СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

План

- Дискретно-стохастические модели (P-схемы)
- Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)

Дискретно-стохастические модели (Р-схемы)

- При дискретно-стохастическом подходе к формализации процесса функционирования системы ***S*** подход остается аналогичный рассмотренному конечному автомату, то влияние фактора стохастичности можно проследить разновидности таких автоматов, а именно на вероятностных (стохастических) автоматах.
- В общем виде *вероятностный автомат* (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.
- Применение схем вероятностных автоматов (***Р*** - схем) имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.
- Множество ***G***, элементами которого являются всевозможные пары , где x_i и z_s —-элементы входного подмножества ***X*** и подмножества состояний ***Z*** соответственно. Если существуют две такие функции φ и ψ, то с их помощью осуществляются отображения и , то говорят, что определяет автомат детерминированного типа.
- Введем в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть *Ф* — множество всевозможных пар вида , где y_i — элемент выходного подмножества ***Y***. Потребуем, чтобы любой элемент множества ***G*** индуцировал на множестве ***Ф*** некоторый закон распределения следующего вида:
-

Элементы из Ф	$\cdots$	$(z_1, y_1)\ldots$	$(z_1, y_2)\ldots$	$\cdots$	(z_K, y_{J-1})	(z_K, y_J)
(x_i, z_k)	$\cdots$	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	$b_{K(J-1)}$	b_{KJ}

- При этом , где b_{kj} — вероятности перехода автомата в состояние z_k и появления на выходе сигнала y_j если он был в состоянии z_s и на его вход в этот момент времени поступил сигнал x_i.

Y-детерминированный Р-автомат задаётся таблицей переходов и таблицей выходов. Первую из этих таблиц можно представить в виде квадратной матрицы размерности K×K, которую будем называть матрицей переходных вероятностей или просто матрицей переходов Р-автомата. В общем случае такая матрица переходов имеет вид

$$P_p = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} \end{Vmatrix}$$

Для описания У-детерминированного Р-автомата необходимо задать начальное распределение вероятностей вида

$$\begin{matrix} Z & \ldots & z_1 & z_2 & \ldots & z_{K-1} & z_K \\ D & \ldots & d_1 & d_2 & \ldots & d_{K-1} & d_K \end{matrix}$$

Здесь d_k — вероятность того, что в начале работы Р-автомат находится в состоянии k. При этом $\sum_{k=1}^{K} d_k = 1$.

У-детерминированный Р-автомат можно задать в виде ориентированного графа, вершины которого сопоставляются состояниям автомата, а дуги — возможным переходам из одного состояния в другое. Дуги имеют веса, соответствующие вероятностям перехода p_{ij}, а около вершин графа пишутся значения выходных сигналов, индуцируемых этими состояниями рис 1.

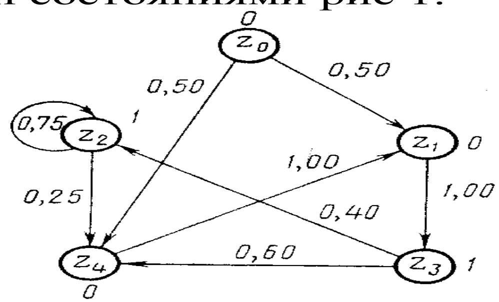


Рис 1.

Непрерывно-стохастические модели (Q-схемы)

- При непрерывно-стохастическом подходе в качестве типовых математических схем применяется система массового обслуживания (англ. queueing system), которые будем называть Q-схемами. Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.
- В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования экономических, производственных, технических и других систем, например потоки поставок продукции некоторому предприятию, потоки деталей и комплектующих изделий на сборочном конвейере цеха, заявки на обработку информации ЭВМ от удаленных терминалов и т. д.
- При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, т. е. стохастический характер процесса их функционирования. Остановимся на основных понятиях массового обслуживания, необходимых для использования Q-схем, как при аналитическом, так и при имитационном.
- В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие:
- ожидание обслуживания заявки;
- собственно обслуживание заявки.

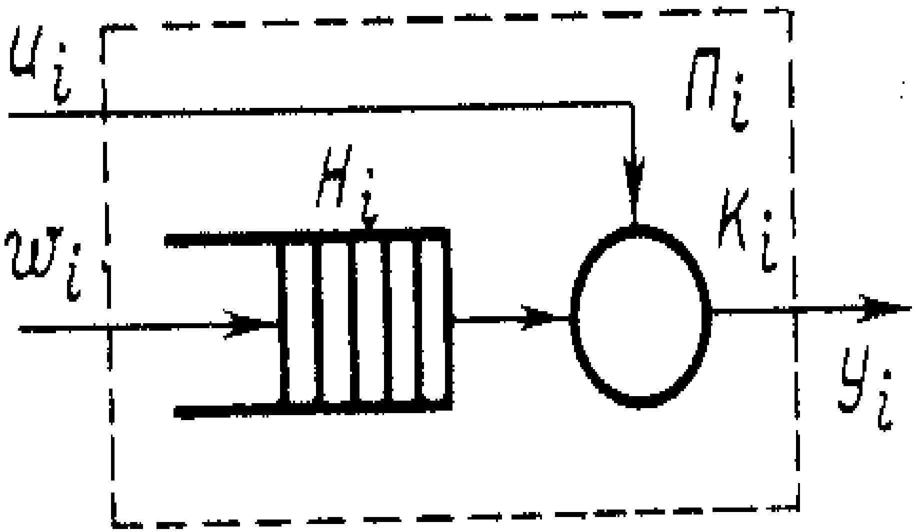
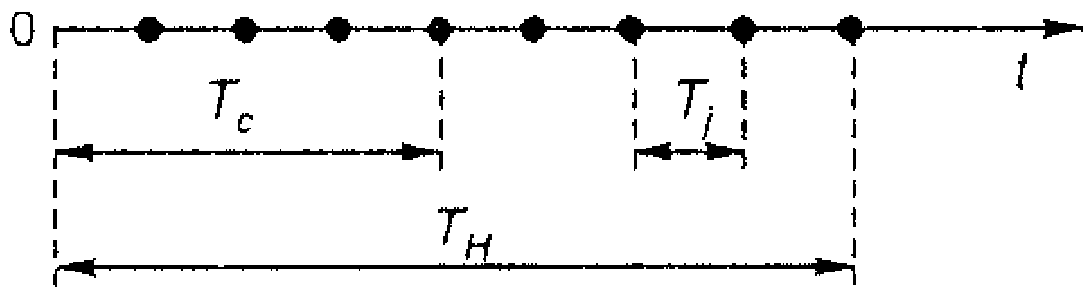


Рис. 2.

- Это можно изобразить в виде некоторого *i*-го прибора обслуживания $П_i$ (рис. 2.), состоящего из накопителя заявок $Н_i$, в котором может одновременно находиться заявок, где —емкость *i*-го накопителя, и канала обслуживания заявок (или просто канала) $К_i$

- На каждый элемент прибора обслуживания $П_i$, поступают потоки событий: в накопитель $Н_i$ — поток заявок w_i на канал $К_i$ — поток обслуживании $υ_i$.
- *Потоком событий* называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. *Различают* потоки *однородных* и *неоднородных* событий.
- *Поток событий называется однородным*, если он характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью , где t_n — момент наступления n-го события — неотрицательное вещественное число.
- Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков времени между n-м и $(n—1)$-м событиями $\{\tau_n\}$, которая однозначно связана с последовательностью вызывающих моментов $\{t_n\}$, где , , $t_o = 0$, т. е. $\tau_1 = t_1$
- *Потоком неоднородных событий* называется последовательность , где t_n — вызывающие моменты; f_n — набор признаков события. Например, применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок могут быть заданы принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т. п.
- Поток, в котором события разделены интервалами времени τ_1, τ_2,…, которые вообще являются случайными величинами. Пусть интервалы τ_1, τ_2,.., независимы между собой. Тогда поток событий называется *потоком с ограниченным последействием*. Пример потока событий приведен на рис. 3. , где обозначено T_i — интервал между событиями (случайная величина); $T_н$ — время наблюдения, T_c — момент совершения события.



- Интенсивность потока можно рассчитать экспериментально по формуле
- где N— число событий, произошедших за время наблюдения $T_н$. Если $T_н$ =*const* или определено какой-либо формулой , то поток называется *детерминированным*. Иначе поток называется случайным.
- Случайные потоки бывают:
- *ординарными* - когда вероятность одновременного появления 2-х и более событий равна нулю. Поток событий называется ординарным, если вероятность того, что на малый интервал времени Δt, примыкающий к моменту времени t, попадает больше одного события $P_{>1}(t, \Delta t)$, пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью того, что на этот же интервал времени Δt попадает ровно одно событие $P_1(t, \Delta t)$, т. е. $P_1(t, \Delta t)$» $P_{>1}(t, \Delta t)$.
- *стационарными* - когда частота появления событий постоянная. Стационарным потоком событий называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени τ зависит лишь от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени взят этот участок.
- *без последействия* - когда вероятность не зависит от момента совершения предыдущих событий.
- