

## Введение

Конспект лекций составлен в целях закрепления лекционного материала и применения теории управления в задачах инженерного проектирования нелинейных систем автоматического управления.

В конспекте кратко изложены основы теории анализа нелинейных систем и оптимального управления. Описан математический аппарат исследования различных нелинейных систем автоматического регулирования, рассмотрены типовые нелинейности и их влияние на устойчивость и качественные показатели регулирования контролируемых параметров, методы гармонической линеаризации, фазовой плоскости, прямой метод Ляпунова и частотный критерий Попова для расчета устойчивости замкнутых нелинейных систем, а также рассмотрены методы оптимального управления на основе критериев градиентного спуска и принципа максимума Понтрягина. Кратко изложены перспективные направления современной теории автоматического управления: анализу адаптивных систем, включая подсистемы интеллектуального управления - экспертные, фазы-логики и искусственные нейронные сети.

Конспект может быть использован студентами магистратуры не только для специальности 6М071600 – Приборостроение, но и всех электротехнических специальностей АУЭС для самостоятельного изучения теории автоматического управления нелинейных систем при решении инженерных задач РГР, курсового и дипломного проектирования.

### 1 Лекция №1. Нелинейные автоматические системы

#### 1.1 Особенности нелинейных систем

Нелинейной называется система, среди элементов которой есть хотя бы один с нелинейной зависимостью между его выходным и входным сигналами. В такой системе в большинстве случаев процессы не могут быть исследованы методами линейной теории. Кроме того, при исследовании систем с нелинейными элементами не может быть использован принцип суперпозиции.

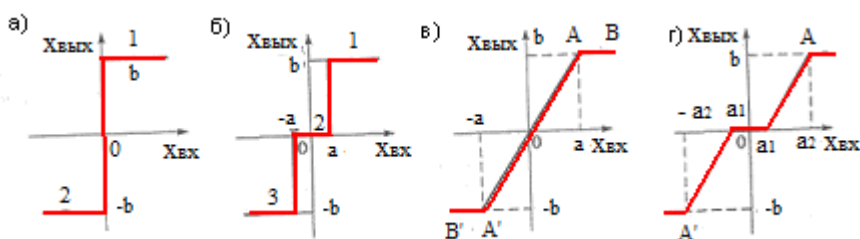
Для нелинейных систем характерна работа в режимах, принципиально неосуществимых в линейной системе:

- смена состояний равновесия в зависимости от начальных условий;
- автоколебания;
- дискретное изменение амплитуды сигналов;
- изменение частоты вынужденных колебаний;
- зависимость частоты автоколебаний от частоты внешнего воздействия;
- подавление слабого сигнала сильным.

Различают нелинейные элементы с гладкой нелинейной и с кусочно-линейной (рисунки 1.1 и 1.2) характеристиками.

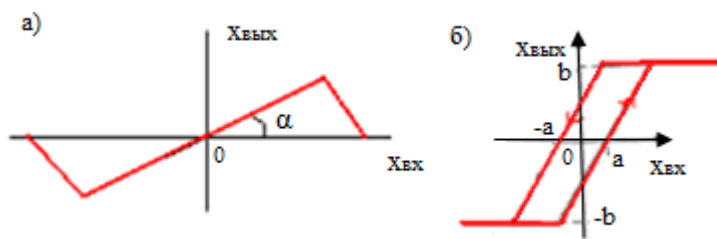
Все нелинейные характеристики могут быть разделены на: однозначные (рисунок 1.1) и неоднозначные (рисунок 1.2). Неоднозначная характеристика получается, если при увеличении входного сигнала выходная координата изменяется по одной зависимости, а при уменьшении входного сигнала — по другой.

Характеристики, показанные на рисунке 1.1, имеют линейные зоны и участки насыщения. Они свойственны устройствам с ограниченным изменением выходной координаты.



а – релейная; б – релейная с зоной нечувствительности; в – кусочно-линейная с насыщением; г – кусочно-линейная с насыщением и зоной нечувствительности.

Рисунок 1.1 – Типы нелинейных характеристик



а – типа дискриминатор; б - гистерезис с насыщением.

