

Далее расчет ведется в зависимости от применяемого метода.

Исследование нелинейных систем имеет следующие цели, связанные с анализом и синтезом систем: анализ устойчивости, определение возможности автоколебаний, их частоты и амплитуды, определение показателей качества, синтез устройств управления.

В зависимости от конкретной цели возможно применение различных методов анализа:

1) Метод гармонической линеаризации и гармонического баланса. Нелинейный элемент (НЭ) заменяется линейным, у которого выходной сигнал U равен 1-й гармонике НЭ. Метод позволяет определить возможность автоколебаний, их частоту, амплитуду и устойчивость.

2) Метод фазовой плоскости. На плоскости строятся фазовые траектории для каждого линейного участка нелинейности, затем их соединяют. Метод позволяет определить устойчивость, наличие автоколебательных режимов, их частоту и амплитуду для систем, с достаточной точностью описываемых уравнениями 2-го порядка.

3) Метод статической линеаризации. Нелинейное звено заменяется линейным, чтобы математическое ожидание и дисперсия были одинаковы: для НЛ и для линейного звена.

4) Прямой метод А.М. Ляпунова позволяет оценить устойчивость нелинейной системы в целом.

5) Метод В.М. Попова дает достаточные условия абсолютной устойчивости.

Рассмотрим только 1, 2, 4 и 5 методы анализа нелинейных систем.

2 Лекция №2. Метод гармонической линеаризации

Для определения зависимости между входными и выходными сигналами НЭ воспользуемся:

$$x(p) = W_{лч} \cdot y(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot y(p). \quad (2.1)$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда выходной сигнал НЭ зависит от входного в виде функции $F(x, dx/dt)$ двух параметров: текущего значения входного сигнала $x(t)$ и его производной dx/dt .

Если на вход НЭ подать синусоидальный сигнал с амплитудой a :

$$x = a \sin \omega t, \text{ то } \frac{dx}{dt} = \dot{x} = a \omega \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Если приближенно взять в расчет только один параметр X функции F и разложить ее в ряд, то получим:

$$y(t) = F(x) = F(a \sin \omega t) = C_0 + D_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + \dots \text{высшие гармоники, (2.3)}$$

где $C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \omega t) d\omega t = 0$ - постоянная и равна в виду периодичности подинтегральной функции \sin .

Из формулы (2.2) можно выразить значения \sin и \cos как:

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}; \quad \cos \omega t = \frac{px}{a\omega}. \quad (2.4)$$

Тогда (2.3) можно записать как:

$$y = q(a)x + \frac{\dot{q}(a)px}{\omega}, \quad (2.5)$$

$$\text{где } q = \frac{D_1}{a} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi; \quad \dot{q} = \frac{C_1}{a} = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Для большинства нелинейных характеристик $\dot{q} = 0$, тогда (2.5) имеет вид:

$$y = q(a) \cdot x, \quad (2.6)$$

где $q(a)$ – коэффициент гармонической линеаризации.

Нелинейный элемент заменяется линейным с выходным сигналом $F(a \sin \varphi)$, равным амплитуде первой гармоники D_1 .

Для примера найдем коэффициент гармонической линеаризации $q(a)$ для нелинейного звена, имеющего релейную характеристику.

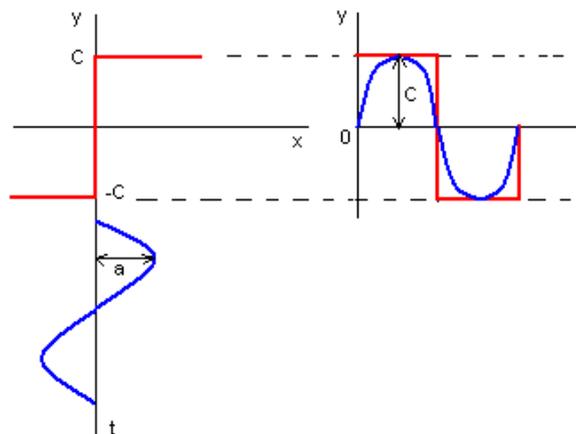


Рисунок 2.1 – Релейная характеристика звена

На рисунке 2.1 видно, что максимальное значение выходного сигнала $U_{\max} = C$, т.е. величине полочки C релейного элемента (справочные данные элемента). От величины входного сигнала (с амплитудой a) величина выходного сигнала не зависит и всегда постоянна, равная C .

В соответствии с выражением (2.5):

$$q = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{a\pi} \int_0^{\pi} C \sin \varphi d\varphi = \frac{2C}{a\pi} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} = \frac{4C}{a\pi}. \quad (2.7)$$

Зависимость коэффициента q от амплитуды входного сигнала a носит нелинейный характер (рисунок 2.2).

