которая при точной стабилизации перпендикулярна к ПГ, и ось 4 ВН, параллельную ПГ. Следовательно, наведение ИУ осуществляется на стабилизированные курсовые углы и углы места, а скорости и ускорения наведения не зависят от угловых скоростей и ускорений качки, а также от угла места. Поэтому становится возможным слежение за

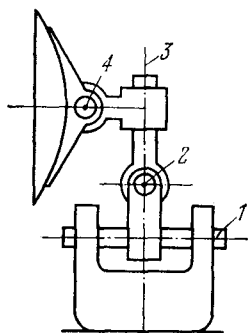


Рис. 6.20. Схема двухосной стабилизации ИУ; 1 — ось стабилизации по бортовой качке, 2 — ось стабилизации по килевой качке, 3 — ось ГН, 4 — ось ВН.

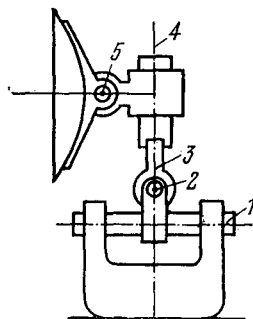


Рис. 6.21. Схема трехосной стабилизации ИУ; 1 — ось стабилизации по бортовой качке, 2 — ось стабилизации по килевой качке, 3 — ось стабилизации по рысканию, 4 — ось ГН, 5 — ось ВН.

ориентирами, которые расположены в околоризонтовой области. Иногда схема на рис. 6.20 называется четырехосной, так как имеются две оси стабилизации и две оси наведения. Практическое осуществление подобной схемы стабилизации значительно сложнее, чем схемы на рис. 6.19. Однако, как указано в работе [23], схема на рис. 6.20 обеспечивает автосопровождение ориентиров, находящихся под большими углами места; кроме того, здесь не требуется ПК, который присущ схемам наведения ИУ с косвенной стабилизацией. Один из недостатков двухосной схемы стабилизации состоит в том, что в ней отсутствует азимутальная стабилизация; поэтому в ГН измерительного устройства приходится учитывать угол рыскания корабля.

На рис. 6.21 [53, 89] приведена схема трехосной стабилизации ИУ. Здесь имеется три оси стабилизации: 1 по бортовой качке, 2 по килевой качке, 3 по рысканию. Параметрами стабилизации,

используемыми для вращения наружного, внутреннего колец и площадки, в согласии с (6.17) и (6.22) служат углы $\alpha = -\theta_K$, $\beta = -\psi$, $\chi = -\varphi_P$. ИУ имеет ось 4 ГН и ось 5 ВН. Заметим, что горизонтальное наведение ИУ может осуществляться также путем вращения площадки, азимутальная стабилизация которой достигается в этом случае введем в привод вращения площадки угла $\chi = -\varphi_P$ через дифференциал.

На рис. 6.22 [53, 89] дана схема трехосной стабилизации ИУ с поворотным кардановым подвесом, аналогичная схеме, приведенной на рис. 6.10. Здесь имеется ось 1 стабилизации по углу НОЦ (ось поперечной стабилизации), ось 2 стабилизации по углу крена в ПВ, ось 3 ГН в плоскости горизонта и стабилизации по рысканию. В качестве параметров стабилизации, используемых для вращения наружного, внутреннего колец и площадки, в согласии с (6.47) и (6.48) служат углы $\alpha = -\rho_{К.В.}^T$, $\beta = -e_{В.}^T$, $\chi = -\varphi_P$. В данной схеме карданова вилка имеет ось 4 ГН в ПП, а ИУ — ось 5 ВН, которая параллельна ПГ. Недостатком рассматриваемой схемы стабилизации является более сложная конструкция поворотного карданова подвеса по сравнению с неподвижным, а также извест-

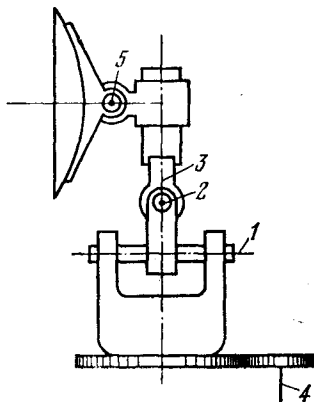


Рис. 6.22. Схема трехосной стабилизации ИУ с поворотным кардановым подвесом; 1 — ось стабилизации по углу НОЦ, 2 — ось стабилизации по углу крена, 3 — ось ГН в ПГ, 4 — ось ГН в ПП, 5 — ось ВН.

ная трудность в определении параметров $\alpha = -\rho_{К.В.}^T$, $\beta = -e_{В.}^T$. Поэтому схема стабилизации ИУ, приведенная на рис. 6.22, применяется сравнительно редко.

2. Геометрия и кинематика ИУ с одноосной схемой непосредственной стабилизации. Рассмотрим схему на рис. 6.19, а, обеспечивающую стабилизацию ИУ по бортовой качке. Для общности примем, что ИУ имеет оси ГН и ВН. На рис. 6.23 дана полуподвижная система координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, относительно нее положение корабельных осей $Oxyz$ определяется углами качки ψ и θ_K . Предположим, что ориентир G находится в пространстве на направлении OL . Это направление необходимо придать, например, оси Ox_B визира или антенны. Положение оси OL относительно осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ определяется стабилизированным курсовым углом $q_c = A_2 F_0$ и стабилизированным углом места $\epsilon_c = F_0 L$. Найдем, какие углы будут измеряться с помощью антенны, установленной в кардановом кольце, которое стабилизируется по бортовой качке. Пусть

главная ось стабилизации aa подвеса направлена вдоль продольной оси корабля Ox . Повернем кольцо вокруг оси aa (Ox) на угол $\alpha = -\theta_K$; тогда координатная система, связанная с кардановым кольцом, займет положение $Ox_1y_1z_1$, а плоскость, совмещенная с

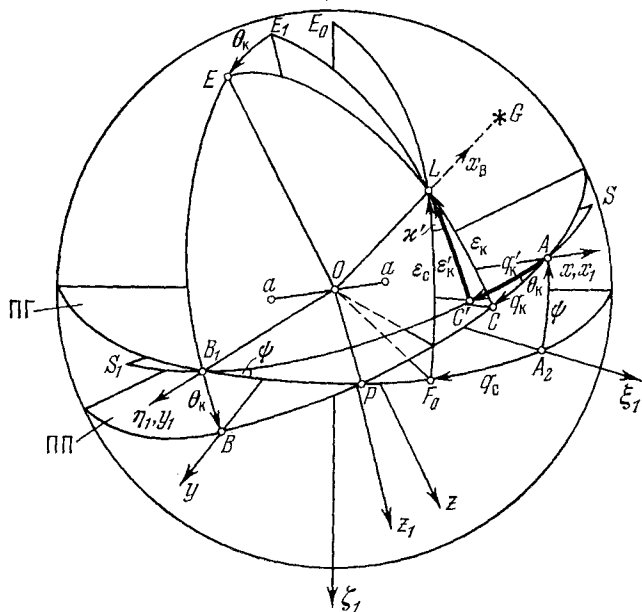


Рис. 6.23. К геометрии одноосной стабилизации ИУ.

кольцом, — положение OSS_1 , т. е. будет проходить через оси OA и OB_1 . Плоскость OSS_1 не совпадает ни с ПП, ни с ПГ, она составляет с ПГ угол ψ , а с ПП угол θ_K . Если на площадке, связанной с наружным кольцом, установить антенну, то для приведения ее луча в направление OL необходимо сообщить ей ГН на курсовой угол $q'_K = AC'$ и ВН на угол места $\epsilon'_K = C'L$, которые отличаются от стабилизированных углов q_C и ϵ_C , а также от нестабилизированных углов $q_K = AC$ и $\epsilon_K = CL$. Формулы для q'_K и ϵ'_K наиболее просто можно получить из выражений (5.67) и (5.66), если в них положить $\theta_K = 0$; тогда

$$\operatorname{tg} q'_K = \frac{\operatorname{tg} q_C}{\cos \psi + \frac{\operatorname{tg} \epsilon_C}{\cos q_C} \sin \psi}, \quad (6.90)$$

$$\sin \epsilon'_K = \sin \epsilon_C \cos \psi - \cos \epsilon_C \cos q_C \sin \psi. \quad (6.91)$$

Если килевая качка отсутствует ($\psi = 0$), то

$$q'_k = q_c, \quad \epsilon'_k = \epsilon_c, \quad (6.92)$$

т. е. антенна, установленная на стабилизированном по бортовой качке основании, будет непосредственно измерять стабилизированные курсовой угол q_c и угол места ϵ_c .

Рассмотрим случай, когда ориентир G (рис. 6.23) находится в ПГ на направлении OF_0 ; тогда, полагая в формулах (6.90) и (6.91) $\epsilon_c = 0$, получим

$$\operatorname{tg} q'_k = \frac{\operatorname{tg} q_c}{\cos \psi}, \quad (6.93)$$

$$\sin \epsilon'_k = -\cos q_c \sin \psi. \quad (6.94)$$

Из формулы (6.93) следует, что при малых углах килевой качки угол q'_k мало отличается от угла q_c . Выражение (6.94) показывает, что отклонение оси луча от направления на ориентир по углу места не превосходит угла килевой качки. Эти обстоятельства оправдывают рекомендации [53, 89] о целесообразности в некоторых случаях применения одноосной стабилизации антенны по бортовой качке.

При данной схеме стабилизации возникает также наклон κ' (рис. 6.23) плоскости симметрии диаграммы направленности OE_1LC' относительно ПВ OE_0LF_0 . Выражение для κ' можно получить из формулы (5.79), если в ней положить $\theta_k = 0$; тогда имеем

$$\operatorname{tg} \kappa' = \frac{\sin q_c \sin \psi}{\sin \epsilon_c \cos q_c \sin \psi + \cos \epsilon_c \cos \psi}, \quad (6.95)$$

откуда следует, что при $\psi = 0$ угол $\kappa' = 0$. При $\epsilon_c = 0$ (ориентир G находится в ПГ) получим

$$\operatorname{tg} \kappa' = \sin q_c \operatorname{tg} \psi, \quad (6.96)$$

т. е. угол κ' не превосходит угла килевой качки ψ .

Для определения угловых скоростей $\dot{\epsilon}'_k$, \dot{q}'_k и угловых ускорений $\ddot{\epsilon}'_k$, \ddot{q}'_k наведения антенны на качке можно воспользоваться формулами (5.104) — (5.107); положив в них $\theta_k = \bar{\theta}_k = 0$, получим

$$\dot{\epsilon}'_k = -\dot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (6.97)$$

$$\dot{q}'_k = -\dot{\varphi}_p - \dot{\psi} \sin q_{c0} \operatorname{tg} \epsilon_c, \quad (6.98)$$

$$\ddot{\epsilon}'_k = -\ddot{\psi} \cos q_{c0}, \quad (6.99)$$

$$\ddot{q}'_k = -\ddot{\varphi}_p - \ddot{\psi} \sin q_{c0} \operatorname{tg} \epsilon_c, \quad (6.100)$$

откуда следует, что угловые скорости и ускорения ВН антенны зависят лишь от изменения угла килевой качки, а угловые скорости и ускорения ГН — от изменения угла рыскания и угла

килевой качки. Если $\epsilon_c = 0$, то вместо (6.98) и (6.100) получим

$$\dot{q}'_k = -\dot{\varphi}_p, \quad \ddot{q}'_k = -\ddot{\varphi}_p, \quad (6.101)$$

т. е. угловые скорости и ускорения ГН будут зависеть лишь от изменения угла рыскания.

Сопоставление формул (6.97) — (6.100) с (5.104) — (5.107) указывает на целесообразность стабилизации антенны по бортовой качке.

3. Геометрия и кинематика ИУ с двухосной и трехосной схемой непосредственной стабилизации. Схема двухосной стабилизации ИУ приведена на рис. 6.20 (см. также рис. 6.1, а). На внутреннем кольце подвеса установлено ИУ, например визир. Пусть

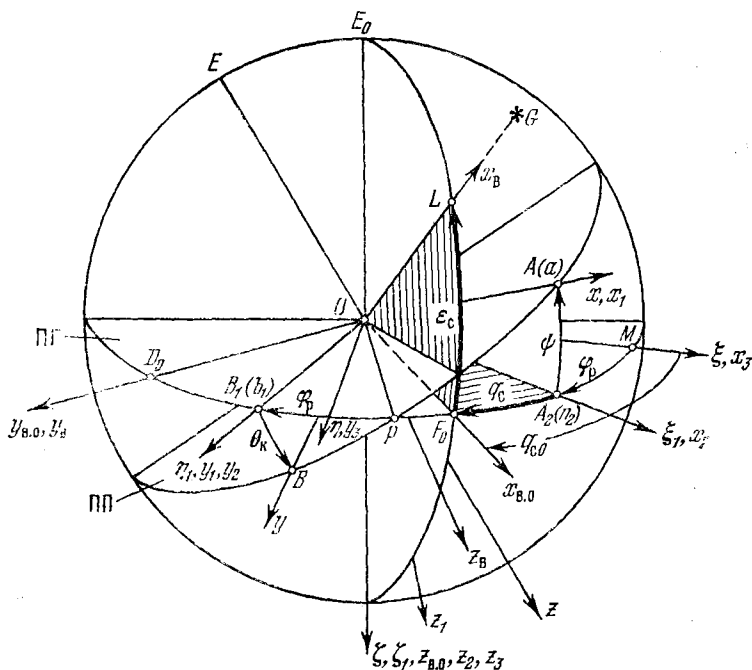


Рис. 6.24. К геометрии двухосной и трехосной стабилизации ИУ.

главная ось стабилизации aa ориентирована вдоль продольной оси корабля Ox (рис. 6.24). Для приведения внутреннего кольца в ПГ вначале повернем наружное кольцо вокруг оси aa (Ox) на угол $\alpha = -\theta_k$. При этом внутренняя ось стабилизации придет в положение Ob_1 (OB_1), а система координат, связанная с наружным кольцом, займет положение $Ox_1y_1z_1$. Далее повернем внутреннее кольцо вокруг оси Ob_1 (OB_1) на угол $\beta = -\psi$; оно придет в

ПГ, нулевая ось займет положение On_2 , совпадающее с проекцией OA_2 продольной оси корабля Ox на ПГ, а система координат, связанная с внутренним кольцом, примет положение $Ox_2y_2z_2$.

Так как визир установлен на внутреннем кольце подвеса, то его ГН и ВН будут осуществляться в координатной системе $Ox_2y_2z_2$. Для приведения линии визирования Ox_B в направление OL на ориентир G необходимо повернуть визир в ПГ на стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2F_0$ и сообщить визиру вертикальное наведение в ПВ OE_0LF_0 на стабилизированный угол места $\epsilon_c = F_0L$. При этом системы координат $Ox_By_Bz_B$ и $Ox_{B.0}y_{B.0}z_{B.0}$, связанные соответственно с визиром и с его основанием, займут положение, показанное на рис. 6.24. Следовательно, визир будет непосредственно измерять стабилизированные углы q_c и ϵ_c . Легко видеть, что угловые скорости и ускорения ВН от качки не зависят, т. е.

$$\dot{\epsilon}_c = \ddot{\epsilon}_c = 0. \quad (6.102)$$

Иначе обстоит дело с ГН визира. Здесь сказывается рыскание корабля, так как нуль отсчета курсового угла (точка A_2) перемещается в ПГ. Действительно, в согласии с формулой (5.1)

$$q_c = q_{c0} - \Phi_p, \quad (6.103)$$

откуда следует, что (при $q_{c0} = \text{const}$)

$$\dot{q}_c = -\dot{\Phi}_p, \quad \ddot{q}_c = -\ddot{\Phi}_p. \quad (6.104)$$

Таким образом, в схеме двухосной непосредственной стабилизации оператору ГН приходится самому «выбирать» рыскание корабля, что оказывает влияние на точность и плавность измерения угла q_c .

Перейдем к анализу геометрии и кинематики схемы трехосной стабилизации ИУ (рис. 6.21 и 6.1, б). В отличие от предыдущего случая, предполагается, что во внутреннем кольце подвеса установлена площадка. Пусть главная ось стабилизации aa направлена вдоль оси Ox (рис. 6.24). Для приведения внутреннего кольца в ПГ, а площадки в исходное азимутальное направление $O\xi$, которое совпадает с линией заданного кораблю курса, необходимо повернуть наружное кольцо вокруг оси aa (Ox) на угол $\alpha = -\theta_K$, внутреннее кольцо вокруг оси Ob_1 (OB_1) на угол $\beta = -\psi$ и площадку вокруг оси $O\zeta$ на угол $\chi = -\Phi_p$. При этом система координат, связанная с площадкой, займет положение $Ox_3y_3z_3$, показанное на рис. 6.24. Так как визир установлен на площадке, то его ГН и ВН будут осуществляться в осях $Ox_3y_3z_3$. Для приведения линии визирования в направление OL на ориентир G необходимо сообщить визиру ГН на курсовой угол $q_{c0} = MF_0$ и ВН на угол места $\epsilon_c = F_0L$. В данном случае курсовой угол и угол места на ориентир определяются в земной системе координат

$O\xi\eta\zeta$, с которой совмещены оси площадки $Ox_3y_3z_3$. При этом обеспечивается высокая точность и плавность наведения визира на ориентир. В случае трехосной схемы стабилизации угловые скорости и ускорения ВН на качке определяются зависимостями (6.102). Аналогичным образом от качки и рыскания корабля не зависят угловые скорости и ускорения ГН.

$$\dot{q}_{c0} = \ddot{q}_{c0} = 0. \quad (6.105)$$

Заметим, что в схеме с двухосной стабилизацией можно также определить курсовой угол $q_{c0} = MF_0$. Для этого необходимо в привод горизонтального наведения ИУ вводить угол рыскания, например, через дифференциал. Выбор двухосного или трехосного варианта стабилизации зависит от ряда факторов.

Перейдем к анализу геометрии и кинематики трехосной стабилизации ИУ с поворотным кардановым подвесом (рис. 6.22 и 6.10). Пусть в исходный момент главная ось стабилизации aa (рис. 6.10) направлена вдоль продольной оси корабля Ox (рис. 5.11). Повернем карданову вилку 2 в ПП так, чтобы ось aa совпала с линией OF'_1 пересечения ПВ OE_0LF_0 с ПГ, т. е. на курсовой угол в ПП $q_k^T = AF'_1$. Для приведения внутреннего кольца в ПГ необходимо наружное кольцо подвеса повернуть вокруг оси aa (OF'_1) на угол $\alpha = -\rho_{к.в.}^T$, а внутреннее кольцо — вокруг оси bb , занявшей горизонтальное положение OD'_0 , на угол $\beta = -e_b^T$. При этом внутреннее кольцо придет в ПГ, а его нулевая ось nn будет совпадать с линией OF_0 . Если на внутреннем кольце установить визир, то при повороте кардановой вилки на угол $q_k^T = AF'_1$ визир вместе с внутренним кольцом повернется на стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2F_0$. Если визир поместить на площадку и поворачивать ее в азимуте на угол $\chi = -\varphi_p$, то визир будет определять курсовой угол $q_{c0} = MF_0$. При ВН визира будет измеряться стабилизированный угол места $\varepsilon_c = F_0L$. Таким образом, в трехосной системе непосредственной стабилизации ИУ с поворотным кардановым подвесом могут быть определены те же стабилизированные углы q_{c0} , ε_c , что и в случае неподвижного подвеса. Вопросы геометрии и кинематики наведения ИУ с трехосным подвесом подробно были рассмотрены в § 5.3, п. 4 и § 5.4, п. 3.

§ 6.6. Схемы стабилизации ИУ при непосредственном методе

1. Геометрия определения углов качки и рыскания гироскопическими устройствами. Параметрами непосредственной стабилизации ИУ являются углы качки корабля или другие углы наклона ПП к горизонту, а также углы рыскания или курса. Для определения углов качки служат ГВ. Другие углы наклона ПП к горизон-

ту измеряются с помощью ГВ с поворотным кардановым подвесом или вырабатываются в ПК, в который поступают углы качки от корабельной ГВ. Углы рыскания корабля определяются с помощью ГА или комбинированного прибора ГАГ, который дает углы качки и рыскания. Если используемый в ГАГ гироазимут на основании информации о курсе корабля привести в плоскость меридиана, то ГА в течение некоторого промежутка времени будет вырабатывать текущий курс корабля. Значение курса можно также получить от корабельного ГК. При построении схем стабилизации необходимо иметь четкое представление о геометрии этих ГУ.

Как известно [27, 70], геометрия ГУ, т. е. характер снимаемых с него данных, зависит от типа применяемого в нем карданова подвеса и ориентации его осей. В корабельных ГВ наибольшее применение получил карданов подвес с механизмом вращения простейшего типа (рис. 6.14). Схема ГВ с подобным МВ дана на рис. 6.25

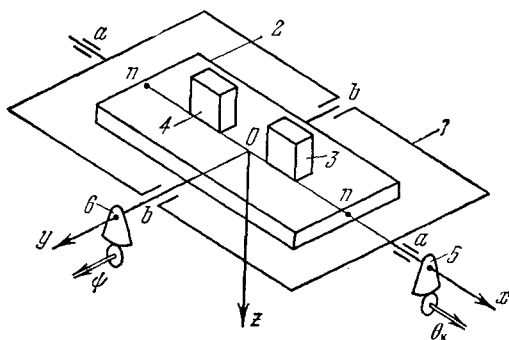


Рис. 6.25. Гировертикаль с простейшим кардановым подвесом.

[27]. Здесь 1 — наружное карданово кольцо, 2 — внутреннее кольцо на площадке которого установлены гироскопы 3 и 4, удерживающие кольцо в ПГ. Предположим, что главная ось стабилизации aa направлена по продольной оси корабля Ox . В § 6.4 было показано, что в рассматриваемом случае для приведения внутреннего кольца с площадкой в ПГ надлежит наружное кольцо повернуть на угол $\alpha = -\theta_k$, а внутреннее кольцо — на угол $\beta = -\psi$. Очевидно, что если в ГВ (рис. 6.25) внутреннее кольцо и площадка 2 с помощью гироскопов 3, 4 и соответствующей системы коррекции сохраняют на качке горизонтальное положение, то при этом угол поворота наружного кольца вокруг оси aa равен углу бортовой качки θ_k , а угол поворота внутреннего кольца вокруг оси bb — углу килевой качки ψ . Эти углы через зубчатые секторы 5 и 6 (связанные жестко с кольцами 1 и 2) с помощью соответствующих датчиков углов (на рис. 6.25 не показаны) передаются в систему стабилизации ИУ. Таким образом, при использовании в ГВ

простейшего карданова подвеса и ориентации главной оси стабилизации вдоль продольной оси корабля прибор будет выдавать углы качки θ_K и ψ . Аналогичным образом на основании материалов § 6.4 можно показать, что та же ГВ при установке главной оси стабилизации aa вдоль поперечной оси корабля Oy будет определять углы качки ψ_K и θ .

Рассмотрим геометрию ГВ с бикардановым подвесом (рис. 6.26) [27]. Здесь те же элементы подвеса, которые содержатся в схеме на рис. 6.15: 1 — наружное карданово кольцо, 2 — внутреннее кольцо (площадка), 3 — шток, 4 — бугель, 5 — вилка, 10 — подшипник. На площадке кольца 2 установлены гироскопы 6 и 7, которые удерживают кольцо и площадку в ПГ. Пусть главная ось стабилизации aa ориентирована по продольной оси корабля Ox . В § 6.4 было показано, что при данной установке главной оси

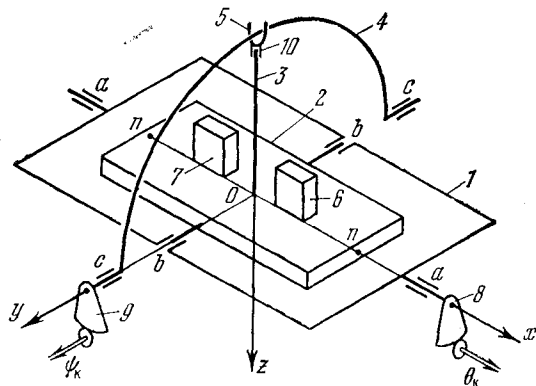


Рис. 6.26. Гировертикаль с бикардановым подвесом.

стабилизации карданова подвеса с бугелем для приведения внутреннего кольца с площадкой в ПГ надлежит наружное кольцо повернуть вокруг главной оси стабилизации aa на угол $\alpha = -\theta_K$, а бугель — вокруг оси cc на угол $\beta_1 = -\psi_K$; при этом внутреннее кольцо повернется вокруг оси bb на угол $\beta = -\psi$. Очевидно, что если в ГВ с бикардановым подвесом (рис. 6.26) внутреннее кольцо и площадка 2 благодаря гироскопическим свойствам прибора сохраняют на качке горизонтальное положение, то при этом угол поворота наружного кольца вокруг оси aa равен углу бортовой качки θ_K , а угол поворота бугеля вокруг оси cc — углу килевой качки ψ_K . Эти углы через зубчатые секторы 8 и 9 (связанные жестко с кольцом 1 и бугелем 4) с помощью соответствующих датчиков углов (на рис. 6.26 не показаны) передаются в систему стабилизации ИУ. Таким образом, при использовании в ГВ бикарданова подвеса и ориентации главной оси стабилизации вдоль про-

дольной оси корабля прибор будет выдавать корабельные углы качки θ_k и ψ_k . На основании анализа бикарданова подвеса, приведенного в § 6.4, легко показать, что те же углы качки будет определять ГВ с бикардановым подвесом, если главную ось стабилизации ориентировать вдоль поперечной оси корабля.

Заметим, что в ГВ с кардановым подвесом с бугелем принципиально могут быть определены углы качки ψ и θ в вертикальных плоскостях.

Иногда в системах стабилизации применяют ГВ поворотного типа [53, 76]. Подобная ГВ позволяет определять различные углы наклона палубы к ПГ. Рассмотрим ГВ с простейшим кардановым подвесом (рис. 6.25). Установим подвес в карданову вилку, как это показано на рис. 6.10. Если на поворот кардановой вилки в ПП ввести курсовой угол $q_k^T = AF_1'$ (рис. 5.11), то ось aa будет совмещена с линией OF_1' . Так как в ГВ площадка 2 (рис. 6.25) удерживается в ПГ, то при этом наружное кольцо подвеса повернется вокруг оси aa на угол $D_1'D_0' = -\rho_{k.v}^T$ (рис. 5.11), а внутреннее кольцо — вокруг оси bb на угол $F_1F_0 = -e_b^T$. Таким образом, в данном случае ГВ с поворотным кардановым подвесом простейшего типа будет определять углы наклона ПП $\rho_{k.v}^T$ и e_b^T .

На основании изложенного выше приходим к весьма важному в теории местной стабилизации выводу: углы наклона плоскости палубы к горизонту, необходимые для стабилизации ИУ, могут быть получены от ГВ, если:

- 1) в ГВ применен карданов подвес с механизмом вращения того же типа, какой используется у стабилизируемого ИУ;
- 2) главные оси стабилизации кардановых подвесов ГВ и стабилизируемого ИУ параллельны.

Выполнение этих простых положений необходимо для правильного построения систем стабилизации на корабле.

Перейдем к анализу геометрии ГАГ, который состоит из ГВ и ГА (рис. 6.27) [27, 71]. Предположим, в ГВ применен простейший карданов подвес (рис. 6.25), при этом главная ось стабилизации aa установлена вдоль продольной оси корабля Ox . Тогда, как было показано выше, ГВ будет определять углы качки θ_k и ψ . На стабилизированном относительно ПГ основании ГВ установлен ГА, который имеет свободу вращения в ПГ (в азимуте) вокруг вертикали. В этом отношении геометрия ГА аналогична геометрии стабилизируемой площадки, установленной в кардановом подвесе (рис. 6.1, б). Предположим, что в исходный момент ось O_1x_r гироскопа ГА совмещена с линией $O\xi$ (рис. 6.7) заданного кораблю курса. При наличии качки и рыскания корабля внутреннее кольцо подвеса ГВ будет сохранять горизонтальное положение, нулевая ось n_2n_2 направлена вдоль линии OA_2 , а ось O_1x_r гироскопа ГА — вдоль $O\xi$. Следовательно, относительный поворот подвеса

ГА и внутреннего кольца подвеса ГВ составит в ПГ угол рыскания $\varphi_p = MA_2$, который будет сниматься с ГА. Следовательно, ГАГ определяет углы качки и рыскания корабля $\theta_k, \psi, \varphi_p$. С помощью ГА в течение небольшого промежутка времени можно получать текущее значение курса корабля. Для этого необходимо

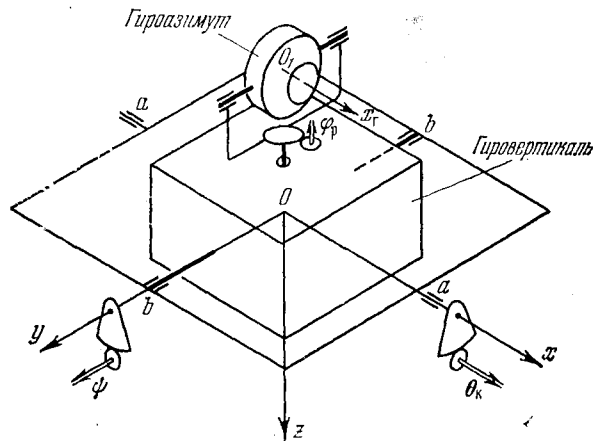


Рис. 6.27. Гироазимутгоризонт.

в ГА ввести информацию о курсе от ГК. При этом ось O_1x_G ГА будет совмещена с направлением ON на истинный меридиан (рис. 1.4, в), а относительный поворот подвеса ГА и внутреннего кольца подвеса ГВ составит в ПГ текущий курс корабля $K = NA_2$, который может быть снят с ГА.

№ 2. Схема одноосной стабилизации ИУ. Рассмотрим принципиальную схему [53, 89] одноосной стабилизации ИУ (рис. 6.28),

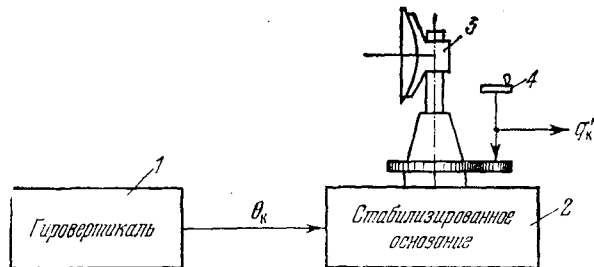


Рис. 6.28. Принципиальная схема одноосной стабилизации ИУ.

в качестве которого имеется в виду антенна с непосредственной стабилизацией по бортовой качке и ГН (рис. 6.19, а). Гироверти-

каль 1 (рис. 6.28) определяет угол бортовой качки θ_k , который с помощью следящего привода вводится на стабилизированное основание 2, представляющее собой одноосный подвес. На основании 2 установлена антенна 3, которая наводится по курсовому углу с помощью маховика 4. Как было показано в § 6.5, п. 2, при этом измеряется курсовой угол $q'_k = AC'$ (рис. 6.23). Для простоты будем считать, что ориентир находится в ПГ. Тогда измеренный курсовой угол $q'_k = AC'$ связан со стабилизированным курсовым углом $q_c = A_2 F_0$ формулой (6.93). Погрешность в определении курсового угла с помощью антенны, имеющей стабилизацию по бортовой качке, будет

$$\delta q'_k = q'_k - q_c. \quad (6.106)$$

Пример 6.4. Определить ошибку в курсовом угле, определяемом с помощью антенны РЛС, имеющей стабилизацию по бортовой качке для следующих исходных данных: $q_c = 45^\circ$, $\psi = 0^\circ \div 10^\circ$.

Решение. 1) По формуле (6.93) определяем значения курсового угла q'_k для различных величин углов ψ (см. табл. 6.1).

2) По формуле (6.106) находим погрешности $\delta q'_k$ в курсовом угле, которые приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

ψ	0°	2°	4°	6°	8°	10°
q'_k	45°	$45^\circ 01'$	$45^\circ 04'$	$45^\circ 09'$	$45^\circ 17'$	$45^\circ 26'$
$\delta q'_k$	$0'$	$1'$	$4'$	$9'$	$17'$	$26'$

Из примера следует, что при значительных углах килевой качки погрешность $\delta q'_k$ в курсовом угле может оказаться существенной. Поэтому подобный способ непосредственной стабилизации антенн применим при достаточной ширине диаграммы направленности в горизонтальной плоскости.

При наличии килевой качки ось луча антенны будет отклонена от ПГ, в которой находится ориентир, на угол ϵ'_k , определяемый формулой (6.94). Так как угол ϵ'_k не превосходит угла килевой качки ψ , то ширина диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости должна быть не меньше 2ψ .

Наконец, следует отметить, что при данном способе стабилизации возникает наклон χ' плоскости симметрии антенны на качке, определяемый формулой (6.96) и не превосходящий также угла килевой качки.

При данном способе стабилизации необходимые угловые скорости и ускорения ГН определяются рысканием корабля

(см. (6.101)). Числовые расчеты вероятностных характеристик указанных кинематических параметров аналогичны приведенным в примере 5.2.

3. Схемы двухосной и трехосной стабилизации ИУ. Перейдем к анализу принципиальных схем [23, 53, 89] двухосной и трехосной стабилизации (рис. 6.29). В качестве ИУ будем иметь в виду антенны с непосредственной стабилизацией по бортовой и килевой качке (рис. 6.20), а также по углам качки и по рысканию (рис. 6.21). В схеме двухосной стабилизации ГАГ 1 (рис. 6.29) определяет углы бортовой θ_k и килевой ψ качки, которые с помощью следящих

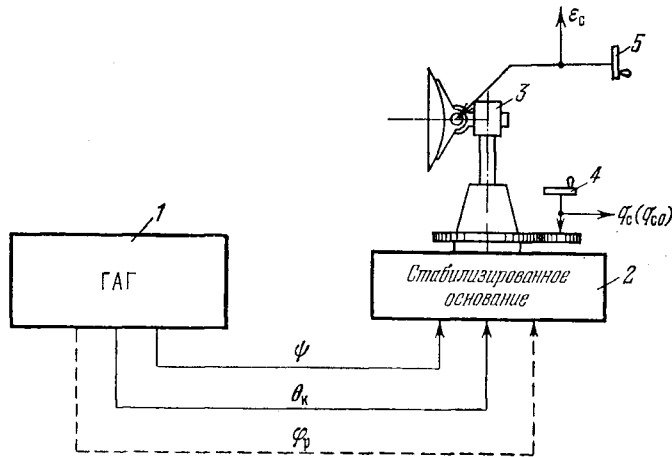


Рис. 6.29. Принципиальная схема двухосной (трехосной) стабилизации ИУ.

приводов вводятся на стабилизированное основание 2, представляющее собой двухосный карданов подвес простейшего типа (рис. 6.14). На основании 2 установлена антенна 3, которая наводится по курсовому углу с помощью маховика 4 и по углу места маховиком 5. При этом измеряются стабилизированный курсовой угол $q_c = A_2 F_0$ (рис. 6.24) и стабилизированный угол места $\epsilon_c = F_0 L$. Недостаток этой схемы состоит, как было указано в § 6.5, п. 3, в необходимости учета оператором ГН угла рыскания корабля. Он устраняется в схеме трехосной стабилизации (рис. 6.29). Ее отличие от схемы двухосной стабилизации состоит в том, что от ГАГ угол рыскания φ_p (штриховая линия) с помощью следящего привода вводится на азимутальный поворот площадки стабилизированного основания 2. В этом случае будет измеряться курсовой угол $q_{c0} = M F_0$ (рис. 6.24), на который не оказывает влияния рыскание корабля.

Рассмотрим принципиальную схему трехосной стабилизации с поворотным кардановым подвесом (рис. 6.30) [53, 89]. В качест-

во ИУ предполагается антенна с непосредственной стабилизацией по углу НОЦ, по углу крена в ПВ и по углу рыскания корабля (рис. 6.10 и 6.22). В данной схеме стабилизации (рис. 6.30) ГАГ с поворотным кардановым подвесом 1 определяет угол НОЦ $\rho_{К.В}^T = D_0 D_1'$ (рис. 5.11), угол крена в ПВ $e_B^T = F_0 F_1'$ и угол рыскания $\varphi_P = M A_2$, которые с помощью следящих приводов вводятся на стабилизированное основание 2, представляющее собой трехосный карданов подвес поворотного типа (рис. 6.10 и 6.22). Введение углов $\rho_{К.В}^T$ и e_B^T обеспечивает удержание внутреннего кольца и

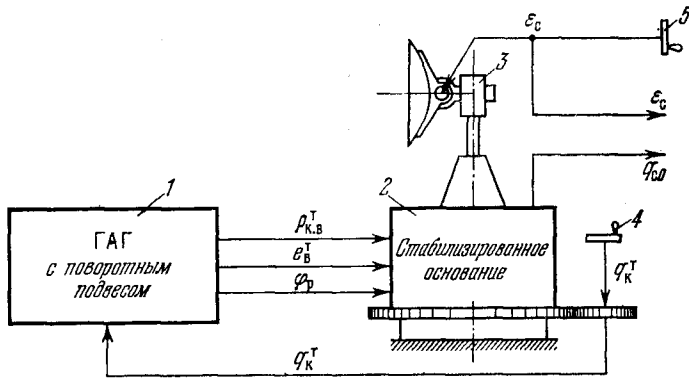


Рис. 6.30. Принципиальная схема трехосной стабилизации ИУ с поворотным кардановым подвесом.

площадки в ПГ, а введение угла рыскания на азимутальный поворот площадки ориентирует ее относительно заданного направления $O\xi$ (рис. 5.11). На основании 2 установлена антенна 3, которая наводится по курсовому углу вместе с основанием 2 с помощью маховика 4 и по углу места маховиком 5. Оператор ГН маховиком 4 поворачивает стабилизированное основание в ПП на угол $q_K^T = AF$ (рис. 5.11). При этом главная ось стабилизации подвеса совместится с линией OF_1' . Одновременно угол q_K^T с помощью следящего привода вводится на поворот карданова подвеса ГАГ, благодаря чему обеспечивается определение им углов наклона ПП $\rho_{К.В}^T$ и e_B^T . При повороте кардановой вилки (рис. 6.10) на угол q_K^T площадка (с учетом введения угла рыскания φ_P) повернется в ПГ на стабилизированный курсовой угол $q_{co} = MF_0$. Оператор ВН измеряет стабилизированный угол места $\epsilon_c = F_0 L$. Таким образом, и в данной схеме трехосной стабилизации ИУ будут определяться стабилизированные координаты ориентира G . Недостаток данной схемы состоит в том, что конструктивное осуществление стабилизированного основания и ГАГ с поворотными кардановыми подвесами

является более сложным, чем в случае неподвижных подвесов. Поэтому на практике подобная схема трехосной стабилизации применяется редко. В схеме на рис. 6.30 вместо ГАГ с поворотным кардановым подвесом может быть использован ГАГ с неподвижным подвесом, но в сочетании с ПК, решающим задачу преобразования углов качки θ_k , ψ в углы наклона ПП $\rho_{к.в.}^T$, e_B^T .

4. Примеры стабилизации ИУ непосредственным методом. Приведем краткие указания на несколько примеров практической реализации метода непосредственной стабилизации ИУ.* Первые схемы непосредственной стабилизации визирных или дальномерных постов на корабле были даны А. Н. Крыловым в конце 30-х годов [44]. Одна из предложенных им схем стабилизации показана

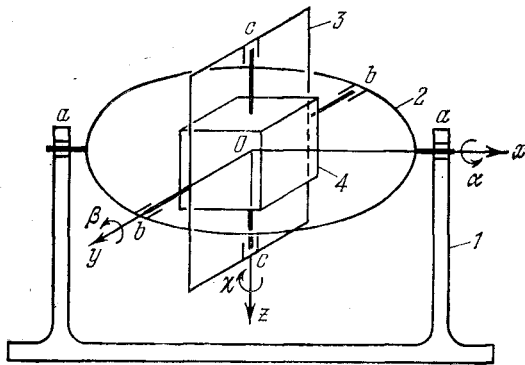


Рис. 6.31. Схема непосредственной стабилизации ИУ.

на рис. 6.31. Здесь на основании 1, жестко связанном с кораблем, установлен карданов подвес, состоящий из наружного кольца 2, внутреннего кольца 3 и стабилизируемого тела 4. Для удержания последнего в неизменном относительно ПГ и заданного азимута положении при ориентации главной оси стабилизации aa вдоль продольной оси корабля наружное кольцо надлежит повернуть вокруг оси aa на угол $\alpha = -\theta_k$, внутреннее кольцо — вокруг оси bb на угол $\beta = -\psi$ и стабилизируемое тело — вокруг оси cc на угол $\chi = -\varphi_p$. Углы θ_k , ψ и φ_p определяются ГВ и ГН. Если, как указано в [44], стабилизируемое тело представляет собой визирный или дальномерный пост, то расположенные в нем оптические приборы будут измерять стабилизированные угловые координаты пеленгуемого ориентира. В работе содержится ряд исследований динамики стабилизации (см. гл. 10).

В книге [63, стр. 14] приводится схема расположения приборов управления на корабле. К стабилизационным элементам здесь относятся ПК, преобразующий данные, вырабатываемые счетно-ре-

шающими приборами. Углы качки поступают в ПК от гиropоста, в котором установлены ГВ и ГК. В схеме используется также стабилизированный пост наводки, стабилизация которого относительно ПГ и заданного азимутального направления осуществляется по данным от ГВ и ГК. Для учета качки корабля в углах наведения, вырабатываемых счетно-решающими приборами, здесь также используется ПК.

В работе [6] рассмотрены различные вопросы динамического синтеза систем непосредственной стабилизации, даны их блок-схемы и структурные схемы, передаточные функции. Анализируются ошибки на качке при отсутствии трения и при учете моментов сил трения. Определяются параметры стабилизации, учитывается упругость элементов, люфты и др. Исследуется динамика системы стабилизации с различными гироскопами и др.

Обширная литература посвящена вопросам непосредственной стабилизации антенн РЛС, устанавливаемых на кораблях и на самолетах. Так, например, в книге [53] рассматриваются примеры одноосной стабилизации антенны, стабилизации антенны по бортовой и по килевой качке; дана схема полностью стабилизированной антенны трехосного типа и др. Здесь приводится ряд технических параметров систем стабилизации. В работе [89] рассмотрена схема стабилизации антенны по бортовой качке. Более подробные сведения по непосредственной стабилизации антенн судовых РЛС излагаются в книге [87]. Здесь рассматривается силовой привод стабилизации антенны по бортовой качке, приводятся элементы конструкции механической силовой части стабилизированного антенного поста. Излагаются вопросы проектирования и расчета следящих приводов судовых РЛС. Специальное внимание уделяется так называемому цифровому следящему приводу.

В книге [81] приводится схема стабилизации антенны доплеровской РЛС на самолете, осуществляемой с помощью следящих приводов от авиационной ГВ. Рассматриваются вопросы расчета такой схемы и методика оценки точности стабилизации. В этой же работе приводится несколько схем непосредственной стабилизации автоматического секстанта, телескопа, осуществляемой от ГВ и ГН. Ряд прикладных вопросов стабилизации оптических приборов подробно излагается в книге [3].

Для осуществления магнитных наблюдений на корабле, помимо методов косвенной стабилизации магнитометров (см. § 5.3, п. 5), применяются и методы непосредственной стабилизации. В работе [61] указывается, что один из вариантов стабилизации ЧЭ магнитометра состоит в установке его на площадке, которая размещена в кардановом подвесе. Параметры для стабилизации площадки поступают от корабельного ГУ. Однако более широкое применение получила непосредственная гироскопическая стабилизация магнитометров (см. гл. 7).

Методы непосредственной стабилизации нашли широкое применение при решении задач стабилизации и ориентации актинометрической аппаратуры*) при проведении наблюдений с подвижных объектов [84]. Здесь отмечается, что для стабилизации отдельных актинометрических приборов используются платформы-повторители, стабилизация которых осуществляется от расположенного в центральном посту двухосного ГС. Последний определяет углы бортовой и килевой качки, которые с помощью следящих систем вводятся на стабилизацию платформ-повторителей. Они представляют собой установленные в кардановом подвесе платформы, на которых размещены подлежащие стабилизации актинометрические приборы. В сборнике [84] приводятся характеристики различных актинометрических приборов и систем их стабилизации.

Отдельные вопросы стабилизации на танках разбираются в книге [38]. Рассмотрены схемы непосредственной стабилизации орудий. В качестве ЧЭ, определяющего углы поворота орудия в вертикальной плоскости при продольных колебаниях танка на ходу, используется трехстепенный гироскоп; угловая скорость поворота определяется гиротаксометром. Сигналы от трехстепенного гироскопа и гиротаксометра поступают в систему электрогидравлического привода, который обеспечивает непосредственную стабилизацию орудия в вертикальной плоскости. Здесь же приводится ряд конкретных схем стабилизации.

Из сказанного выше следует, что методы непосредственной стабилизации различных ИУ получили широкое применение на подвижных объектах, совершающих колебательное движение.

§ 6.7. Связь между погрешностями стабилизации и наведения ИУ

При анализе схем стабилизации с использованием непосредственного метода предполагалось, что площадка, на которой расположено ИУ, имеет точную стабилизацию. Вследствие этого ИУ определяет стабилизированные угловые координаты ориентира G (рис. 6.24) $q_{c0} = MF_0$, $\epsilon_c = F_0L$ без погрешностей. Предположим, что площадка при трехосной стабилизации по углам бортовой, килевой качки и рыскания вследствие погрешностей стабилизации отклонена относительно ПГ и заданного азимутального направления на малые углы $\delta\theta_k$, $\delta\phi$, $\delta\varphi_r$. Это неизбежно приведет к погрешностям наведения ИУ δq_c , $\delta\epsilon_c$. Требуется выявить связь между погрешностями наведения ИУ и стабилизации площадки. Близкая по постановке задача об определении поправок в углы наведения

*) Актинометрическая аппаратура предназначена для проведения различных метеорологических наблюдений с подвижного основания, например, солнечной радиации и др.

визира при изменении углов килевой и бортовой качки была решена в § 4.5 геометрическим методом путем использования теории малых поворотов твердого тела. Определим зависимости δq_c , $\delta \varepsilon_c$ от $\delta \theta_k$, $\delta \psi$, $\delta \varphi_p$. Для этой цели можно воспользоваться формулами (5.66) и (5.67), связывающими стабилизированные угловые координаты q_{c0} , ε_c с нестабилизированными координатами q_k , ε_k . Однако вследствие малости погрешностей стабилизации $\delta \theta_k$, $\delta \psi$, $\delta \varphi_p$ задачу можно решать в линейном плане с учетом слагаемых первого порядка малости. Поэтому воспользуемся приближенными формулами (5.197), (5.203), т. е.

$$\left. \begin{aligned} q_k &= q_{c0} - \varphi_p - (\theta_k \cos q_{c0} + \psi \sin q_{c0}) \operatorname{tg} \varepsilon_c, \\ \varepsilon_k &= \varepsilon_c - (\psi \cos q_{c0} - \theta_k \sin q_{c0}). \end{aligned} \right\} \quad (6.107)$$

Как известно, при качке корабля возникает поворот κ координатной системы ИУ вокруг оси OL (рис. 5.4), определяемый формулой (5.80). Если в ней положить углы качки корабля малыми, а угол ε_k заменить его математическим ожиданием (см. § 2.2, п. 3) ε_c , то приближенно имеем

$$\kappa = \frac{1}{\cos \varepsilon_c} (\psi \sin q_{c0} + \theta_k \cos q_{c0}). \quad (6.108)$$

Вследствие погрешностей стабилизации $\delta \theta_k$, $\delta \psi$ возникает изменение $\delta \kappa$ угла поворота κ .

В зависимости от характера изменения погрешностей $\delta \theta_k$, $\delta \psi$, $\delta \varphi_p$ различают ошибки δq_c , $\delta \varepsilon_c$, $\delta \kappa$ в статике и в динамике. Анализ ошибок стабилизации в динамике приводится в гл. 10. Здесь ограничимся исследованием погрешностей в статике*). Для этого воспользуемся следующим подходом [11]. Обозначим истинные значения рассматриваемых переменных индексом «нуль» и перепишем формулы (6.107), (6.108) в виде

$$\left. \begin{aligned} q_{c0} &= q_k^0 + \varphi_p^0 + (\theta_k^0 \cos q_{c0}^0 + \psi^0 \sin q_{c0}^0) \operatorname{tg} \varepsilon_c^0, \\ \varepsilon_c^0 &= \varepsilon_k^0 + (\psi^0 \cos q_{c0}^0 - \theta_k^0 \sin q_{c0}^0), \\ \kappa^0 &= \frac{1}{\cos \varepsilon_c^0} (\psi^0 \sin q_{c0}^0 + \theta_k^0 \cos q_{c0}^0). \end{aligned} \right\} \quad (6.109)$$

Примем, что при осуществлении стабилизации площадки вместо истинных значений ψ^0 , θ_k^0 , φ_p^0 вводятся переменные ψ , θ_k , φ_p , содержащие ошибки $\delta \psi$, $\delta \theta_k$, $\delta \varphi_p$, т. е.

$$\psi = \psi^0 + \delta \psi, \quad \theta_k = \theta_k^0 + \delta \theta_k, \quad \varphi_p = \varphi_p^0 + \delta \varphi_p. \quad (6.110)$$

*) При исследовании погрешностей в статике не учитываются динамические характеристики систем стабилизации и наведения ИУ.

Тогда возникнут погрешности в наведении ИУ

$$\delta q_c = q_{c0} - q_{c0}^0, \quad \delta \varepsilon_c = \varepsilon_c - \varepsilon_c^0, \quad \delta \kappa = \kappa - \kappa^0. \quad (6.111)$$

Для определения ошибок δq_c , $\delta \varepsilon_c$, $\delta \kappa$ выражения для q_{c0} , ε_c , κ раскладываются в ряд Тейлора в окрестности истинных значений q_{c0}^0 , ε_c^0 , ψ^0 , θ_K^0 , φ_P^0 входных величин. В полученных разложениях отбрасываются слагаемые, начиная со второго порядка малости, дифференциалы заменяются конечными приращениями, в качестве которых принимаются значения искомых ошибок; тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta q_c &= \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \psi^0} \delta \psi + \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \theta_K^0} \delta \theta_K + \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \varphi_P^0} \delta \varphi_P, \\ \delta \varepsilon_c &= \frac{\partial \varepsilon_c^0}{\partial \psi^0} \delta \psi + \frac{\partial \varepsilon_c^0}{\partial \theta_K^0} \delta \theta_K, \\ \delta \kappa &= \frac{\partial \kappa^0}{\partial \psi^0} \delta \psi + \frac{\partial \kappa^0}{\partial \theta_K^0} \delta \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (6.112)$$

В согласии с (6.109) и (6.112) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \psi^0} &= \sin q_{c0}^0 \operatorname{tg} \varepsilon_c^0, & \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \theta_K^0} &= \cos q_{c0}^0 \operatorname{tg} \varepsilon_c^0, & \frac{\partial q_{c0}^0}{\partial \varphi_P^0} &= 1, \\ \frac{\partial \varepsilon_c^0}{\partial \psi^0} &= \cos q_{c0}^0, & \frac{\partial \varepsilon_c^0}{\partial \theta_K^0} &= -\sin q_{c0}^0, \\ \frac{\partial \kappa^0}{\partial \psi^0} &= \frac{\sin q_{c0}^0}{\cos \varepsilon_c^0}, & \frac{\partial \kappa^0}{\partial \theta_K^0} &= \frac{\cos q_{c0}^0}{\cos \varepsilon_c^0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.113)$$

Опуская в (6.113) индекс «нуль» и подставляя в (6.112), получим

$$\left. \begin{aligned} \delta q_c &= \delta \varphi_P + (\delta \theta_K \cos q_{c0} + \delta \psi \sin q_{c0}) \operatorname{tg} \varepsilon_c, \\ \delta \varepsilon_c &= \delta \psi \cos q_{c0} - \delta \theta_K \sin q_{c0}, \\ \delta \kappa &= \frac{1}{\cos \varepsilon_c} (\delta \psi \sin q_{c0} + \delta \theta_K \cos q_{c0}). \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

Из формул (6.114) следует, что погрешность $\delta \varepsilon_c$ в угле места практически не превосходит по величине ошибок $\delta \psi$, $\delta \theta_K$ горизонтальной стабилизации площадки, на которой установлено ИУ. Погрешность δq_c в курсовом угле зависит от ошибки азимутальной стабилизации площадки $\delta \varphi_P$, а также от ошибок горизонтальной стабилизации $\delta \psi$, $\delta \theta_K$ и от угла места ε_c ; при этом влияние ошибок горизонтальной стабилизации растет с увеличением угла места. Подобным же образом сказывается угол места на изменении $\delta \kappa$ угла поперечного наклона координатной системы ИУ из-за ошибок горизонтальной стабилизации площадки.

В реальных условиях работы систем стабилизации ошибки $\delta\theta_K(t)$, $\delta\psi(t)$, $\delta\varphi_p(t)$ являются случайными функциями времени. Следовательно, погрешности $\delta q_c(t)$, $\delta\epsilon_c(t)$, $\delta\kappa(t)$ также имеют случайную природу. С помощью формул (6.114) легко определить математические ожидания и дисперсии этих погрешностей; имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\delta q_c} &= \overline{\delta\varphi_p} + (\overline{\delta\theta_K} \cos q_{c0} + \overline{\delta\psi} \sin q_{c0}) \operatorname{tg} \epsilon_c, \\ \overline{\delta\epsilon_c} &= \overline{\delta\psi} \cos q_{c0} - \overline{\delta\theta_K} \sin q_{c0}, \\ \overline{\delta\kappa} &= \frac{1}{\cos \epsilon_c} (\overline{\delta\psi} \sin q_{c0} + \overline{\delta\theta_K} \cos q_{c0}); \end{aligned} \right\} (6.115)$$

$$\left. \begin{aligned} D[\delta q_c] &= D[\delta\varphi_p] + \{D[\delta\theta_K] \cos^2 q_{c0} + D[\delta\psi] \sin^2 q_{c0}\} \operatorname{tg}^2 \epsilon_c, \\ D[\delta\epsilon_c] &= D[\delta\psi] \cos^2 q_{c0} + D[\delta\theta_K] \sin^2 q_{c0}, \\ D[\delta\kappa] &= \frac{1}{\cos^2 \epsilon_c} \{D[\delta\psi] \sin^2 q_{c0} + D[\delta\theta_K] \cos^2 q_{c0}\}. \end{aligned} \right\} (6.116)$$

Пример 6.5. Определить вероятностные характеристики погрешностей наведения ИУ, обусловленных ошибками стабилизации площадки, на которой установлено ИУ. Дано: $q_{c0} = 45^\circ$, $\epsilon_c = 75^\circ$, $\overline{\delta\varphi_p} = \overline{\delta\psi} = \overline{\delta\theta_K} = 1$ угл. мин, $\sigma_{\delta\varphi_p} = \sigma_{\delta\psi} = \sigma_{\delta\theta_K} = 1$ угл. мин.

Решение.

1) По формулам (6.115) находим математические ожидания погрешностей

$$\overline{\delta q_c} = 6,5 \text{ угл. мин}, \quad \overline{\delta\epsilon_c} = 0, \quad \overline{\delta\kappa} = 5,5 \text{ угл. мин.}$$

2) В согласии с выражениями (6.116) вычисляем дисперсии погрешностей

$$\begin{aligned} D[\delta q_c] &= 1,34 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2, & D[\delta\epsilon_c] &= 9 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2, \\ D[\delta\kappa] &= 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2. \end{aligned}$$

3) Соответственно среднеквадратичные значения погрешностей будут

$$\sigma_{\delta q_c} = 4 \text{ угл. мин}, \quad \sigma_{\delta\epsilon_c} = 1 \text{ угл. мин}, \quad \sigma_{\delta\kappa} = 4,2 \text{ угл. мин.}$$

4) Наибольшие значения погрешностей определим по формуле

$$\delta_{im} = |\overline{\delta_i}| + 3\sigma_{\delta_i} \quad (i = 1, 2, 3);$$

имеем

$$\delta_{q_{cm}} = 18,5 \text{ угл. мин}, \quad \delta_{\epsilon_{cm}} = 3 \text{ угл. мин}, \quad \delta_{\kappa_m} = 18,1 \text{ угл. мин.}$$

Из примера видно, что погрешности в углах q_c и κ являются значительными. Поэтому в ряде случаев к точности стабилизации ИУ на качке приходится предъявлять высокие требования.

ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА, ПРИМЕНЯЮЩИЕСЯ
В СИСТЕМАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ИУ

§ 7.1. Общая характеристика некоторых типов ГУ

1. Предварительные замечания. В системах стабилизации ИУ на кораблях исключительно важную роль играют ГУ, используемые в качестве датчиков исходной информации для определения параметров стабилизации ИУ или для осуществления их гироскопической стабилизации. Вопросам теории, расчетов и проектирования ГУ посвящена обширная литература. Здесь имеется в виду дать общую характеристику некоторых типов ГУ, которые используются в корабельных системах стабилизации, привести вероятностные характеристики погрешностей ГУ, а также примеры гироскопической стабилизации ИУ.

Применяемые в системах местной стабилизации ГУ служат для воспроизведения на корабле некоторой базовой системы координат, а также для определения параметров, характеризующих колебательное движение корабля: углов рыскания и качки, их угловых скоростей и ускорений, курса корабля, линейных скоростей и ускорений места установки ИУ. На основании этих данных вырабатываются угловые параметры, обеспечивающие косвенную или непосредственную стабилизацию ИУ. Датчиками исходной информации о колебательном движении корабля служат: гировертикаль, гироскоп направления или гироазимут, гирокомпас, гироазимут-горизонт, гиротахометр, гиротахоакселерометр, акселерометр, гироскопический интегратор линейных ускорений. Для гироскопической стабилизации ИУ применяются различные гироскопические стабилизаторы.

2. Гировертикаль. Простейшей *гировертикалью* с маятниковой коррекцией [34, 47, 70] называется трехстепенный астатический гироскоп, снабженный системой маятниковой коррекции, которая удерживает ось гироскопа в вертикальном положении. Эта ГВ определяет углы бортовой и килевой качки корабля и наиболее часто используется в системах стабилизации. Широкое применение получили ГВ силового типа, представляющие собой сочетание силового гиростабилизатора и системы маятниковой коррекции. Значительно реже применяются ГВ гиромаятникового типа, чувствительным элементом которой является гиромаятник (ГМ), т. е. гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести

которого лежит на оси ротора на некотором расстоянии от точки опоры. Это обстоятельство связано с тем, что для приемлемой точности ГВ данного типа необходимо обеспечить условие невозмущаемости [47, 71] М. Шулера ускорениями корабля при маневрировании, которое для ГМ осуществить весьма трудно.

В последние годы в системах навигации и стабилизации на кораблях нашли применение ГВ инерциального типа, называемые инерциальными вертикалями (ИВ). В ИВ с помощью гироскопов, акселерометров и вычислительных устройств искусственно моделируется маятниковая система, в которой выполняется условие невозмущаемости М. Шулера, вследствие чего ИВ обладает высокой точностью в условиях маневрирования корабля.

3. Гироскоп направления. *Гироскопом направления* [30, 47, 70] называется трехстепенный астатический гироскоп, снабженный горизонтальной и азимутальной системами коррекции; горизонтальная коррекция удерживает внутреннее карданово кольцо (ось гироскопа) в ПГ; азимутальная коррекция удерживает ось гироскопа в заданном азимутальном направлении. ГН служит для определения углов рыскания и поворотов корабля. При согласовании ГН с плоскостью меридиана, что осуществляется с помощью гирокомпаса, ГН выдает текущее значение курса корабля. Горизонтальная коррекция оси гироскопа осуществляется с помощью маятниковой коррекции (как в ГВ) или путем обеспечения взаимной перпендикулярности кардановых колец. Последний способ обычно применяется при установке ГН на стабилизированном относительно ПГ основании, даваемом ГВ или ГАГ. Азимутальная коррекция ГН может быть основана на различных принципах [47, 70]; в частности, учитываются поправки на вращение Земли и на собственное движение корабля.

4. Гирокомпас. *Гирокомпас* [31, 47, 71] служит для определения курса корабля, который используется для навигации и при решении задач стабилизации ИУ. Существуют различные схемы ГК. Наиболее простой является схема однороторного ГК с трехстепенным гироскопом, центр тяжести которого смещен в его экваториальной плоскости ниже точки подвеса. Он относится к позиционным ГУ, т. е. обладает «направляющей силой». В зависимости от способа создания направляющей силы различают: ГК с маятником, ГК с ртутными сосудами, ГК с косвенной коррекцией (корректируемый ГК). Наибольшее применение получили ГК с маятником, а в последние годы — корректируемый ГК. Последний представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, на гирокамере которого установлен маятник (или акселерометр), фиксирующий угол отклонения оси гироскопа от ПГ. Пропорционально этому углу в приборе формируются моменты коррекции, которые прикладываются к гироскопу с помощью датчиков моментов, установленных на осях карданова подвеса.

Это обеспечивает приведение оси гироскопа в плоскость меридиана. Наибольшее распространение получил двухроторный ГК. Чувствительный элемент этого ГК — гиросфера (поплавок) — подвешен в жидкости. Внутри гиросферы помещены гироскопы, гидравлический успокоитель и другие элементы прибора. Центр тяжести гиросферы находится на ее вертикальной оси ниже геометрического центра, что обеспечивает, как и в однороторном ГК, необходимый маятниковый момент. Появление у ГК направляющего момента, стремящегося совместить ось гироскопа с плоскостью меридиана, обусловлено вращением Земли и наличием связи гироскопа с Землей, которая осуществляется через маятник.

5. Гироазимутгоризонт. *Гироазимутгоризонт* [27, 71] представляет собой сочетание гирогоризонта (гировертикали) и гироазимута (гироскопа направления). ГВ может быть построена на тех же принципах, которые были указаны ранее. На стабилизированном относительно ПГ основании ГВ устанавливается ГА. Гировертикаль определяет углы бортовой и килевой качки. ГА измеряет углы рыскания и поворотов корабля. При введении в ГА данных о курсе от ГК прибор определяет текущий курс корабля. ГАГ является основным гироскопическим устройством, которое используется в системах косвенной и непосредственной стабилизации ИУ.

6. Гиротахометр и гиротахоакселерометр. В системах стабилизации и управления широкое применение получили ГУ, предназначенные для определения угловых скоростей и угловых ускорений объекта [32, 71]. Подобные устройства относятся к типу дифференцирующих гироскопов. Одной из разновидностей дифференцирующего гироскопа является *гиротахометр* (ГТ), предназначенный для определения угловой скорости основания (объекта), на котором он установлен, например, угловой скорости качки или рыскания корабля. Наибольшее распространение получили ГТ, основанные на использовании двухстепенного астатического гироскопа и снабженные устройством (например, пружиной), которое при отклонении рамки гироскопа от исходного положения налагает на нее момент, пропорциональный углу отклонения и стремящийся вернуть ее в первоначальное положение. В наиболее точных ГТ используются поплавковый и другие подвесы с малым трением. В корабельных системах стабилизации ГТ применяются для определения угловых скоростей качки и рыскания. Использование сигналов от ГТ позволяет улучшить динамические свойства следящих приводов стабилизации ИУ.

Другой разновидностью дифференцирующего гироскопа является *гиротахоакселерометр* (ГТА), который служит для определения угловой скорости и углового ускорения объекта (обычно в виде некоторого суммарного сигнала). ГТА представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, установленный в кардано-

вом подвесе, у которого углы поворотов внутреннего и наружного кардановых колец ограничены пружинами, стремящимися вернуть их в первоначальное положение. Приборы подобного типа используются иногда в успокоителях качки кораблей [94].

7. **Акселерометр.** *Акселерометр* (АК) [71, 81] представляет собой прибор, предназначенный для измерения составляющей ускорения объекта вдоль заданного направления. ЧЭ его является инерционная масса, связанная с корпусом прибора с помощью пружины и демпфера. По своему принципу действия АК измеряет так называемое кажущееся ускорение, т. е. разность между абсолютным линейным ускорением объекта и гравитационным ускорением. Для нахождения ускорения объекта необходимо компенсировать гравитационное ускорение, для чего используются различные способы. АК находят применение в гироскопических системах и системах стабилизации. В ГУ, рассмотренных выше, АК используется в качестве ЧЭ систем коррекции ГВ, ГН, ГАГ, ГС, корректируемых ГК. АК могут применяться также в системах стабилизации для определения составляющих линейного ускорения заданной точки корабля, обусловленного, например, качкой и орбитальным движением. В последние годы получили распространение интегрирующие АК, которые служат для определения составляющих линейной скорости объекта.

8. **Гироскопический интегратор линейных ускорений.** *Гироскопический интегратор* (ГИ) линейных ускорений [33, 71] представляет собой прибор, который предназначен для измерения составляющей линейной скорости объекта вдоль заданного направления. Применяемый на практике ГИ представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, центр тяжести которого смещен относительно точки подвеса. Вследствие этого гироскоп чувствителен к поступательным ускорениям объекта; при этом угловая скорость прецессии гироскопа пропорциональна ускорению объекта, а угол прецессии — соответствующей составляющей его линейной скорости. ГИ, как и АК, реагирует на кажущееся ускорение объекта. Вследствие этого показания прибора пропорциональны интегралу от кажущегося ускорения, т. е. кажущейся скорости. Поэтому в ГИ необходима компенсация ускорения силы тяжести. ГИ может применяться в инерциальных вертикалях, а также для определения составляющих линейной скорости заданной точки корабля.

§ 7.2. Погрешности ГУ

1. **Определение погрешностей ГУ.** При исследовании точности стабилизации ИУ необходимо знать характеристики погрешностей ГУ, так как последние существенно влияют на ошибки стабилизации. Погрешности ГУ можно классифицировать в зависимости

от [70]: а) причин, вызывающих погрешности, б) характера воздействий, в) повторяемости погрешностей. В зависимости от причин, вызывающих погрешности ГУ, различают: погрешности входных данных, методические погрешности и инструментальные погрешности. В зависимости от характера воздействий на ГУ погрешности бывают статические и динамические. Наконец, в зависимости от повторяемости погрешности могут быть случайными и систематическими. При анализе точности систем стабилизации наибольший интерес представляют динамические погрешности ГУ, которые возникают при непрерывном изменении измеряемого параметра, а также при переменных внешних возмущающих воздействиях. Подробное исследование этих воздействий показывает [1, 70, 71, 80], что в реальных условиях использования ГУ на корабле они являются случайными функциями времени. Поэтому и динамические погрешности $\xi(t)$ ГУ, обусловленные указанными воздействиями, также случайные функции времени. Так как эти случайные функции обычно являются нормальными, то в большинстве практических задач для анализа свойств погрешностей ГУ в динамике можно пользоваться корреляционной теорией случайных функций, т. е. характеризовать погрешности $\xi(t)$ математическим ожиданием $\bar{\xi}(t)$ и дисперсией $D[\xi]$ или среднеквадратичным значением σ_ξ :

$$M[\xi] = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi, \quad (7.1)$$

$$\sigma_\xi^2 = D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 f(\xi) d\xi, \quad (7.2)$$

где $f(\xi)$ — плотность вероятности ординат случайной функции $\xi(t)$.

Дисперсию случайной функции $\xi(t)$ можно найти, если известны ее корреляционная функция $K_\xi(\tau)$ или спектральная плотность $S_\xi(\omega)$

$$D[\xi] = K_\xi(0) \quad (7.3)$$

или

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) d\omega. \quad (7.4)$$

Если $\xi(t)$ является нормальной случайной функцией, то $\bar{\xi}$ и $K_\xi(\tau)$ или $S_\xi(\omega)$ полностью характеризуют динамическую точность ГУ. Пользуясь ими, можно найти другие параметры динамической точности ГУ. Плотность вероятности $f(\xi)$ ординат

нормальной случайной функции $\xi(t)$ определяется формулой

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}}. \quad (7.5)$$

Зная $f(\xi)$, можно определить пределы, за которые погрешность ГУ не выйдет с заданной вероятностью, или, наоборот, определить вероятность, с которой погрешность не превзойдет некоторые пределы, являющиеся допустимыми для данного устройства (см. § 10.2).

Помимо указанных выше вероятностных характеристик $\bar{\xi}$, $D[\xi]$, иногда возникает необходимость в определении еще таких параметров, как [70, 72]: а) среднего числа выбросов в единицу времени функции $\xi(t)$ за заданный уровень ξ_0 ; б) средней продолжительности каждого выброса; в) среднего значения суммарного времени выбросов в течение некоторого времени и т. п.

Определение вероятностных характеристик динамических погрешностей ГУ базируется на использовании дифференциальных уравнений и передаточных функций рассматриваемого прибора и знании вероятностных характеристик полезных сигналов и возмущающих воздействий, в качестве которых обычно учитывают моменты внешних сил, прикладываемых к ГУ в реальных условиях его использования. Такой подход в современной прикладной теории гироскопов является общепринятым (см., например, [1, 70—72, 80]).

В качестве простейшего примера подобного подхода рассмотрим погрешность трехстепенного астатического гироскопа, уравнение движения которого в согласии с прецессионной теорией можно записать в виде

$$\dot{\xi} = M/H, \quad (7.6)$$

где M — приложенный к гироскопу возмущающий момент, являющийся стационарной случайной функцией времени с заданным математическим ожиданием \bar{M} и корреляционной функцией $K_M(\tau)$ или спектральной плотностью $S_M(\omega)$, H — кинетический момент гироскопа.

Введем обозначение

$$k = 1/H \quad (7.7)$$

и перепишем уравнение (7.6) в виде

$$\dot{\xi} = kM. \quad (7.8)$$

Тогда для математического ожидания $\bar{\xi}$ и корреляционной функции $K_{\xi}(\tau)$ угловой скорости ухода (дрейфа) гироскопа получим

следующие соотношения:

$$\bar{\xi} = k\bar{M}, \quad (7.9)$$

$$K_{\xi}(\tau) = k^2 K_M(\tau). \quad (7.10)$$

Следовательно, угловая скорость ухода трехстепенного гироскопа $\dot{\xi}(t)$ является стационарной случайной функцией времени.

Для вероятностных характеристик ухода гироскопа $\xi(t)$, характеризующего его погрешность в динамике, имеют место следующие соотношения [70, 80]:

$$\bar{\xi} = k\bar{M}t, \quad (7.11)$$

$$D[\xi] = 2k^2 \int_0^t (t - \tau) K_M(\tau) d\tau. \quad (7.12)$$

Из формул (7.11) и (7.12) следует, что математическое ожидание и дисперсия ухода трехстепенного астатического гироскопа растут со временем. Поэтому погрешность $\xi(t)$ является нестационарной случайной функцией. Эта особенность, как будет показано далее, свойственна, например, азимутальному уходу ГН, что необходимо учитывать при исследовании точности стабилизации ИУ в азимуте.

В ряде ГУ, например, в ГВ с маятниковой коррекцией, в корректируемых ГС, ГК, в ГТ, погрешность $\xi(t)$ является стационарной случайной функцией и ее математическое ожидание $\bar{\xi}$, спектральная плотность $S_{\xi}(\omega)$ и дисперсия $D[\xi]$ выражаются следующими общими формулами:

$$\bar{\xi} = W(j\omega)|_{\omega=0} \bar{M}, \quad (7.13)$$

$$S_{\xi}(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_M(\omega), \quad (7.14)$$

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_M(\omega) d\omega, \quad (7.15)$$

где $W(j\omega)$ — частотная передаточная функция ГУ.

При определении вероятностных характеристик динамических погрешностей ГУ существенное значение имеют лабораторные и натурные исследования ГУ, которые позволяют проверить и дополнить те предварительные сведения о точности устройства, которые были получены в результате теоретического исследования.

2. Вероятностные характеристики погрешностей ГУ. Приведем некоторые сведения о вероятностных характеристиках погрешностей, рассмотренных в § 7.1 типов ГУ. Угловую скорость ухода

(дрейфа) гироскопа будем обозначать через $\eta(t)$, она связана с погрешностью $\xi(t)$ следующим образом:

$$\eta(t) = \frac{d}{dt} \xi(t). \quad (7.16)$$

Рассмотрим вначале трехстепенный астатический гироскоп, применяющийся в ГН, в ГАГ и являющийся основным элементом большинства перечисленных в § 7.1 типов ГУ. На основании соответствующих экспериментальных исследований (см., например, [72, 75]) величину $\eta(t)$ можно представить состоящей из систематической и случайной составляющих. Систематическая составляющая η^c для конкретного прибора и заданных условий является постоянной величиной и определяется математическим ожиданием $\bar{\eta}$ случайной функции $\eta(t)$. Для различных образцов приборов данного типа и для разных условий их использования η^c является случайной величиной с заданной дисперсией $D[\eta^c]$ и равным нулю математическим ожиданием. Случайную составляющую функции $\eta(t)$ обычно рассматривают как стационарный случайный процесс, имеющий высокочастотную и низкочастотную компоненты с корреляционными функциями вида

$$K_{\eta}(\tau) = A e^{-\mu|\tau|}, \quad (7.17)$$

где $A = \sigma_{\eta}^2$ — дисперсия угловой скорости ухода гироскопа, μ — коэффициент затухания корреляционной функции.

В последние годы в ГУ, системах стабилизации и навигации получил применение метод оптимальной фильтрации Калмана [73, 75]. При его использовании уход гироскопа $\eta(t)$ представляют в виде случайного процесса, связанного с белым шумом дифференциальным уравнением первого порядка. Так, корреляционной функции (7.17) соответствует уравнение

$$\dot{\eta} + \mu\eta = \sqrt{2A\mu} w(t), \quad (7.18)$$

где $w(t)$ — порождающий белый шум единичной интенсивности с равным нулю математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$M[w(t)w(\tau)] = \delta(t - \tau). \quad (7.19)$$

Процесс $\eta(t)$ в силу (7.18) представляет собой марковский случайный процесс [78].

Ряд исследований (см., например, [73]) угловой скорости ухода гироскопов, предназначенных для длительного использования, показал, что угловую скорость ухода гироскопа можно представить в виде комбинации стационарного процесса со скользящим средним и нестационарных процессов типа случайного «блуждания» и случайного «сползания».

Для используемых в системах стабилизации на корабле ГН и ГА (в приборе типа ГАГ) наибольший интерес представляет погрешность в азимуте, математическая модель которой может быть записана в виде [75]

$$\xi(t) = \xi^0 + \eta^c t + \int_0^t \eta(\tau) d\tau, \quad (7.20)$$

где ξ^0 — ошибка начальной выставки, представляющая собой случайную величину с заданной дисперсией $D[\xi^0]$, η^c — систематическая составляющая угловой скорости ухода гироскопа с равным нулю математическим ожиданием*) и с дисперсией $D[\eta^c]$, $\eta(t)$ — случайная составляющая угловой скорости ухода с корреляционной функцией (7.17).

Погрешность в определении курса ГК в условиях реального использования на корабле является случайной функцией времени, которая может быть представлена в виде суммы [75]

$$\xi(t) = \xi^c + \xi_1(t), \quad (7.21)$$

где ξ^c — систематическая составляющая, характеризуемая дисперсией $D[\xi^c]$, $\xi_1(t)$ — случайная составляющая с корреляционной функцией

$$K_{\xi_1}(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|} \cos \lambda \tau, \quad (7.22)$$

$A = D[\xi_1]$ — дисперсия случайной составляющей ошибки ГК, μ , λ — коэффициент затухания и частота изменения корреляционной функции.

Динамическая погрешность ГВ с маятниковой коррекцией (гирогоризонта с маятниковой коррекцией в приборе ГАГ) при нерегулярной качке корабля представляет собой случайную функцию времени, которую можно записать в виде [75]

$$\xi(t) = \xi^c + \xi_1(t), \quad (7.23)$$

где ξ^c — систематическая составляющая, характеризуемая дисперсией $D[\xi^c]$, $\xi_1(t)$ — случайная составляющая с корреляционной функцией

$$K_{\xi_1}(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right), \quad (7.24)$$

$A = D[\xi_1]$ — дисперсия случайной составляющей ошибки ГВ, μ , λ — коэффициент затухания и частота изменения корреляционной функции. Заметим, что для некоторых приборов величина λ , характеризующая преобладающую частоту изменения

*) Здесь и далее предполагается, что среднее значение угловой скорости ухода гироскопа скомпенсировано при начальной настройке прибора.

случайных ошибок ГВ, близка к собственной частоте бортовой или килевой качки корабля. Это обстоятельство играет существенную роль при анализе динамики систем стабилизации на качке, использующих данные от ГВ.

Динамическая погрешность ГТ, основанного на использовании двухстепенного гироскопа с пружиной, демпфером и представляющего собой колебательную систему (описывается дифференциальным уравнением второго порядка), в условиях нерегулярной качки корабля является случайной функцией времени и может быть записана в виде (7.23). Здесь систематическая составляющая ошибки ξ^c характеризуется дисперсией $D[\xi^c]$, а случайная составляющая ошибки $\xi_1(t)$ имеет корреляционную функцию вида [74]

$$K_{\xi_1}(\tau) = A e^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right), \quad (7.25)$$

где $A = D[\xi_1]$ — дисперсия случайной составляющей ошибки ГТ, μ , λ — коэффициент затухания и частота изменения корреляционной функции.

При исследовании АК обычно учитывается [75] смещение нуля и динамическая ошибка в измерении им кажущегося ускорения объекта $a(t)$. Смещение нуля δa^c рассматривается как случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D[\delta a^c]$. Динамическая погрешность АК $\delta a(t)$ предполагается стационарной случайной функцией с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией вида

$$K_{\delta a}(\tau) = A_{\delta a} e^{-\mu_{\delta a} |\tau|}, \quad (7.26)$$

где $A_{\delta a} = D[\delta a]$ — дисперсия динамической ошибки АК, $\mu_{\delta a}$ — коэффициент затухания корреляционной функции.

Приведем несколько замечаний об определении динамической погрешности ГИ линейных ускорений. Как было указано ранее, ГИ представляет собой трехстепенный гироскоп со смещенным центром тяжести. Поэтому угол поворота наружной рамки ГИ вокруг измерительной оси, в согласии с прецессионной теорией гироскопа, определяется из уравнения типа (7.6). В связи с этим динамическая ошибка ГИ в угле поворота наружной рамки, пропорциональная погрешности в определении прибором составляющей линейной скорости вдоль измерительной оси, характеризуется выражением типа (7.20), в котором ξ^0 — ошибка начальной установки рамки ГИ; η^c — систематическая составляющая угловой скорости ухода наружной рамки под влиянием возмущающих моментов по оси внутренней рамки, определяемая дисперсией $D[\eta^c]$; $\eta(t)$ — случайная составляющая угловой скорости ухода наружной рамки с корреляционной функцией (7.17).

С более подробными сведениями о динамических погрешностях различных типов ГУ и методикой их расчета читатель может познакомиться в литературе по прикладной теории гироскопов (см., например, [70—72, 75, 76, 80]).

§ 7.3. Гироскопическая стабилизация ИУ

1. Типы гироскопических стабилизаторов и их принципиальные схемы. Рассмотрим некоторые общие принципы, способы гироскопической стабилизации ИУ и примеры ее практического осуществления.

Техническое решение задач гироскопической стабилизации основано на использовании различных типов гироскопических стабилизаторов. Отличительная особенность ГС по сравнению с системами непосредственной стабилизации ИУ со следящими приводами (см. главу 6) состоит в том, что в качестве стабилизирующих устройств в ГС используются гироскопы. С помощью ГС осуществляется построение некоторой базовой или опорной координатной системы, относительно которой и обеспечивается гироскопическая стабилизация ИУ. В зависимости от выбора базовой системы координат различают *некорректируемые*, *корректируемые* и *управляемые* ГС.

В *некорректируемом* ГС осуществляется построение неизменно ориентированной относительно инерциального пространства координатной системы. При этом устанавливаемые на ГС измерительные устройства будут сохранять заданную ориентацию относительно инерциального пространства. Подобные ГС используются, например, в некоторых типах ракет [26], в инерциальных навигационных системах (ИНС) геометрического и аналитического типов [25, 71].

В *корректируемом* ГС производится построение вращающейся относительно инерциального пространства координатной системы, которая сохраняет неизменное положение относительно Земли. Устанавливаемые на подобных ГС измерительные устройства стабилизируются относительно плоскости горизонта и заданного азимутального направления. Корректируемые ГС чаще всего используются на кораблях и на самолетах для стабилизации различных ИУ, в ИНС полуаналитического типа [25, 71] и др.

В *управляемом* ГС воспроизводится система координат, которая совершает вращение относительно Земли или инерциального пространства по какому-либо закону. Если указанную систему координат связать с направлением на некоторый ориентир, то установленное на управляемом ГС измерительное устройство будет автоматически следить за ориентиром. Управляемые ГС нашли широкое применение в различных системах автоматического слежения (сопровождения), в гироскопических следящих систе-

мах, которые используются для стабилизации и наведения оптических, радиотехнических, оптико-электронных и других устройств.

С помощью ГС осуществляется стабилизация и наведение различных ИУ. К ним относятся разнообразные пеленгационные устройства: визиры, дальномеры, антенны, секстанты, фотоследящие системы, актиомерметрические устройства и др.

Другую группу ИУ, стабилизируемых с помощью ГС, составляют различные чувствительные элементы систем навигации и управления: АК, маятниковые системы, отдельные гироскопы (ГИ, ГН и др.), гравиметры, магнитометры и т. п. В зависимости от объекта стабилизации и условий его использования к ГС предъявляются различные требования в отношении точности, срока службы, надежности, весов, габаритов и др. Рассмотрим некоторые требования к ГС, с помощью которых осуществляется стабилизация и наведение пеленгационных устройств. Одна из важных особенностей состоит в том [3], что для стабилизации пеленгационных устройств, в частности оптических приборов, существенным является спектральный состав ошибки. Погрешности чувствительных элементов, уходы гироскопов, нестабильность значений параметров вызывают медленные смещения ГС от заданного положения. На них накладываются динамические ошибки с частотами качки основания и собственных колебаний системы стабилизации. Эти две группы ошибок в основном определяют точность ГС в реальных условиях использования (см. § 7.2).

При стабилизации оптических приборов в ряде случаев существенное значение могут иметь быстрые нутационные колебания ГС. Для их учета следует исходить не из уравнений прецессионного движения, а из полных уравнений ГС. Различают гироскопическую стабилизацию оптических головок и стабилизацию поля зрения [3]. В первом случае речь идет о стабилизации оптического прибора, а во втором — о стабилизации отдельных его оптических элементов (призмы и др.). Техническая реализация второго способа в ряде случаев является более простой.

По принципу действия ГС делятся на непосредственные, силовые и индикаторные (см. § 3.1). Приведем основные определения и принципиальные схемы этих ГС [35, 52, 71, 72, 74].

Непосредственными ГС называют устройства, принцип действия которых основан на непосредственном использовании стабилизирующих свойств трехстепенного гироскопа. Действительно, если ось подобного гироскопа заставить изменять свое положение в пространстве, то при этом возникает гироскопический момент, который и используется для стабилизации объекта. При этом для создания стабилизирующего эффекта гироскоп в ряде случаев должен обладать большим кинетическим моментом. Одна

из важных особенностей непосредственных ГС — наличие механической связи со стабилизируемым ИУ, что способствует увеличению точности стабилизации.

Пользуясь прецессионной теорией гироскопа, принцип работы непосредственного ГС можно пояснить следующим образом [35, 74]. Рассмотрим рис.

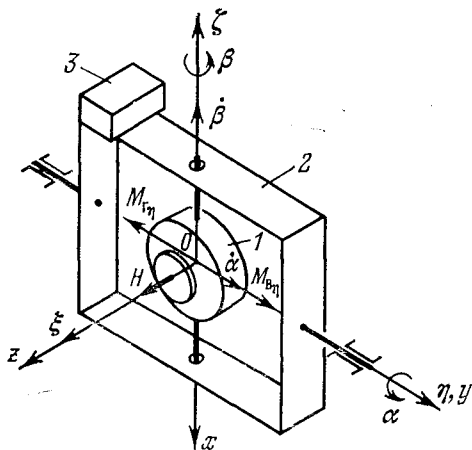


Рис. 7.1. Принципиальная схема непосредственного ГС.

7.1, на котором обозначено: 1 — гироскопа с ротором, 2 — рама (площадка), 3 — объект стабилизации (ИУ), $O\xi\eta\zeta$ — оси системы отсчета; $Oxyz$ — оси, связанные с гироскопом. Ось $O\eta$ является осью стабилизации, ось Ox — осью прецессии; α — ошибка стабилизации, β — угол прецессии. При действии возмущающего момента $M_{в\eta}$, стремящегося повернуть раму 2 вместе с объектом 3 вокруг оси $O\eta$, гироскопа 1 с ротором начнет прецессировать вокруг

оси Ox ; при этом возникает гироскопический момент

$$M_{г\eta} = H\dot{\beta} \cos \beta \quad (7.27)$$

(H — кинетический момент гироскопа), противоположно направленный и равный моменту $M_{в\eta}$, т. е.

$$M_{в\eta} + M_{г\eta} = 0. \quad (7.28)$$

Для создания значительного стабилизирующего эффекта величина H должна быть достаточно большой; при этом точность стабилизации повышается, если момент $M_{в\eta}$ является знакопеременным или действует кратковременно. Возмущающий момент $M_{в\eta}$ по оси Ox вызывает уход рамы, т. е. ошибку стабилизации.

Непосредственные ГС, наряду со значительными достоинствами, имеют и недостатки; в ряде устройств они обладают большим весом и габаритами; при использовании в них гироскопов с большим кинетическим моментом H время подготовки ГС к работе увеличивается. Такие ГС применяются в качестве успокоителей качки корабля, стабилизаторов вагона однорельсовой железной дороги, для стабилизации площадок, отдельных приборов, ЧЭ систем навигации и управления, а также в гироскопических амортизаторах колебаний.

Силосые ГС (гирорамы) представляют собой электромеханические устройства, содержащие кроме гироскопов специальные двигатели для преодоления воздействия на стабилизируемый объект внешних возмущающих моментов. Среди различных типов ГС, обеспечивающих непосредственную гироскопическую стабилизацию ИУ, наибольшее распространение получили ГС силового типа. По числу осей стабилизации они делятся на одноосные, двухосные и трехосные. В одноосном ГС обеспечивается стабилизация относительно одной оси, например в азимуте. Двухосный ГС осуществляет стабилизацию относительно двух осей, например относительно плоскости горизонта. Трехосный ГС служит для стабилизации относительно трех осей, например относительно плоскости горизонта и заданного азимутального направления.

Принцип действия силового ГС рассмотрим на примере одноосного ГС с одним гироскопом (рис. 7.2) [35, 71]. Основными элементами этого устройства являются: гирокамера 1 с ротором, рама 2, играющая роль наружного карданова кольца и жестко связанная со стабилизируемым объектом (на рис. 7.2 не показан), датчик угла 3, установленный на оси прецессии Ox , усилитель 4, стабилизирующий двигатель 5, предназначенный для приложения относительно оси стабилизации $O\eta$ моментов, компенсирующих действующие на раму внешние возмущающие моменты, маятник-корректор 6 и датчик моментов 7, являющиеся элементами системы коррекции ГС. При действии внешнего возмущающего момента M , стремящегося повернуть раму вокруг оси $O\eta$, гирокамера 1 по свойствам трехстепенного гироскопа начнет прецессировать вокруг оси Ox ; при этом возникает гироскопический момент M_g , противодействующий моменту M . В дальнейшем при повороте гирокамеры вокруг оси Ox на некоторый угол β датчик угла 3 через усилитель 4 включит стабилизирующий двигатель 5

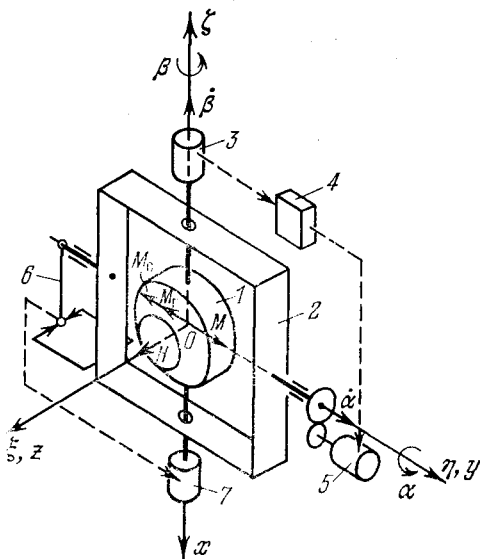


Рис. 7.2. Принципиальная схема одноосного силового гиро-стабилизатора с одним гироскопом.

5, прикладывающий относительно оси $O\eta$ момент стабилизации M_c , противоположный моменту M . В результате гироскоп начнет прецессировать в обратном направлении и остановится (при постоянной величине M) в положении, для которого

$$M_c + M = 0. \quad (7.29)$$

Таким образом, в силовом ГС гироскоп осуществляет стабилизацию лишь в первый момент; в дальнейшем ее обеспечивает стабилизирующий двигатель, что позволяет стабилизировать значительные массы при сравнительно небольшом весе и габаритах самого гироскопа.

ГС силового типа получили широкое применение в ГН, ГВ, ГАГ, предназначенных для определения углов рыскания и качки корабля. Силовые ГС используют также для стабилизации площадок (платформ). Гиросtabilизированные платформы (ГСП) служат для стабилизации отдельных приборов и устройств; они используются в различных системах стабилизации и ИНС.

Индикаторные ГС представляют собой системы, в которых гироскопические устройства, установленные на стабилизируемом объекте (например, платформе), являются чувствительными или

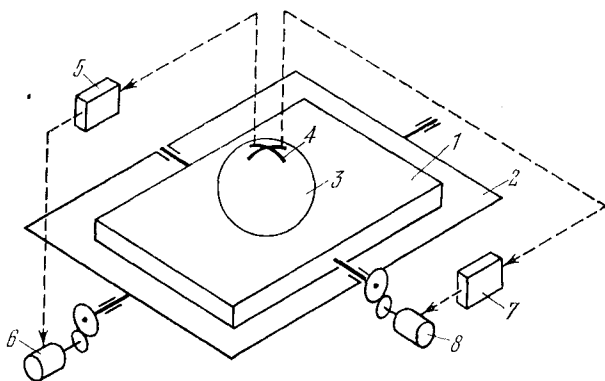


Рис. 7.3. Принципиальная схема двухосного индикаторного ГС.

задающими элементами, определяющими положение объекта и управляющими следящими системами; стабилизация же объекта (платформы) осуществляется с помощью следящих систем. В качестве ЧЭ, реагирующих на угловые скорости или углы отклонения платформы, применяют двухстепенные (например, поплавковые интегрирующие) гироскопы или трехстепенные астатические гироскопы.

Принципиальная схема двухосного индикаторного ГС [6] приведена на рис. 7.3. На платформе 1, подвешенной в кардановом кольце 2, установлен трехстепенный шаровый гироскоп 3,

который состоит из статора и вращающегося шара. С помощью специального корректирующего устройства (на рис. 7.3 не показано) ось шара удерживается в вертикальном положении. При отклонении платформы 1 от горизонтального положения сигналы рассогласования снимаются с двухкоординатного датчика угла 4 и через усилители 5 и 7 поступают на стабилизирующие двигатели 6 и 8. Последние вращают кольцо 2 и платформу 1 до тех пор, пока нормаль к платформе не совместится с осью шара; при этом платформа займет горизонтальное положение.

Таким образом, в индикаторных ГС гироскопы связаны со стабилизируемым объектом не механически, а с помощью следящих систем, благодаря чему гироскопы не несут непосредственно силовой нагрузки по стабилизации. В индикаторных ГС создаются известные удобства для размещения элементов стабилизатора. Применение мощных следящих приводов позволяет осуществить стабилизацию объектов, обладающих значительными инерционными массами. Кроме того, у индикаторных ГС вследствие применения сравнительно небольших гироскопов время приведения стабилизатора в действие невелико и потребляемые мощности меньше, чем у других типов ГС. В индикаторных ГС предъявляются высокие требования к точности и к другим характеристикам следящих систем.

Управляемые ГС представляют собой систему автоматического управления положением гироскопа и связанного с ним объекта, которая обеспечивает вращение скрепленной с ними координатной системы по какому-либо закону относительно Земли или инерциального пространства. При этом осуществляется слежение объекта за ориентиром. Указанный принцип используется в системах автоматического слежения, в гироскопических следящих системах, которые применяются для стабилизации и наведения различных целенаправленных устройств.

Принципиальная схема гироскопической следящей системы (ГСС) [35] приведена на рис. 7.4. Основными элементами ГСС являются гироскоп 1 с ротором, установленные в наружном кардановом кольце (раме) 2. Это устройство обеспечивает непосредственную стабилизацию антенны 3 и координатора 4. Последний

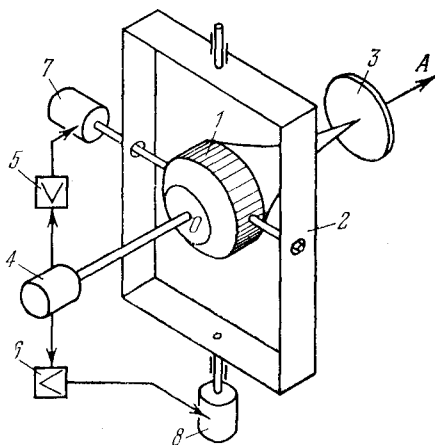


Рис. 7.4. Принципиальная схема гироскопической следящей системы.

вырабатывает сигналы, пропорциональные углам отклонения оси (луча) антенны от заданного направления OA на некоторый ориентир. Эти сигналы через усилители-преобразователи 5 и 6 поступают на датчики моментов 7 и 8 системы управления (коррекции), осуществляющей автоматическое слежение (сопровождение) оси антенны за указанным направлением. ГСС состоит из двух каналов — продольного и поперечного, каждый из которых представляет собой замкнутую систему автоматического управления. Гироскопические системы автоматического сопровождения имеют существенные преимущества по сравнению с другими системами (электро-механическими, электрогидравлическими и др.), состоящие в высокой плавности, точности наведения и в безынерционности действия, что обеспечило широкое их применение на различных подвижных объектах.

2. Примеры гироскопической стабилизации ИУ. Рассмотрим некоторые примеры использования систем гироскопической стабилизации ИУ.

Непосредственные ГС. Первое применение гироскопа для стабилизации оптического устройства (коллиматора) относится к секстанту. Над этим вопросом работали М. В. Ломоносов, Д. Серсон и др. Практически он был использован Г. Флерье в 1886 г. [41]. На верхней поверхности опертго на шпильку ротора установлен коллиматор, состоящий из линзы и оптической пластинки, на которой нанесены штрихи. При быстром вращении ротора с помощью воздушного дутья наблюдатель видит неподвижные линии, являющиеся искусственным горизонтом и используемые при измерении высот светил.

Подобные приборы усовершенствованного типа применяются и в настоящее время. Так, например, в морском секстанте ГИМС-3 [97] в качестве индикатора горизонта используется одногироскопный гиросмаятник. Гироскоп подвешен в кардановых кольцах, при этом ось вращения наружного кольца горизонтальна и расположена в плоскости вертикала светила. В верхней части гирокамеры установлен коллиматор, лампочка подсветки, светофильтр, конденсаторная линза. На стенке коллиматора нанесены горизонтальные риски, которые при работающем ГМ служат указателем плоскости искусственного горизонта; их изображение поступает в оптическую систему секстанта; светило должно быть между рисками. Ось ГМ описывает конус [71], что может вносить ошибки в показания прибора. Для сглаживания соответствующих ошибок измерений в приборе имеется интегратор.

Задача о непосредственной гироскопической стабилизации платформы на корабле впервые была решена А. Н. Крыловым [41]. Им была исследована платформа, установленная в кардановом подвесе и стабилизируемая с помощью пассивного гироскопического стабилизатора Шлика (см. § 3.2, а также [71, 74, 94]) с элек-

тромагнитным тормозом. Приведен анализ движения платформы и расчет параметров ГС, которые нашли практическое применение при решении прикладных задач, связанных с гироскопической стабилизацией различных устройств на движущихся объектах.

В работе [3] рассматривается несколько примеров непосредственной гироскопической стабилизации поля зрения оптических приборов, в которых гироскоп осуществляет стабилизацию отдельных оптических элементов, а также примеры стабилизации всей оптической головки прибора. В некоторых гироскопических приборах в качестве гироскопа используется вращающийся оптический узел прибора [3]. Гироскопы применяются также в приборах типа тепловизоров в сканирующих устройствах, используемых для картографирования местности. Имеется возможность чисто оптической коррекции вертикали, которая не подвержена воздействию ускорений, путем наблюдения за линией горизонта, за звездой и др.

Непосредственные ГС применяются при гравиметрических наблюдениях на море [2, 54, 62]. Для стабилизации одного из типов морских гравиметров [54] используется четырехгироскопная вертикаль [76], представляющая собой сферический физический маятник, в котором установлены четыре гироскопа с горизонтальными осями собственного вращения. Гироскопы попарно связаны с шарнирными механизмами, допускающими повороты вокруг вертикальных осей кожухов в разные стороны. Векторы кинетических моментов связанных гироскопов имеют противоположные направления. Угол поворота гироскопов вокруг вертикальных осей ограничивается двумя пружинами. Центр тяжести всей качающейся части смещен вниз относительно точки подвеса. Благодаря использованию гироскопов сферический маятник имеет больший период собственных колебаний, чем соответствующий физический маятник, а следовательно, и большую точность на качающемся основании.

Гироскопы широко применяются для стабилизации ЧЭ магнитометров. В работе [92] рассмотрены две схемы гироскопической стабилизации аэромагнитометра. В них используется трехстепенный гироскоп, подобный применяемому в авиагоризонте. При этом платформа с магнитометром установлена на некотором расстоянии от гироскопа (для уменьшения влияния его магнитного поля) и связана с ним с помощью тяг. Для компенсации ухода гироскопа применена система коррекции, ЧЭ которой являются взаимно перпендикулярные феррозонды. При этом ось гироскопа параллельна полному вектору напряженности магнитного поля, по которому направлена ось магнитного ЧЭ. При отклонении оси ЧЭ от указанного направления сигналы коррекции поступают на датчики моментов гироскопа. Несмотря на значительное удаление гироскопа от магнитного ЧЭ существенное

влияние оказывало магнитное поле электрического гиromотора. Поэтому более целесообразной оказалась схема гироскопической стабилизации с пневматическим гиromотором. При этом исполнительными элементами системы коррекции гироскопа от феррозондов являются заслонки, аналогичные применяющимся в авиаторизонте [70], но лишённые маятниковости, так как ось гироскопа должна следить не за вертикалью места, а за указанным выше направлением.

Непосредственные ГС нашли также применение для стабилизации актинометрических приборов. В одном из устройств [84] стабилизация соответствующего ЧЭ осуществляется путем установки на гировертикали, основанной на использовании трехстепенного гироскопа и системы маятниковой коррекции.

Гироскоп используется также для стабилизации линии прицеливания в оптических прицелах, применяемых в танках [38]. В головной части оптического прицела, жестко укрепленного на качающейся части орудия, устанавливаются две поворачивающиеся призмы и трехстепенный гироскоп. Верхняя призма связана с механизмом углов прицеливания, а нижняя — с помощью рычажной передачи с наружным кольцом подвеса гироскопа, что обеспечивает стабилизацию линии прицеливания. Для наведения прицела необходимо повернуть нижнюю призму; это достигается путем прецессионного движения гироскопа, которое создается с помощью двух датчиков моментов, установленных на наружном кольце гироскопа. После наведения прицела на цель и установки необходимого угла возвышения орудия цепь стрельбы замыкается в тот момент, когда при колебаниях танка совмещаются два контакта, один из которых установлен на наружном кольце, а другой — на корпусе прицела. При этом ствол орудия в результате колебаний танка или работы подъемного механизма будет иметь нужный угол возвышения.

С и л о в ы е ГС. Из всех типов гироскопических стабилизаторов силовые ГС получили наибольшее применение. Среди ИУ, стабилизируемых с помощью силовых ГС, следует выделить различные элементы систем навигации и управления. Так, например, в большинстве ИНС [25, 26, 64, 71] используются трехосные ГСП, построенные с использованием силовых гироскопов. На них устанавливаются АК, ГИ линейных ускорений, которые используются для коррекции ГСП относительно заданной системы отсчета и для определения линейных ускорений и линейных скоростей объекта. На ГСП размещаются также различные оптические и оптико-электронные приборы, применяемые для коррекции ГСП или для решения задач навигации и управления подвижными объектами.

В книге [3] рассматривается применение силовых ГС для стабилизации аэрофотоаппарата, который используется в топогра-

фической аэрофотоустановке, а также в морских гироскопических тепловизорах. В работе [81] рассматривается автоматический секстант, совмещенный с курсовертикалью, которая представляет собой трехосную ГСП силового типа. ГСП содержит три силовых гироскопа, две из которых корректируются относительно ПГ с помощью системы маятниковой коррекции, а третья — в азимуте от курсовой системы. Автоматический секстант, содержащий фотоэлемент, следит за светилом и определяет на него высоту и курсовой угол относительно стабилизированной платформы.

Первый комплект гравиметрической аппаратуры [62] для наблюдений на морских судах был построен по принципу гиросtabilизированного гравиметра. При этом была использована ГСП, которая предназначалась для стабилизации аэрофотоаппаратов. Она представляет собой двухосную силовую гироскопу с системой маятниковой коррекции, ЧЭ которой является жидкостный электролитический маятник [70], и приспособлена для стабилизации гравиметра. В другой системе для стабилизации малогабаритного гравиметра [62] в качестве ГСП был использован гироскоп горизонт силового типа. В настоящее время стабилизация морских гравиметров обеспечивается специально созданными системами гироскопической стабилизации преимущественно силового типа.

Применение силовых ГС для стабилизации магнитометров связано с рядом технических трудностей [61]: влияние собственных магнитных полей элементов ГС; сложность создания немагнитного ГС; установка магнитного ЧЭ на некотором расстоянии от ГС (для уменьшения влияния его магнитных полей) и связь с ним с помощью механических устройств приводит к увеличению моментов инерции системы, уменьшению точности стабилизации; затрудняется при непосредственной стабилизации ЧЭ учет девиаций от магнитных полей корабля вследствие изменения положения ГС относительно корабельных осей на качке. Несмотря на указанные недостатки, в ряде случаев силовые ГС используются для стабилизации магнитометров. Так, для стабилизации трехкомпонентного магнитометра на немагнитном судне «Заря» [24] используется силовой гироскоп горизонт с механической коррекцией [71] относительно ПГ. При установке гироскоп горизонт на судне были произведены некоторые переделки, которые несколько упростили прибор и уменьшили магнитность некоторых его узлов. Это позволило производить магнитные измерения на качке с приемлемой точностью.

Силовые ГС используются также для стабилизации актинометрических приборов. В одной из трехосных систем [84] стабилизация установленных на площадке приборов относительно ПГ обеспечивается с помощью двухосного гиросtabilизатора (гироскоп горизонт) силового типа. На этом же стабилизаторе расположен ГК, который представляет собой трехстепенный гироскоп, коррек-

тируемый от физического маятника. Определяемый с помощью ГК курс корабля используется для азимутальной стабилизации (с помощью следящего привода) площадки с актинометрическими приборами.

Индикаторные ГС. В обзорной статье [5] указывается, что область использования индикаторных ГС расширяется в связи с разработкой новых типов гироскопов (с электростатическим подвесом, квантовых, лазерных и др.), которые требуют применения индикаторной стабилизации, а также в связи с успехами в разработке следящих систем, систем точной передачи угла, усилительных элементов и средств цифровой вычислительной техники. В работе [3] приводятся несколько схем индикаторных ГС, применяющихся для стабилизации оптических приборов. Индикаторные ГС используются в системах стабилизации актинометрических приборов [84]. В книге [25] приведены схемы индикаторных ГС, применяемых в ИНС и основанных на использовании трехстепенных астатических гироскопов.

Гироскопические следящие системы. В различных оптических, оптико-электронных и радиотехнических системах применяются ГСС. В книге [3] дается описание инфракрасного горизонта и астроориентира, построенных на принципе ГСС. В работе [72] приводится синтез оптимальной ГСС, подверженной возмущающим воздействиям качки основания. В [81] рассматривается близкая к этой задаче исследования секстанта с гироскопической фотоследящей системой. Здесь телескоп жестко связан с гироскопом; наличие в системе фотоэлементов обеспечивает автоматическое слежение телескопа за светилом, при этом используется ГСС, аналогичная системе на рис. 7.4. ГСС установлена на трехосной стабилизированной платформе, благодаря чему увеличивается точность слежения и делается возможным измерение высоты и азимута на светило в стабилизированной системе координат. В книге [40] значительное внимание уделяется системам автоматического сопровождения с гироскопическим следящим приводом. Рассматриваются структурные схемы систем и примеры практического применения. Здесь же излагаются некоторые вопросы динамики ГСС и определения оптимальных ее параметров при случайных возмущениях.

Применение ГСС для автоматического наведения используемых на судах актинометрических приборов рассматривается в работе [84].

Из сказанного выше следует, что методы гироскопической стабилизации ИУ на качающемся основании получили в настоящее время весьма широкое распространение.

§ 8.1. Общая характеристика задач преобразования координат

1. Задачи преобразования координат. При реализации на корабле косвенных и непосредственных методов стабилизации ИУ возникают задачи, связанные с преобразованиями сферических координат из одной системы в другую. Для решения этих задач в системах стабилизации применяются преобразователи координат. Общее назначение ПК состоит в преобразовании сферических координат (углов) из земной системы в корабельную и наоборот.

В качестве типовых задач преобразования координат на корабле можно указать следующие [6, 49, 53, 56]:

- 1) преобразование углов качки корабля из одних плоскостей в другие;
- 2) преобразование углов качки в другие углы наклона ПП к ПГ;
- 3) преобразование углов наведения ИУ из земной системы координат в корабельную и наоборот;
- 4) преобразование данных информации от чувствительных (измерительных) элементов, ориентированных в корабельной системе, в соответствующие данные, отнесенные к земной системе координат;
- 5) преобразование снимаемых с ГУ углов;
- 6) преобразование сигналов управления в системах гироскопической стабилизации.

Первая из указанных задач состоит в преобразовании углов качки корабля из одних плоскостей в другие. Предположим, корабельная ГВ определяет углы качки $\psi = A_2A$, $\theta_k = B_1B$ (рис. 1.6). Пусть на корабле имеется стабилизируемая площадка, установленная в кардановом подвесе. Главная ось стабилизации подвеса параллельна поперечной оси корабля. В согласии с (6.32) в этом случае параметрами стабилизации являются углы $\alpha' = -\psi_k$, $\beta' = \theta$. Следовательно, возникает задача преобразования углов $\psi = A_2A$, $\theta_k = B_1B$ в углы $\psi_k = A_1A$, $\theta = B_2B$ (рис. 1.6), которая может быть решена с помощью ПК. Связь между рассматриваемыми углами качки выражается формулами (1.28).

Другая задача может состоять в преобразовании углов качки корабля в другие углы наклона ПП к ПГ. Предположим, корабель-

ная ГВ определяет углы качки ψ и θ_K . На корабле имеется трехосное стабилизированное ИУ с поворотным кардановым подвесом (рис. 6.30); параметрами его непосредственной стабилизации служат углы наклона ПП к ПГ $e'_B = F_0 F'_1$ и $\rho'_{K.B} = D'_0 D'_1$ (рис. 5.10), характеризуемые соотношениями (5.82) и (5.83). Следовательно, возникает задача преобразования углов качки ψ , θ_K в углы наклона e'_B , $\rho'_{K.B}$. Эта задача решается с помощью ПК при введении в него углов качки ψ , θ_K и стабилизированного курсового угла $q_c = A_2 F_0$ (рис. 5.10).

Весьма важной задачей является преобразование углов наведения ИУ из земной системы координат в корабельную и наоборот. Предположим, на корабле имеется двухосное ИУ с косвенной стабилизацией, которое служит для наблюдения за ориентиром G (рис. 5.4), находящимся в пространстве. Здесь параметрами стабилизации являются нестабилизированные курсовой угол $q_K = AC$ и угол места $\epsilon_K = CL$. В данном случае при определении параметров стабилизации (рис. 5.19) возникает задача преобразования сферических координат заданного направления OL на ориентир G из земной системы координат в корабельную, т. е. стабилизированных курсового угла $q_c = A_2 F_0$ и угла места $\epsilon_c = F_0 L$ в нестабилизированные $q_K = AC$ и $\epsilon_K = CL$. Связь между этими углами дается соотношениями (5.66) и (5.67). Задача эта решается с помощью ПК, в который вводятся углы q_c , ϵ_c , а также углы качки ψ и θ_K (рис. 5.19).

В системах, близких к системам косвенной стабилизации, возникает задача преобразования данных информации от чувствительных (измерительных) элементов, ориентированных в корабельной системе, в соответствующие данные, отнесенные к земной системе координат. Пример подобной задачи был рассмотрен в § 5.3, п. 5. С помощью трехосного феррозондового магнитометра (рис. 5.13), ориентированного в корабельной системе, определяются сферические координаты $q_K = AF_1$ и $J_K = F_1 L$ (рис. 5.12), которые характеризуют положение вектора T земного магнитного поля в корабельной системе координат. От этих углов необходимо перейти к углам магнитного склонения $D = NF_0$ и магнитного наклона $J = F_0 L$ в земной системе координат. Связь между указанными сферическими координатами выражается формулами (5.150) и (5.151). Задача эта решается с помощью вычислительного устройства (рис. 5.13), которое выполняет функции ПК. В него от магнитометра поступают углы q_K и J_K , а от ГУ — курс корабля K и углы качки ψ , θ_K , которые характеризуют положение корабельных осей $Oxyz$ относительно географической системы координат $O\xi\eta\zeta$ (рис. 5.12).

Одна из задач преобразования координат может быть связана с преобразованием снимаемых с ГУ углов. Предположим, на кораб-

де на нестабилизированном основании установлен ГН, который измеряет угол рыскания корабля $\varphi'_p = M_1 A$ (рис. 4.5) в ПП вместо действительного угла рыскания $\varphi_p = M A_2$, отсчитанного в ПГ. Связь между этими углами характеризуется соотношением (4.49), которое может быть использовано в ПК для преобразования угла φ'_p в угол φ_p при учете поступающих от ГВ углов качки ψ и θ_k .

Наконец, можно указать на еще одну очень важную задачу преобразования координат, которая возникает при преобразовании сигналов управления в системах гироскопической стабилизации. Так, например, при использовании трехосного ГС на качающемся и маневрирующем основании возможны случаи, когда выходные оси гироскопов не совпадают с осями стабилизации (осями карданова подвеса платформы). Это вызывает взаимосвязь каналов стабилизации, что может привести к неустойчивости ГС и к увеличению его погрешностей в динамике. Для устранения указанного явления в систему стабилизации вводят ПК, который перераспределяет сигналы, снимаемые с датчиков углов гироскопов, между стабилизирующими двигателями ГС.

Ряд примеров использования ПК в корабельных системах, близких к рассмотренным выше, приводится в работах [6, 53, 56, 57, 63].

2. Методы решения задач преобразования координат. Можно указать на три основных метода решения задач преобразования координат: *аналитический, геометрический, векторно-аналитический*. Первый метод основан на решении с помощью ВУ аналитических зависимостей для параметров стабилизации. На начальном этапе использовались упрощенные аналитические зависимости и счетно-решающие устройства аналогового типа. Применение подобных устройств для решения точных аналитических зависимостей для параметров стабилизации обычно не приводит к желаемым результатам. С развитием и внедрением в системы стабилизации цифровой техники возможна практическая реализация аналитического метода, при этом могут быть достигнуты достаточно высокие точности.

Геометрический метод решения задач преобразования координат основан на преобразовании параметров стабилизации из земной системы координат в корабельную или, наоборот, путем геометрического построения параметров в обеих системах координат с помощью сферических построителей [53, 56]. ПК, в которых реализуется этот метод, часто называют *механическими*. Вследствие ряда специфических особенностей [57, 63] ПК механического типа в настоящее время применяются редко.

Векторно-аналитический метод решения задач преобразования координат является разновидностью аналитического метода. Он базируется на преобразовании координат единичного вектора за-

данного направления из земной системы координат в корабельную или наоборот, которое выполняется с помощью синусно-косинусных вращающихся трансформаторов (СКВТ) [85]. Подобные ПК получили достаточно широкое распространение в системах стабилизации [6, 53, 56].

§ 8.2. Элементы теории и схемы ПК

1. Механический ПК. В ПК, базирующемся на геометрическом методе, применяется сферический построитель, он относится к приборам механического типа. Так как в современных системах стабилизации подобные ПК применяются сравнительно редко, то мы остановимся на них кратко (подробнее см. [53, 56, 57, 63]).

В основе ПК механического типа лежит сферический построитель, в котором физически воспроизводятся (моделируются) подлежащие преобразованию сферические координаты, отнесенные к земной и к корабельной координатным системам. Для этой цели сферический построитель содержит две основные части: стабилизированную и нестабилизированную. Стабилизированная часть прибора воспроизводит земную систему координат, что достигается путем использования карданова подвеса, на вращение колец которого вводятся углы качки от ГВ. Нестабилизированная часть прибора воспроизводит корабельную систему координат; она связана с палубой корабля и получается «естественным» путем при его качке. Сам сферический построитель представляет собой карданово сочленение типа шарнира Гука. Если на стабилизированную часть прибора ввести сферические координаты в земной системе, то с нестабилизированной части могут быть сняты сферические координаты в корабельной системе, и наоборот.

В качестве примера рассмотрим приведенную в § 2.2 задачу преобразования сферических координат заданного направления OH (рис. 2.5), характеризуемых углами $q = A_2 R_0$, $\varphi = R_0 H$ в земной системе, в сферические координаты $Q = AC$, $\Phi = CH$ в корабельной системе. Связь между указанными сферическими координатами дается соотношениями (2.38) и (2.39)

$$\sin \Phi = \sin \varphi \cos \psi \cos \theta_K + \cos \varphi (\sin q \sin \theta_K - \cos q \sin \psi \cos \theta_K), \quad (8.1)$$

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\cos \varphi (\cos q \sin \psi \sin \theta_K + \sin q \cos \theta_K) - \sin \varphi \cos \psi \sin \theta_K}{\cos q \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi}. \quad (8.2)$$

Из формул (8.1) и (8.2) следует, что зависимости

$$\Phi = \Phi(q, \varphi, \psi, \theta_K), \quad Q = Q(q, \varphi, \psi, \theta_K) \quad (8.3)$$

являются весьма сложными. В механическом ПК они по существу не решаются, а соответствующие им сферические координаты

симметрически строятся путем физического воспроизведения модели рис. 2.5. Для пояснения сказанного рассмотрим кинематическую схему (рис. 8.1) сферического построителя, которая представляет собой упрощенную схему механического ПК, приведенную в работе [56, стр. 198, рис. 110]. На рис. 8.1 показаны полуподвижные оси $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, моделирующие земную систему координат,

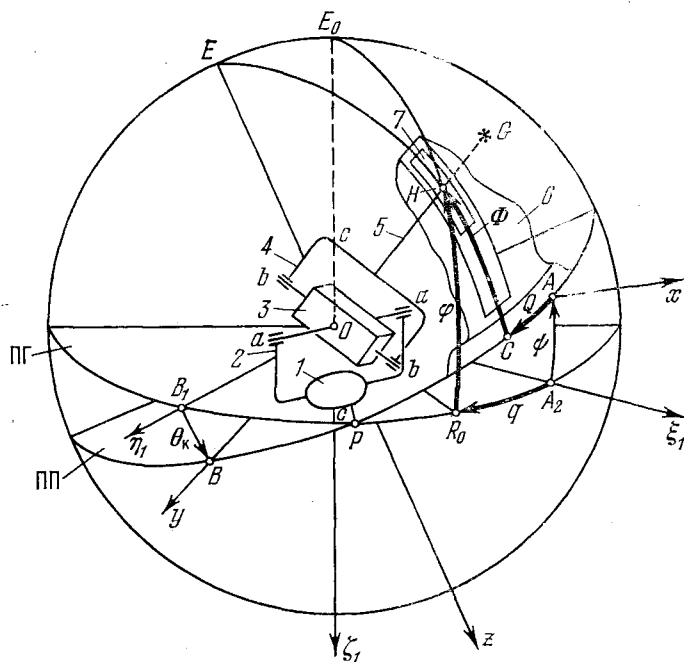


Рис. 8.1. Кинематическая схема сферического построителя ПК.

и повернутые относительно нее на углы килевой ψ и бортовой θ_k качки корабельные оси $Oxyz$. К стабилизированной части построителя относятся: поворотный стол 1, нижняя вилка 2, крестовина 3, верхняя вилка 4 и палец 5, который воспроизводит заданное направление OH . Удержание стабилизированной части прибора в неизменном относительно осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ при качке положения достигается путем установки поворотного стола 1 в кардановом подвесе (на рис. 8.1 не показан) и во введении на вращение его колец углов качки от ГВ. Благодаря этому поворотный стол 1 сохраняет горизонтальное положение, а вилка 2 — вертикальное. Ось aa , относительно которой могут поворачиваться крестовина 3 и вилка 4, также будет горизонтальной. Это обеспечивает возможность

перемещения элементов 3, 4 подвеса и пальца 5 вокруг оси aa в вертикальной плоскости.

К нестабилизированной части построителя относятся: колокол 6 и перемещающаяся в его направляющих дуговая каретка 7. Последняя с помощью подшипника соединена с пальцем 5, который является связующим звеном между стабилизированной и нестабилизированной частями прибора. Колокол 6 поворачивается вокруг оси Oz в ПП, а дуговая каретка 7 может перемещаться в плоскости, перпендикулярной ПП.

Рассмотрим, каким образом сферический построитель осуществляет преобразование углов q и φ в углы Q и Φ . Угол $q = A_2 R_0$ вводится на вращение поворотного стола 1 и вилки 2 вокруг вертикальной оси ss . При этом повернутся также крестовина 3 и вилка 4; ось aa занимает горизонтальное положение, перпендикулярное вертикальной плоскости OE_0HR_0 , которая проходит через заданное направление OH . Угол $\varphi = R_0H$ вводится на поворот крестовины 3 и вилки 4 вокруг оси aa . При этом палец 5 займет заданное положение OH , характеризуемое углами φ и q в осях $O\xi_1\eta_1\zeta_1$. Если качка отсутствует, то при указанных выше поворотах стабилизированных элементов сферического построителя нестабилизированные элементы построителя повернутся (с помощью соответствующих следящих систем) — колокол 6 на угол q , а дуговая каретка 7 на угол φ . При наличии качки корабля, как легко видеть из рис. 8.1, поворот колокола в ПП составит угол $Q = AC$, а перемещение дуговой каретки в плоскости $OENC$ — угол $\Phi = CH$. При этом углы Φ и Q связаны с углами φ , q и углами качки ψ , $\theta_K^{\vec{x}}$ соотношениями (8.1) и (8.2).

Из сказанного следует, что в механическом ПК преобразование углов из одной системы координат в другую осуществляется путем их геометрического построения. С помощью сферического построителя возможно обратное преобразование — углов Φ и Q в углы φ и q . Для того чтобы ПК правильно решал задачу геометрического преобразования координат из одной системы в другую, в дополнение к условиям, которые были указаны в § 6.5, п.1, должны выполняться следующие: механизм вращения колец подвеса ПК должен быть таким же, как у ГВ и у системы стабилизации ИУ (визир, антенна и др.); углы поворотов наружного и внутреннего колец карданова подвеса сферического построителя должны быть равны углам поворотов этих же колец у ГВ и у системы стабилизации ИУ; ориентация главной оси стабилизации карданова подвеса сферического построителя ПК относительно корабельных осей должна быть такой же, как у соответствующей оси подвеса ГУ и ИУ.

ПК механического типа нашли практическое применение в корабельных системах стабилизации [53, 56, 57, 63]. Однако опыт их производства и эксплуатации выявил отдельные недостатки

[57, 63]: сложность обеспечения необходимой жесткости строителя, трудность осмотра и замены отдельных элементов; возникновение значительных механических нагрузок и возможность деформаций элементов строителя при больших углах места; сложность условий работы отдельных следящих систем; сложность изготовления некоторых элементов сферического строителя, сборки и регулировки прибора и др. Эти и другие обстоятельства ограничивают в настоящее время применение ПК механического типа.

2. Электрический ПК. При использовании векторно-аналитического метода решения задач преобразования координат все математические операции выполняются с помощью СКВТ, которые

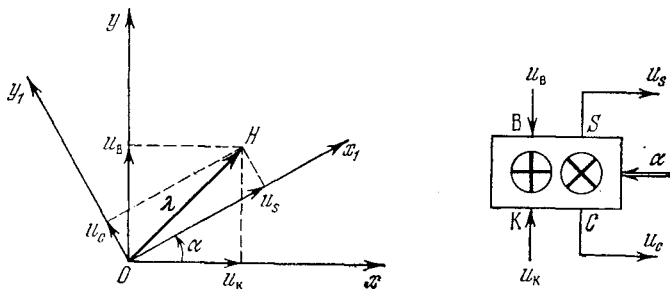


Рис. 8.2. К принципу действия СКВТ.

позволяют: 1) находить составляющие вектора на плоскости по заданному его модулю и углу между направлением вектора и одной из координатных осей; 2) преобразовывать составляющие вектора из одной системы координат в другую; 3) построить вектор по его составляющим в прямоугольной системе координат.

Для пояснения принципа действия СКВТ рассмотрим рис. 8.2. Предположим, в осях Oxy задан вектор λ ; требуется найти его составляющие в осях Ox_1y_1 , повернутых относительно Oxy на угол α . Как известно [6, 85], если к обмотке возбуждения В СКВТ приложить напряжение u_B , пропорциональное составляющей y , к квадратурной обмотке К — напряжение u_K , пропорциональное составляющей x , а ротор СКВТ повернуть на угол α , то на выходе синусной S и косинусной C обмоток ротора СКВТ возникнут напряжения u_s и u_c , определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} u_s &= k_T(u_B \sin \alpha + u_K \cos \alpha), \\ u_c &= k_T(u_B \cos \alpha - u_K \sin \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Из рис. 8.2 видно, что напряжения u_s и u_c будут пропорциональны составляющим x_1 и y_1 . В ПК обычно приходится уравнивать масштабы напряжений, вводимых на один и тот же ВТ*) с

*) В дальнейшем будем придерживаться принятого в настоящее время сокращенного обозначения.

помощью установки специальных масштабных ВТ (МВТ). Поэтому в формулах преобразования напряжений, аналогичных (8.4), коэффициент трансформации k_T учитываться не будет.

Сущность решения этим методом задачи преобразования координат в пространстве состоит в следующем. Выбирается единичный вектор заданного направления, положение которого в земной системе координат известно и определяется двумя углами; вектор раскладывается на три составляющих в этой системе. По этим составляющим и известным углам качки корабля находят составляющие того же вектора в корабельной системе координат. По ним определяются искомые углы, которые характеризуют положение единичного вектора в корабельной системе координат. Все упомянутые преобразования осуществляются с помощью ВТ.

Таким образом, ПК, в котором реализуется векторно-аналитический метод, представляет собой совокупность ВТ, связь между которыми определяется последовательностью линейных преобразований координат. Подобный ПК часто называют *электрическим* [6, 56].

В качестве примера построения электрического ПК с использованием ВТ рассмотрим ту же задачу преобразования углов φ , q из земной системы координат в углы Φ , Q , отнесенные к корабельным осям. В данной задаче в качестве «заданного направления» примем направление OH (рис. 2.5). Единичный вектор этого направления обозначим через λ . Положение этого вектора в полуподвижных осях $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ характеризуется углами q , φ ; положение того же вектора в корабельных осях $Oxyz$ определяется углами Q , Φ . Рассматриваемую задачу следует свести к ряду последовательных линейных преобразований, каждое из которых может быть выполнено соответствующим ВТ.

Запишем преобразование вектора λ от осей $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ к $Oxyz$:

$$[\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z] = A_1 [\lambda_{\xi_1}, \lambda_{\eta_1}, \lambda_{\zeta_1}], \quad (8.5)$$

где A_1 — матрица (1.21).

Учитывая (8.5) и (1.21), имеем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_{\xi_1} \cos \psi + \lambda_{\zeta_1} (-\sin \psi), \\ \lambda_y &= \lambda_{\xi_1} \sin \psi \sin \theta_K + \lambda_{\eta_1} \cos \theta_K + \lambda_{\zeta_1} \cos \psi \sin \theta_K, \\ \lambda_z &= \lambda_{\xi_1} \sin \psi \cos \theta_K + \lambda_{\eta_1} (-\sin \theta_K) + \lambda_{\zeta_1} \cos \psi \cos \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Если в формулы (8.6) подставить выражения (2.34) и (2.35), то легко могут быть найдены соотношения (8.1) и (8.2).

Общее преобразование координат (8.6) следует представить в виде ряда последовательных линейных преобразований, соответствующих поворотам на углы *) φ , q , ψ и θ_K (рис. 8.3).

*) Метод решения подобной задачи с использованием формул аналитической геометрии и рис. 4.3 был рассмотрен в § 4.3, п. 2.

1) Находим проекции λ_r , λ_{ξ_1} вектора λ на оси OR_0 и $O\xi_1$ (рис. 2.5):

$$\lambda_r = \cos \varphi, \quad \lambda_{\xi_1} = -\sin \varphi. \quad (8.7)$$

2) Определяем проекции λ_{ξ_1} , λ_{η_1} :

$$\lambda_{\xi_1} = \lambda_r \cos q; \quad \lambda_{\eta_1} = \lambda_r \sin q. \quad (8.8)$$

Таким образом, получены проекции вектора λ на оси $O\xi_1\eta_1\xi_1$.

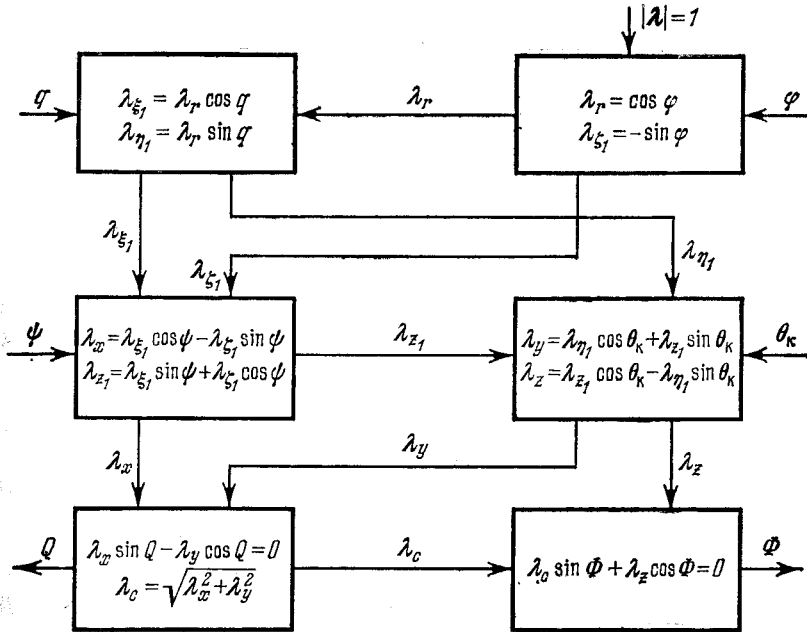


Рис. 8.3. Формальная схема ПК.

Преобразования (8.7) и (8.8) осуществляются двумя ВТ, которые на принципиальной схеме ПК (рис. 8.4) [6,53] обозначены ВТ — φ , ВТ — q .

3) Находим проекции λ_x и λ_{z_1} :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x &= \lambda_{\xi_1} \cos \psi - \lambda_{\xi_1} \sin \psi, \\ \lambda_{z_1} &= \lambda_{\xi_1} \sin \psi + \lambda_{\xi_1} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

4) Определяем проекции λ_y и λ_z :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_y &= \lambda_{\eta_1} \cos \theta_K + \lambda_{z_1} \sin \theta_K, \\ \lambda_z &= \lambda_{z_1} \cos \theta_K - \lambda_{\eta_1} \sin \theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

В результате поворотов осей на углы качки ψ и θ_k получены проекции вектора λ на корабельные оси $Oxuz$. Преобразования (8.9) и (8.10) осуществляются ВТ — ψ и ВТ — θ_k (рис. 8.4).

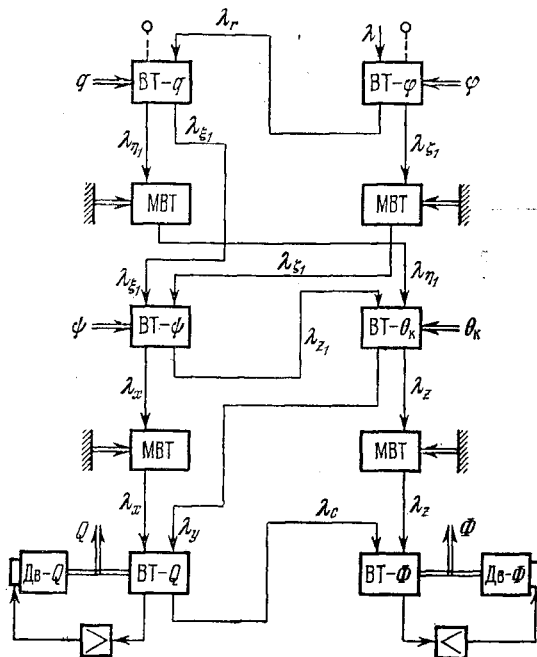


Рис. 8.4. Принципиальная схема ПК.

По проекциям $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ можно определить искомые углы Q и Φ .

5) С помощью проекций λ_x и λ_y определяем угол Q и проекцию λ_c на ось OC :

$$\operatorname{tg} Q = \lambda_y / \lambda_x, \quad (8.11)$$

откуда

$$\lambda_x \sin Q - \lambda_y \cos Q = 0, \quad (8.12)$$

при этом

$$\lambda_c = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}. \quad (8.13)$$

Операции (8.12) и (8.13) осуществляются ВТ — Q (рис. 8.4) путем построения вектора λ_c по его составляющим λ_x и λ_y .

6) На основании проекций λ_z и λ_c определяем угол Φ :

$$\operatorname{tg} \Phi = -\lambda_z / \lambda_c, \quad (8.14)$$

откуда

$$\lambda_c \sin \Phi + \lambda_z \cos \Phi = 0. \quad (8.15)$$

Заметим, что в формуле (8.15) $\lambda_z < 0$, поэтому напряжение на выходе ВТ — Ф (рис. 8.4) в процессе решения уравнения (8.15) сводится к нулю. При этом модуль вектора λ будет

$$\sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_z^2} = |\lambda| = 1, \quad (8.16)$$

в чем легко убедиться при последовательной подстановке в (8.16) выражений для соответствующих проекций вектора λ . Операции (8.15) и (8.16) осуществляются ВТ — Ф путем построения вектора λ по его составляющим λ_z и λ_c .

Таким образом, преобразование (8.6), переводящее углы φ , q в углы Φ , Q , представлено в виде шести последовательных линейных преобразований на плоскости, каждое из которых осуществляется своим ВТ. В соответствии с полученными зависимостями на рис. 8.3 приведена формульная схема решаемой задачи преобразования координат; на рис. 8.4 дана принципиальная схема ПК*). Она не требует специальных пояснений. Приведем лишь несколько замечаний. Для уравнивания масштабов напряжений, вводимых в один и тот же ВТ, в схеме установлены МВТ. ВТ — Q и ВТ — Φ работают в режиме следящей системы. Они играют роль чувствительных элементов и через соответствующие усилители управляют двигателями Дв — Q и Дв — Φ , которые механически связаны с ВТ. При этом осуществляется построение вектора λ по его составляющим в координатной системе $Oxyz$, в процессе которого производится, как принято говорить, «расшифровка» углов Q и Φ ; последние с помощью специальных датчиков (на рис. 8.4 не показаны) передаются в систему стабилизации.

Выше была рассмотрена общая задача преобразования некоторых углов φ и q из земной системы в углы Φ и Q в корабельной системе. Аналогичная задача возникает при осуществлении косвенной стабилизации ИУ. Пусть, например, в соответствии с рис. 5.4 требуется преобразовать стабилизированные угол места ε_c и курсовой угол q_c в нестабилизированные ε_k и q_k . Схема ПК на рис. 8.4 решает эту задачу, если в согласии с рис. 2.5 и 5.4 заменить углы q на q_c , φ на ε_c и Q на q_k , Φ на ε_k .

Достоинства электрических ПК состоят в простоте устройства, отсутствии сложных сферических строителей, простоте изготовления и сборки, высокой точности и плавности вырабатываемых данных. Эти и другие обстоятельства способствовали применению подобных ПК в системах стабилизации [6, 53, 56].

3. Об устойчивости следящих систем ПК. Приведем несколько соображений о работе расшифровывающих следящих систем ПК

*) Подобные схемы приводятся, например, в [6, 53], а также в книге Т. Я. Ходорова, Электромеханические индукционные счетно-решающие устройства, Л., «Судпромгиз», 1960.

в линиях углов Q и Φ (рис. 8.4). В предположении, что эти независимо работающие следящие системы обладают устойчивостью и необходимым качеством, важно исследовать постоянство крутизны сигнального напряжения на входе усилителей указанных расшифровывающих следящих систем на всем диапазоне изменения выходных данных ПК (т. е. углов Q и Φ). Если это условие не выполняется, то коэффициент усиления будет переменным, что может снизить запас устойчивости системы. При этом иногда возникает необходимость в специальном блоке автоматического регулирования усиления (АРУ) для уменьшения непостоянства коэффициента усиления следящей системы. Крутизна сигнального напряжения на входе усилителя пропорциональна абсолютному значению частной производной

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial \alpha} \right|, \quad (8.17)$$

где Δu — сигнальное напряжение, α — угол поворота ротора ВТ.

В согласии со сказанным выше, для независимо работающей следящей системы ПК необходимо обеспечить следующее условие:

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial \alpha} \right| = \text{const}. \quad (8.18)$$

Применим это условие для исследования расшифровывающих следящих систем в линиях углов Q и Φ (рис. 8.4). Как было показано ранее, расшифровка угла Q производится на основании решения уравнения (8.12). В этом случае напряжение, которое поступает на вход усилителя расшифровывающей следящей системы угла Q , будет

$$\Delta u \equiv \lambda_x \sin Q - \lambda_y \cos Q. \quad (8.19)$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial Q} \right| \equiv \lambda_x \cos Q + \lambda_y \sin Q.$$

Подставляя сюда вместо λ_x и λ_y их выражения (2.35), получим

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial Q} \right| \equiv \cos \Phi. \quad (8.20)$$

Так как в процессе качки угол Φ будет переменным (см. (8.1)), то условие (8.18) не выполняется и в данной следящей системе может потребоваться применение блока АРУ.

Приведем анализ условий работы расшифровывающей следящей системы угла Φ . Расшифровка угла Φ производится на основании решения уравнения (8.15). При этом сигнальное напряжение, которое поступает на вход усилителя данной следящей системы, будет

$$\Delta u \equiv \lambda_c \sin \Phi + \lambda_z \cos \Phi. \quad (8.21)$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial \Phi} \right| \equiv \lambda_c \cos \Phi - \lambda_z \sin \Phi \quad (8.22)$$

или, учитывая (8.13),

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial \Phi} \right| \equiv \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \cos \Phi - \lambda_z \sin \Phi. \quad (8.23)$$

Подставляя сюда (2.35), получим

$$\left| \frac{\partial \Delta u}{\partial \Phi} \right| \equiv 1. \quad (8.24)$$

Таким образом, в данном случае условие (8.18) выполняется, расшифровывающая следящая система угла Φ будет работать устойчиво и блок АРУ не потребуется.

При анализе работы следящих систем ПК весьма важен вопрос об их взаимной связанности и взаимном влиянии. Это вызвано тем, что при наличии в ПК нескольких следящих систем, которые в отдельности являются устойчивыми, совместная их работа может оказаться неустойчивой. В схеме ПК (рис. 8.4) в линиях выработки углов Q и Φ имеются две следящие системы, которые работают независимо друг от друга при отсутствии взаимовлияния.

Однако в ряде случаев в схемах ПК имеет место взаимовлияние следящих систем и для выяснения наличия и степени взаимной связанности следящих систем должно быть проведено специальное математическое исследование. Это явление особенно характерно при использовании в ПК «обратного хода данных» [56].

Схема подобного ПК геометрического типа приведена на рис. 8.5. Здесь в сферическом построителе используется «обратный ход данных». Предположим, в ПК решается рассмотренная выше задача преобразования углов φ и q (рис. 2.5) из земной системы координат в углы Φ и Q , отнесенные к корабельной системе координат. Для этого углы φ и q поступают на принимающие 1 и 2 (рис. 8.5) следящих систем ПК; последние через усилители 3 и 4 управляют исполнительными двигателями 5 и 6, которые «подбирают» углы Φ и Q и вводят их в сферический построитель. Так как в данном построителе реализован «обратный ход данных», то он осуществляет

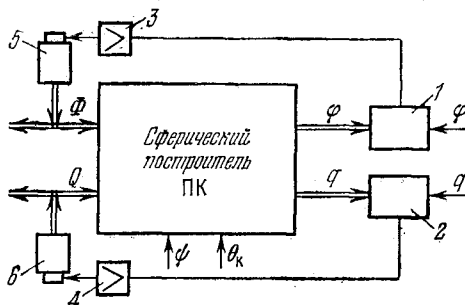


Рис. 8.5. Схема ПК с обратным ходом данных.

ет преобразование углов Φ и Q в углы φ и q . Последние поступают на обработку принимающих 1 и 2. Следовательно, при данной структуре двигатели 5 и 6 обрабатывают принимающие 1 и 2 через сферический построитель ПК. Из анализа физической сущности работы схемы на рис. 8.5 ясно, что следящие системы углов Φ и Q взаимосвязаны и влияют друг на друга, так как изменение одного из углов φ или q вызывает одновременно соответствующие изменения углов Φ и Q . Это следует также из геометрических построений на рис. 2.5 и анализа формул (8.1) и (8.2). Наличие взаимовлияния следящих систем в ПК с «обратным ходом данных» обычно приводит к ухудшению динамической точности и плавности вырабатываемых ПК параметров. В этом отношении более целесообразно построение схем ПК с «прямым ходом данных» (рис. 8.4).

Теоретические исследования вопросов взаимовлияния совместно работающих следящих систем содержатся в руководствах по следящим системам и по приборам управления (см., например, [63]).

§ 8.3. Погрешности ПК

Среди различных факторов, приводящих к погрешностям ПК, наиболее существенное влияние оказывают ошибки входных данных. В рассмотренной выше задаче преобразования углов φ и q в углы Φ и Q в согласии с формулами (8.1) и (8.2) входными данными являются стабилизированные углы φ , q и углы качки ψ , θ_k . Ошибки входных данных будем далее обозначать через $\delta\varphi$, δq , $\delta\psi$, $\delta\theta_k$. Эти ошибки вызывают погрешности $\delta\Phi$, δQ в выходных данных ПК, т. е. в углах Φ и Q . В зависимости от характера ввода в ПК исходных данных различают ошибки в статике и в динамике. Вопрос об определении динамических ошибок ИУ рассматривается подробно в главе 10. Поэтому здесь ограничимся анализом ошибок выходных данных ПК в статике*). Связь между входными и выходными данными дается точными формулами (8.1) и (8.2). Однако в связи с малостью ошибок $\delta\varphi$, δq , $\delta\psi$, $\delta\theta_k$ при определении $\delta\Phi$, δQ задачу можно решить в линейном плане с учетом слагаемых первого порядка малости относительно указанных ошибок. Поэтому вместо точных формул (8.1) и (8.2) выражения для Φ и Q по аналогии с (6.107) можно записать приближенно в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi + \theta_k \sin q - \psi \cos q, \\ Q &= q - (\theta_k \cos q + \psi \sin q) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

*) При анализе ошибок в статике не учитываются динамические характеристики следящих систем ПК.

Обозначим истинные значения входных и выходных данных ПК индексом «нуль»; тогда (8.25) представим так:

$$\left. \begin{aligned} \Phi^0 &= \varphi^0 + \theta_K^0 \sin q^0 - \psi^0 \cos q^0, \\ Q^0 &= q^0 - (\theta_K^0 \cos q^0 + \psi^0 \sin q^0) \operatorname{tg} \varphi^0. \end{aligned} \right\} \quad (8.26)$$

Предположим, что в ПК вместо истинных значений φ^0 , q^0 , ψ^0 , θ_K^0 введены величины φ , q , ψ , θ_K , содержащие погрешности $\delta\varphi$, δq , $\delta\psi$, $\delta\theta_K$, т. е.

$$\varphi = \varphi^0 + \delta\varphi, \quad q = q^0 + \delta q, \quad \psi = \psi^0 + \delta\psi, \quad \theta_K = \theta_K^0 + \delta\theta_K.$$

Тогда вырабатываемые в ПК углы Φ и Q будут содержать ошибки $\delta\Phi$, δQ , определяемые выражениями

$$\delta\Phi = \Phi - \Phi^0, \quad \delta Q = Q - Q^0. \quad (8.27)$$

Пользуясь для определения $\delta\Phi$ и δQ той же методикой, которая была применена в § 6.7, по аналогии с (6.112) имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi &= \frac{\partial\Phi^0}{\partial\varphi^0} \delta\varphi + \frac{\partial\Phi^0}{\partial q^0} \delta q + \frac{\partial\Phi^0}{\partial\psi^0} \delta\psi + \frac{\partial\Phi^0}{\partial\theta_K^0} \delta\theta_K, \\ \delta Q &= \frac{\partial Q^0}{\partial\varphi^0} \delta\varphi + \frac{\partial Q^0}{\partial q^0} \delta q + \frac{\partial Q^0}{\partial\psi^0} \delta\psi + \frac{\partial Q^0}{\partial\theta_K^0} \delta\theta_K. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Согласно (8.26) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\Phi^0}{\partial\varphi^0} &= 1, & \frac{\partial\Phi^0}{\partial q^0} &= \theta_K^0 \cos q^0 + \psi^0 \sin q^0, \\ \frac{\partial\Phi^0}{\partial\psi^0} &= -\cos q^0, & \frac{\partial\Phi^0}{\partial\theta_K^0} &= \sin q^0, \\ \frac{\partial Q^0}{\partial\varphi^0} &= -\frac{1}{\cos^2 q^0} (\theta_K^0 \cos q^0 + \psi^0 \sin q^0), \\ \frac{\partial Q^0}{\partial q^0} &= 1 - (\psi^0 \cos q^0 - \theta_K^0 \sin q^0) \operatorname{tg} \varphi^0, \\ \frac{\partial Q^0}{\partial\psi^0} &= -\operatorname{tg} \varphi^0 \sin q^0, & \frac{\partial Q^0}{\partial\theta_K^0} &= -\operatorname{tg} \varphi^0 \cos q^0. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Подставляя (8.29) в (8.28), ограничиваясь учетом слагаемых первого порядка малости и отбрасывая индекс «нуль», получим

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi &= \delta\varphi - \delta\psi \cos q + \delta\theta_K \sin q, \\ \delta Q &= \delta q - (\delta\psi \sin q + \delta\theta_K \cos q) \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

В реальных условиях работы ПК ошибки $\delta\varphi(t)$, $\delta q(t)$, $\delta\psi(t)$, $\delta\theta_K(t)$ являются случайными функциями времени. Следовательно, погрешности $\delta\Phi(t)$ и $\delta Q(t)$ также будут иметь случайную

природу. С помощью формул (8.30) можно определить математические ожидания и дисперсии этих погрешностей; имеем

$$\left. \begin{aligned} \overline{\delta\Phi} &= \overline{\delta\varphi} - \overline{\delta\psi} \cos q + \overline{\delta\theta_K} \sin q, \\ \overline{\delta Q} &= \overline{\delta q} - (\overline{\delta\psi} \sin q + \overline{\delta\theta_K} \cos q) \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

$$\left. \begin{aligned} D[\delta\Phi] &= D[\delta\varphi] + D[\delta\psi] \cos^2 q + D[\delta\theta_K] \sin^2 q, \\ D[\delta Q] &= D[\delta q] + \{D[\delta\psi] \sin^2 q + D[\delta\theta_K] \cos^2 q\} \operatorname{tg}^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

Пример 8.1. Определить вероятностные характеристики погрешностей выходных данных ПК, обусловленных ошибками входных данных; дано: $q = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\overline{\delta\varphi} = \overline{\delta q} = \overline{\delta\psi} = \overline{\delta\theta_K} = 1$ угл. мин, $\sigma_{\delta\varphi} = \sigma_{\delta q} = \sigma_{\delta\psi} = \sigma_{\delta\theta_K} = 1$ угл. мин.

Решение.

1) По формулам (8.31) находим математические ожидания погрешностей

$$\overline{\delta\Phi} = 1 \text{ угл. мин}, \quad \overline{\delta Q} = 1,5 \text{ угл. мин.}$$

2) В согласии с выражениями (8.32) вычисляем дисперсии погрешностей

$$D[\delta\Phi] = 18 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2, \quad D[\delta Q] = 36 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2.$$

3) Соответственно среднеквадратичные значения погрешностей будут

$$\sigma_{\delta\Phi} = 1,4 \text{ угл. мин}, \quad \sigma_{\delta Q} = 2,1 \text{ угл. мин.}$$

4) Наибольшие значения погрешностей составят

$$\delta\Phi_m = |\overline{\delta\Phi}| + 3\sigma_{\delta\Phi} = 5,2 \text{ угл. мин},$$

$$\delta Q_m = |\overline{\delta Q}| + 3\sigma_{\delta Q} = 7,8 \text{ угл. мин.}$$

Из примера видно, что при заданных ошибках входных данных наибольшее значение имеет погрешность δQ_m в выработке ПК угла Q . Поэтому к точности вводимых в ПК величин φ , q , ψ , θ_K обычно предъявляют весьма жесткие требования.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОРАБЛЯ НА КАЧКЕ

§ 9.1. Сущность задачи прогнозирования

При решении ряда задач по стабилизации ИУ на качающемся основании возникает необходимость в знании некоторого параметра стабилизации в будущий момент времени, который определяется на основании текущих значений этого параметра и характеристик закона его изменения. Подобная задача представляет собой *задачу прогнозирования (упреждения)*. Необходимость прогнозирования в системах стабилизации появляется в ряде случаев. Так, при решении задач оптимального управления в системах стабилизации приходится учитывать инерционность различных элементов и устройств, запаздываний и т. п. Использование в гироскопических и стабилизационных системах ЦВМ неизбежно связано с дискретным характером управления и выдачи данных. Эти и другие особенности систем стабилизации на качающемся основании приводят к задачам прогнозирования и использования соответствующих прогнозирующих устройств (ПУ). Ряд примеров решения подобных задач при коррекции гироскопических платформ и в астроинерциальных системах приводится в работе [73].

Решение задачи прогнозирования не представляет особой трудности, если колебания основания, например качка корабля, имеют правильный, регулярный характер. Действительно, пусть угол крена корабля изменяется по закону

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t, \quad (9.1)$$

где θ_0 — амплитудное значение угла крена, а ω — частота качки. Предположим, известны значения θ_0 и ω , которые в течение интересующего нас промежутка времени остаются постоянными. Тогда значение угла крена $\theta(t + t_{\text{п}})$ в некоторый будущий момент времени $(t + t_{\text{п}})$ определяется так:

$$\theta(t + t_{\text{п}}) = \theta_0 \cos \omega(t + t_{\text{п}}), \quad (9.2)$$

где $t_{\text{п}}$ — время прогнозирования.

Рассмотрим более реальный случай, когда величины θ_0 и ω неизвестны, но имеются основания полагать, что качка носит гармонический характер. Предположим, с помощью ГВ измерен угол $\theta(t)$ в момент времени t ; требуется найти угол крена $\theta(t + t_{\text{п}})$

в момент $(t + t_{\Pi})$. Примем, что время прогнозирования t_{Π} мало по сравнению с периодом качки $T = 2\pi/\omega$. В согласии с формулой (9.1) имеем

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \theta_0 \cos \omega(t + t_{\Pi})$$

или

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \theta_0 (\cos \omega t \cos \omega t_{\Pi} - \sin \omega t \sin \omega t_{\Pi}).$$

На основании указанного выше допущения приближенно можно принять

$$\cos \omega t_{\Pi} \cong 1, \quad \sin \omega t_{\Pi} \cong \omega t_{\Pi},$$

тогда

$$\theta(t + t_{\Pi}) \cong \theta_0 \cos \omega t - (\theta_0 \omega \sin \omega t) t_{\Pi}. \quad (9.3)$$

Так как в согласии с (9.1)

$$-\theta_0 \omega \sin \omega t = \dot{\theta}(t),$$

то формулу (9.3) можно записать в виде

$$\theta(t + t_{\Pi}) \cong \theta(t) + \dot{\theta}(t) \cdot t_{\Pi}. \quad (9.4)$$

Эта формула является приближенной, и ею можно пользоваться в условиях регулярной качки корабля лишь при весьма малых значениях времени прогнозирования t_{Π} , при которых допустимо считать $\dot{\theta} = \text{const}$.

Для решения задачи по формуле (9.4) необходимо знать текущее значение угла крена $\theta(t)$, его производную $\dot{\theta}(t)$ и время прогнозирования t_{Π} . Формула (9.4) позволяет реализовать линейное ПУ простейшего типа. Точное решение задачи прогнозирования при регулярной качке может базироваться на измерении величин $\theta(z)$ и $\dot{\theta}(z)$, характеризующих соотношениями

$$\theta(z) = \theta_0 \cos \omega z, \quad \dot{\theta}(z) = -\theta_0 \omega \sin \omega z, \quad (9.5)$$

из которых можно определить неизвестные θ_0 и ω . Подстановка их в (9.2) позволяет определить угол крена корабля $\theta(t + t_{\Pi})$.

В общем случае нерегулярной качки корабля соотношение (9.4) имеет вид

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \theta(t) + \Delta\theta, \quad (9.6)$$

где $\Delta\theta$ характеризует изменение угла крена за время прогнозирования

$$\Delta\theta = \int_0^{t_{\Pi}} \dot{\theta}(t) dt. \quad (9.7)$$

В условиях нерегулярной качки $\dot{\theta}(t)$ представляет собой случайную функцию времени. Это обстоятельство существенно ос-

должныет прогнозирование качки. Однако знание ее вероятностных характеристик позволяет в принципе решить задачу прогнозирования и для условий нерегулярной качки.

§ 9.2. Определение оптимальной передаточной функции прогнозирующего устройства

1. Сущность метода оптимальной фильтрации Колмогорова — Винера. Определение оптимальной передаточной функции ПУ представляет собой одну из задач синтеза систем автоматического управления, которую можно сформулировать следующим образом [83]: *известны характеристики управляющих (полезный сигнал) и возмущающих (помеха) сигналов, действующих на систему; требуется найти оптимальную динамическую систему, обладающую наивысшей точностью в смысле выбранного критерия.* Так как условия работы ПУ на качке характерны тем, что полезный сигнал и помеха представляют собой случайные функции времени, то необходимо воспользоваться методами статистического синтеза САУ. Для решения поставленной задачи применим метод Колмогорова — Винера [72, 83, 91], согласно которому задача синтеза состоит в следующем [83]. Предполагается, что полезный сигнал и помеха представляют собой стационарные случайные функции с известными корреляционными функциями и равными нулю математическими ожиданиями. Система должна осуществлять линейное преобразование полезного сигнала в соответствующий сигнал на выходе. Требуется найти импульсную переходную функцию (передаточную функцию) системы, удовлетворяющую условию физической осуществимости и обеспечивающую минимум среднеквадратичной ошибки (СКО — критерий качества системы) между требуемым и действительным значениями выходного сигнала.

В статистической теории оптимальных систем Колмогорова — Винера принят ряд допущений [72, 83, 91]:

1) Входной сигнал $m(t)$ и помеха $n(t)$, а также желаемый выходной сигнал $y(t)$ являются стационарными и стационарно связанными случайными функциями с равными нулю математическими ожиданиями.

2) Время наблюдения бесконечно, т. е. система должна обладать бесконечной «памятью» и использовать все данные о входном сигнале от $t = -\infty$ до текущего момента времени.

3) Искомая система должна осуществлять линейное преобразование полезного сигнала $m(t)$ и принадлежать к классу систем с постоянными параметрами.

4) Оптимальная система должна быть физически осуществимой, т. е. ее реакция на единичную импульсную функцию обращается в нуль для $t < 0$. Это означает, что для реально осуществи-

мой системы импульсная переходная функция (весовая функция) должна удовлетворять условию

$$k(t) = 0 \quad (t < 0), \quad (9.8)$$

которое называют условием физической осуществимости [83].

5) В качестве критерия оптимальности принимается критерий минимума СКО.

Анализ и оценка этих допущений даются в литературе (см., например, [72]).

Приведем основные формулы, поясняющие математическую сущность рассматриваемого метода. На вход системы поступает сигнал $x(t)$, состоящий из полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$ — стационарных случайных функций с равными нулю математическими ожиданиями и известными корреляционными функциями, т. е.

$$x(t) = m(t) + n(t). \quad (9.9)$$

Система должна на выходе воспроизводить не полезный сигнал $m(t)$, а некоторый требуемый сигнал $y(t)$, связанный с $m(t)$ заданным линейным функциональным соотношением

$$y(t) = L(p) m(t), \quad (9.10)$$

где $L(p)$ — заданный преобразующий оператор.

Действительный выходной сигнал системы обозначим через $z(t)$. Разность между $y(t)$ и $z(t)$ представляет собой погрешность $\xi(t)$ системы

$$\xi(t) = y(t) - z(t). \quad (9.11)$$

Требуется найти оптимальную импульсную переходную функцию $k(t)$, которая удовлетворяет условию физической осуществимости (9.8) и обеспечивает минимум СКО

$$\overline{\xi^2} = M \{ [y(t) - z(t)]^2 \}. \quad (9.12)$$

Вместо $k(t)$ можно непосредственно определить оптимальную передаточную функцию системы $\Phi(j\omega)$, которая связана с $k(t)$ известным соотношением

$$\Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} k(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (9.13)$$

Сущность постановки задачи определения оптимальной динамической системы наглядно поясняется структурной схемой [72], приведенной на рис. 9.1. Из схемы видно, что задача определения оптимальных динамических характеристик системы рассматривается в разомкнутой схеме.

Не приводя вывода выражения для оптимальной передаточной функции $\Phi(j\omega)$, заметим, что она получается из интегрального

уравнения Винера — Хоффа

$$K_{yx}(\tau) - \int_0^{\infty} K_x(\tau - \lambda) k(\lambda) d\lambda = 0 \quad (\tau > 0), \quad (9.14)$$

решением которого является искомая импульсная переходная функция $k(t)$ системы. В (9.14) буквой K обозначены корреляционная функция соответствующей случайной функции и взаимная корреляционная функция.

Введем необходимые в дальнейшем обозначения. При отсутствии взаимной корреляции между полезным сигналом $m(t)$ и помехой $n(t)$ спектральная плотность $S_x(\omega)$ входной

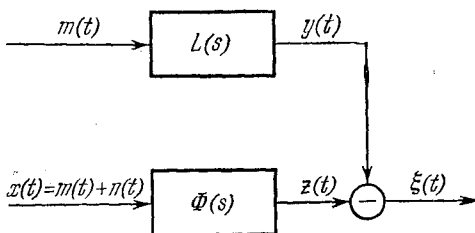


Рис. 9.1. К определению оптимальной передаточной функции в разомкнутой схеме.

случайной функции $x(t)$ определяется соотношением

$$S_x(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega). \quad (9.15)$$

Для взаимной спектральной плотности $S_{yx}(\omega)$ имеем

$$S_{yx}(\omega) = S_{ym}(\omega) + S_{yn}(\omega). \quad (9.16)$$

Введем вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$, связанную с $S_x(\omega)$ следующим выражением:

$$|\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega) \Psi^*(j\omega) = S_x(\omega). \quad (9.17)$$

Функция $\Psi(j\omega)$ содержит все нули и полюсы функции $S_x(\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости, а комплексно сопряженная функция $\Psi^*(j\omega)$ — все нули и полюсы функции $S_x(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости. Учитывая введенные выше обозначения, общую формулу для передаточной функции оптимальной динамической системы можно записать в виде [72, 83, 91]

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{yx}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.18)$$

Формула (9.18) является основным соотношением в статистической теории оптимальных систем. Интегралы в этой формуле во многих случаях легко вычисляются, например, когда $S_{yx}(\omega)$ является дробно-рациональной функцией, как это имеет место для спектральной плотности качки корабля.

2. **Оптимальная передаточная функция ПУ.** Перейдем к определению оптимальной передаточной функции ПУ в условиях нерегулярной качки корабля. Подобная задача рассматривалась в работах [8, 37, 72]. Вначале приведем общее выражение для оптимальной передаточной функции ПУ. Предположим, на вход ПУ поступает стационарная случайная функция — полезный сигнал $m(t)$ с заданной спектральной плотностью $S_m(\omega)$; для простоты примем, что помеха отсутствует, т. е. $n(t) = 0$. Требуется определить передаточную функцию $\Phi(j\omega)$ ПУ таким образом, чтобы дисперсия погрешности

$$\bar{\xi}^2 = M \{[m(t + t_n) - z(t)]^2\} \quad (9.19)$$

между величиной $y(t) = m(t + t_n)$ сигнала на входе в некоторый будущий момент времени $(t + t_n)$ и величиной $z(t)$ на выходе в момент времени t имела минимум. Применительно к указанной задаче общая формула (9.18) для оптимальной передаточной функции $\Phi(j\omega)$ имеет вид [83]

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi(j\omega)} \int_0^\infty e^{-j\omega t} dt \int_0^\infty \Psi^*(j\omega) e^{j\omega(t+t_n)} d\omega, \quad (9.20)$$

где вспомогательная функция $\Psi^*(j\omega)$ связана со спектральной плотностью $S_m(\omega)$ полезного сигнала $m(t)$ выражением *) (см. (9.17))

$$|\Psi^*(j\omega)|^2 = 2\pi S_m(\omega). \quad (9.21)$$

В согласии с (9.20) оптимальная передаточная функция $\Phi(j\omega)$ ПУ находится следующим образом:

1) определяется вспомогательная функция

$$|\Psi^*(j\omega)|^2 = 2\pi S_m(\omega); \quad (9.22)$$

2) находится функция $\beta(t)$, связанная с $\Psi^*(j\omega)$ формулой

$$\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(j\omega) e^{j\omega(t+t_n)} d\omega; \quad (9.23)$$

3) вычисляется преобразование Фурье $B(j\omega)$ для функции $\beta(t)$:

$$B(j\omega) = \int_0^\infty \beta(t) e^{-j\omega t} d\omega; \quad (9.24)$$

4) находится передаточная функция $\Phi(j\omega)$:

$$\Phi(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{\Psi^*(j\omega)}. \quad (9.25)$$

*) Здесь введен множитель 2π вследствие различия в коэффициенте $1/(2\pi)$ перед формулой для $S_m(\omega)$, принятой в [83] и в данной книге.

3. Прогнозирование углов крена корабля. Применим приведенные выше формулы для определения оптимальной передаточной функции $\Phi(j\omega)$ ПУ углов крена корабля [72]. Предположим, что корабельная ГВ определяет текущее значение угла крена $\theta(t)$ (индекс «к» опускаем). Следовательно, в данном случае полезный входной сигнал в ПУ $m(t) = \theta(t)$.

Для простоты ошибками ГВ будем пренебрегать, полагая $n(t) = 0$. Это допустимо, так как углы крена корабля достигают иногда нескольких десятков градусов, а ошибки ГВ обычно не превосходят нескольких угловых минут. ПУ должно определить значение угла крена $m(t + t_n) = \theta(t + t_n)$ в некоторый будущий момент времени $(t + t_n)$.

Для решения поставленной задачи необходимо знать спектральную плотность $S_m(\omega) = S_\theta(\omega)$ случайной функции $m(t) = \theta(t)$ на входе в ПУ. Примем, что $S_\theta(\omega)$ определяется соотношением (1.83):

$$S_\theta(\omega) = \frac{A\mu}{2\pi\lambda} \left[\frac{2\lambda + \omega}{\mu^2 + (\omega + \lambda)^2} + \frac{2\lambda - \omega}{\mu^2 + (\omega - \lambda)^2} \right]. \quad (9.26)$$

Обозначив

$$b^2 = \mu^2 + \lambda^2, \quad C = 4A\mu, \quad (9.27)$$

перепишем (9.26) следующим образом:

$$S_\theta(\omega) = \frac{Cb^2}{2\pi(\omega^2 + 2\lambda\omega + b^2)(\omega^2 - 2\lambda\omega + b^2)}. \quad (9.28)$$

Для того чтобы определить вспомогательную функцию $\Psi(j\omega)$, представим $S_\theta(\omega)$ в виде

$$S_\theta(\omega) = \frac{Cb^2}{2\pi[\omega - (\lambda + j\mu)][\omega - (-\lambda + j\mu)][\omega - (-\lambda - j\mu)][\omega - (\lambda - j\mu)]}. \quad (9.29)$$

Так как вспомогательная функция $\Psi(j\omega)$ характеризуется соотношением (9.21), то ее нули и полюсы, совпадающие с нулями и полюсами функции $S_\theta(\omega)$, должны быть расположены в верхней полуплоскости, т. е. в согласии с (9.29) для $\Psi(j\omega)$ получим

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{Cb}}{[\omega - (-\lambda + j\mu)][\omega - (\lambda + j\mu)]}. \quad (9.30)$$

Обозначая для краткости записи полюсы функции $\Psi(j\omega)$ через ρ_1 и ρ_2 , где

$$\rho_1 = -\lambda + j\mu, \quad \rho_2 = \lambda + j\mu, \quad (9.31)$$

перепишем (9.30) в виде

$$\Psi(j\omega) = \frac{\sqrt{Cb}}{(\omega - \rho_1)(\omega - \rho_2)}. \quad (9.32)$$

Разложим (9.32) на простые дроби:

$$\Psi(j\omega) = \sum_{n=1}^2 \frac{a_n}{\omega - \rho_n}, \quad (9.33)$$

где

$$a_n = [(\omega - \rho_n) \Psi(j\omega)]_{\omega=\rho_n}. \quad (9.34)$$

Учитывая (9.32), согласно (9.34) имеем

$$a_1 = \frac{V\bar{C}b}{\rho_1 - \rho_2}, \quad a_2 = \frac{V\bar{C}b}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (9.35)$$

Подставляя (9.35) в (9.33), получим

$$\Psi(j\omega) = \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} \left[\frac{1}{\omega - \rho_2} - \frac{1}{\omega - \rho_1} \right]. \quad (9.36)$$

Определим функцию $\beta(t)$. Согласно (9.23) и (9.36)

$$\beta(t) = \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+t_{\Pi})}}{\omega - \rho_2} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+t_{\Pi})}}{\omega - \rho_1} d\omega \right]. \quad (9.37)$$

Учитывая обозначения (9.31), для интегралов I_1 и I_2 , входящих в выражение (9.37), найдем

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+t_{\Pi})}}{\omega - \rho_2} d\omega = je^{j\rho_2(t+t_{\Pi})}, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega(t+t_{\Pi})}}{\omega - \rho_1} d\omega = je^{j\rho_1(t+t_{\Pi})}. \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

Подставляя (9.38) в (9.37), получаем

$$\beta(t) = \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} j [e^{j\rho_2(t+t_{\Pi})} - e^{j\rho_1(t+t_{\Pi})}]. \quad (9.39)$$

Далее, согласно формуле (9.24) находим преобразование Фурье $B(j\omega)$ для функции $\beta(t)$:

$$\begin{aligned} B(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} j [e^{j\rho_2(t+t_{\Pi})} - e^{j\rho_1(t+t_{\Pi})}] dt = \\ &= \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} \left[\frac{1}{\omega - \rho_2} e^{j\rho_2 t_{\Pi}} - \frac{1}{\omega - \rho_1} e^{j\rho_1 t_{\Pi}} \right]. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Подставляя (9.40) и (9.36) в (9.25), получаем

$$\Phi(j\omega) = \frac{\sqrt{Cb} \left[\frac{1}{\omega - \rho_2} e^{j\rho_2 t_{\Pi}} - \frac{1}{\omega - \rho_1} e^{j\rho_1 t_{\Pi}} \right]}{\frac{\sqrt{Cb}}{2\lambda} \left[\frac{1}{\omega - \rho_2} - \frac{1}{\omega - \rho_1} \right]}, \quad (9.41)$$

откуда

$$\Phi(j\omega) = \frac{(\omega - \rho_1) e^{j\rho_2 t_{\Pi}} - (\omega - \rho_2) e^{j\rho_1 t_{\Pi}}}{(\omega - \rho_1) - (\omega - \rho_2)} \quad (9.42)$$

или, принимая во внимание (9.34),

$$\Phi(j\omega) = \frac{(\omega + \lambda - j\mu) e^{(j\lambda - \mu)t_{\Pi}} - (\omega - \lambda - j\mu) e^{-(j\lambda + \mu)t_{\Pi}}}{2\lambda}. \quad (9.43)$$

После простейших преобразований получим окончательное выражение для передаточной функции ПУ:

$$\Phi(j\omega) = e^{-\mu t_{\Pi}} \left(j\omega \frac{\sin \lambda t_{\Pi}}{\lambda} + \cos \lambda t_{\Pi} + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t_{\Pi} \right). \quad (9.44)$$

Найденную формулу можно переписать в несколько ином виде. Действительно, входящее в (9.44) слагаемое

$$e^{-\mu t_{\Pi}} \left(\cos \lambda t_{\Pi} + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t_{\Pi} \right) \quad (t_{\Pi} > 0),$$

согласно (1.81), представляет собой значение нормированной корреляционной функции $r_{\theta}(\tau) |_{\tau=t_{\Pi}}$. Поэтому, обозначая

$$r_{\theta}(t_{\Pi}) = e^{-\mu t_{\Pi}} \left(\cos \lambda t_{\Pi} + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t_{\Pi} \right) \quad (t_{\Pi} > 0), \quad (9.45)$$

перепишем (9.44) в виде

$$\Phi(j\omega) = e^{-\mu t_{\Pi}} \frac{\sin \lambda t_{\Pi}}{\lambda} j\omega + r_{\theta}(t_{\Pi}). \quad (9.46)$$

Входящие в $\Phi(j\omega)$ постоянные величины суть следующие: t_{Π} — время прогнозирования; μ , λ — коэффициент нерегулярности и преобладающая частота качки. Если на корабле имеется коррелятор, то по реализации случайной функции $\theta(t)$ можно определить корреляционную функцию $K_{\theta}(\tau)$, а следовательно, значения параметров μ , λ и величину $r_{\theta}(t_{\Pi})$.

Зная оптимальную передаточную функцию ПУ, можно записать условие прогнозирования. Для этого надо в (9.10) заменить $m(t)$ на $\theta(t)$, $y(t)$ на $\theta(t + t_{\Pi})$, а $L(p)$ на $\Phi(p)$ ($p = \frac{d}{dt}$); тогда

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \Phi(p) \theta(t). \quad (9.47)$$

Подставляя в (9.47) вместо $\Phi(p)$ его выражение (9.44) (заменив $j\omega$ на p), получим

$$\theta(t + t_{\Pi}) = e^{-\mu t_{\Pi}} \left[\frac{\sin \lambda t_{\Pi}}{\lambda} \dot{\theta}(t) + \left(\cos \lambda t_{\Pi} + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda t_{\Pi} \right) \theta(t) \right] \quad (9.48)$$

или, учитывая (9.45),

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \theta(t) r_{\theta}(t_{\Pi}) + \dot{\theta}(t) e^{-\mu t_{\Pi}} \frac{\sin \lambda t_{\Pi}}{\lambda}. \quad (9.49)$$

Из формулы (9.46) или (9.49) следует, что оптимальная передаточная функция ПУ или условие прогнозирования могут быть практически реализованы. Некоторые вопросы реализации ПУ рассмотрены в работе [8].

Иногда вместо оптимального алгоритма прогнозирования (9.49) можно пользоваться некоторым приближенным, или субоптимальным, алгоритмом. Так, например, при малых t_{Π} , μ и $\mu/\lambda \ll 1$ вместо (9.44) приближенно получим

$$\Phi(j\omega) = 1 + j\omega t_{\Pi}, \quad (9.50)$$

а вместо (9.48) имеем

$$\theta(t + t_{\Pi}) = \theta(t) + \dot{\theta}(t) \cdot t_{\Pi}, \quad (9.51)$$

т. е. условие прогнозирования, совпадающее с (9.4) *).

При определении оптимальной передаточной функции ПУ не была учтена возможная на входе ПУ помеха, обусловленная, например, ошибкой ГВ в определении угла крена корабля. Учет помехи при решении задачи прогнозирования рассматривается в статье [37].

§ 9.3. Погрешности прогнозирования

Для оценки точности прогнозирования в условиях нерегулярной качки корабля ограничимся расчетом минимальной СКО оптимального ПУ, не принимая во внимание его инструментальных погрешностей, которые в принципе могут быть сделаны достаточно малыми. Для рассматриваемого метода оптимизации минимальная дисперсия погрешности определяется следующей общей формулой:

$$D[\xi]_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (9.52)$$

*) Совпадение равенств (9.4) и (9.51), полученных для различных условий качки корабля, объясняется тем, что эти равенства представляют хорошо известную формулу Эйлера, справедливую для экстраполяции любой достаточно гладкой функции. Сущность ее состоит в том, что для небольшого промежутка значений независимой переменной (в данном случае времени прогнозирования t_{Π}) касательная мало отклоняется от графика функции.

Для задачи прогнозирования выражение $D[\xi]_{\min}$ имеет вид [83]

$$D[\xi]_{\min} = \int_0^{t_{\Pi}} \gamma^2(t) dt, \quad (9.53)$$

где функция $\gamma(t)$ связана с вспомогательной функцией $\Psi(j\omega)$ (см. (9.22)) зависимостью

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.54)$$

Подставим в (9.54) выражение (9.33):

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^2 \frac{a_n}{\omega - \rho_n} e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.55)$$

По аналогии с (9.38) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\omega - \rho_n} e^{j\omega t} d\omega = ja_n e^{j\rho_n t}. \quad (9.56)$$

Тогда (9.54) можно записать в виде

$$\gamma(t) = j \sum_{n=1}^2 a_n e^{j\rho_n t}. \quad (9.57)$$

Подставляя в (9.57) выражения (9.35), получим

$$\gamma(t) = V\bar{C}b_j \left(\frac{1}{\rho_1 - \rho_2} e^{j\rho_1 t} + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} e^{j\rho_2 t} \right). \quad (9.58)$$

Учитывая (9.31), перепишем (9.58) в виде

$$\gamma(t) = \frac{V\bar{C}b}{2\lambda} e^{-\mu t} j (e^{j\lambda t} - e^{-j\lambda t}) = -\frac{V\bar{C}b}{\lambda} e^{-\mu t} \sin \lambda t,$$

откуда

$$\gamma^2(t) = \frac{Cb^2}{\lambda^2} e^{-2\mu t} \sin^2 \lambda t. \quad (9.59)$$

Теперь введем (9.59) в (9.53); тогда

$$D[\xi]_{\min} = \frac{Cb^2}{\lambda^2} \int_0^{t_{\Pi}} e^{-2\mu t} \sin^2 \lambda t dt \quad (9.60)$$

или, учитывая (9.27),

$$D[\xi]_{\min} = \frac{4A\mu b^2}{\lambda^2} \int_0^{t_{\Pi}} e^{-2\mu t} \sin^2 \lambda t dt, \quad (9.61)$$

откуда

$$D[\xi]_{\min} = A \left[(1 - e^{-2\mu t_{\Pi}}) - e^{-2\mu t_{\Pi}} \frac{\mu}{\lambda} \left(2 \frac{\mu}{\lambda} \sin^2 \lambda t_{\Pi} + \sin 2\lambda t_{\Pi} \right) \right]. \quad (9.62)$$

Пример 9.1. Вычислить дисперсию $D[\xi]_{\min}$ и среднеквадратичное значение погрешности прогнозирования для следующих исходных данных [72]: $A = D[\theta] = 0,6 \cdot 10^{-2} \text{ рад}^2$, $\mu = 0,1 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda = 0,7 \text{ сек}^{-1}$, $t_{\Pi} = 0,05 \text{ сек}$.

Решение.

1) По формуле (9.62) находим

$$D[\xi]_{\min} = 5,139 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2.$$

2) Определяем среднеквадратичное значение погрешности

$$\sigma_{\xi_{\min}} = \sqrt{D[\xi]_{\min}} = 2,268 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 48''.$$

Из примера следует, что полученное ПУ решает задачу с достаточной точностью.

§ 9.4. Решение задачи прогнозирования методом Калмана

1. Сущность метода Калмана. Рассмотрим решение задачи прогнозирования с использованием метода оптимальной фильтрации Калмана (ОФК). Этот метод оптимизации получил широкое применение благодаря тому, что соответствующие алгоритмы реализуются с помощью средств вычислительной техники, в частности ЦВМ, и другим его достоинствам. Алгоритмы метода ОФК существуют в непрерывном и дискретном вариантах. Последний используется при реализации его на ЦВМ. Для пояснения сущности метода рассмотрим непрерывный вариант алгоритма ОФК.

В отличие от метода Колмогорова — Винера, где непосредственно находится оптимальная передаточная функция или импульсная переходная (весовая) функция фильтра (задача оптимизации решается в частотной области), в методе ОФК задача оптимизации решается во временной области с использованием понятия состояния системы. При этом находятся дифференциальные уравнения оптимального фильтра для непрерывного варианта или разностные уравнения для дискретного, которые и характеризуют структуру фильтра Калмана, реализуемую с помощью вычислительных устройств. Метод ОФК обладает рядом достоинств [73, 75], в частности, позволяет решать задачи оптимизации для нестационарных и многомерных систем.

Основные предположения метода ОФК состоят в том, что модель ошибок исследуемой динамической системы является линей-

ной, а наблюдения содержат аддитивную помеху типа белого шума. При этом имеется принципиальная возможность учесть наличие корреляционной связи как в сигналах на входе системы, так и в ошибках наблюдения.

В данном методе линейная нестационарная динамическая система может быть описана с помощью векторно-матричного дифференциального уравнения, отражающего динамику системы, и уравнения наблюдения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= F(t)x(t) + G(t)w(t), \\ z(t) &= y(t) + v(t) = H(t)x(t) + v(t), \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

где $x(t)$ — n -мерный вектор состояния системы, компоненты которого x_i называются *переменными состояниями*, $w(t)$ — r -мерный вектор, представляющий собой сигнал на входе системы, $y(t)$ — m -мерный вектор, который характеризует выходной сигнал, $z(t)$ — m -мерный вектор — наблюдаемый сигнал, $v(t)$ — m -мерный сигнал, характеризующий ошибку измерения, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ — матрицы размерностей $[n \times n]$, $[n \times r]$, $[m \times n]$ соответственно.

В методе ОФК предполагается, что входной сигнал $w(t)$ представляет собой векторный случайный гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей *)

$$M [w(t) w^T(\tau)] = Q(t) \delta(t - \tau), \quad (9.64)$$

где $Q(t)$ — симметричная, неотрицательно-определенная матрица размерности $[r \times r]$.

Аналогичными свойствами обладает случайный процесс $v(t)$, при этом

$$M [v(t) v^T(\tau)] = R(t) \delta(t - \tau), \quad (9.65)$$

где $R(t)$ — симметричная, положительно-определенная матрица размерности $[m \times m]$.

Пусть в момент времени t_0 начальное состояние системы характеризуется вектором $x(t_0)$, который представляет собой векторную случайную величину с гауссовым распределением, с заданным математическим ожиданием

$$M [x(t_0)] = \bar{x}_0 \quad (9.66)$$

и корреляционной матрицей

$$P(t_0) = M \{ [x(t_0) - \bar{x}_0] [x(t_0) - \bar{x}_0]^T \}. \quad (9.67)$$

*) Индексом «Т» обозначается операция транспонирования.

На диагонали матрицы $P(t_0)$ расположены дисперсии компонент вектора состояния x_0 . Предполагается, что векторы $w(t)$, $v(t)$ и $x(t_0)$ взаимно не коррелированы.

На рис. 9.2 приведена матричная блок-схема [73, 75] непрерывной системы, соответствующей уравнениям (9.63).

Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что все их решения выражаются через так называемую фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$, являющуюся переходной матрицей

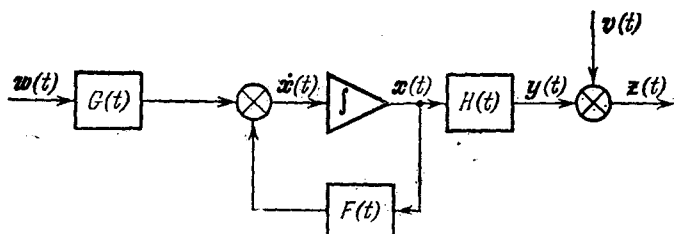


Рис. 9.2. Матричная блок-схема непрерывной системы, соответствующей уравнениям (9.63).

для системы уравнений (9.63). Эта матрица является невырожденной и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = F(t) \Phi(t, t_0) \quad (9.68)$$

при начальном условии

$$\Phi(t_0, t_0) = E, \quad (9.69)$$

где E — единичная матрица.

Тогда решение первого уравнения системы (9.63) можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) w(\tau) d\tau. \quad (9.70)$$

Если матрица $F = \text{const}$, то

$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)} \quad (9.71)$$

и при малом $t - t_0 = \Delta t$ может быть вычислена по формуле

$$\Phi(t, t_0) = E + F\Delta t + F^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} + \dots \quad (9.72)$$

Задачей оптимальной фильтрации является нахождение наилучшей оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния динамической системы, описываемой уравнениями (9.63), на основании наблюдаемого сигнала $z(\tau)$ на интервале (t_0, t) . Динамическая система, определяющая вектор $\hat{x}(t)$, называется фильтром. При этом оценка

$\hat{x}(t)$ является выходным сигналом фильтра. Разность $\xi(t)$ между истинным вектором состояния $x(t)$ и его оценкой (выходным сигналом фильтра) $\hat{x}(t)$ называется ошибкой оценки, или ошибкой фильтра

$$\xi(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (9.73)$$

В качестве критерия оптимальности принимают условие, при котором вектор $\hat{x}(t)$ должен представлять собой несмещенную оценку $x(t)$ и минимизировать дисперсию ошибки $\xi(t)$. Чтобы $\hat{x}(t)$ была несмещенной оценкой $x(t)$, должно выполняться условие

$$M[\hat{x}(t)] = M[x(t)] \quad (t \geq t_0), \quad (9.74)$$

откуда, учитывая (9.73),

$$M[\xi(t)] = 0. \quad (9.75)$$

Основными соотношениями, характеризующими алгоритм метода ОФК, являются:

1) дифференциальное уравнение оптимального фильтра, на вход которого поступает наблюдаемый сигнал и который вырабатывает оценку выходного сигнала системы;

2) выражение для матричного коэффициента усиления оптимального фильтра через корреляционную матрицу ошибок оценки;

3) нелинейное дифференциальное уравнение для корреляционной матрицы ошибок оптимальной линейной оценки.

Приведем указанные уравнения [73, 75]:

1) *Дифференциальное уравнение оптимального фильтра.* При рассмотрении задачи фильтрации оптимальная оценка определяется уравнением

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - H(t)\hat{x}(t)], \quad (9.76)$$

причем согласно (9.74) и (9.75)

$$\hat{x}(t_0) = M[x(t_0)]. \quad (9.77)$$

Выражение (9.76) называется дифференциальным уравнением оптимального фильтра, на вход которого поступает наблюдаемый сигнал $z(t)$ и дает на выходе наилучшую линейную оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ динамической системы. Матрица $K(t)$ представляет собой матричный коэффициент усиления оптимального фильтра.

Из матричной блок-схемы ОФК [73, 75] (рис. 9.3) следует, что оптимальный фильтр содержит модель процесса формирования полезного сигнала, на которую через коэффициент усиления $K(t)$ поступает разность между наблюдаемым сигналом $z(t)$ и оценкой $\hat{y}(t) = H(t)\hat{x}(t)$ его полезной составляющей.

2) *Выражение для матричного коэффициента усиления оптимального фильтра.* Принимая во внимание (9.67) и (9.73), введем обозначение

$$P(t) = M [\xi(t) \xi^T(t)] = M \{[x(t) - \hat{x}(t)] [x(t) - \hat{x}(t)]^T\}, \quad (9.78)$$

где $P(t)$ — симметричная матрица размерности $[n \times n]$, представляющая собой корреляционную матрицу ошибок оптимальной оценки.

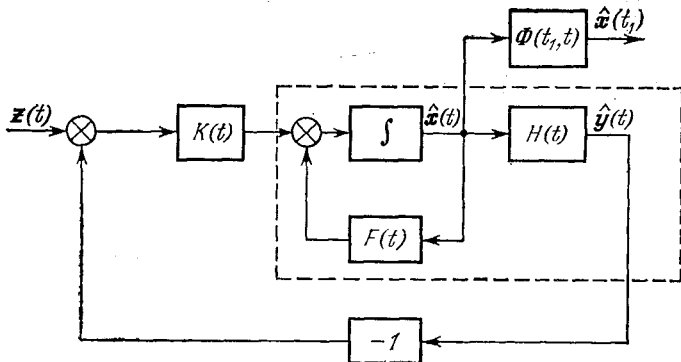


Рис. 9.3. Матричная блок-схема ОФК.

Матричный коэффициент усиления $K(t)$ оптимального фильтра, входящий в уравнение (9.76), выражается через корреляционную матрицу ошибок оценки $P(t)$ соотношением

$$K(t) = P(t) H^T(t) R^{-1}(t), \quad (9.79)$$

где $R^{-1}(t)$ — обратная матрица по отношению к $R(t)$ (см. (9.65)).

3) *Корреляционное уравнение.* Корреляционная матрица $P(t)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} = & F(t)P(t) + P(t)F^T(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) + \\ & + G(t)Q(t)G^T(t), \quad P(t_0) = P_0, \end{aligned} \quad (9.80)$$

которое представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение типа Риккати. Начальное значение $P(t_0)$ характеризуется выражением (9.67) и предполагается известным.

Таким образом, решение задачи оптимальной фильтрации дается системой уравнений (9.76), (9.79) и (9.80), образующей

непрерывный вариант алгоритма фильтра Калмана

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= F(t)\hat{x}(t) + K(t)[z(t) - H(t)\hat{x}(t)], \\ K(t) &= P(t)H^T(t)R^{-1}(t), \\ \frac{dP(t)}{dt} &= F(t)P(t) + P(t)F^T(t) - \\ &\quad - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \end{aligned} \right\} (9.81)$$

при заданных начальных условиях $\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$ и $P(t_0) = P_0$.

Для решения указанных уравнений с помощью вычислительных устройств (на ЦВМ решаются дискретные аналоги этих дифференциальных уравнений) необходимо знать модели динамической системы (матрицы $F(t)$ и $G(t)$) и наблюдаемого сигнала (матрица $H(t)$), а также матрицы интенсивностей $Q(t)$ и $R(t)$ сигнала на входе системы и помех измерений.

2. Задача прогнозирования в методе ОФК. Рассмотрим, каким образом в методе ОФК решается задача прогнозирования [73, 75]. Предположим, на интервале (t_0, t) в системе ведется наблюдение и с помощью алгоритма (9.81) вырабатывается оптимальная оценка $\hat{x}(t)$. В момент t данные наблюдений перестают поступать и требуется решить задачу прогнозирования, т. е. определить оптимальную оценку $\hat{x}(t_1)$ к некоторому будущему моменту времени $t_1 > t$, при этом интервал (t, t_1) характеризует время прогноза t_{Π} . Так как на интервале (t, t_1) наблюдения не поступают, то матрица $H(t) = 0$. Следовательно, в согласии с (9.79) коэффициент усиления $K(t) = 0$. Тогда уравнение (9.76) для нахождения оптимальной оценки прогноза примет вид

$$\frac{d\hat{x}(t_1/t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t_1/t) \quad (9.82)$$

при начальном условии $\hat{x}(t/t) = \hat{x}(t)$.

Корреляционное уравнение в задаче прогноза в силу (9.80) будет

$$\frac{dP_{\Pi}(t)}{dt} = F(t_{\Pi})P_{\Pi}(t_{\Pi}) + P_{\Pi}(t_{\Pi})F^T(t_{\Pi}) + G(t_{\Pi})Q(t_{\Pi})G^T(t_{\Pi}),$$

$$t_{\Pi} = (t, t_1) \quad (9.83)$$

при начальном условии

$$P_{\Pi}(t) = P(t).$$

Уравнения (9.82) и (9.83) с учетом соответствующих начальных условий образуют алгоритм решения задачи прогнозирования. При этом оптимальная оценка определяется выражением

$$\hat{x}(t_1/t) = \Phi(t_1, t)\hat{x}(t/t) \quad (t_1 \geq t),$$

или

$$\hat{x}(t_1) = \Phi(t_1, t) \hat{x}(t), \quad (9.84)$$

где $\Phi(t_1, t)$ — переходная матрица, удовлетворяющая уравнению (9.68).

Таким образом, если в рассматриваемой динамической системе решается задача оптимальной фильтрации, то для осуществления прогнозирования на интервале (t, t_1) необходимо дополнительно реализовать в схеме выражение (9.84) (см. рис. 9.3). Заметим, что на основании решения корреляционного уравнения (9.83) может быть определена среднеквадратичная ошибка прогнозирования

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{P_{\pi_{ii}}}. \quad (9.85)$$

3. Прогнозирование углов крена корабля. Рассмотрим применение метода Калмана для решения задачи прогнозирования углов крена корабля. Пусть корреляционная функция угла крена в согласии с (1.82) имеет вид

$$K_{\theta}(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right). \quad (9.86)$$

Корреляционной функции (9.86) соответствует дифференциальное уравнение связи случайного процесса $\theta(t)$ с белым шумом $w(t)$ [78]:

$$\ddot{\theta}(t) + 2\mu\dot{\theta}(t) + b^2\theta(t) = 2b\sqrt{A\mu}w(t). \quad (9.87)$$

Здесь b определяется формулой (9.27), а $w(t)$ — скалярный белый шум с интенсивностью $Q = 1$.

Уравнение второго порядка (9.87) можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \vartheta(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= -2\mu\vartheta(t) - b^2\theta(t) + 2b\sqrt{A\mu}w(t). \end{aligned} \right\} \quad (9.88)$$

Вектор состояния $x(t)$ в согласии с первым уравнением системы (9.63) запишем в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)w(t). \quad (9.89)$$

Здесь вектор состояния

$$x^T(t) = \|\theta \quad \vartheta\|, \quad (9.90)$$

а матрицы $F(t)$ и $G(t)$ имеют вид

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2\mu \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} 0 \\ 2b\sqrt{A\mu} \end{vmatrix}. \quad (9.91)$$

В данной задаче сигнал наблюдения $z(t)$ можно записать следующим образом:

$$z(t) = \theta(t) + v(t), \quad (9.92)$$

где $\theta(t)$ — угол крена корабля, измеряемый ГВ, $v(t)$ — ошибка измерения, которую можно считать белым шумом с интенсивностью R .

Уравнение наблюдения в силу (9.63) имеет вид

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t). \quad (9.93)$$

Следовательно, матрица наблюдения $H(t)$, определяемая видом входного сигнала (9.92) на оптимальный фильтр, представляет собой матрицу-строку

$$H = \| 1 \ 0 \|. \quad (9.94)$$

Таким образом, получены выражения матриц F , G , H и интенсивностей белых шумов $Q = 1$, R на входе системы, что позволяет при задании соответствующих числовых значений решить поставленную задачу с помощью ЦВМ. При этом корреляционная матрица (9.67) имеет вид

$$P(t_0) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & Ab^2 \end{bmatrix}. \quad (9.95)$$

Более подробные сведения о решении задачи прогнозирования с использованием метода Калмана содержатся в ряде работ (см., например, [73, 75]).

ДИНАМИКА СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

§ 10.1. Обзор задач динамики систем стабилизации

В предыдущих главах при исследовании систем стабилизации ИУ на качающемся основании рассматривались вопросы геометрии и кинематики, которые являются исходными и важными этапами расчета и проектирования этих систем. Следующий этап состоит в анализе динамики систем стабилизации, позволяющем выявить особенности работы системы в реальных условиях использования при непрерывном изменении параметров стабилизации, а также при переменных внешних возмущающих воздействиях. При исследовании динамики систем стабилизации необходимо знать динамические характеристики объекта стабилизации, следящего привода стабилизации, а также характеристики параметров стабилизации и внешних воздействий. Расчет и проектирование следящего привода стабилизации относятся к компетенции специалистов по следящим системам, следящему приводу и автоматическому регулированию. Однако ряд вопросов динамики систем стабилизации представляет существенный интерес и для специалистов по гироскопическим и стабилизационным устройствам. Эти вопросы включают как задачи анализа, так и задачи синтеза.

Под задачей анализа понимается исследование системы стабилизации при заданной ее структуре и известных характеристиках полезного входного сигнала (параметра стабилизации) и внешних возмущающих воздействий. Задача синтеза состоит в нахождении структуры системы стабилизации и значений ее параметров, обеспечивающих оптимальные свойства системы с точки зрения определенного критерия качества.

Рассматриваемые далее отдельные вопросы динамики систем стабилизации относятся в основном к задачам анализа и включают: выбор пределов стабилизации ИУ, общую характеристику и функциональную схему следящего привода стабилизации, вероятностные характеристики управляющих и возмущающих воздействий на ИУ, уравнения движения и передаточные функции следящего привода стабилизации, расчет погрешностей стабилизации в динамике.

§ 10.2. Выбор пределов стабилизации ИУ

При изложении некоторых вопросов динамики систем стабилизации будем иметь в виду наиболее распространенный метод непосредственной стабилизации, при котором ИУ размещается на площадке, установленной в кардановом подвесе. Здесь типичным является рассмотренный А. Н. Крыловым [44] визирный или дальномерный пост (рис. 6.31). Аналогичный антенный пост, применяемый в судовых РЛС, приводится в работе [87]. Здесь даны описание поста и различных его устройств; механическая схема стабилизации поста по бортовой и килевой качке, а также схема привода стабилизации по бортовой качке [87, рис. 50 и 41].

Предположим, что площадка поста установлена в трехосном кардановом подвесе, главная ось стабилизации которого расположена параллельно продольной оси корабля. Рассмотрим стабилизацию площадки в отношении бортовой качки. Она осуществляется путем поворота наружного карданова кольца на угол

$$\alpha = -\theta_k, \quad (10.1)$$

который является параметром стабилизации, или полезным входным сигналом, поступающим на следящий привод стабилизации.

Одним из важных вопросов динамики является определение пределов стабилизации ИУ. При решении этой задачи необходимо принимать во внимание характеристики качки корабля, при которых должна сохранять работоспособность система стабилизации; назначение стабилизируемого ИУ; сложность технической реализации системы стабилизации и расширения ее пределов и другие факторы. Рассмотрим методику определения пределов стабилизации по бортовой качке, т. е. определим наибольшие допустимые значения параметра стабилизации α_m , а также угловой скорости и ускорения $\dot{\alpha}_m$, $\ddot{\alpha}_m$. При этом следует иметь в виду, что при $\alpha > \alpha_m$ стабилизируемый пост «садится на стопора» [44], т. е. система стабилизации прекращает функционировать. Пределы по угловым скоростям и ускорениям $\dot{\alpha}_m$, $\ddot{\alpha}_m$ накладывают определенные требования на исполнительный двигатель и следящий привод стабилизации в целом.

При определении α_m , $\dot{\alpha}_m$, $\ddot{\alpha}_m$ воспользуемся методикой, развитой в работах [70, 72]. На основании материалов главы 1 можно принять, что параметр стабилизации $\alpha(t) = -\theta_k(t)$ является нормальной стационарной случайной функцией времени с нулевым математическим ожиданием

$$\bar{\alpha} = -\bar{\theta}_k = 0 \quad (10.2)$$

и корреляционной функцией, определяемой в согласии с (1.82) выражением

$$K_\alpha(\tau) = K_{\theta_k}(\tau) = Ae^{-\mu|\tau|} \left(\cos \lambda \tau + \frac{\mu}{\lambda} \sin \lambda |\tau| \right), \quad (10.3)$$

при этом числовые значения параметров качки $\sigma_{\theta_K} = \sqrt{A}$, μ , λ предполагаются известными. Так как углы крена корабля распределены по нормальному закону с параметрами σ_{θ_K} , $\bar{\theta}_K = 0$, то плотность вероятности углов крена имеет вид

$$f(\theta_K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\theta_K}} e^{-\frac{\theta_K^2}{2\sigma_{\theta_K}^2}}. \quad (10.4)$$

Зная закон распределения и числовые значения σ_{θ_K} , можно найти «предельное» в вероятностном смысле значение параметра стабилизации $\alpha_m = |\theta_{Km}|$. Так как угол α носит случайный характер, то, строго говоря, нельзя указать такое предельное значение α_m его абсолютной величины, которое не может быть превзойдено на опыте. Однако, если задаться некоторой вероятностью $(1 - Q_z)$ получения угла α , меньшего α_m , то можно говорить о предельном значении этого угла, понимая под ним величину, которая не будет превзойдена с заданной вероятностью. В аналогичных задачах теории вероятностей $(1 - Q_z)$ называют доверительной вероятностью, а α_m — шириной доверительного интервала.

Наиболее простой характеристикой, которая может быть использована при выборе предельного значения α_m , является среднее время пребывания случайной функции $\alpha(t)$ выше предела α_m . Среднее значение относительного времени пребывания $\alpha(t)$ выше α_m равно вероятности

$$P\{|\alpha| > \alpha_m\}. \quad (10.5)$$

Поэтому, задаваясь указанной вероятностью и зная параметры качки корабля, можно определить предельное значение α_m параметра стабилизации ИУ. При данном способе определения α_m мы по существу исходим из среднего значения суммарного времени «выбросов» α за уровень α_m в течение заданного времени работы системы.

Таким образом, задачу определения предела стабилизации α_m можно сформулировать так: будем считать, что появление угла α , превосходящего α_m , практически невозможно, если вероятность этого события меньше некоторого числа Q_z :

$$P\{|\alpha| > \alpha_m\} \leq Q_z. \quad (10.6)$$

Задаваясь вероятностью Q_z и зная параметры $\sigma_\alpha = \sigma_{\theta_K}$ и $\bar{\alpha} = 0$ (в дальнейшем рассматривается и случай $\bar{\alpha} \neq 0$) закона распределения углов $\alpha = -\theta_K$, легко установить предельное значение

угла α_m . Имеем [19]

$$Q_z = P\{|\alpha| > \alpha_m\} = P\{|\alpha| > z\sigma_\alpha\} = 2 \int_{\alpha_m}^{\infty} f(\alpha) d\alpha = 1 - \Phi(z), \quad (10.7)$$

где

$$\alpha_m = z\sigma_\alpha, \quad (10.8)$$

$f(\alpha) = f(\theta_R)$ — плотность вероятности, определяемая соотношением (10.4), $\Phi(z)$ — интегральная функция Лапласа [78], характеризующаяся выражением

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-u^2/2} du. \quad (10.9)$$

Задаваясь вероятностью Q_z , находим число z , умножая на которое принятое значение $\sigma_\alpha = \sigma_{\theta_R}$ в силу (10.8) получим предельное значение угла α_m . Так как при расчете α_m задается величина σ_{θ_R} , то формулу (10.8) удобно записать в виде

$$\alpha_m = z\sigma_{\theta_R}. \quad (10.10)$$

Некоторые значения Q_z и z даны в табл. 10.1 [19].

Таблица 10.1

z	Q_z	z	Q_z	z	Q_z
0	1,0000	2,5	0,0124	3,5	0,00047
0,5	0,6171	2,7	0,0069	4,0	0,000063
1,0	0,3173	3,0	0,0027	4,5	0,0000068
1,5	0,1336	3,3	0,0010	5,0	0,00000057
2,0	0,0455				

Наибольшую трудность при решении рассматриваемой задачи составляет выбор вероятности Q_z , так как вопрос о том, насколько мала должна быть вероятность события, чтобы его можно было считать практически невозможным, выходит за рамки математической теории и в каждом отдельном случае решается из практических соображений. Обычно в технике наибольшее значение случайной величины считают равным трем ее среднеквадратичным значениям ($z = 3$), что соответствует вероятности превышения случайной величины указанного значения $Q_z = 0,0027$ (см. табл. 10.1); при этом доверительная вероятность $(1 - Q_z) = 0,9973$.

Рассмотрим общий случай, когда $\bar{\alpha} = -\bar{\theta}_K \neq 0$. В этом случае вместо (10.4) имеем

$$f(\theta_K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\theta_K}} e^{-\frac{(\theta_K - \bar{\theta}_K)^2}{2\sigma_{\theta_K}^2}}. \quad (10.11)$$

Если математическое ожидание $\bar{\alpha} \neq 0$, то, обозначая через Q_z вероятность того, что случайное значение α будет отличаться от среднего значения $\bar{\alpha}$ больше чем на α_1 или больше чем в z раз будет превышать принятое среднеквадратичное отклонение, по аналогии с (10.7) получим

$$\begin{aligned} Q_z &= P\{|\alpha - \bar{\alpha}| > \alpha_1\} = P\{|\alpha - \bar{\alpha}| > z\sigma_\alpha\} = \\ &= \int_{\bar{\alpha} + \alpha_1}^{\infty} f(\alpha) d\alpha + \int_{-\infty}^{\bar{\alpha} - \alpha_1} f(\alpha) d\alpha = 1 - \Phi(z). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Тогда предельное значение параметра стабилизации будет определяться из формулы

$$|\alpha - \bar{\alpha}|_m = z\sigma_\alpha, \quad (10.13)$$

откуда с вероятностью $(1 - Q_z)$

$$|\alpha| \leq |\bar{\alpha}| + z\sigma_\alpha.$$

Обозначим $|\bar{\alpha}| + z\sigma_\alpha$ через α_m и будем называть величину α_m предельным значением угла α , т. е.

$$\alpha_m = |\bar{\alpha}| + z\sigma_\alpha. \quad (10.14)$$

Так как при расчете предела стабилизации α_m должны быть заданы характеристики качки корабля $\bar{\theta}_K$ и σ_{θ_K} , то формулу (10.14) можно также записать в виде

$$\alpha_m = |\bar{\theta}_K| + z\sigma_{\theta_K}. \quad (10.15)$$

Пример 10.1. Вычислить предельное значение α_m параметра стабилизации ИУ по бортовой качке для следующих исходных данных: среднеквадратичное значение угла крена корабля $\sigma_{\theta_K} = 5^\circ$, коэффициент нерегулярности качки и преобладающая частота $\mu = 0,04 \text{ сек}^{-1}$, $\lambda = 0,5 \text{ сек}^{-1}$ (пример 2.1), $\bar{\theta}_K = 0$; вероятность Q_z того, что текущее значение параметра стабилизации α превзойдет предел α_m , должна быть не более 0,1%.

Решение.

1) По табл. 10.1 для $Q_z = 0,1\% = 0,001$ находим

$$z = 3,3.$$

2) В согласии с формулой (10.10) имеем

$$\alpha_m = z\sigma_{\theta_K} = 16,05.$$

3) Уменьшим вероятность Q_z вдвое, т. е. примем $Q_z = 0,05\% = 0,0005$; тогда по табл. 10.1 находим

$$z = 3,5.$$

4) Формула (10.10) дает

$$\alpha_m = z\sigma_{\theta_K} = 17,05.$$

Из примера следует, что уменьшение вероятности Q_z вдвое (с 0,1% до 0,05%) привело к увеличению предела стабилизации α_m всего на 1°. Выбранное значение $\alpha_m = 17^\circ$, 5 можно считать достаточно обоснованным, так как вероятность того, что параметр стабилизации α (угол крена корабля θ_K) превысит указанное значение, составляет $Q_z = 0,05\%$, т. е. весьма малая величина.

Как было указано ранее, помимо предела α_m , надо также выбрать предельные значения $\dot{\alpha}_m$ и $\ddot{\alpha}_m$. При $\bar{\alpha} = -\bar{\theta}_K = 0$ и $\bar{\ddot{\alpha}} = -\bar{\ddot{\theta}}_K = 0$ по аналогии с (10.10) можно записать

$$\dot{\alpha}_m = z\sigma_{\dot{\theta}_K}, \quad (10.16)$$

$$\ddot{\alpha}_m = z\sigma_{\ddot{\theta}_K}. \quad (10.17)$$

Принимая во внимание выражения (1.104) и (1.106), перепишем формулы (10.16) и (10.17) в виде

$$\dot{\alpha}_m = zb\sigma_{\theta_K}, \quad (10.18)$$

$$\ddot{\alpha}_m = zb^2\sigma_{\theta_K}, \quad (10.19)$$

где в согласии с (1.85)

$$b^2 = \mu^2 + \lambda^2. \quad (10.20)$$

Если, как обычно, для узкополосного процесса качки $\mu/\lambda \ll 1$, то формулы (10.18) и (10.19) можно заменить следующими:

$$\dot{\alpha}_m = z\lambda\sigma_{\theta_K}, \quad (10.21)$$

$$\ddot{\alpha}_m = z\lambda^2\sigma_{\theta_K}. \quad (10.22)$$

Пример 10.2. Для условий примера 10.1 вычислить наибольшие значения угловой скорости $\dot{\alpha}_m$ и углового ускорения $\ddot{\alpha}_m$ стабилизации ИУ по бортовой качке.

Решение.

1) По формуле (10.21), принимая во внимание, что $\mu/\lambda = 0,08 \ll 1$, находим

$$\dot{\alpha}_m = 8,25 \text{ град/сек.}$$

2) Аналогичным образом в согласии с выражением (10.22) имеем

$$\ddot{\alpha}_m = 4,13 \text{ град/сек}^2.$$

Эти величины следует учитывать при выборе следящего привода стабилизации.

Принимая во внимание (10.10), формулы (10.18) и (10.19) можно записать в более простом виде

$$\dot{\alpha}_m = b\alpha_m, \quad (10.23)$$

$$\ddot{\alpha}_m = b^2\alpha_m. \quad (10.24)$$

Аналогичным образом вместо (10.21) и (10.22) имеем

$$\dot{\alpha}_m = \lambda\alpha_m, \quad (10.25)$$

$$\ddot{\alpha}_m = \lambda^2\alpha_m. \quad (10.26)$$

Заметим, что формулы (10.23) — (10.26) выражают $\dot{\alpha}_m$ и $\ddot{\alpha}_m$ через α_m . При этом предполагается, что при расчетах α_m , а также $\dot{\alpha}_m$ и $\ddot{\alpha}_m$ приняты одинаковые значения вероятности Q_z и коэффициента z . Однако обычно [65] исполнительные двигатели следящих приводов стабилизации допускают некоторую перегрузку по скорости и по ускорению. В соответствии с этим, при расчете $\dot{\alpha}_m$ и $\ddot{\alpha}_m$ можно брать вероятность Q_z большей, чем при вычислении α_m , а коэффициент z — меньшим. Так, например, если в условиях примера 10.2 принять $Q_z = 0,7\%$ (табл. 10.1, $z = 2,7$), то получим $\dot{\alpha}_m = 6,75 \text{ град/сек}$, $\ddot{\alpha}_m = 3,38 \text{ град/сек}^2$.

При выборе пределов стабилизации ИУ в отдельных случаях могут представить интерес такие характеристики, как среднее значение числа выбросов параметра стабилизации за уровень α_m , средняя продолжительность каждого выброса, среднее значение суммарного времени выбросов в течение всего времени работы системы. Решение этой задачи возможно с использованием формул, которые приводятся в ряде книг (см., например, [20, 70, 72, 78, 80]).

§ 10.3. Общая характеристика и функциональная схема следящего привода стабилизации

Система стабилизации ИУ вместе со следящим приводом образуют замкнутую САР. Поэтому функциональная схема системы стабилизации ИУ по бортовой качке (рис. 10.1) [71] представляет собой типичную схему САР [83, 91]. Здесь в качестве управляющего воздействия, или полезного сигнала, рассматривается параметр стабилизации (угол бортовой качки), определяемый ГВ. Внешние возмущающие воздействия представляют собой ошибки ГВ в определении параметра стабилизации, ошибки следящей

системы, которые вместе с полезным сигналом поступают на вход системы стабилизации. К объекту стабилизации (ИУ) приложены возмущающие воздействия в виде моментов сил инерции на качке (вследствие неуравновешенности системы), моментов ветровой нагрузки на ИУ, моментов сил трения в осях карданова подвеса и др. Помимо этого в различных частях системы возникают внутренние возмущающие воздействия, обусловленные особенностями

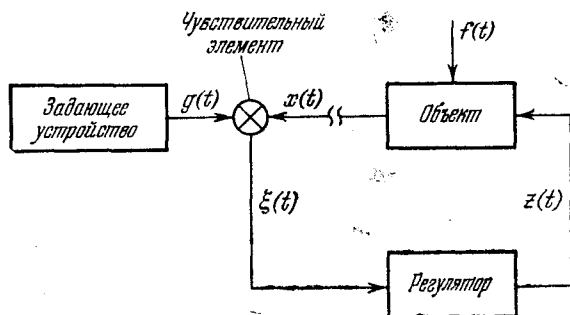


Рис. 10.1. Функциональная схема системы стабилизации ИУ по бортовой качке.

используемых в ней электромеханических и электронных устройств. В реальных условиях работы системы стабилизации указанные управляющие и возмущающие воздействия представляют собой, как правило, случайные функции времени. Поэтому для исследования динамики системы стабилизации следует пользоваться вероятностными методами. При этом необходимо прежде всего составить дифференциальные уравнения и передаточные функции следящего привода стабилизации и знать вероятностные характеристики управляющих и возмущающих воздействий.

Рассмотрим функциональную схему системы стабилизации по бортовой качке (рис. 10.1). От задающего устройства (ГВ) на вход следящего привода поступает управляющее воздействие $g(t)$ (параметр стабилизации $\alpha = -\theta_k$). На ЧЭ системы из $g(t)$ вычитается регулируемая величина $x(t)$, или выходная величина, которая представляет собой угол поворота наружного карданова кольца подвеса площадки с ИУ. Разность $\xi(t) = g(t) - x(t)$ является ошибкой системы стабилизации, т. е. погрешностью стабилизации ИУ по бортовой качке. Ошибка $\xi(t)$ поступает на регулятор, с которого регулирующее воздействие $z(t)$ вводится на стабилизируемый объект. К объекту приложено возмущающее воздействие $f(t)$, которое представляет собой сумму упомянутых ранее моментов относительно главной оси стабилизации. К возмущающим воздействиям относится также погрешность $n(t) = \delta\theta_k$ в определении ГВ угла бортовой качки, которая вместе

с полезным сигналом $g(t)$ поступает на вход следящей системы. Дифференциальные уравнения следящего привода стабилизации запишем в следующем виде [71, 83, 91]:

$$1) \text{ уравнение объекта регулирования } \left(p = \frac{d}{dt} \right)$$

$$D(p)x(t) = M(p)f(t) + K(p)z(t); \quad (10.27)$$

$$2) \text{ уравнение регулятора}$$

$$R(p)z(t) = N(p)\xi(t); \quad (10.28)$$

$$3) \text{ уравнение ошибки}$$

$$\xi(t) = g(t) - x(t), \quad (10.29)$$

где $D(p)$, $M(p)$, $K(p)$ — операторные полиномы, зависящие от параметров объекта регулирования (стабилизации), $R(p)$, $N(p)$ — операторные полиномы, зависящие от параметров регулятора.

Применяя к уравнениям (10.27) — (10.29) преобразования Лапласа и полагая начальные условия нулевыми, имеем

$$\left. \begin{aligned} D(s)x(s) &= M(s)f(s) + K(s)z(s), \\ R(s)z(s) &= N(s)\xi(s), \\ \xi(s) &= g(s) - x(s). \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

Путем несложных преобразований можно получить

$$x(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}g(s) + \frac{V(s)}{1+W(s)}f(s), \quad (10.31)$$

где

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{N(s)K(s)}{D(s)R(s)}, & V(s) &= \frac{M(s)}{D(s)}, \\ \xi(s) &= \frac{1}{1+W(s)}g(s) - \frac{V(s)}{1+W(s)}f(s). \end{aligned} \quad (10.32)$$

Обозначим

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}, \quad (10.33)$$

$$Y(s) = \frac{V(s)}{1+W(s)}, \quad (10.34)$$

$$\Phi_{\xi}(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1+W(s)}. \quad (10.35)$$

Тогда (10.31) и (10.32) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= \Phi(s)g(s) + Y(s)f(s), \\ \xi(s) &= \Phi_{\xi}(s)g(s) - Y(s)f(s). \end{aligned} \right\} \quad (10.36)$$

Как известно [83, 91],

$$\Phi(s) = \frac{x(s)}{g(s)} \quad (10.37)$$

— передаточная функция САР по отношению к управляющему воздействию,

$$Y(s) = \frac{x(s)}{f(s)} \quad (10.38)$$

— передаточная функция САР по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$,

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{\xi(s)}{g(s)} \quad (10.39)$$

— передаточная функция по ошибке,

$$W(s) = \frac{x_p(s)}{g(s)} \quad (10.40)$$

— передаточная функция разомкнутой САР (ЧЭ отключен от выхода; рис. 10.1), $x_p = x$ — при размыкании системы,

$$V(s) = \frac{x_p(s)}{f(s)} \quad (10.41)$$

— передаточная функция разомкнутой САР по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$.

Конкретные выражения для передаточных функций $\Phi(s)$, $Y(s)$, . . . следящего привода стабилизации ИУ по бортовой качке будут приведены в § 10.5.

§ 10.4. Вероятностные характеристики управляющих и возмущающих воздействий на ИУ

В рассматриваемой системе параметром стабилизации служит угол α , определяемый зависимостью (10.1). Следовательно, управляющее воздействие $g(t)$, поступающее на вход следящего привода стабилизации, представляет собой случайную функцию, которая характеризует угол крена корабля

$$g(t) = \theta_k(t). \quad (10.42)$$

В согласии с (10.2) и (10.3)

$$\bar{g}(t) = 0, \quad (10.43)$$

$$K_g(\tau) = A_2 e^{-\mu_2 |\tau|} \left(\cos \lambda_2 \tau + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 |\tau| \right). \quad (10.44)$$

Здесь индекс «2» введен в соответствии с (1.64).

Для спектральной плотности $S_g(\omega)$, учитывая (1.84) и (1.85), имеем

$$S_g(\omega) = \frac{2A_2\mu_2}{\pi} \cdot \frac{b_2^2}{\omega^4 + 2a_2\omega^2 + b_2^4}, \quad (10.45)$$

$$a_2 = \mu_2^2 - \lambda_2^2, \quad b_2^2 = \mu_2^2 + \lambda_2^2. \quad (10.46)$$

В качестве возмущающих воздействий на систему стабилизации можно принимать во внимание лишь внешние воздействия, так как внутренние достаточно хорошо фильтруются следящей системой.

Одним из видов внешних возмущающих воздействий является погрешность $n(t) = \delta\theta_k(t)$ в определении ГВ угла бортовой качки, которая вместе с полезным сигналом $g(t)$ поступает на вход следящего привода стабилизации. Погрешность $n(t)$ является случайной функцией времени, которая в общем виде может быть записана следующим образом (см. (7.23)):

$$n(t) = \bar{n} + n_1(t), \quad (10.47)$$

где \bar{n} — математическое ожидание ошибки ГВ, $n_1(t)$ — случайная составляющая ошибки прибора.

На основании теоретических и экспериментальных данных [70, 75] можно считать, что $n_1(t)$ является стационарной случайной функцией времени с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией, определяемой формулой (7.24):

$$K_n(\tau) = A_n e^{-\mu_n |\tau|} \left(\cos \lambda_n \tau + \frac{\mu_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n |\tau| \right), \quad (10.48)$$

где $A_n = D[n] = \sigma_n^2$ — дисперсия ошибки ГВ, μ_n , λ_n — коэффициент нерегулярности и преобладающая частота изменения ошибки ГВ, которая обычно близка к собственной частоте бортовой качки, т. е. к величине λ_2 в формуле (10.44). Пояснение этого обстоятельства было приведено в § 7.2.

Для спектральной плотности $S_n(\omega)$ по аналогии с (10.45) и (10.46) имеем

$$S_n(\omega) = \frac{2A_n \mu_n}{\pi} \cdot \frac{b_n^2}{\omega^4 + 2a_n \omega^2 + b_n^4}, \quad (10.49)$$

$$a_n = \mu_n^2 - \lambda_n^2, \quad b_n^2 = \mu_n^2 + \lambda_n^2. \quad (10.50)$$

Следует заметить, что случайные функции $g(t) = \theta_k(t)$ и $n(t) = \delta\theta_k(t)$, вообще говоря, между собой связаны вследствие зависимости ошибок ГВ от качки корабля. Однако имеются основания полагать, что соответствующая корреляционная связь мало сказывается на динамических погрешностях следящего привода стабилизации. Поэтому в дальнейшем будем принимать, что взаимная корреляционная функция

$$K_{ng}(\tau) = M_{\downarrow}[n(t)g(t+\tau)] = 0. \quad (10.51)$$

Перейдем к анализу возмущающего воздействия $f(t)$, непосредственно приложенного к объекту стабилизации (рис. 10.1). Это воздействие обуславливает момент M_x относительно оси вращения

наружного кольца карданова подвеса ИУ. Момент M_x можно записать в виде

$$M_x = M_{вх} + M_{нх} + M_{тх}, \quad (10.52)$$

где $M_{вх}$ — момент ветровой нагрузки на ИУ, $M_{нх}$ — момент неуравновешенности ИУ, проявляющийся на качке, $M_{тх}$ — момент сил трения на оси вращения наружного кольца подвеса.

Методика определения момента ветровой нагрузки $M_{вх}$ излагается в ряде работ (см., например, [53, 65]). Сущность этой методики состоит в следующем. Вычисляется сила сопротивления ветру, которая в первом приближении определяется по формуле [65]

$$P_v = \frac{1}{2} c \rho S v_v^2, \quad (10.53)$$

где c — аэродинамический коэффициент сопротивления, определяемый для данной конфигурации ИУ путем продувок (значения этого коэффициента и соответствующие кривые для некоторых типов антенн приводятся в работе [53]), ρ — плотность воздуха ($0,125 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$), S — площадь проекции ИУ на плоскость, перпендикулярную направлению ветра, v_v — относительная скорость ветра.

Тогда момент ветровой нагрузки

$$M_{вх} = P_{vy} z_0 \quad (z_0 < 0), \quad (10.54)$$

где P_{vy} — сила сопротивления ветру в направлении оси Oy , перпендикулярной оси Ox вращения наружного карданова кольца, z_0 — координата приложения силы P_{vy} относительно оси Ox .

Если конфигурация ИУ является сложной, то ее разбивают на ряд элементарных поверхностей ($i = \overline{1, n}$). Тогда для силы P_{vy} имеем

$$P_{vy} = \frac{1}{2} \rho v_{vy}^2 \sum_{i=1}^n c_i S_i, \quad (10.55)$$

где c_i и S_i — коэффициент сопротивления и площадь i -го элемента.

При этом координата z_0 определяется по формуле

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n c_i S_i z_i}{\sum_{i=1}^n c_i S_i}, \quad (10.56)$$

где z_i — координата центра i -го элемента относительно оси Ox .

Приводимые в [53, 65] данные указывают, что момент $M_{вх}$ может измеряться десятками кгм .

Найдем выражение для момента неуравновешенности $M_{\text{нх}}$. Этот момент возникает на качке при неуравновешенности ИУ (ц. т. системы не совпадает с точкой ее подвеса, т. е. с точкой пересечения осей карданова подвеса) и обусловлен соответствующими силами инерции переносного движения. Предположим, что на корабле в точке O_1 (рис. 2.8) установлено стабилизируемое ИУ; при этом в точке O_1 находится точка подвеса системы, а ее ц. т. вместе с качающейся частью системы стабилизации смещен относительно точки O_1 на радиус-вектор l . Тогда момент неуравновешенности $M_{\text{н}}$ будет

$$M_{\text{н}} = l \times F, \quad (10.57)$$

где F — переносная сила инерции, обусловленная качкой корабля и его орбитальным движением.

Для проекции момента $M_{\text{н}}$ на главную ось стабилизации Ox имеем

$$M_{\text{нх}} = l_y F_z - l_z F_y, \quad (10.58)$$

где l_y, l_z и F_y, F_z — проекции векторов l и F на корабельные оси $Oxyz$ (рис. 2.8).

Для простоты примем, что ц. т. системы смещен относительно точки O_1 лишь вдоль оси Oz ; тогда $l_y = 0$ и вместо (10.58) получим

$$M_{\text{нх}} = -l_z F_y. \quad (10.59)$$

В дальнейшем будем считать, что l_z является заданной случайной величиной. Определим составляющую F_y силы инерции переносного движения. Для силы F имеем выражение

$$F = -\frac{G}{g} w, \quad (10.60)$$

где G — вес ИУ и качающейся относительно корабля части системы стабилизации, w — линейное ускорение точки O_1 на качке. Составляющие вектора w в корабельных осях $Oxyz$ определяются формулами (2.72). Если принять во внимание [44] ускорение силы тяжести g , направленное в положительную сторону оси Oz (рис. 2.8), и матрицу A (1.18), то вместо (2.72) получим*)

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \ddot{\xi}_0 + z\ddot{\psi} - y\ddot{\varphi}_p + \psi g, \\ w_y &= \ddot{\eta}_0 + x\ddot{\varphi}_p - z\ddot{\theta}_k - \theta_k g, \\ w_z &= \ddot{\zeta}_0 + y\ddot{\theta}_k - x\ddot{\psi} - g. \end{aligned} \right\} \quad (10.61)$$

Заметим, что при включении вектора g в ускорение w уже не потребуется при определении момента неуравновешенности $M_{\text{н}}$

*) Здесь под w понимается так называемое кажущееся ускорение [71], т. е. разность между ускорением точки O_1 относительно Земли и ускорением силы тяжести. Этим обстоятельством объясняются принятые в формулах (10.61) знаки у составляющих вектора g по осям $Oxyz$.

учитывать отдельно составляющую из-за ускорения силы тяжести [44].

В согласии с (10.59) в дальнейшем нужна составляющая w_y :

$$w_y = \ddot{\eta}_0 + x\ddot{\phi}_p - z\ddot{\theta}_k - \theta_k g. \quad (10.62)$$

Из (10.62) следует, что $w_y(t)$ является нормальной стационарной случайной функцией времени; ее математическое ожидание

$$\bar{w}_y = 0, \quad (10.63)$$

а дисперсия

$$D[w_y] = D[\ddot{\eta}_0] + x^2 D[\ddot{\phi}_p] + z^2 D[\ddot{\theta}_k] + g^2 D[\theta_k] + 2zgK_{\ddot{\theta}_k\theta_k}(0), \quad (10.64)$$

где $K_{\ddot{\theta}_k\theta_k}(0) = K_{\ddot{\theta}_k\theta_k}(\tau)|_{\tau=0}$ — взаимная корреляционная функция случайных функций $\ddot{\theta}_k(t)$ и $\theta_k(t)$.

Принимая во внимание обозначения (1.64), формулы (1.105), (1.115) и заменяя $D[\ddot{\eta}_0]$ на $A_{\ddot{\eta}_0}$, вместо (10.64) получим

$$D[w_y] = A_{\ddot{\eta}_0} + x^2 b_3^4 A_3 + (zb_2^2 - g)^2 A_2. \quad (10.65)$$

На основании (10.60) можем записать

$$F_y = -\frac{G}{g} w_y. \quad (10.66)$$

Подставляя сюда выражение (10.62), получим

$$F_y = -\frac{G}{g} (\ddot{\eta}_0 + x\ddot{\phi}_p - z\ddot{\theta}_k - \theta_k g). \quad (10.67)$$

Введем (10.67) в (10.59); тогда окончательно имеем

$$M_{\text{нх}} = \frac{G}{g} l_z (\ddot{\eta}_0 + x\ddot{\phi}_p - z\ddot{\theta}_k - \theta_k g). \quad (10.68)$$

Из этого выражения следует, что $M_{\text{нх}}(t)$ является случайной функцией времени; ее математическое ожидание

$$\bar{M}_{\text{нх}} = 0, \quad (10.69)$$

а дисперсия с учетом формулы (10.62) будет

$$D[M_{\text{нх}}] = \left(\frac{G}{g} l_z\right)^2 D[w_y], \quad (10.70)$$

где $D[w_y]$ определяется формулой (10.65).

Найдем выражение для момента трения $M_{\text{тх}}$. Для этого воспользуемся подходом, который принят в теории следящих систем и систем стабилизации [6, 66]. Обычно учитывается момент сил сухого трения, при этом величина момента трения считается постоянной, а направление момента трения противоположно знаку

угловой скорости вращения карданова кольца относительно опор (рис. 10.2, а). Согласно закону Кулона имеем

$$M_{\text{тх}} = -Q_x \operatorname{sign} \Omega, \quad (10.71)$$

где Q_x — положительная постоянная, равная модулю момента трения (при движении величина Q_x принимается равной максимальному моменту трения при покое); функция $\operatorname{sign} \Omega$ имеет вид

$$\operatorname{sign} \Omega = \begin{cases} +1 & \text{при } \Omega > 0, \\ -1 & \text{при } \Omega < 0. \end{cases} \quad (10.72)$$

Экспериментальные данные показывают, что вследствие неоднородности опор подвеса при изменении направления их вращения модуль момента трения может изменяться. Это приводит

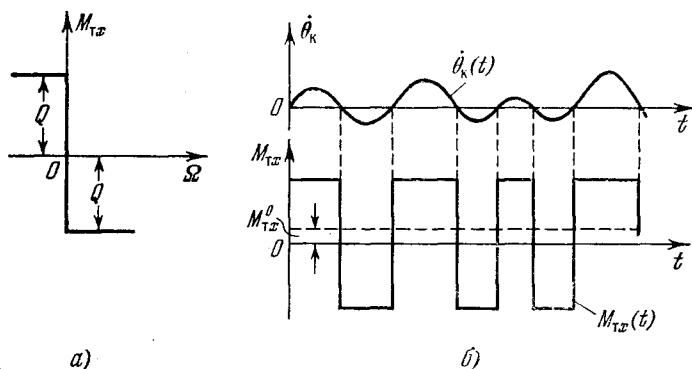


Рис. 10.2. График момента трения.

к появлению в течение времени работы системы стабилизации знакопостоянной составляющей момента трения, т. е. вместо (10.71), заменяя Ω на $\dot{\alpha}$, будем иметь

$$M_{\text{тх}} = M_{\text{тх}}^0 - Q_x \operatorname{sign} \dot{\alpha}, \quad (10.73)$$

где $M_{\text{тх}}^0$ — знакопостоянная составляющая момента трения, определяемая как полуразность значений моментов трения в обоих опорах оси подвеса наружного карданова кольца.

Если принять во внимание (10.1), то (10.73) можно записать в виде

$$M_{\text{тх}} = M_{\text{тх}}^0 + Q_x \operatorname{sign} \theta_k. \quad (10.74)$$

Из формулы (10.74) следует, что момент трения $M_{\text{тх}}(t)$ является случайной функцией времени, которая связана нелинейным соотношением со случайной функцией $\theta_k(t)$, характеризующей угловую скорость бортовой качки корабля.

Запишем общее выражение для возмущающего момента на оси стабилизации, определяемого формулой (10.52). Если в нее подставить соотношения (10.68) и (10.74), то получим

$$M_x = M_{вх} + \frac{G}{g} l_z (\ddot{\eta}_0 + x\ddot{\phi}_p - z\ddot{\theta}_k - \theta_k g) + M_{тх}^0 + Q_x \text{sign } \dot{\theta}_k. \quad (10.75)$$

Здесь момент $M_x(t)$ также является случайной функцией времени с математическим ожиданием

$$\bar{M}_x = M_{вх} + M_{тх}^0 \quad (10.76)$$

и дисперсией, которая с учетом формулы (10.70) и равенств $\overline{\dot{\theta}_k \theta_k} = \overline{\theta_k \dot{\theta}_k} = 0$ будет равна

$$D[M_x] = D[M_{вх}] + D[M_{тх}^0] = \left(\frac{G}{g} l_z\right)^2 D[w_v] + Q_x^2, \quad (10.77)$$

так как $D[\text{sign } \dot{\theta}_k] = 1$.

Наибольшее значение возмущающего момента можно записать в виде *)

$$M_{xт} = |\bar{M}_x| + z\sigma_{M_x}. \quad (10.78)$$

Таким образом, получено выражение для возмущающего момента M_x , действующего относительно оси вращения наружного кольца карданова подвеса ИУ, и вероятностные характеристики этого момента в условиях нерегулярной качки корабля.

§ 10.5. Уравнения и передаточные функции следящего привода стабилизации

В § 10.3 была дана общая характеристика и функциональная схема следящего привода стабилизации ИУ, а также рассмотрены передаточные функции, характеризующие динамику следящего привода и системы стабилизации. Для анализа динамических погрешностей стабилизации (§ 10.6) необходимо знать аналитический вид указанных передаточных функций и числовые значения соответствующих коэффициентов. Кроме того, целесообразно привести уравнения следящего привода стабилизации, чтобы выявить особенности его работы в процессе стабилизации ИУ на качающемся основании.

Рассмотрим уравнения следящего привода стабилизации по бортовой качке и соответствующие передаточные функции. Урав-

*) Зная \bar{M}_x , σ_{M_x} и закон распределения случайной функции $M_x(t)$, можно определить такое значение возмущающего момента $M_{xт}$, вероятность превысить которое по модулю пренебрежимо мала.

нение движения ИУ относительно главной оси стабилизации в абсолютной системе координат в линейном приближении имеет вид

$$I_x \ddot{\xi} + Gl_z \xi = i_0 M + M_f, \quad (10.79)$$

где I_x — момент инерции качающейся части системы стабилизации относительно оси Ox , ξ — ошибка стабилизации ИУ относительно плоскости горизонта, определяемая в согласии с (10.29) формулой

$$\xi = \theta_k + \vartheta, \quad (10.80)$$

где ϑ — угол поворота наружного карданова кольца относительно корабля, который ранее обозначался через α , i_0 — передаточное отношение от оси исполнительного двигателя к оси стабилизации, $i_0 M$ — момент двигателя на оси стабилизации, M_f — момент внешних сил, приложенный к системе относительно оси Ox .

К уравнению (10.79) надо присоединить уравнение движения якоря исполнительного двигателя, составленное также в абсолютной системе координат [71, 76]

$$I_d \dot{\omega} = M_{dx} - M, \quad (10.81)$$

где I_d — момент инерции якоря исполнительного двигателя, ω — его абсолютная угловая скорость, M_{dx} — вращающий момент двигателя, M — момент сил реакции системы, приложенный к якорю двигателя.

Как известно,

$$i_0 = \frac{\dot{\gamma}_0}{\dot{\vartheta}} = \frac{\omega - \dot{\theta}_k}{\dot{\xi} - \dot{\theta}_k}, \quad (10.82)$$

где $\dot{\gamma}_0 = \omega - \dot{\theta}_k$ — относительная угловая скорость якоря двигателя (по отношению к кораблю), $\dot{\vartheta} = \dot{\xi} - \dot{\theta}_k$ — относительная угловая скорость наружного карданова кольца (стабилизируемой площадки), γ_0 — угол поворота якоря двигателя.

Принимая во внимание (10.81) и (10.82), имеем

$$M = M_{dx} - i_0 I_d \ddot{\xi} + I_d (i_0 - 1) \ddot{\theta}_k. \quad (10.83)$$

Подставим (10.83) в уравнение (10.79) и учтем (10.80); тогда получим

$$(I_x + I_d i_0^2) \ddot{\vartheta} + Gl_z \vartheta = i_0 M_{dx} + M_f - Gl_z \theta_k - (I_x + I_d i_0) \ddot{\theta}_k. \quad (10.84)$$

Обозначая

$$M_f - Gl_z \theta_k = M_x, \quad (10.85)$$

перепишем (10.84) в виде

$$(I_x + I_d i_0^2) \ddot{\vartheta} + Gl_z \vartheta = i_0 M_{dx} + M_x - (I_x + I_d i_0) \ddot{\theta}_k. \quad (10.86)$$

Переходя к оси вращения якоря исполнительного двигателя, получим

$$\left(I_d + \frac{I_x}{i_0^2}\right) \ddot{\gamma}_0 + \frac{Gl_z}{i_0^2} \gamma_0 = M_{dx} + \frac{M_x}{i_0} - \left(I_d + \frac{I_x}{i_0}\right) \ddot{\theta}_K. \quad (10.87)$$

Из уравнения (10.87) имеем условие

$$|M_{dx}| > \left| \frac{M_x}{i_0} + \left(I_d + \frac{I_x}{i_0}\right) \ddot{\theta}_K \right|, \quad (10.88)$$

которое может быть использовано при выборе исполнительного двигателя.

Таким образом, как указывал А. Н. Крылов [44], если стабилизация визирного или дальномерного поста совершается с ошибкой ($\xi \neq 0$), то момент двигателя M_{dx} должен уравновесить возмущающий момент M_x , а также момент сил инерции поста и якоря двигателя при качке.

Заметим, что момент $I_x \ddot{\theta}_K$ не следовало бы учитывать при расчете мощности исполнительного двигателя, если в процессе стабилизации площадка с ИУ оставалась бы неподвижной относительно плоскости горизонта ($\xi = 0$), так как при этом инерционность системы не сказывается на работе следящего привода стабилизации. По этому поводу А. Н. Крылов указывал, что если отвлечься от необходимости учета трения в осях карданова подвеса, то «при правильной стабилизации стабилизирующие механизмы не оказывают на тело никаких реакций, каковы бы размахи корабля ни были..., эти механизмы не должны давать реакций на самый пост, а должны как бы освобождать его от корабля или, точнее говоря, давать возможность кораблю свободно качаться под постом, который сохраняет постоянное направление в пространстве» [44]. Однако инерционность поста сказывается при погрешностях стабилизации в начальный период работы после снятия поста с крепления «по-походному» [44] (при этом $\xi_0 = \theta_K$ и $\ddot{\xi} = \ddot{\theta}_K + \ddot{\vartheta}$), а также в процессе работы за счет ошибок стабилизации. Поэтому при расчете мощности исполнительного двигателя принимают во внимание и момент сил инерции $I_x \ddot{\theta}_K$ [6, 65].

Сказанное выше связано с существенным отличием систем стабилизации от систем воспроизведения угла. Возможны частные случаи, когда это различие не является столь существенным. Это имеет место, если приведенный к оси стабилизации момент инерции якоря двигателя соизмерим с моментом инерции объекта (см. § 10.6). В этом случае систему стабилизации можно рассчитывать как систему воспроизведения угла и пользоваться приведенными в § 10.3 передаточными функциями САР, в качестве которой рассматривается следящий привод стабилизации.

Для исследования точности стабилизации ИУ в динамике нам понадобятся передаточные функции $\Phi(s)$, $\Phi_\xi(s)$, $Y(s)$, которые приводятся далее в окончательном виде. Укажем лишь некоторые специфические особенности их получения.

Входящий в уравнение (10.87) вращающий момент двигателя $M_{дх}$ может быть записан в виде [6, 65]

$$M_{дх} = ku - b\dot{\gamma}_0, \quad (10.89)$$

где u — напряжение, подводимое к управляющей обмотке и являющееся функцией угла рассогласования ξ , k — передаточный коэффициент по моменту, b — коэффициент вязкого трения, $\dot{\gamma}_0$ — относительная угловая скорость якоря двигателя.

Заметим, что введение выражения (10.89) в уравнение (10.87) дополняет его левую часть слагаемым, пропорциональным $\dot{\gamma}_0$. Тогда это уравнение примет вид

$$I_{хп}\ddot{\gamma}_0 + b\dot{\gamma}_0 + c\gamma_0 = ku + M_x^п, \quad (10.90)$$

где

$$I_{хп} = I_{д} + \frac{I_x}{i_0^2}, \quad c = \frac{Gl_z}{i_0^2}, \quad (10.91)$$

а момент $M_x^п$, если принять во внимание формулу (10.75), будет

$$M_x^п = \frac{1}{i_0} \left[M_{вх} + \frac{G}{g} l_z (\ddot{\eta}_0 + x\dot{\phi}_p - z_1\dot{\theta}_k - \theta_k g) + M_{тх}^0 + Q_x \text{sign } \dot{\theta}_k \right], \quad (10.92)$$

$$z_1 = z + \frac{(I_x + I_{д}i_0)g}{Gl_z}. \quad (10.93)$$

В рассматриваемом далее примере (см. § 10.6) момент инерции $I_{д}$ имеет тот же порядок, что и приведенный момент инерции I_x/i_0^2 (в примере $\frac{I_{д}}{I_x/i_0^2} \cong 1$), что оправдывает допустимость анализа данной системы, как системы воспроизведения угла.

Уравнение (10.90) можно представить также в виде

$$T_1^2\ddot{\gamma}_0 + T_2\dot{\gamma}_0 + \gamma_0 = k_1u + f(t), \quad (10.94)$$

где постоянные времени T_1 , T_2 , передаточный коэффициент k_1 и возмущающее воздействие $f(t)$ определяются формулами

$$T_1^2 = \frac{I_{хп}}{c}, \quad T_2 = \frac{b}{c}, \quad k_1 = \frac{k}{c}, \quad f(t) = \frac{1}{c} M_x^п. \quad (10.95)$$

В дальнейшем нам понадобятся передаточные функции $\Phi(s)$, $\Phi_\xi(s)$, $Y(s)$, определяемые общими выражениями (10.37), (10.39), (10.38). Применительно к следящему приводу стабилизации эти

передаточные функции представляют собой следующие отношения изображений переменных по Лапласу:

$$\Phi(s) = \frac{\phi(s)}{g(s)}, \quad (10.96)$$

$$\Phi_{\xi}(s) = 1 - \Phi(s), \quad (10.97)$$

$$Y(s) = \frac{\phi(s)}{f(s)}. \quad (10.98)$$

Рассмотрим схему стабилизации оптического прибора [3, стр. 49, рис. 2.11], осуществляемой от ГВ с помощью следящего привода. Воспользуемся приведенными в работе [3] функциональной схемой системы стабилизации и числовыми значениями параметров прибора и системы стабилизации. В согласии со сказанным для передаточной функции $\Phi(s)$ можно принять выражение

$$\Phi(s) = \frac{d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3}{c_0 s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3}. \quad (10.99)$$

По формуле (10.97) определяем передаточную функцию $\Phi_{\xi}(s)$ по ошибке; имеем

$$\Phi_{\xi}(s) = \frac{h_0 s^3 + h_1 s^2 + h_2 s + h_3}{c_0 s^3 + c_1 s^2 + c_2 s + c_3}, \quad (10.100)$$

где

$$h_0 = c_0 - d_0, \quad h_1 = c_1 - d_1, \quad h_2 = c_2 - d_2, \quad h_3 = c_3 - d_3. \quad (10.101)$$

Для передаточной функции $Y(s)$ можно принять следующее выражение:

$$Y(s) = \frac{n_0 s^3 + n_1 s^2 + n_2 s + n_3}{m_0 s^4 + m_1 s^3 + m_2 s^2 + m_3 s + m_4}. \quad (10.102)$$

§ 10.6. Динамические погрешности стабилизации

1. Общая методика расчета погрешностей. Погрешности стабилизации ИУ в динамике, по аналогии с ошибками ГУ (§ 7.2), в зависимости от вызывающих их причин делятся на погрешности от входных данных, инструментальные погрешности, ошибки следящих приводов стабилизации и методические. В рассматриваемой системе стабилизации непосредственного типа ошибки входных данных вызваны ошибками ГВ в определении угла бортовой качки, поступающего на вход следящего привода стабилизации (рис. 10.1). Инструментальные погрешности обусловлены неточностью изготовления, сборки, регулировки отдельных устройств, деформациями элементов в процессе работы системы и др. Методические ошибки стабилизации могут быть вызваны неидентичностью применяемых в ГВ и в системе стабилизации механизмов вращения (см. § 6.4).

Среди упомянутых выше погрешностей наибольшее влияние на точность стабилизации ИУ в динамике оказывают внешние возмущающие воздействия, ошибки ГВ, ошибки следящих приводов стабилизации, которые и рассматриваются в дальнейшем.

Погрешность стабилизации $\xi(t)$ является случайной функцией времени. Так как она стационарна и нормальна, то может быть охарактеризована математическим ожиданием

$$M[\xi] = \bar{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi \quad (10.103)$$

и дисперсией

$$D[\xi] = \sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{\xi})^2 f(\xi) d\xi, \quad (10.104)$$

где плотность вероятности ординат случайной функции $\xi(t)$ имеет вид

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} e^{-\frac{(\xi - \bar{\xi})^2}{2\sigma_{\xi}^2}}. \quad (10.105)$$

Наиболее просто определяется дисперсия $D[\xi]$ по спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$ путем вычисления интеграла

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (10.106)$$

Предельное в вероятностном смысле значение погрешности ξ_m по аналогии с (10.14) характеризуется зависимостью

$$\xi_m = |\bar{\xi}| + z\sigma_{\xi}. \quad (10.107)$$

В соответствии с (10.106) необходимо привести общие выражения для спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$ погрешности стабилизации $\xi(t)$. В рассматриваемой следящей системе стабилизации управляющим воздействием $g(t)$ является угол бортовой качки, помехой на входе системы служит ошибка $n(t)$ ГВ, а к объекту стабилизации приложено внешнее возмущающее воздействие $f(t)$. В реальных условиях $g(t)$, $n(t)$, $f(t)$ являются случайными функциями времени; их вероятностные характеристики были рассмотрены в § 10.4.

Приведем выражения для спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$ применительно к следующим частным случаям [71, 83, 91]:

1) $n(t) = f(t) = 0$, $g(t) \neq 0$; имеем

$$S_{\xi}(\omega) = |\Phi_{\xi}(j\omega)|^2 S_g(\omega), \quad (10.108)$$

где $S_g(\omega)$ — спектральная плотность управляющего воздействия $g(t)$; $\Phi_{\xi}(j\omega)$ — передаточная функция системы стабилизации по ошибке;

2) $f(t) = 0$, $n(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$; если принять, что $S_{gn}(\omega) = S_{ng}(\omega) = 0$ (см. (10.54)), то получим

$$S_{\xi}(\omega) = |\Phi_{\xi}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |Y_1(j\omega)|^2 S_n(\omega), \quad (10.109)$$

где $Y_1(j\omega)$ — передаточная функция по отношению к помехе $n(t)$, $S_n(\omega)$ — спектральная плотность помехи.

Так как в данном случае $g(t)$ и $n(t)$ приложены в одной точке системы (к ее входу), то $Y_1(j\omega) = \Phi(j\omega)$ и вместо (10.109) будем иметь

$$S_{\xi}(\omega) = |\Phi_{\xi}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega); \quad (10.110)$$

3) $n(t) \neq 0$, $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$; при ограничении, указанном в п. 2, получим

$$S_{\xi}(\omega) = |\Phi_{\xi}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \\ + \Phi_{\xi}^*(j\omega) S_{gf}(\omega) Y(j\omega) + \Phi_{\xi}(j\omega) S_{fg}(\omega) Y^*(j\omega), \quad (10.111)$$

где $Y(j\omega)$ — передаточная функция системы по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$; $S_f(\omega)$ — спектральная плотность возмущения $f(t)$; $S_{gf}(\omega)$, $S_{fg}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности соответствующих случайных функций; индексом * обозначены комплексно сопряженные функции.

В соответствии с изложенным выше динамическую погрешность стабилизации $\xi(t)$ можно представить следующей суммой:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t), \quad (10.112)$$

где $\xi_1(t)$ — ошибка воспроизведения следящим приводом стабилизации управляющего воздействия $g(t)$, $\xi_2(t)$ — ошибка, вызванная помехой $n(t)$ на входе следящего привода, которая представляет собой погрешность ГВ, $\xi_3(t)$ — ошибка, обусловленная внешним возмущающим воздействием $f(t)$.

2. Погрешность воспроизведения управляющего воздействия. В согласии с формулой (10.43) $\bar{g}(t) = 0$ и, следовательно,

$$\bar{\xi}_1 = 0. \quad (10.113)$$

Спектральная плотность $S_{\xi_1}(\omega)$ определяется формулой (10.108). Тогда для дисперсии $D[\xi_1]$ получим

$$D[\xi_1] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_1}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\xi}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega. \quad (10.114)$$

Подставим в (10.114), выражения (10.100) (заменяя s на $j\omega$) и (10.45); тогда

$$D[\xi_1] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-h_0 j\omega^3 - h_1 \omega^2 + h_2 j\omega + h_3}{-c_0 j\omega^3 - c_1 \omega^2 + c_2 j\omega + c_3} \right|^2 \frac{2A_2 b_2}{\pi} \frac{b_2^2}{\omega^4 + 2a_2 \omega^2 + b_2^4} d\omega, \quad (10.115)$$

где в силу (10.46)

$$a_2 = \mu_2^2 - \lambda_2^2, \quad b_2^2 = \mu_2^2 + \lambda_2^2. \quad (10.116)$$

Так как входящие в (10.115) передаточная функция и спектральная плотность являются дробно-рациональными функциями от ω , то дисперсия $D[\xi_1]$ может быть вычислена аналитическим методом без определения корней знаменателя и разложения подынтегрального выражения на простейшие дроби. При этом определение $D[\xi_1]$ может быть сведено к вычислению табличного интеграла [67, 83]

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_n(j\omega)}{H_n(j\omega)H_n(-j\omega)} d\omega, \quad (10.117)$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_n(j\omega) &= b_0 (j\omega)^{2n-2} + b_1 (j\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}, \\ H_n(j\omega) &= a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \end{aligned} \right\} \quad (10.118)$$

и все корни ω_k полинома $H_n(j\omega)$ расположены в верхней полуплоскости.

В ряде работ (см., например, [67, 83]) даны таблицы значений интегралов I_n через коэффициенты $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$. Чтобы воспользоваться этими таблицами, представим (10.115), учитывая (10.116), в виде

$$\begin{aligned} D[\xi_1] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[-h_0^2 (j\omega)^6 + (h_1^2 - 2h_0h_2)(j\omega)^4 - (h_2^2 - 2h_1h_3)(j\omega)^2 + h_3^2] B_2}{|(-c_0j\omega^3 - c_1\omega^2 + c_2j\omega + c_3)(\omega^2 - 2\mu_2j\omega - b_2^2)|^2} d\omega, \end{aligned} \quad (10.119)$$

где

$$B_2 = 4 A_2 \mu_2 b_2^2. \quad (10.120)$$

Интеграл (10.119) можно свести к виду (10.117), полагая в (10.119) числитель равным $G_n(j\omega)$, а член, находящийся в знаменателе этого выражения под знаком модуля, равным $H_n(j\omega)$. Тогда согласно (10.118) и (10.119) для коэффициентов a_0, a_1, \dots и b_0, b_1, \dots получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -c_0, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= -(c_1 + 2\mu_2 c_0), & b_1 &= -B_2 h_0^2, \\ a_2 &= -(c_2 + c_0 b_2^2 + 2\mu_2 c_1), & b_2 &= B_2 (h_1^2 - 2h_0 h_2), \\ a_3 &= -(c_3 + c_1 b_2^2 + 2\mu_2 c_2), & b_3 &= -B_2 (h_2^2 - 2h_1 h_3), \\ a_4 &= -(c_2 b_2^2 + 2\mu_2 c_3), & b_4 &= B_2 h_3^2, \\ a_5 &= -c_3 b_2^2, \end{aligned} \right\} \quad (10.121)$$

Учитывая известное выражение интеграла I_5 [83] через коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ и b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 , получим формулу для $D[\xi_1]$ в виде

$$D[\xi_1] = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5}, \quad (10.122)$$

где

$$M_5 = b_0(-a_0a_1a_5 + a_1a_4^2 + a_2^2a_5 - a_2a_3a_4) + \\ + a_0b_1(-a_2a_5 + a_3a_4) + a_0b_2(a_0a_5 - a_1a_4) + a_0b_3(-a_0a_3 + a_1a_2) + \\ + \frac{a_0b_4}{a_5}(-a_0a_1a_5 + a_0a_3^2 + a_1^2a_4 - a_1a_2a_3), \quad (10.123)$$

$$\Delta_5 = a_0^2a_5^2 - 2a_0a_1a_4a_5 - a_0a_2a_3a_5 + a_0a_3^2a_4 + a_1^2a_4^2 + \\ + a_1a_2^2a_5 - a_1a_2a_3a_4. \quad (10.124)$$

Пример 10.3. Определить среднеквадратичное значение σ_{ξ} погрешности воспроизведения следящим приводом стабилизации ИУ управляющего воздействия $g(t)$ для следующих исходных данных:

коэффициенты передаточной функции $\Phi_{\xi}(s)$ (10.100) по ошибке [3] *) $h_0 = 3,64 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^3$, $h_1 = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2$, $h_2 = 3,79 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$, $h_3 = 0$, $c_0 = 3,64 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^3$, $c_1 = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2$, $c_2 = 5,38 \cdot 10^{-2} \text{ сек}$, $c_3 = 1$;

параметры бортовой качки корабля $\sigma_{\theta_K} = 7^\circ$, $\lambda_2 = 0,7 \text{ сек}^{-1}$, $\mu_2 = 0,1 \text{ сек}^{-1}$.

Решение.

1) По формуле (10.116) находим b_2^2 :

$$b_2^2 = 0,5 \text{ сек}^{-2}.$$

2) Пользуясь (10.120), вычисляем B_2 :

$$B_2 = 2,99 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-3}.$$

3) С помощью формул (10.121) находим значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$:

$$a_0 = -3,64 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^3, \quad b_0 = 0, \\ a_1 = -6,31 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2, \quad b_1 = -3,96 \cdot 10^{-14} \text{ сек}^3, \\ a_2 = -5,39 \cdot 10^{-2} \text{ сек}, \quad b_2 = 11,04 \cdot 10^{-10} \text{ сек}, \\ a_3 = -1,01, \quad b_3 = -4,29 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-1}, \\ a_4 = -0,227 \text{ сек}^{-1}, \quad b_4 = 0, \\ a_5 = -0,5 \text{ сек}^{-2},$$

*) Приведенные в примерах 10.3, 10.4, 10.5, 10.6 числовые значения коэффициентов передаточных функций $\Phi(s)$, $\Phi_{\xi}(s)$, $Y(s)$ получены путем расчета применительно к схеме и параметрам системы стабилизации оптического прибора, рассмотренной в книге [3, стр. 49].

4) По формулам (10.123), (10.124), (10.122) вычисляем дисперсию $D[\xi_1]$:

$$D[\xi_1] = 12,57 \cdot 10^{-8} \text{ рад}^2.$$

5) Определяем среднеквадратичное значение σ_{ξ_1} погрешности стабилизации

$$\sigma_{\xi_1} = \sqrt{D[\xi_1]} = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1,2 \text{ угл. мин.}$$

3. Погрешность из-за ошибки ГВ. Найдем вероятностные характеристики погрешности $\xi_2(t)$, вызванной помехой $n(t)$, которая представляет собой погрешность ГВ в определении угла бортовой качки. Для математического ожидания $\bar{\xi}_2$ имеем следующее общее выражение:

$$\bar{\xi}_2 = M[\xi_2(t)] = \Phi(j\omega)|_{\omega=0} \bar{n}, \quad (10.125)$$

где \bar{n} — математическое ожидание помехи $n(t)$.

Принимая во внимание выражение (10.99), имеем

$$\bar{\xi}_2 = \frac{d_3}{c_3} \bar{n}.$$

Так как $c_3 = d_3$, то

$$\bar{\xi}_2 = \bar{n}. \quad (10.126)$$

Таким образом, систематическая погрешность ГВ \bar{n} вызывает равную ей систематическую погрешность $\bar{\xi}_2$ стабилизации ИУ.

Спектральная плотность $S_{\xi_2}(\omega)$ ошибки $\xi_2(t)$ может быть найдена из формулы (10.110), если в ней положить $S_g(\omega) = 0$; тогда

$$S_{\xi_2}(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega). \quad (10.127)$$

Следовательно, для дисперсии $D[\xi_2]$ будем иметь

$$D[\xi_2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_2}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega. \quad (10.128)$$

Подставим в (10.128) выражения (10.99) (заменяя s на $j\omega$) и (10.49); тогда

$$\begin{aligned} D[\xi_2] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[-d_0^2(j\omega)^6 + (d_1^2 - 2d_0d_2)(j\omega)^4 - (d_2^2 - 2d_1d_3)(j\omega)^2 + d_3^2] B_n}{|(-c_0j\omega^3 - c_1\omega^2 + c_2j\omega + c_3)(\omega^2 - 2\mu_nj\omega - b_n^2)|^2} d\omega, \end{aligned} \quad (10.129)$$

где

$$B_n = 4A_n\mu_n b_n^2, \quad (10.130)$$

а в силу (10.50)

$$a_n = \mu_n^2 - \lambda_n^2, \quad b_n^2 = \mu_n^2 + \lambda_n^2. \quad (10.131)$$

Пользуясь, по аналогии с предыдущим, для вычисления дисперсии $D[\xi_2]$ табличным интегралом (10.117), для коэффициентов a_0, a_1, \dots и b_0, b_1, \dots получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -c_0, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= -(c_1 + 2\mu_n c_0), & b_1 &= -B_n d_0^2, \\ a_2 &= -(c_2 + c_0 b_n^2 + 2\mu_n c_1), & b_2 &= B_n (d_1^2 - 2d_0 d_2), \\ a_3 &= -(c_3 + c_1 b_n^2 + 2\mu_n c_2), & b_3 &= -B_n (d_2^2 - 2d_1 d_3), \\ a_4 &= -(c_4 b_n^2 + 2\mu_n c_3), & b_4 &= B_n d_3^2, \\ a_5 &= -c_5 b_n^2, \end{aligned} \right\} \quad (10.132)$$

Тогда по аналогии с (10.122) дисперсия $D[\xi_2]$ будет определяться формулой

$$D[\xi_2] = \frac{M_5}{2a_0 \Delta_5}, \quad (10.133)$$

где M_5 и Δ_5 связаны с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_5, b_0, b_1, \dots, b_4$ (10.132) соотношениями (10.123) и (10.124).

Пример 10.4. Вычислить среднеквадратичное значение σ_{ξ_2} погрешности стабилизации ИУ, обусловленной ошибками ГВ в определении угла бортовой качки, для следующих исходных данных [3]: коэффициенты передаточной функции $\Phi(s)$ (10.99): $d_0 = 0, d_1 = 0, d_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ сек}, d_3 = 1, c_0 = 3,64 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^3, c_1 = 6,3 \times 10^{-4} \text{ сек}^2, c_2 = 5,38 \cdot 10^{-2} \text{ сек}, c_3 = 1$; параметры спектральной плотности ошибки ГВ: $\sigma_n = \sqrt{A_n} = 2 \text{ угл. мин.} = 5,82 \cdot 10^{-4} \text{ рад}, \mu_n = 0,1 \text{ сек}^{-1}, \lambda_n = 0,7 \text{ сек}^{-1}$.

Решение.

1) По формуле (10.131) находим b_n^2 :

$$b_n^2 = 0,5 \text{ сек}^{-2}.$$

2) Пользуясь (10.130), вычисляем B_n :

$$B_n = 6,77 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-3}.$$

3) С помощью формул (10.132) находим значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$:

$$\begin{aligned} a_0 &= -3,64 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^3, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= -6,31 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^2, & b_1 &= 0, \\ a_2 &= -5,39 \cdot 10^{-2} \text{ сек}, & b_2 &= 0, \\ a_3 &= -1,01 & b_3 &= -16,93 \cdot 10^{-11} \text{ сек}^{-1}, \\ a_4 &= -0,227 \text{ сек}^{-1}, & b_4 &= 6,77 \cdot 10^{-8} \text{ сек}^{-3}, \\ a_5 &= -0,5 \text{ сек}^{-2}, \end{aligned}$$

4) По формулам (10.133), (10.123), (10.124) вычисляем дисперсию $D[\xi_2]$:

$$D[\xi_2] = 3,38 \cdot 10^{-7} \text{ рад}^2.$$

5) Находим среднеквадратичное значение σ_{ξ_2} погрешности стабилизации

$$\sigma_{\xi_2} = \sqrt{D[\xi_2]} = 5,82 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 2 \text{ угл. мин.}$$

Из примера следует, что погрешность ГВ вызывает равную ей ошибку стабилизации ИУ. Это обстоятельство связано с тем, что спектр управляющего воздействия $g(t)$ и спектр ошибки ГВ $n(t)$ имеют максимальные ординаты при одинаковых частотах $\lambda_2 = \lambda_n$. Поэтому следящий привод стабилизации, выбранный из условия точного воспроизведения полезного входного сигнала $g(t)$, будет полностью пропускать ошибку ГВ $n(t)$. Отсюда становится понятным требование повышения точности ГВ, приводящее к уменьшению ошибок стабилизации ИУ.

4. Погрешности из-за внешних возмущающих воздействий. Рассмотрим погрешность стабилизации ИУ $\xi_3(t)$, обусловленную внешним возмущающим воздействием $f(t)$. Последнее в согласии с (10.95) и (10.92) определяется зависимостью

$$f(t) = \frac{1}{i_0 c} \left[M_{\text{вх}} + \frac{G}{g} l_z (\ddot{\theta}_0 + x \ddot{\phi}_p - z_1 \dot{\theta}_k - \theta_k g) + M_{\text{тх}}^0 + Q_x \text{sign } \theta_k \right]. \quad (10.134)$$

Из (10.134) следует, что $f(t)$ является случайной функцией времени; ее математическое ожидание по аналогии с (10.76) выражается формулой

$$\bar{f} = M[f(t)] = \frac{1}{i_0 c} (M_{\text{вх}} + M_{\text{тх}}^0). \quad (10.135)$$

Так как $\bar{f} \neq 0$, то математическое ожидание погрешности ξ_3 не равно нулю и для него можно записать следующее выражение:

$$\bar{\xi}_3 = M[\xi_3(t)] = Y(j\omega)|_{\omega=0} \bar{f}, \quad (10.136)$$

где $Y(j\omega)$ находится путем замены в (10.102) s на $j\omega$.

Тогда, принимая во внимание (10.102) и (10.135), вместо (10.136) получим

$$\bar{\xi}_3 = \frac{1}{i_0 c} \frac{n_3}{m_4} (M_{\text{вх}} + M_{\text{тх}}^0). \quad (10.137)$$

Пример 10.5. Определить математическое ожидание $\bar{\xi}_3$ погрешности стабилизации, вызванной внешним возмущающим воздействием $f(t)$, для следующих исходных данных: $i_0 = 350$ [3], $c = 2,45 \cdot 10^{-8}$ $\kappa\Gamma\text{м/рад}$, $n_3 = 2,23 \cdot 10^{-8}$, $m_4 = 1$, $M_{\text{вх}} = 5,5 \times 10^{-2}$ $\kappa\Gamma\text{м}$, $M_{\text{тх}}^0 = 0,2 \cdot 10^{-2}$ $\kappa\Gamma\text{м}$.

Решение. По формуле (10.137) вычисляем $\bar{\xi}_3 = 1,48 \times 10^{-4}$ рад = 0,5 угл. мин.

Перейдем к определению дисперсии $D[\xi_3]$ ошибки $\xi_3(t)$. Ее спектральная плотность $S_{\xi_3}(\omega)$ выражается формулой (10.111), если в ней положить $S_g(\omega) = 0$, $S_n(\omega) = 0$; тогда получим

$$S_{\xi_3}(\omega) = |Y(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \Phi_{\xi}^*(j\omega) S_{gf}(\omega) Y(j\omega) + \Phi_{\xi}(j\omega) S_{fg}(\omega) Y^*(j\omega). \quad (10.138)$$

Следовательно,

$$D[\xi_3] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi_3}(\omega) d\omega \quad (10.139)$$

или, учитывая (10.138),

$$D[\xi_3] = \int_{-\infty}^{\infty} [|Y(j\omega)|^2 S_f(\omega) + \Phi_{\xi}^*(j\omega) S_{gf}(\omega) Y(j\omega) + \Phi_{\xi}(j\omega) S_{fg}(\omega) Y^*(j\omega)] d\omega. \quad (10.140)$$

Обозначим

$$D[\xi_3'] = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (10.141)$$

$$D[\xi_3''] = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_{\xi}^*(j\omega) Y(j\omega) S_{gf}(\omega) + \Phi_{\xi}(j\omega) Y^*(j\omega) S_{fg}(\omega)] d\omega. \quad (10.142)$$

Тогда выражение (10.140) можно записать в виде

$$D[\xi_3] = D[\xi_3'] + D[\xi_3'']. \quad (10.143)$$

Заметим, что методика расчета дисперсий $D[\xi_3]$, $D[\xi_3'']$ ничем не отличается в принципе от приведенных ранее расчетов дисперсий $D[\xi_1]$ и $D[\xi_2]$. Поэтому ограничимся указанием на некоторые особенности определения дисперсий $D[\xi_3]$, $D[\xi_3'']$.

Для нахождения дисперсии $D[\xi_3]$ в согласии с (10.141) необходимо получить выражение для спектральной плотности $S_f(\omega)$. Запишем формулу для $f(t)$. Так как нас интересует лишь случайная составляющая возмущающего воздействия $f(t)$, то в формуле (10.134) следует положить $M_{вх} = M_{тх}^0 = 0$. Тогда, принимая во внимание формулу (10.91), вместо (10.134) получим

$$f(t) = \frac{i_0}{g} (\ddot{\eta}_0 - z_1 \ddot{\theta}_K - g \theta_K + Q_x \text{sign } \dot{\theta}_K + x \dot{\psi}_p), \quad (10.144)$$

где

$$Q_x = \frac{Q_x g}{G I_z}. \quad (10.145)$$

Введем следующие обозначения:

$$f_I(t) = \frac{i_0}{g} (Q'_x \operatorname{sign} \dot{\theta}_K - z_1 \ddot{\theta}_K - g \theta_K), \quad (10.146)$$

$$f_{II}(t) = \frac{i_0}{g} \ddot{\eta}_0, \quad (10.147)$$

$$f_{III}(t) = \frac{i_0}{g} x \dot{\varphi}_D. \quad (10.148)$$

Возмущающее воздействие $f_I(t)$ обусловлено бортовой качкой, воздействие $f_{II}(t)$ — орбитальным движением, воздействие $f_{III}(t)$ — рысканием корабля. Вследствие отсутствия вероятностной связи указанных движений корабля получим

$$S_f(\omega) = S_{f_I}(\omega) + S_{f_{II}}(\omega) + S_{f_{III}}(\omega). \quad (10.149)$$

Тогда

$$D[\xi_{\Sigma}] = D[\xi_{\Sigma I}] + D[\xi_{\Sigma II}] + D[\xi_{\Sigma III}], \quad (10.150)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D[\xi_{\Sigma I}] &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 S_{f_I}(\omega) d\omega, \\ D[\xi_{\Sigma II}] &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 S_{f_{II}}(\omega) d\omega, \\ D[\xi_{\Sigma III}] &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 S_{f_{III}}(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (10.151)$$

Наибольшую трудность представляет определение дисперсии $D[\xi_{\Sigma I}]$. Рассмотрим выражение (10.146) для возмущающего воздействия $f_I(t)$. Обозначим

$$v(t) = \operatorname{sign} \dot{\theta}_K, \quad (10.152)$$

график этой функции представлен на рис. 10.2, б. Учитывая (10.152), перепишем (10.146) в виде

$$f_I(t) = \frac{i_0}{g} [Q'_x v(t) - z_1 \ddot{\theta}_K - g \theta_K]. \quad (10.153)$$

Выявим влияние момента сил сухого трения в осях карданова подвеса. Не принимая во внимание возможной корреляционной связи случайных функций $v(t)$, $\ddot{\theta}_K(t)$ и $\theta_K(t)$, вместо (10.153) получим

$$f_I(t) = \frac{i_0}{g} Q'_x v(t). \quad (10.154)$$

Спектральная плотность $S_{f_I}(\omega)$ определится выражением

$$S_{f_I}(\omega) = \left(\frac{i_0 Q'_x}{g} \right)^2 S_v(\omega). \quad (10.155)$$

Для спектральной плотности $S_v(\omega)$ случайной функции $v(t)$ (10.152) используют формулу [66]

$$S_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{v}{\omega^2 + v^2}, \quad (10.156)$$

где

$$v = 1/\bar{\tau} \quad (10.157)$$

— величина, обратная среднему значению $\bar{\tau}$ интервалов τ_n , на которых функция $v(t)$ не изменяет знака (см. рис. 10.2, б). При нерегулярной бортовой качке корабля можно принять $\bar{\tau} = T_2/2 = \pi/\lambda_2$. Тогда вместо (10.157) имеем

$$v = \lambda_2/\pi. \quad (10.158)$$

Выражение (10.156) получено [83, 90] при условии, что моменты времени перемены знака функции $v(t)$ распределены по закону Пуассона.

Определим дисперсию $D[\xi_{3I}']$ погрешности стабилизации $\xi_{3I}'(t)$. Для этого подставим в (10.151) выражения (10.102) (заменяя s на $j\omega$) и (10.155), (10.156); тогда

$$D[\xi_{3I}'] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|-n_0^2(j\omega)^6 + (n_1^2 - 2n_0n_2)(j\omega)^4 - (n_2^2 - 2n_1n_3)(j\omega)^2 + n_3^2| B_q}{|(m_0\omega^4 - m_1j\omega^3 - m_2\omega^2 + m_3j\omega + m_4)(j\omega + v)|^2} d\omega, \quad (10.159)$$

где

$$B_q = 2 \left(\frac{i_0 Q_x'}{g} \right)_j^2 v \quad (10.160)$$

или, учитывая (10.91) и (10.145),

$$B_q = 2 \left(\frac{Q_x}{i_0 c} \right)^2 v. \quad (10.161)$$

Пользуясь для вычисления дисперсии $D[\xi_{3I}']$ табличным интегралом (10.117), для коэффициентов a_0, a_1, \dots и b_0, b_1, \dots получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= m_0, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= m_1 + m_0 v, & b_1 &= -B_q n_0^2, \\ a_2 &= m_2 + m_1 v, & b_2 &= B_q (n_1^2 - 2n_0 n_2), \\ a_3 &= m_3 + m_2 v, & b_3 &= -B_q (n_2^2 - 2n_1 n_3), \\ a_4 &= m_4 + m_3 v, & b_4 &= B_q n_3^2, \\ a_5 &= m_4 v, & & \end{aligned} \right\} \quad (10.162)$$

Тогда по аналогии с (10.122) дисперсия $D[\xi_{31}]$ будет определяться формулой

$$D[\xi'_{31}] = \frac{M_5}{2a_0\Delta_5}, \quad (10.163)$$

где M_5 и Δ_5 связаны с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_5, b_0, b_1, \dots, b_4$ (10.162) соотношениями (10.123) и (10.124).

Пример 10.6. Определить среднеквадратичное значение $\sigma_{\xi_{31}}$ погрешности стабилизации ИУ, обусловленной моментом сил сухого трения в осях подвеса наружного карданова кольца, для следующих исходных данных:

коэффициенты передаточной функции $Y(s)$ (10.102) [3] $n_0 = 0$, $n_1 = 2,14 \cdot 10^{-11} \text{ сек}^2$, $n_2 = 3,7 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$, $n_3 = 2,23 \cdot 10^{-8}$, $m_0 = 2,18 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^4$, $m_1 = 4,14 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^3$, $m_2 = 4,01 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^2$, $m_3 = 1,14 \cdot 10^{-1} \text{ сек}$, $m_4 = 1$;

момент трения $Q_x = 0,02 \text{ кгм}$, $\lambda_2 = 0,7 \text{ сек}^{-1}$ (пример 10.3), $i_0 = 350$, $c = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ кгм/рад}$ (пример 10.5).

Решение.

1) По формуле (10.158) находим величину v :

$$v = 0,223 \text{ сек}^{-1}.$$

2) Согласно (10.161) вычисляем B_q :

$$B_q = 2,43 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

3) Пользуясь выражениями (10.162), находим значения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2,18 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^4, & b_0 &= 0, \\ a_1 &= 4,15 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^3, & b_1 &= 0, \\ a_2 &= 4,02 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^2, & b_2 &= 11,11 \cdot 10^{-16} \text{ сек}^3, \\ a_3 &= 1,15 \cdot 10^{-1} \text{ сек}, & b_3 &= -32,08 \cdot 10^{-12} \text{ сек}, \\ a_4 &= 1,03, & b_4 &= 12,07 \cdot 10^{-10} \text{ сек}^{-1}, \\ a_5 &= 0,223 \text{ сек}^{-1}, & & \end{aligned}$$

4) По формулам (10.163), (10.123), (10.124) вычисляем дисперсию $D[\xi_{31}]$:

$$D[\xi_{31}] = 28,16 \cdot 10^{-10} \text{ рад}^2.$$

5) Находим среднеквадратичное значение $\sigma_{\xi_{31}}$ погрешности стабилизации

$$\sigma_{\xi_{31}} = \sqrt{D[\xi_{31}]} = 53,07 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0,2 \text{ угл. мин.}$$

Из примера видно, что погрешность стабилизации из-за момента трения мала, однако возможен кратковременный «всплеск» этой погрешности при перемене знака $M_{Tx}(t)$ (рис. 10.2,б) [6, 66].

Если при расчете дисперсии $D[\xi_{3I}]$ учесть общую формулу для $f_I(t)$ (10.153), то методика вычисления $D[\xi_{3I}]$ сохраняется, но выражение спектральной плотности $S_{f_I}(\omega)$ вместо (10.155) будет

$$S_{f_I}(\omega) = \frac{i_0^2}{g^2} \{ (Q_x')^2 S_v(\omega) + z_1^2 S_{\ddot{\theta}_K}(\omega) + g^2 S_{\theta_K}(\omega) + \\ + z_1 g [S_{\theta_K \ddot{\theta}_K}(\omega) + S_{\ddot{\theta}_K \theta_K}(\omega)] - Q_x' z_1 [S_v \ddot{\theta}_K(\omega) + S_{\ddot{\theta}_K v}(\omega)] - \\ - Q_x' g [S_{v \theta_K}(\omega) + S_{\theta_K v}(\omega)] \}. \quad (10.164)$$

При определении в (10.164) спектральных и взаимных спектральных плотностей качки следует учесть § 1.4, а при нахождении выражений типа $S_{v \theta_K}(\omega)$ — воспользоваться двумерной плотностью вероятности или приближенным подходом [36].

Для расчета дисперсий $D[\xi_{3II}]$, $D[\xi_{3III}]$ (см. (10.151)), в согласии с (10.147) и (10.148), определяются спектральные плотности

$$S_{f_{II}}(\omega) = \frac{i_0^2}{g^2} S_{\ddot{\eta}_0}(\omega), \quad S_{f_{III}}(\omega) = \frac{i_0^2 x^2}{g^2} S_{\ddot{\varphi}_p}(\omega). \quad (10.165)$$

Далее находятся составляющие дисперсии $D[\xi_3']$ и $D[\xi_3'']$ (см. (10.143)) на основании выражений (10.150) и (10.142).

Из сказанного в настоящем параграфе следует, что на основании известных передаточных функций следящего привода стабилизации и вероятностных характеристик управляющих и возмущающих воздействий имеется возможность определить погрешности стабилизации ИУ для условий их работы, близких к реальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автокомпенсация инструментальных погрешностей гиросистем, З е л ь д о в и ч С. М., М а л т и н с к и й М. И., О к о н И. М., О с т р о м у х о в Я. Г., Л., «Судостроение», 1976.
2. Аппаратурные и опытно-методические работы по морской гравиметрии, Сб. статей, ответственный редактор Е. И. Попов, М., «Наука», 1973.
3. Б а б а е в А. А., Стабилизация оптических приборов, Л., «Машиностроение», 1975.
4. Б а й р а ш е в с к и й А. М., Н и ч и п о р е н к о Н. Т., Судовые радиолокационные системы, М., «Транспорт», 1973.
5. Б е с е к е р с к и й В. А., Индикаторные гиросtabilизаторы, В сб. «Развитие механики гироскопических и инерциальных систем», М., «Наука», 1973, с. 217—231.
6. Б е с е к е р с к и й В. А., Ф а б р и к а н т Е. А., Динамический синтез гироскопической стабилизации, Л., «Судостроение», 1968.
7. Б л а г о в е щ е н с к и й С. Н., Х о л о д и л и н А. Н., Справочник по статике и динамике корабля, ч. 2. Л., «Судостроение», 1975.
8. Б о р о д а й И. К., Н е ц в е т а е в Ю. А., Качка судов на морском волнении, Л., «Судостроение», 1969.
9. Бортовые радиолокационные системы, Под редакцией Д. Повейсила, Р. Ровена, П. Уотермана, М., Воениздат МО СССР, 1964.
10. Б р а н е ц В. Н., Ш м ы г л е в с к и й И. П., Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела, М., «Наука», 1973.
11. Б р у е в и ч Н. Г., Точность механизмов, М.—Л., Гостехиздат, 1946.
12. Б у н и м о в и ч В. И., Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах, М., «Сов. радио», 1961.
13. В а с и л ь е в Д. В., М и х а й л о в В. А., Н о р н е в с к и й Б. И., Примеры и задачи по расчету судовых автоматизированных систем, Л., «Судостроение», 1973.
14. В а х и т о в К. Г., О выборе требований к точности определения меридиана и вертикали места для геомагнитных измерений, Известия вузов, Приборостроение, 1971, т. XIV, № 8, с. 89—94.
15. В е н к с т е р н С. А., Стрельба на море, М. — Л., Военмориздат, 1940.
16. В о з н е с е н с к и й А. И., Н е ц в е т а е в Ю. А., Энергетический спектр морского волнения, Судостроение, 1966, № 7, с. 11—15.
17. Г и р с И. В., Н е ц в е т а е в Ю. А., Р у с е ц к и й А. А., Испытание мореходных качеств судов, Л., «Судостроение», 1966.
18. Динамика электромашинных следящих систем, Б л е й з Е. С., С е м е н о в Ю. Н., Ч е м о д а н о в Б. К., Я к и м е н к о Н. М., М., «Энергия», 1967.
19. Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В., С м и р н о в Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), М., Гостехиздат, 1955.
20. Е к и м о в В. В., Вероятностные методы в строительной механике корабля, Л., «Судостроение», 1966.

21. Ж а н з е Л. Н., М а н е в и ч А. Е., Р и в к и н С. С., О погрешностях корабельных гироскопических устройств на волнении, Известия АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 2, с. 142—146.
22. З е л д о в и ч С. М., О к о н И. М., Применение методов, основанных на теории конечных поворотов к анализу геометрии гироскопических устройств, Известия вузов, Приборостроение, 1974, т. XVII, № 4, с. 80—86.
23. З у ф р и н А. М., Методы построения судовых автоматических угломерных систем, Л., «Судостроение», 1970.
24. И в а н о в М. М., Магнитная съемка океанов, Геомагнетизм, № 7, М., «Наука», 1966, с. 60—61.
25. Инерциальная навигация, Под редакцией О'Доннела, М., «Наука», 1969.
26. Инерциальные системы навигации, Под редакцией Д. Питтмана, М., Воениздат МО СССР, 1964.
27. И ш л и н с к и й А. Ю., Механика гироскопических систем, М., Изд-во АН СССР, 1963.
28. И ш л и н с к и й А. Ю., Об азимутальном рассогласовании двух кардановых подвесов, Инженерный журнал «Механика твердого тела», 1966, № 3, с. 3—8.
29. И ш л и н с к и й А. Ю., Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация, М., «Наука», 1976.
30. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гироскоп направления, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 558—559.
31. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гироскоп, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 555.
32. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гиротахометр, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 561.
33. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гироскопический интегратор, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 560.
34. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гироскоп, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 554.
35. И ш л и н с к и й А. Ю., Р и в к и н С. С., Гиросtabilизаторы, БСЭ, изд. 3-е, 1971, т. 6, с. 561.
36. К а з а к о в И. Е., Д о с т у п о в Б. Г., Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, М., Физматгиз, 1962.
37. К о с т р о в А. В., Я к о в л е в А. А., О некоторых особенностях прогнозирования узкополосного случайного процесса, Сб. научных трудов Пермского политехнического института «Автоматизированные системы и средства управления», Пермь, 1975, № 166, с. 50—56.
38. К о т о в с к и й В. И., Стабилизаторы танкового вооружения, М., Воениздат МО СССР, 1961.
39. К о ш л я к о в В. Н., О применении параметров Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна в прикладной теории гироскопов, ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 729—733.
40. К р и к с у н о в Л. З., У с о л ь ц е в И. Ф., Инфракрасные системы, М., «Сов. радио», 1968.
41. К р ы л о в А. Н., Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, Собрание трудов, т. VIII, Изд-во АН СССР, 1950.
42. К р ы л о в А. Н., Качка корабля, Собрание трудов, т. XI, Изд-во АН СССР, 1951.
43. К р ы л о в А. Н., Карданов подвес на корабле, Собрание трудов, т. XII, ч. I, Изд-во АН СССР, 1955.
44. К р ы л о в А. Н., О равновесии и движении тел на качающемся корабле, Собрание трудов, т. XII, ч. I, Изд-во АН СССР, 1955.
45. К р ы л о в А. Н., Общая теория качки корабля на волнении, Избранные труды, М., Изд-во АН СССР, 1958.

46. Крылов Ю. М., Спектральный метод исследования морского волнения, М., Гидрометеоздат, 1966.
47. Кудревич Б. И., Теория гироскопических приборов., т. 1, 2, Л., «Судостроение», 1963, 1965.
48. Кудревич Б. И., Ривкин С. С., Геометрия карданова подвеса, в книге: Кудревич Б. И. «Теория гироскопических приборов», т. 1, Л., Судпромгиз, 1963.
49. Кудревич Б. И., Ривкин С. С., Преобразование координат на корабле, в книге: Кудревич Б. И. «Теория гироскопических приборов», т. 1, Л., Судпромгиз, 1963.
50. Кутепов В. С., Попов Е. И., Фон возмущающих ускорений при гравиметрических наблюдениях на надводных кораблях, Сб. «Морской гиросtabilизированный гравиметр», Ред. Е. И. Попов, М., «Наука», 1972, с. 138—150.
51. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., Физматгиз, 1961.
52. Меркин Д. Р., Гироскопические системы, изд. 2-е, М., «Наука», 1974.
53. Механизмы вращения антенн, Перевод с английского, М., «Сов. радио», 1951.
54. Морской гиросtabilизированный гравиметр, Ответственный редактор Е. И. Попов, М., «Наука», 1972.
55. Назаров Б. И., Силовые гиросtabilизаторы, В сб. «Развитие механики гироскопических и инерциальных систем», М., «Наука», 1973, с. 183—216.
56. Новосельцев Я. В., Лебедев А. Н., Счетно-решающие устройства, М., Машгиз, 1954.
57. Основы теории и проектирования вычислительных приборов и машин управления, Преснухин Л. Н., Соломонов Л. А., Четвериков В. Н., Шаньгин В. Ф., М., «Высшая школа», 1970.
58. Остроухов Я. Г., Ривкин С. С., Темченко М. Е., Геометрия и кинематика систем гироскопической стабилизации, В сб. «Развитие механики гироскопических и инерциальных систем», М., «Наука», 1973, с. 232—252.
59. Павленко Г. Е., Качка судов, М., Гострансиздат, 1935.
60. Пирсон В. Дж., Ветровые волны, Сб. «Ветровые волны», М., ИЛ, 1962, с. 42—122.
61. Попкова Л. И., Некоторые вопросы косвенной стабилизации магнитометров, предназначенных для использования на подвижных объектах, Автореферат кандидатской диссертации, ЛИТМО, 1969.
62. Попов Е. И., Определение силы тяжести на подвижном основании, М., «Наука», 1967.
63. Преснухин Л. Н., Серебровский Л. А., Юдин Д. Б., Основы теории и проектирования приборов управления, М., Оборонгиз, 1960.
64. Принципы инерциальной навигации, Савант С. Дж., Ховард Р., Соллоуай С., Савант С. А., М., «Мир», 1965.
65. Проектирование и расчет следящих систем, Васильев Д. В., Митрофанов Б. А., Рабкин Г. Л., Самохвалов Г. Н., Семенкович А. А., Фатеев А. В., Чичерин Н. И., Л., Судпромгиз, 1958.
66. Проектирование следящих систем малой мощности, Бесекерский В. А., Орлов В. П., Полонская Л. В., Федоров С. М., Л., Судпромгиз, 1958.
67. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, М., Физматгиз, 1963.

68. Рахманин Н. Н., Спектральные свойства морского волнения, используемые при исследовании мореходных качеств кораблей, Труды Океанографической комиссии АН СССР, 1960, т. IX, с. 84—96.
69. Ривкин С. С., Применение методов теории матриц к анализу геометрии гироскопических устройств, Сб. «Вопросы прикладной гироскопии», НТО приборпрома, вып. 2, Л., Судпромгиз, 1960, с. 5—15.
70. Ривкин С. С., Теория гироскопических устройств, ч. I, Л., Судпромгиз, 1962.
71. Ривкин С. С., Теория гироскопических устройств, ч. II, Л., «Судостроение», 1964.
72. Ривкин С. С., Статистический синтез гироскопических устройств, Л., «Судостроение», 1970.
73. Ривкин С. С., Метод оптимальной фильтрации Калмана и его применение в инерциальных навигационных системах, ч. 1, 2, Л., «Судостроение», 1973, 1974.
74. Ривкин С. С., Непосредственные гиросtabilизаторы, В сб. «История механики гироскопических систем», М., «Наука», 1975, с. 82—93.
75. Ривкин С. С., Ивановский Р. И., Костров А. В., Статистическая оптимизация навигационных систем, Л., «Судостроение», 1976.
76. Ройтенберг Я. Н., Гироскопы, изд. 2-е, М., «Наука», 1975.
77. Свешников А. А., О теории бортовой качки на нерегулярном волнении, Первая межвузовская научно-техническая конференция по проблемам современной гироскопии (1956), Л., ЛИТМО, 1960, с. 126—141.
78. Свешников А. А., Прикладные методы теории случайных функций, изд. 2-е, М., «Наука», 1968.
79. Свешников А. А., Определение вероятностных характеристик трехмерного волнения моря, Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1969, № 3, с. 32—41.
80. Свешников А. А., Ривкин С. С., Вероятностные методы в прикладной теории гироскопов, М., «Наука», 1974.
81. Селезнев В. П., Навигационные устройства, М., «Машиностроение», 1974.
82. Скворцов Г. В., Синтез корректирующих устройств судовых следящих систем, Л., «Судостроение», 1968.
83. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, М., Физматгиз, 1960.
84. Стабилизация и ориентирование актинометрической аппаратуры при проведении наблюдений с подвижных объектов, Редактор А. Я. Шайденко, ч. I, II, Изд-во Тульского политехнического института, 1971.
85. Станиславский Б. И., Основы теории электрических счетно-решающих устройств, М., Оборонгиз, 1948.
86. Степанов А. Р., Некоторые результаты статистического исследования волнения и качки на экспедиционном судне «Михаил Ломоносов», Труды НТО Судпрома, 1961, № 39, с. 75—97.
87. Степанов Ю. Г., Цветков И. Ф., Следящий электропривод судовых радиолокаторов, Л., «Судостроение», 1973.
88. Стороженко В. А., Темченко М. Е., О применении теории конечных вращений к задаче автономного определения координат места движущегося объекта, Известия АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 3, с. 3—10.
89. Судовые радиолокационные станции и их применение (справочное руководство), Под редакцией В. И. Ракова, т. 3, Л., «Судостроение», 1970.
90. Теория следящих систем, Под редакцией Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса, М., ИЛ, 1951.
91. Техническая кибернетика, кн. 2, Под редакцией В. В. Солодовникова, М., «Машиностроение», 1967.