

Следовательно, для выполнения условия (2.21) необходимо, чтобы частная производная действительной части  $X(\omega, a)$  тоже была меньше нуля:

$$\frac{\partial X}{\partial a} < 0.$$

В выражении (2.11) только ПФ  $W_H(p) = q$  зависит от величины входного сигнала

$$X(\omega, a) = -(T_y + T_{\partial e})\omega^2 + KW_H(p).$$

Для 3-х участков по выражениям (2.17-2.19) при известных значениях  $\alpha$  график  $\alpha = f(a)$  показан на рисунке 2.8.

Только на III участке возможны автоколебания, т.к. производная от ПФ этого участка меньше нуля или имеет отрицательный коэффициент усиления  $\alpha$ .

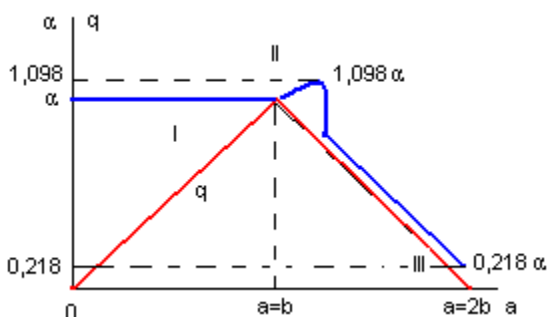


Рисунок 2.8 – Зависимость  $\alpha = f(a)$

Таким образом, для исключения режима автоколебаний в системе величина амплитуды входного сигнала НЭ должна быть ограничена и не превышать значения точки  $b$  на оси абсцисс нелинейной характеристики.

### 3 Лекция №3. Метод фазовой плоскости

#### 3.1 Основные понятия

Состояние любой динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, может быть определено в любой момент времени значениями  $n$  переменных, например, регулируемой координаты  $x$  и  $(n - 1)$  ее производных в  $n$ -мерном пространстве, называемом *фазовым пространством* системы. Это состояние характеризуется координатами изображающей точки, откладываемыми по осям фазового пространства. В установившемся режиме системы изображающая точка занимает фиксированное положение и называется *особой точкой*. В переходном

режиме координата  $x$  и  $(n - 1)$  ее производных будут изменяться, обуславливая движение изображающей точки по фазовой траектории.

Характер этого движения и положение фазовых траекторий в фазовом пространстве определяются динамическими свойствами системы и начальными условиями. Полная совокупность фазовых траекторий, соответствующая всем возможным начальным условиям, называется *фазовым портретом* системы. Двухмерное фазовое пространство представляет фазовую плоскость.

Метод фазовой плоскости позволяет исследовать динамические свойства систем, описываемых нелинейными уравнениями первого и второго порядков.

$$\dot{x} = P(x, y); \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (3.1)$$

При изображении фазового портрета на плоскости уравнение второго порядка заменяется системой двух уравнений:

$$\dot{y} = F(x, y), \quad \dot{x} = y. \quad (3.2)$$

Исключив из уравнения (3.2) время, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x, y)}{y}.$$

Решение этого нелинейного дифференциального уравнения дает зависимость:

$$y = f(x),$$

которая определяет фазовую траекторию.

### 3.2 Фазовые портреты линейных систем 2 порядка

Рассмотрим фазовые траектории, определяемые уравнением второго порядка, сначала для линейной системы. Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_2 x_1 = 0. \quad (3.3)$$

Согласно уравнениям (3.2), оно может быть представлено в виде:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_2 - a_2 x_1. \quad (3.4)$$

Исключив из уравнений (3.4) время  $t$  делением одного на другое, получим:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}. \quad (3.5)$$

Используя подстановку:

$$\frac{x_2}{x_1} = u; \quad x_2 = ux_1; \quad \frac{dx_2}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1},$$

примет вид:

$$u \frac{du}{u^2 + a_1 u + a_2} = -\frac{dx_1}{x_1}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$\int u du / (u^2 + a_1 u + a_2) = -\ln x_1 + C. \quad (3.6)$$

Результат интегрирования левой части уравнения (3.6) зависит от корней характеристического уравнения:

$$u^2 + a_1 u + a_2 = 0, \quad (3.7)$$

которые определяются из выражения

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

1) При отсутствии демпфирования ( $a_1=0$ ,  $a_2>0$ ) получим чисто мнимые корни:

$$s_{1,2} = \pm j\omega, \quad \omega = \sqrt{a_2}.$$

Решение уравнения (3.3), имеющее вид  $x_1 = A \cos \omega t$ , показывает, что в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания.

Уравнение (3.6) в случае мнимых корней принимает вид:

$$\ln(u^2 + \omega^2) = 2(-\ln x_1 + C).$$

Обозначив  $C = \ln \omega C_1$  и учитывая, что  $u = x_2/x_1$ , получим уравнение семейства фазовых траекторий, имеющих вид эллипсов:

$$x_2^2 / \omega^2 C_1^2 + x_1^2 / C_1^2 = 1$$

с полуосями  $\omega C_1$  и  $C_1$  (рисунок 3.1) или с учетом известной частоты:

$$\frac{x_2^2}{a_2 C_1^2} + \frac{x_1^2}{C_1^2} = 1.$$

Изображающая точка, движущаяся по часовой стрелке, при незатухающих синусоидальных колебаниях описывает замкнутый контур. Центр эллипса представляет особую точку, в которую стягиваются эллипсы при изменении  $C_1$ .

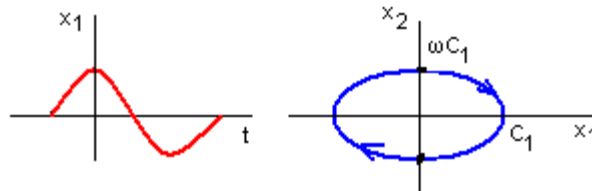


Рисунок 3.1 – Фазовый портрет линейной системы при мнимых корнях

2) При положительном демпфировании ( $a_1 > 0$ ) и условии  $a_1 < 4a_2$  получим комплексные сопряженные корни с отрицательной вещественной частью. Переходный процесс в этом случае, согласно уравнению (3.3), определяется выражением:

$$x_1 = A \exp(-\alpha t) \cos \omega t,$$

где  $\alpha = -a_1/2$ , и имеет затухающий колебательный характер (рисунок 3.2), свойственный устойчивой системе.

Уравнение (3.5) можно представить как

$$x_2 dx_2 = -a_1 x_2 dx_1 - a_2 x_1 dx_1.$$

После интегрирования обеих частей получим:

$$x_2^2 + a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = 0. \quad (3.8)$$

Тогда уравнение фазовых траекторий в случае комплексных сопряженных корней с отрицательной вещественной частью (положительное демпфирование  $a_1 > 0$ ) примет вид:

$$x_2^2 + a_1 x_2 x_1 + a_2 x_1^2 = C \exp(2a_1 / \sqrt{4a_2 - a_1^2}) \arctg((2x_2 + a_1 x_1) / x_1 \sqrt{4a_2 - a_1^2}), \quad (3.9)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования, зависящая от начального состояния системы.

Это выражение дает семейство логарифмических спиралей, отличающихся значением постоянной  $C$ . Изображающая точка описывает в плоскости  $(x_2, x_1)$  закручивающуюся спираль (рисунок 3.2). Все спирали сходятся к одной особой точке, называемой *устойчивым фокусом* (0).

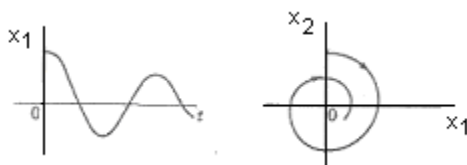


Рисунок 3.2 – Фазовый портрет линейной системы при комплексно-сопряженных корнях с отрицательной вещественной частью

3) При отрицательном демпфировании ( $a_1 < 0$ ) получим комплексно-сопряженные корни с положительной вещественной частью. Возникают колебания с возрастающей амплитудой, характеризующие неустойчивый процесс (рисунок 3.3).

Переходный режим описывается уравнением:

$$x = x_0 \exp(\alpha t) \cos \omega t.$$

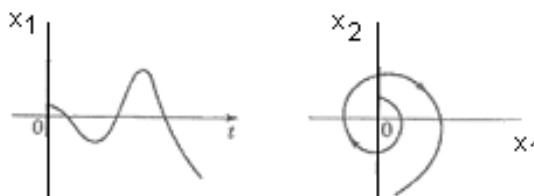


Рисунок 3.3 – Фазовый портрет линейной системы при комплексно-сопряженных корнях с положительной вещественной частью

Фазовые траектории в этом случае также имеют вид логарифмических спиралей, но раскручивающихся из начала координат (рисунок 3.3). Начало координат представляет особую точку, называемую *неустойчивым фокусом*.

4) Если корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны, переходный процесс списывается уравнением:

$$x = C_1 \exp s_1 t + C_2 \exp s_2 t$$

и имеет устойчивый апериодический характер с перерегулированием либо без перерегулирования.

Фазовые траектории описываются выражением:

$$(x_2 - x_1 s_1)^{s_1} = (x_2 - x_1 s_2)^{s_2},$$

являющимся решением уравнения (3.6) при вещественных корнях.

На рисунке 3.4 показаны фазовые траектории 1, 2 и 3 соответствующие переходным характеристикам, обозначенным теми же цифрами. Точка, изображающая начало координат, представляет точку равновесия и называется *устойчивым узлом*, в котором сходятся все фазовые траектории. В этом случае отсутствуют колебания относительно точки равновесия.

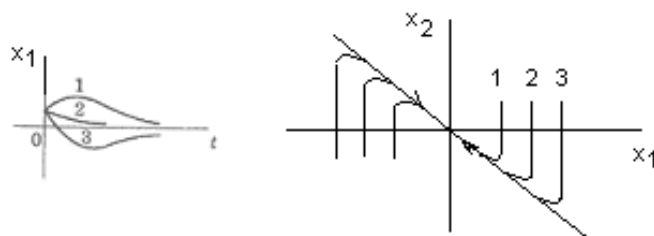


Рисунок 3.4 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных отрицательных корнях

5) При вещественных положительных корнях характеристического уравнения получим неустойчивый аperiodический процесс с неограниченным возрастанием во времени координаты  $x_1$ . Переходные характеристики и фазовые траектории этого процесса изображены на рисунке 3.5. Точка равновесия системы, из которой выходят все фазовые траектории, называется *неустойчивым узлом*.

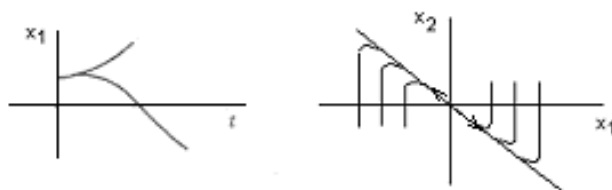


Рисунок 3.5 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных положительных корнях

б) При вещественных корнях разных знаков получаем семейство фазовых траекторий, изображенных на рисунке 3.6, которые характеризуют неустойчивый процесс. Здесь начало координат представляет особую точку и называется *седлом*.

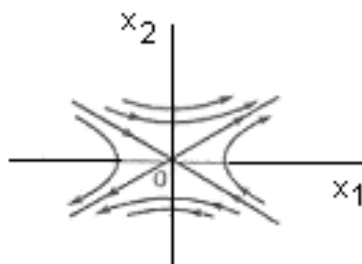


Рисунок 3.6 – Фазовый портрет линейной системы при вещественных корнях разных знаков

Рассмотренные фазовые портреты линейной системы второго порядка показывают, что по характеру фазовых траекторий можно непосредственно судить об устойчивости движения системы.

*Пример 1.* Необходимо построить фазовый портрет линейной системы 1-го порядка (рисунок 3.7, а). На вход поступает постоянный сигнал типа  $x=a \cdot 1(t)$ .

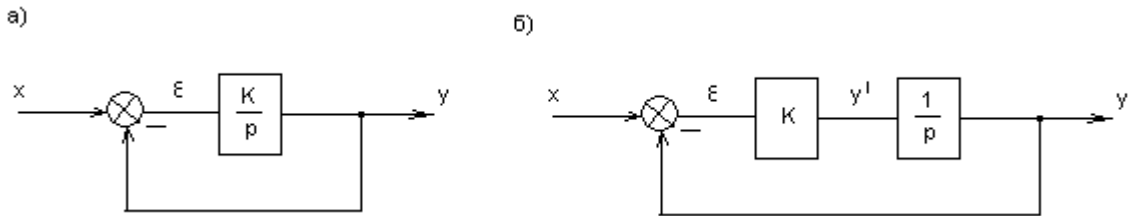


Рисунок 3.7 – Структурная схема линейной системы

Представим усилительное интегрирующее звено в виде двух последовательно соединенных звеньев (рисунок 3.7, б).

Тогда на выходе усилительного звена:

$$y' = \varepsilon \cdot K = (x - y)K \quad \text{или} \quad y' + yK = Kx.$$

Полученное уравнение является уравнением прямой. Для построения фазовой траектории определим точки пересечения с осями координат, используя последнее выражение.

$$\begin{cases} y = 0; & y' = Kx = Ka, \\ y' = 0; & yK = Kx = Ka; & y = a. \end{cases}$$

По полученным данным строим фазовую траекторию, на которой покажем произвольную точку М с координатами  $(y_0'; y_0)$ .

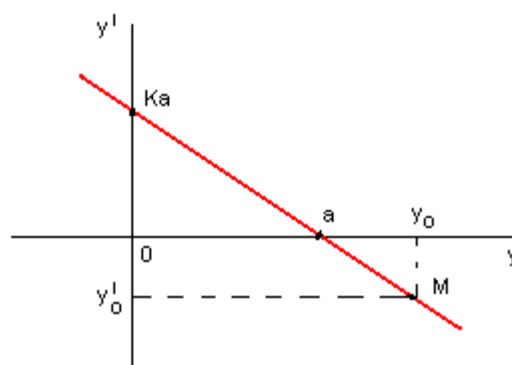


Рисунок 3.8 – Фазовый портрет линейной системы 1-го порядка