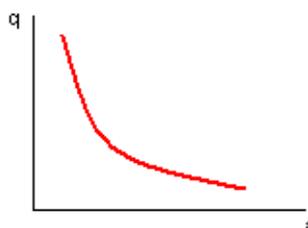


Рисунок 2.2 – Вид зависимости $q(a)$ от a

2.1 Исследование нелинейной системы частотной автоподстройки

Структурная схема частотной автоподстройки представлена на рисунке 2.3.

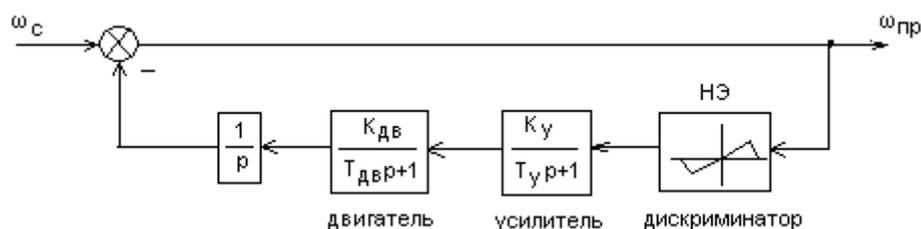


Рисунок 2.3 – Структурная схема нелинейной системы

Характеристика НЭ представлена на рисунке 2.4.

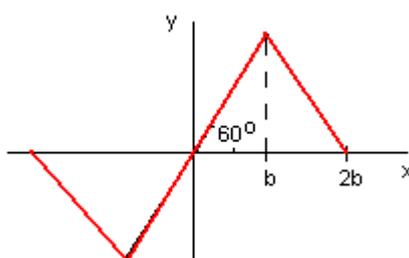


Рисунок 2.4 – Характеристика НЭ

В структурную схему выделим линейную и нелинейную части.

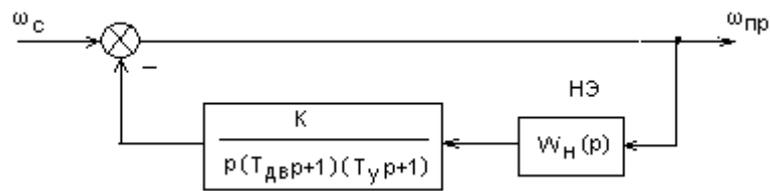


Рисунок 2.5 – Структурная схема преобразованной системы

Из таблицы известно, что $W_H(p)$ или коэффициент гармонической линеаризации q для этого типа нелинейности равен:

$$W_H(p) = q = \alpha \left[\frac{4}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) - 1 \right],$$

где α – коэффициент усиления линейной части характеристики НЭ;
 a – амплитуда входного сигнала.

ПФ линейной части системы равна:

$$W_L(p) = \frac{K}{p(T_y p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)},$$

где $K = K_y \cdot K_{\text{дв}}$ - коэффициент усиления ЛЧ.

Тогда ПФ замкнутой системы будет равна:

$$\Phi(p) = \frac{1}{1 + \frac{K \cdot W_H(p)}{p(T_y p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)}} = \frac{p(T_y p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1)}{p(T_y p + 1)(T_{\text{дв}} p + 1) + K W_H(p)}. \quad (2.8)$$

Характеристическое уравнение примет вид:

$$T_y T_{\text{дв}} p^3 + (T_y + T_{\text{дв}}) p^2 + p + K W_H(p) = 0. \quad (2.9)$$

Подставив вместо $p = j\omega$, получим:

$$-j T_y T_{\text{дв}} \omega^3 - (T_y + T_{\text{дв}}) \omega^2 + j\omega + K W_H(j\omega) = 0. \quad (2.10)$$

Представим (2.10) в виде комплексного числа:

$$X(\omega, a) + jY(\omega, a) = 0;$$

$$X(\omega, a) = -(T_y + T_{\partial\epsilon})\omega^2 + KW_H(p) = 0; \quad (2.11)$$

$$Y(\omega, a) = \omega - T_y T_{\partial\epsilon} \omega^3 = \omega(1 - T_y T_{\partial\epsilon} \omega^2) = 0. \quad (2.12)$$

Определим критическую частоту $\omega_{кр}$, при которой мнимая часть характеристического уравнения $Y(\omega, a)$ будет равна нулю и возможны автоколебания:

$$\omega_{кр}^2 = \frac{1}{T_y T_{\partial\epsilon}}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.11) представим в виде:

$$(T_y + T_{\partial\epsilon})\omega^2 = KW_H(p). \quad (2.14)$$

Подставив в (2.14) значение критической частоты (2.13), при которой возможны автоколебания, получим:

$$\frac{T_y + T_{\partial\epsilon}}{T_y T_{\partial\epsilon}} = KW_H(p). \quad (2.15)$$

Подставив в (2.15) ПФ нелинейной части $W_H(p)$, получим:

$$\frac{T_y + T_{\partial\epsilon}}{T_y T_{\partial\epsilon}} = K\alpha \left[\frac{4}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) - 1 \right]. \quad (2.16)$$

Чтобы исключить автоколебания и обеспечить устойчивость системы, в выражении (2.16) легче всего изменить величину K . Поэтому для расчета K - коэффициента усиления разомкнутой линейной части системы, необходимо найти зависимость величины K от амплитуды входного сигнала.

Для этого рассмотрим три случая:

1) Амплитуда входного сигнала НЭ равна его максимальному выходу U_{max} , т.е. $a = b$. Тогда (2.16) примет вид:

$$K = \frac{T_y + T_{\partial\epsilon}}{\alpha \cdot T_y \cdot T_{\partial\epsilon}}. \quad (2.17)$$

2) $a = 1,225b$.

$$\frac{T_y + T_{\partial\epsilon}}{T_y T_{\partial\epsilon}} = 1,098K\alpha \quad \text{или} \quad K = \frac{0,85(T_y + T_{\partial\epsilon})}{\alpha \cdot T_y \cdot T_{\partial\epsilon}}. \quad (2.18)$$

3) $a = 2b$.

$$K = \frac{4,58(T_y + T_{\partial e})}{\alpha \cdot T_y T_{\partial e}}. \quad (2.19)$$

Выражения (2.17, 2.18, 2.19) можно отразить графически.

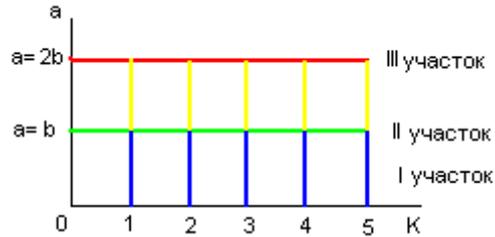


Рисунок 2.6 – Области изменения амплитуды входного сигнала a от K

Для автоколебаний необходимо, чтобы частные производные от характеристического уравнения (2.10) удовлетворяли условию:

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial a} \cdot \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0. \quad (2.20)$$

Если неравенство (2.20) будет равно нулю, то в системе все равно возникнут автоколебания, т.е. она станет неустойчивой.

Найдем частную производную для мнимой части $Y(\omega, a)$ характеристического уравнения (2.12) по амплитуде входного сигнала:

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{\partial(\omega - T_y T_{\partial e} \omega^3)}{\partial a} = 0.$$

Тогда условие (2.20) примет вид:

$$\frac{\partial X}{\partial a} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \omega} > 0. \quad (2.21)$$

Определим частную производную мнимой части $Y(\omega, a)$ по частоте:

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = \frac{\partial(\omega - T_y T_{\partial e} \omega^3)}{\partial \omega} = 1 - 3\omega^2 T_y T_{\partial e}.$$

Если в это выражение подставить значение критической частоты (2.13), то производная $Y(\omega, a)$ по частоте будет меньше нуля:

$$\frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1 - 3\omega^2 T_y T_{\partial e} = 1 - \frac{3 \cdot T_y T_{\partial e}}{T_y T_{\partial e}} = -2 < 0.$$

Следовательно, для выполнения условия (2.21) необходимо, чтобы частная производная действительной части $X(\omega, a)$ тоже была меньше нуля:

$$\frac{\partial X}{\partial a} < 0.$$

В выражении (2.11) только ПФ $W_H(p) = q$ зависит от величины входного сигнала

$$X(\omega, a) = -(T_y + T_{\partial e})\omega^2 + KW_H(p).$$

Для 3-х участков по выражениям (2.17-2.19) при известных значениях α график $\alpha = f(a)$ показан на рисунке 2.8.

Только на III участке возможны автоколебания, т.к. производная от ПФ этого участка меньше нуля или имеет отрицательный коэффициент усиления α .

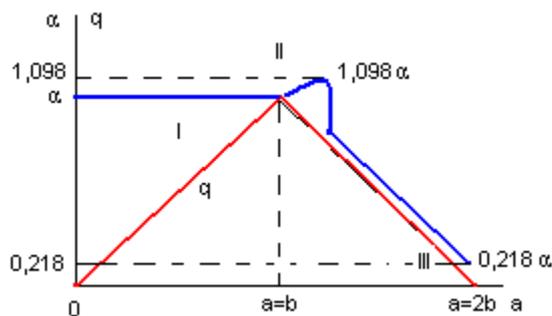


Рисунок 2.8 – Зависимость $\alpha = f(a)$

Таким образом, для исключения режима автоколебаний в системе величина амплитуды входного сигнала НЭ должна быть ограничена и не превышать значения точки b на оси абсцисс нелинейной характеристики.

3 Лекция №3. Метод фазовой плоскости

3.1 Основные понятия

Состояние любой динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением n -го порядка, может быть определено в любой момент времени значениями n переменных, например, регулируемой координаты x и $(n - 1)$ ее производных в n -мерном пространстве, называемом *фазовым пространством* системы. Это состояние характеризуется координатами изображающей точки, откладываемыми по осям фазового пространства. В установившемся режиме системы изображающая точка занимает фиксированное положение и называется *особой точкой*. В переходном