10 Лекция №10. Основы фази-управления

10.1 Базовые понятия фази-логики

Fuzzy-logic переводится как нечеткая логика. К базовым или первичным понятиям относятся «нечеткое множество» и «лингвистическая переменная». Нечетким множеством М называется подмножество x множества X, которое характеризуется непрерывной функцией принадлежности (ФП) $\mu_M(x)$, могущей принимать любые значения между 0 и 1, что можно истолковать как «значение x может быть в данном множестве с вероятностью $\mu_M(x)$». Множество М может быть записано как совокупность пар значений x и $\mu_M(x)$, т.е. в виде:

$$M = \{(x, \mu_M(x)); x \in X\}. \quad (10.1)$$

Лингвистической переменной называют такую переменную, которая задана на количественной шкале базисной переменной x и принимает значения в виде слов и словосочетаний. Отдельное лингвистическое значение (терм) задается с помощью одной функции принадлежности, т. е. каждому терму соответствует нечеткое множество.

В теории фази-управления для лингвистического описания выходной переменной ОУ x и сигнала ошибки ε наиболее часто применяют следующий универсальный набор из семи термов с треугольными и трапециевидными функциями принадлежности (рисунок 10.1), образованных с помощью слов «отрицательный» (negative), «положительный» (positive), «большой» (big), «средний» (middle), «маленький» (small) и «приблизительно ноль» (zero): negative big (NB), negative middle (NM), positive small (PS), negative small (NS), zero (ZE), positive middle (PM), positive big (PB).

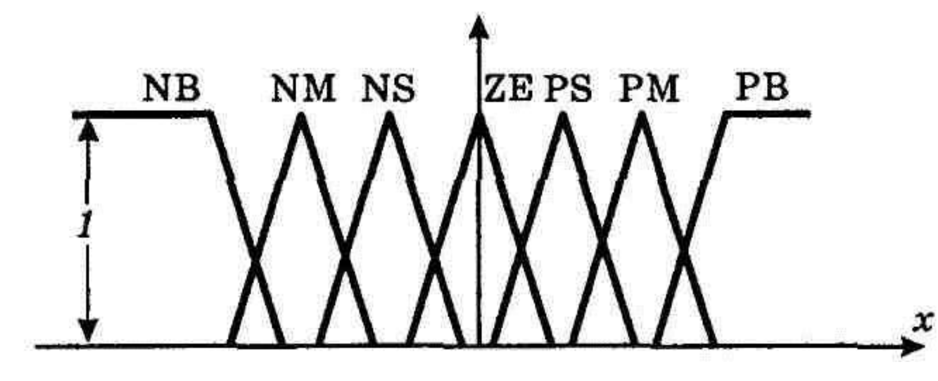

Рисунок 10.1 - Набор термов с функциями принадлежности

Процедура определения значения функции принадлежности $\mu_M(x_i)$, соответствующего конкретному значению x_i переменной x, называется фазификацией.

10.2 Операции с нечеткими множествами

Известные в алгебре логики логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ», производимые с логическими переменными, могут быть применены и для нечетких множеств. При этом вместо функций истинности логических переменных, которые могут иметь значения 0 и 1, используются функции принадлежности нечетных множеств:

– операция конъюнкции («И») производится с помощью оператора минимизации:

$$\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \tag{10.2}$$

и соответствующее ей нечетное множество С называется фази-пересечением двух нечетких множеств А и В.

$$C = A \cap B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \tag{10.3}$$

На рисунке 10.2 построена функция принадлежности фази-пересечения множеств ZE и N;

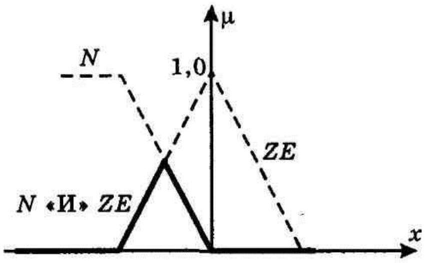

Рисунок 10.2 - Функция принадлежности фази-пересечения множеств

– операция дизъюнкции («ИЛИ») производится с помощью оператора максимизации:

$$\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \tag{10.4}$$

и соответствующее ей нечетное множество С называется фази-объединением нечетких множеств А и В:

$$C = A \cup B = \{[x, \mu_C(x)]; x \in X\}. \tag{10.5}$$

На рисунке 10.3 построена функция принадлежности фази-объединения множеств ZE и Р.

Применительно к задаче управления будем дальше считать, что х - ошибка регулирования, у - управляющее воздействие.

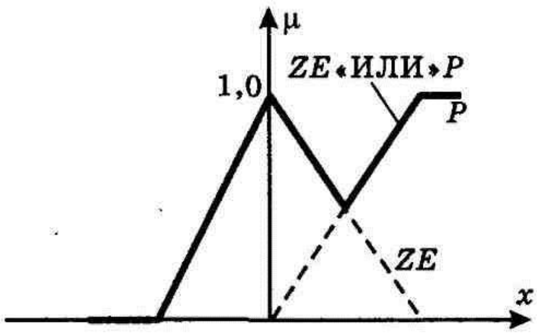

Рисунок 10.3 - Функция принадлежности фази-объединения множеств

Главной операцией фази-логики является процедура нечеткого вывода, основанная на операции импликации (связывание). Эта операция заключается в соединении двух нечетких множеств A и B в правило «ЕСЛИ A ТО B» или A → B, где A - посылка, а B - заключение, причем множества A и B определены на разных базисных множествах x Є X и y Є Y соответственно.

Множество, соответствующее правилу «ЕСЛИ - ТО», образуется из числовых пар (x, y), которые относятся к новому базисному множеству, называемому декартовым произведением P множеств A и B:

$$P = A \times B = \{(x, y);\, x \in A,\, y \in B\}. \quad (10.6)$$

Взаимосвязь между множествами A и B описывается с помощью так называемого отношения R. Оно представляет собой подмножество декартова произведения и образуется по определенному правилу (предписанию) Rxu из элементов A и B:

$$R = \{[(x, y),\, \mu_R(x, y)];\, (x, y) \in A \times B\}, \quad (10.7)$$

где $\mu_R(x,y)$ - функция принадлежности пар (x,y) из декартова произведения AxB к подмножеству, образованному по правилу R_{xy}.

Эту функцию принадлежности можно определить как функцию принадлежности фази-пересечения двух нечетких множеств A и B, т.е. с помощью процедуры минимизации (рисунок 10.4):

$$\mu_R(x, y) = \min_{A \times B}\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}. \quad (10.8)$$

Отсюда можно определить функцию принадлежности $\mu_{Bi}(y)$ при фиксированном значении $x = x_i$:

$$\mu_{Bi}(y) = \mu_R(x_i, y) = \min_{y \in B}\{\mu_A(x_i), \mu_B(y)\}. \quad (10.9)$$

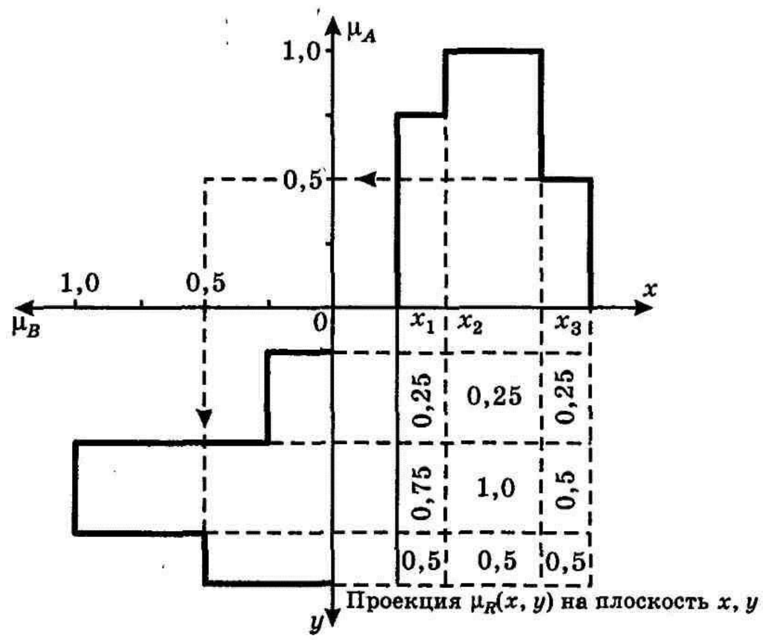

Рисунок 10.4 - Функция принадлежности фази-пересечения двух нечетких множеств

Эта формула выражает правило замены {modus ponens), соответствующее основному правилу логического вывода: вероятность заключения В не может превышать вероятность посылки А. Ее применение дает усеченную функцию принадлежности в виде трапеции 1 (рисунок 10.5).

Другой метод нахождения функции принадлежности правила «ЕСЛИ-ТО» основан на формуле произведения:

$$\mu_{Bi}(y) = \mu_A(x_i) \cdot \mu_B(y), \tag{10.10}$$

которая приводит к треугольной функции принадлежности 2 (рисунок 10.5).

Нечетное множество А может представлять собой не одно множество, а пересечение («И») или объединение («ИЛИ») нескольких множеств.

Затем производится операция агрегирования (композиции) нескольких правил «ЕСЛИ-ТО», связанных союзом «ИЛИ».

Агрегирование осуществляется путем максимизации функций принадлежности всех объединяемых правил, т. е. результирующая функция принадлежности нечеткого множества B_{ip} величины y при $x = x_i$:

$$\mu_{Bip}(y) = \max_j \{\mu_{Bij}(y)\} = \max_j \{\min[\mu_{Aj}(x_i), \mu_{Bj}(y)]\}, \tag{10.11}$$

где j - номер правила, j = 1, .., n;

$\mu_{Aj}(x_i)$ - значение ФП посылки А j-го правила при $x = x_i$;

$\mu_{Bj}(y)$ - ФП заключения В j-го правила;

$\mu_{Bij}(y)$ - усеченная ФП заключения В j-го правила, ограниченная сверху на уровне $\mu_{Aj}(x_i)$.

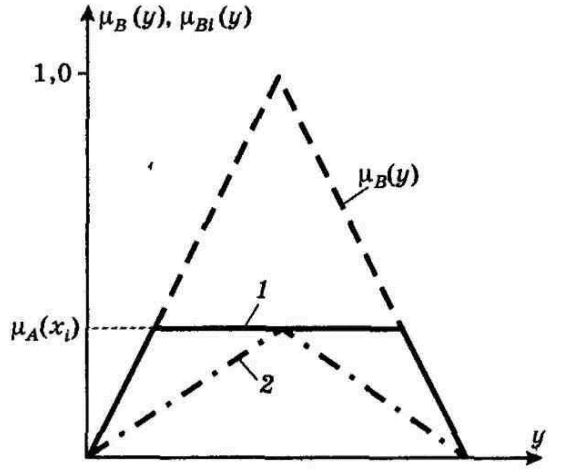

Рисунок 10.5 - Усеченные функции принадлежности

Объединенная процедура импликации и агрегирования нескольких таких правил, связанных союзом «ИЛИ», называется инференцией и составляет основу метода Мамдани. Для того чтобы по полученной таким образом результирующей функции принадлежности, найти конкретные значения y, применяют процедуру дефазификации. При дефазификации используется метод центра тяжести, согласно которому результирующее значение управляющего воздействия находят как абсциссу «центра тяжести» площади, расположенной под графиком функции принадлежности $\mu_{Bip}(y)$ по формуле средневзвешенного значения:

$$y_{Pi} = \frac{\int y \cdot \mu_{Bip}(y)dy}{\int \dot{\mu}_{Bip}(y)dy}. \tag{10.12}$$

По алгоритму Сугено значение управления определяется как средневзвешенная величина при управлении объектом с вектором состояния $x^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$:

$$y_{Pi} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\mu_{Aij}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{Aij}}, \tag{10.13}$$

где заключение (управляющее воздействие) для j-го правила при алгоритме первого порядка определяется формулой:

$$y_{ij} = C_{0j} + C_{1j}x_{1i} + \ldots + C_{mj}x_{mi}, \tag{10.14}$$

т.е. вычисляется как линейная функция i-й комбинации значений входных величин $x_l, x_2 ..., x_m$.

C_{0j}, C_1j, ..., C_{mj} - постоянные коэффициенты, устанавливаемые экспертами.

μ_{Aij} - значение функции принадлежности посылки j-го правила, соответствующее значениям x_{ki}, k = 1, ..., m; i = 1, 2, 3...

Объединение составных частей посылок осуществляется так же, как и в методе Мамдани, т.е. с помощью процедур минимизации и максимизации соответствующих функций принадлежности.

По алгоритму Сугено нулевого порядка:

$$y_j = C_{0j} + C_{1j} + \ldots + C_{mj} = const, \tag{10.15}$$

где C_{0j}, ..., C_{mj} - четкие значения управляющего воздействия для всех входов, заданные при формулировке исходных лингвистических данных.

10.3 Применение фази-логики для нечеткого алгоритма автоматического регулирования

Пусть для примера входными переменными являются ошибка регулирования x_1 и ее первая производная по времени x_2. Их базисные множества разделены на 3 нечетких множества N, ZE, P, характеризуемых тремя функциями принадлежности, а алгоритм нечеткого управления содержит 2 правила:

Правило 1. Если x1= ZE И x2 = ZE, ТО y =ZE.

Правило 2. Если x1= N ИЛИ x2 = P, ТО y =P.

Первое правило означает, что если ошибка и ее производная близки к 0, то к 0 близко и управляющее воздействие.

Второе правило означает, что если ошибка отрицательна (управляемая величина меньше), а ее скорость положительна, то и управляющее воздействие положительно, что должно быть направлено на быстрое устранение ошибки.

При фазификации (рисунок 10.6) определяются значения функций принадлежности для нечетких множеств входных воздействий ZE, N, P. В частности, при x_1=-0,15 и x_2=0,35 получим $\mu_{ZE}(x_1) = 0.7$, $\mu_{ZE}(x_2) = 0.3$, $\mu_N(x_1) = 0.3$, $\mu_p(x_2) = 0.7$.

При импликации вначале определяются значения ФП $\mu_{Ai}(x_1,x_2)$ посылок вышеуказанных правил типа «Если A, ТО B», причем при реализации логической операции И в посылке A производится минимизация, а при реализации ИЛИ - максимизация:

$$\mu_{A1}(x_1, x_2) = \min\{\mu_{ZE}(x_1), \mu_{ZE}(x_2)\} = 0.3;$$
$$\mu_{A2}(x_1, x_2) = \max\{\mu_N(x_1), \mu_p(x_2)\} = 0.7.$$

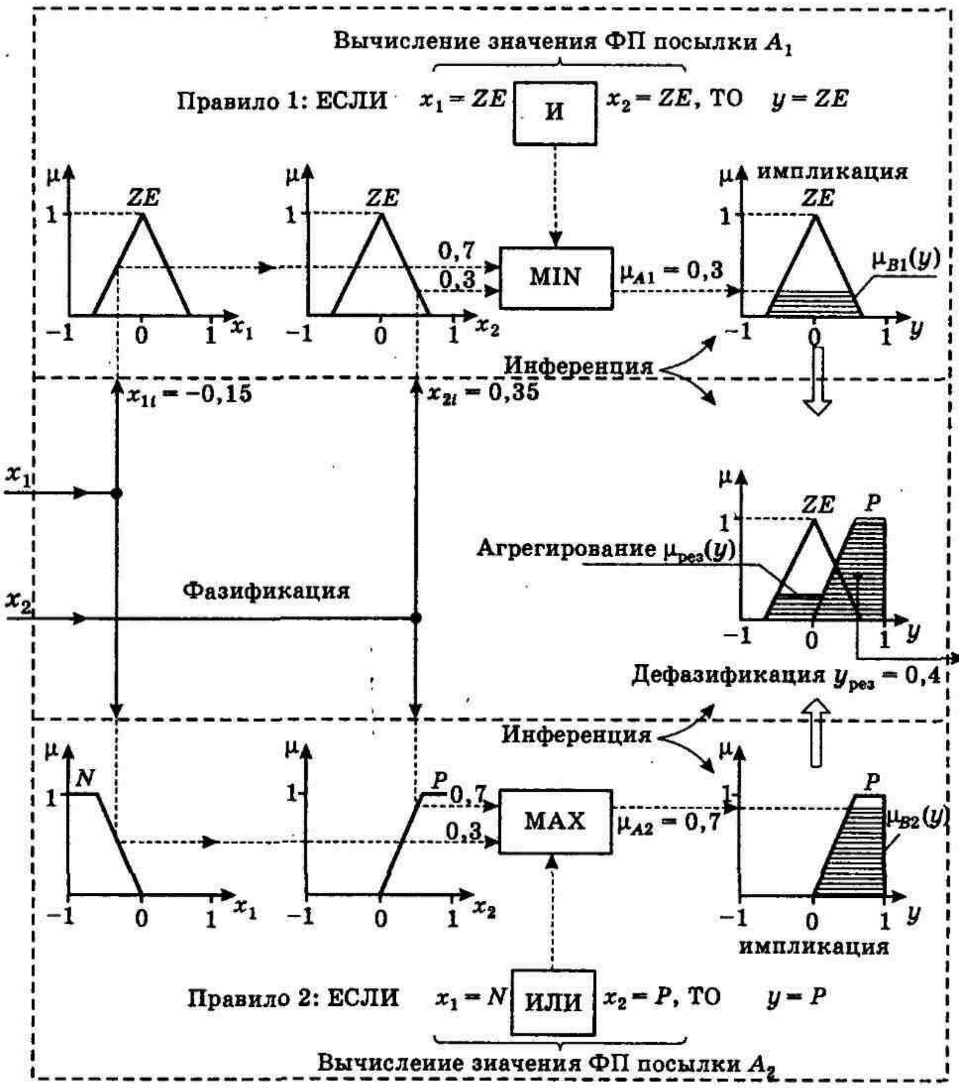

Рисунок 10.6 - Вид нечеткого алгоритма управления

Затем при импликации находят трапецеидальные функции принадлежности $\mu_{B1}(y)$ и $\mu_{B2}(y)$ нечетких множеств управляющего воздействия y как результат «усечения» заданных функций принадлежности множеств $\mu_{ZE}(y)$ и $\mu_P(y)$ соответственно:

$$\mu_{B1}(y) = \min(\mu_{ZE}(y), \mu_{A1}(x_1, x_2));$$
$$\max \mu_{B1}(y) = \mu_{A1}(x_1, x_2) = 0.3;$$
$$\mu_{B2}(y) = \min(\mu_p(y), \mu_{A2}(x_1, x_2));$$
$$\max \mu_{B2}(y) = \mu_{A2}(x_1, x_2) = 0.7.$$

При агрегировании производится объединение найденных усеченных функций принадлежности управляющего воздействия для двух правил путем их максимизации. При этом находится результирующая функция принадлежности управляющего воздействия:

$$\mu_{рез}(y) = \max\{\mu_{B1}(y), \mu_{B2}(y)\}.$$