

4 Лекция №4. Фазовые траектории нелинейных систем

4.1 Нелинейные системы 1-го порядка

Если нелинейная система состоит из линейной части и нелинейного элемента с кусочно-линейной характеристикой, то правая часть уравнения, полученного из соотношений (4.1), представляет набор нескольких линейных функций, соответствующих отдельным линейным участкам этого элемента.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = F(x, y). \quad (4.1)$$

При этом фазовая характеристика разбивается на ряд участков, в пределах которых уравнение (4.1) является линейным и легко интегрируемым. Такой метод интегрирования по участкам называется *методом припасовывания* (сшивания). Точкам излома кусочно-линейной характеристики на фазовой плоскости соответствуют линии переключения. При пересечении последних фазовые траектории подвергаются излому.

В качестве примера на рисунке 4.1 приведена структурная схема нелинейной следящей системы, состоящая из линейной части и НЭ с кусочно-линейной характеристикой. Входной сигнал равен $x(t) = 1(t)$.

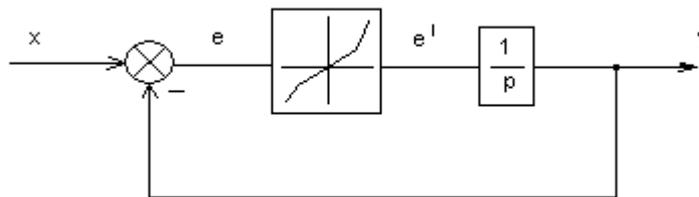


Рисунок 4.1 – Структурная схема нелинейной системы

Нелинейная характеристика звена приведена на рисунке 4.2. Характеристика состоит из 2-х участков, в которых нелинейную систему можно считать линейной аналогично системе, рассмотренной в примере 1.

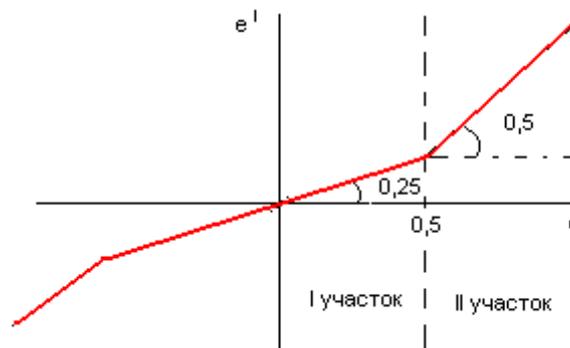


Рисунок 4.2 – Нелинейная характеристика звена

I участок: при $|e| < 0,5$; $K=0,25$; $x=1$.

$e' + yK = Kx$; но $y = e$, тогда $e' + 0,25e = 0,25$.

$$\begin{cases} e' = 0; & e = 1, \\ e = 0; & e' = 0,25. \end{cases}$$

II участок: при $|e| > 0,5$; $K=0,5$; $x=1$.

$e' + 0,5e = 0,5$.

$$\begin{cases} e' = 0; & e = 1, \\ e = 0; & e' = 0,5. \end{cases}$$

Для построения фазовой траектории нелинейной системы на каждом участке строятся отдельные прямые по полученным точкам, а затем на границе участков при $e=0,5$ происходит «сшивание», т.е. параллельный перенос второй прямой для продолжения первой (рисунок 4.2).

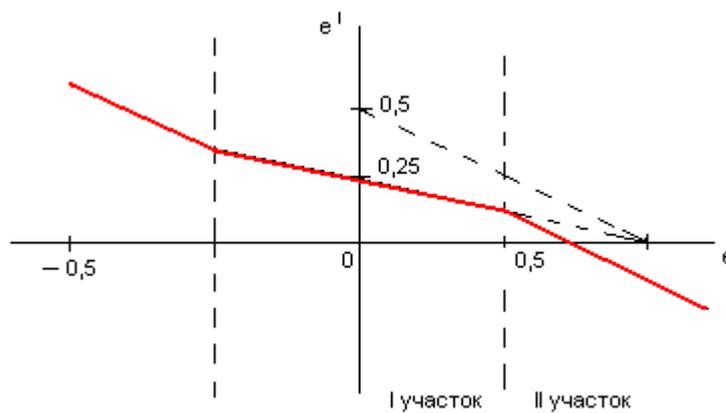


Рисунок 4.3 – Фазовый портрет следящей нелинейной системы

4.2 Нелинейные системы 2-го порядка

Для построения фазовых траекторий методом фазовой плоскости нелинейных систем высокого порядка, например, 3-го, необходимо свести систему ко 2-му порядку, приравнявая малые постоянные времени T к нулю.

В качестве примера рассмотрим нелинейную автоматическую систему слежения и определения дальности цели (АСД), представленную на рисунке 4.4.

Входным сигналом является функция скорости цели $x(t) = \omega_c = at$.

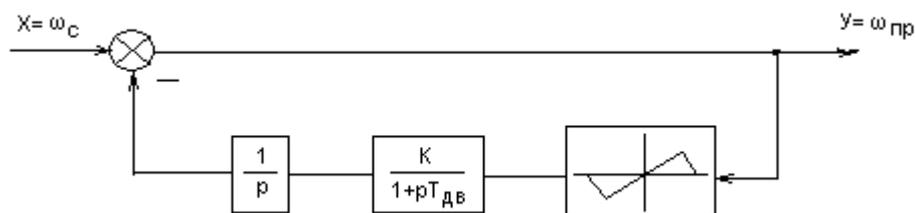


Рисунок 4.4 – Структурная схема АСД

Определим ПФ замкнутой системы:

$$W_3(p) = \frac{\omega_{np}(p)}{\omega_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{KW_H(p)}{p(1 + pT_{\delta\epsilon})}} = \frac{p(1 + pT_{\delta\epsilon})}{T_{\delta\epsilon}p^2 + p + KW_H(p)}. \quad (4.2)$$

После перекрестного умножения получим:

$$(T_{\delta\epsilon}p^2 + p + KW_H) \omega_{np}(p) = p(1 + T_{\delta\epsilon}p) \omega_c(p). \quad (4.3)$$

Определим значение правой части этого уравнения с учетом входного сигнала:

$$p\omega_c(p) + T_{\delta\epsilon}p^2\omega_c(p) = a, \quad \text{т.к. } p\omega_c(p) = \frac{dat}{dt} = a; \quad p^2\omega_c(p) = 0.$$

Тогда уравнение (4.3) во временной области примет вид:

$$T_{\delta\epsilon} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} + KW_H(x_1) = a \quad \text{или} \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{1}{T_{\delta\epsilon}} \frac{dx_1}{dt} + \frac{1}{T_{\delta\epsilon}} KW_H(x_1) = \frac{a}{T_{\delta\epsilon}}, \quad (4.4)$$

где x_1 – входной сигнал НЭ, равный выходному сигналу системы $x_1 = \omega_{np}$.

Представим левую часть уравнения (4.4) 1-й степенью путем замены $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ - выходной сигнал НЭ:

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_2}{T_{\delta\epsilon}} - \frac{KW_H(x_1)}{T_{\delta\epsilon}} + \frac{a}{T_{\delta\epsilon}}. \quad (4.5)$$

В установившемся режиме величина выходного сигнала (входного НЭ) $\omega_{np} = x_1 = \text{const}$. Следовательно, $x_2 = 0$ и его производная тоже:

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\text{const}}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Тогда уравнение (4.5) примет вид:

$$-\frac{KW_H(x_1)}{T_{\delta\epsilon}} + \frac{a}{T_{\delta\epsilon}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{K}{T_{\delta\epsilon}} \left(W_H(x_1) - \frac{a}{K} \right) = 0, \quad W_H(x_1) = \frac{a}{K}. \quad (4.6)$$

Крутизна нелинейной характеристики равна:

$$S_q = \frac{dW_H(x)}{dx}.$$

Тогда ПФ нелинейного звена равна:

$$W_H(x_1) = S_q \cdot x_1. \quad (4.7)$$

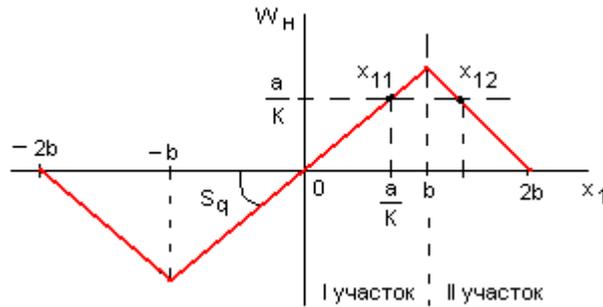


Рисунок 4.5 – Характеристика дискриминатора

После подстановки (4.7) в (4.6), получим:

$$x_1 = \frac{a}{K \cdot S_q} = \frac{a}{K_V}. \quad (4.8)$$

Умножим (15.16) на величину K и с учетом знаменателя (15.17), получим:

$$KW_H(x_1) = K \cdot S_q \cdot x_1 = K_V \cdot x_1. \quad (4.9)$$

Нелинейная характеристика разбивается на 2 линейных участка.

I участок: рассмотрим произвольную точку x_{11} .

Характеристическое уравнение, являющееся левой частью уравнения (4.4), с учетом (4.8) примет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{1}{T_{\partial \sigma}} \frac{dx_1}{dt} + \frac{K_V}{T_{\partial \sigma}} (x_1 - x_{11}) = 0. \quad (4.10)$$

Примем, что $K_V T_{\text{дв}} = 0,25$.

Определим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K_V T_{\partial \sigma}}}{2T_{\partial \sigma}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 1}}{2T_{\partial \sigma}} = -\frac{1}{2T_{\partial \sigma}}.$$

На I участке фазовый портрет будет иметь особую точку «устойчивый узел», т.к. корни вещественные и отрицательные (рисунок 4.5).

II участок: рассмотрим произвольную точку x_{12} .

На этом участке крутизна по величине неизменна, но с обратным знаком:

$$S_{q2} = -S_{q1}; \quad K_V T_{\text{огс}} = -0,25.$$

Тогда характеристическое уравнение (4.10) примет вид:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{1}{T_{\text{огс}}} \frac{dx_1}{dt} + \frac{K_V}{T_{\text{огс}}} (x_1 - x_{12}) = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4K_V T_{\text{огс}}}}{2T_{\text{огс}}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1}}{2T_{\text{огс}}} = \frac{-1 \pm 1,4}{2T_{\text{огс}}}; \quad p_3 = -\frac{1,2}{T_{\text{огс}}}; \quad p_4 = \frac{0,2}{T_{\text{огс}}}.$$

На II участке фазовый портрет будет иметь особую точку типа «седло», т.к. корни вещественные, но с разными знаками (рисунок 4.6).

Определив фазовые портреты на обоих участках, строятся фазовые траектории всей системы в окрестностях точек x_{11} и x_{12} (рисунок 4.6).

Из полученного портрета системы отчетливо видны зоны захвата и потери цели. Отслеживание объекта или частота входного сигнала не жестко связано со значением производной и самим отклонением.

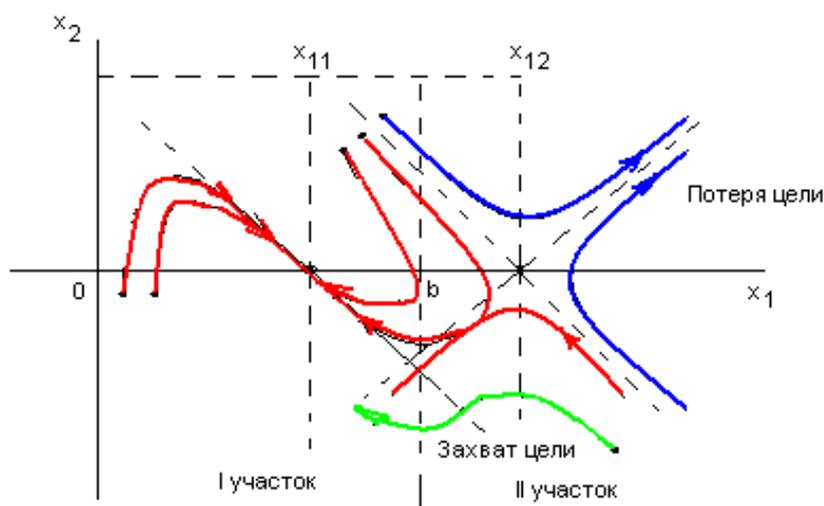


Рисунок 4.6 – Фазовый портрет нелинейной системы АСД