Рисунок 1.2 – Типы нелинейных характеристик

## 1.2 Методы исследования нелинейных систем

Динамические процессы нелинейной системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Этот класс систем более широк, чем линейные системы, которые можно рассматривать, как частный случай нелинейных систем. Поэтому и динамические свойства нелинейных систем значительно разнообразнее, чем линейных. В них возможны незатухающие колебания, называемые автоколебаниями, устойчивость

движения и его характер зависят от начальных условий и внешних возмущений.

В нелинейных системах возможна устойчивость в малом, в большом и в целом. Устойчивость в малом означает устойчивость при сколь угодно малых отклонениях от исходного режима. Устойчивость в большом проявляется при конечных отклонениях, возможных по условиям работы. Система устойчива в целом, если она устойчива при неограниченных отклонениях от состояния равновесия.

Таким образом, нелинейные системы обладают рядом особенностей:

– зависимость свойств системы от положения точки равновесия.

На рисунке 1.3 видно, что при положении точки равновесия  $x = x_{01}$  и подаче на вход НЭ синусоидального сигнала, выходной сигнал не изменяет форму; а при смене режима работы системы  $x = x_{02}$  и при том же входном сигнале выходной сигнал НЭ становится постоянным;

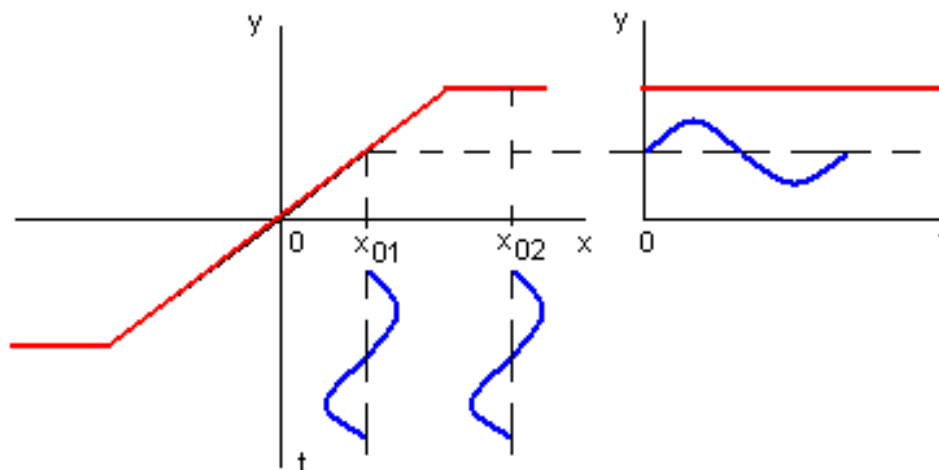


Рисунок 1.3 – Зависимость выходных сигналов НЭ от точки равновесия

– для нелинейных систем не сохраняется принцип суперпозиции;

– в нелинейных системах появляется режим автоколебаний.

При возникновении синусоидальной помехи на входе релейного элемента на выходе появляются прямоугольные импульсы с постоянной амплитудой;

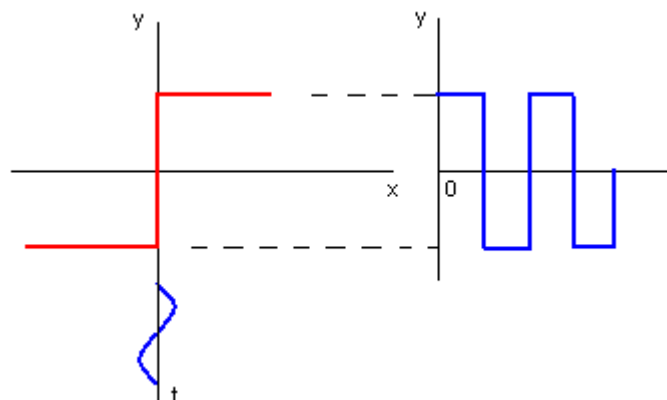


Рисунок 1.4 – Автоколебания на выходе релейного элемента

– нелинейные системы могут быть неустойчивы в малом и неустойчивы в большом.

В большинстве случаев нелинейную систему можно представить в виде соединения двух частей: линейной части (ЛЧ), описываемой линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента (НЭ) (рисунок 1.5).

В качестве примера можно привести ранее рассмотренную структурную схему АСД, но уже как нелинейную. Система работает в 2-х режимах: захвата цели и слежения. Выходной сигнал  $Y$  нелинейной системы зависит от ошибки входного и от вида нелинейности НЭ.

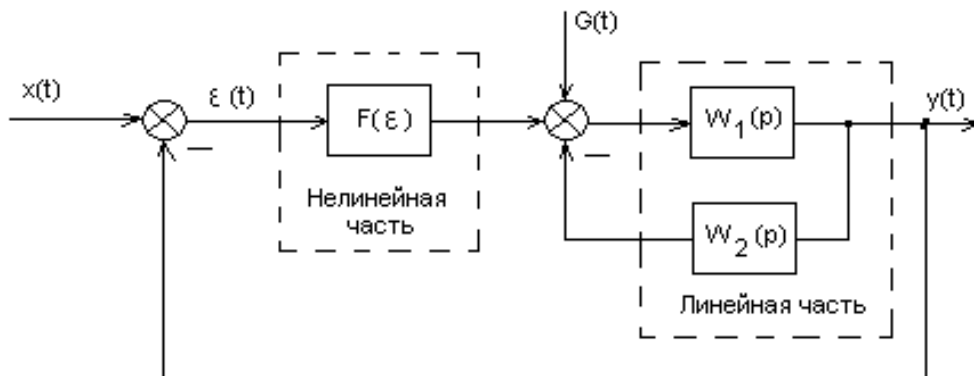


Рисунок 1.5 – Структурная схема АСД

Если принять  $x(t)=0$  и  $G(t)=0$ , т.е. при отсутствии входного сигнала и помехи, структурную схему АСД можно представить в упрощенном виде (рисунок 1.6).



Рисунок 1.6 – Упрощенная структурная схема АСД

Входным сигналом НЭ является выходной  $X(p)$  линейной части системы, который, в свою очередь, определяется через ПФ линейной части по входному сигналу  $Y(p)$ , являющимся выходным НЭ. Выходные и входные сигналы линейной части системы связаны линейными дифференциальными уравнениями в виде ПФ:

$$x(p) = W_{лч} \cdot y(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot y(p). \quad (1.1)$$

Далее расчет ведется в зависимости от применяемого метода.

Исследование нелинейных систем имеет следующие цели, связанные с анализом и синтезом систем: анализ устойчивости, определение возможности автоколебаний, их частоты и амплитуды, определение показателей качества, синтез устройств управления.

В зависимости от конкретной цели возможно применение различных методов анализа:

1) Метод гармонической линеаризации и гармонического баланса. Нелинейный элемент (НЭ) заменяется линейным, у которого выходной сигнал  $Y$  равен 1-й гармонике НЭ. Метод позволяет определить возможность автоколебаний, их частоту, амплитуду и устойчивость.

2) Метод фазовой плоскости. На плоскости строятся фазовые траектории для каждого линейного участка нелинейности, затем их соединяют. Метод позволяет определить устойчивость, наличие автоколебательных режимов, их частоту и амплитуду для систем, с достаточной точностью описываемых уравнениями 2-го порядка.

3) Метод статической линеаризации. Нелинейное звено заменяется линейным, чтобы математическое ожидание и дисперсия были одинаковы: для НЛ и для линейного звена.

4) Прямой метод А.М. Ляпунова позволяет оценить устойчивость нелинейной системы в целом.

5) Метод В.М. Попова дает достаточные условия абсолютной устойчивости.

Рассмотрим только 1, 2, 4 и 5 методы анализа нелинейных систем.

## 2 Лекция №2. Метод гармонической линеаризации

Для определения зависимости между входными и выходными сигналами НЭ воспользуемся:

$$x(p) = W_{лч} \cdot y(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} \cdot y(p). \quad (2.1)$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда выходной сигнал НЭ зависит от входного в виде функции  $F(x, dx/dt)$  двух параметров: текущего значения входного сигнала  $x(t)$  и его производной  $dx/dt$ .

Если на вход НЭ подать синусоидальный сигнал с амплитудой  $a$ :

$$x = a \sin \omega t, \text{ то } \frac{dx}{dt} = px = a \omega \cos \omega t. \quad (2.2)$$

Если приближенно взять в расчет только один параметр  $X$  функции  $F$  и разложить ее в ряд, то получим: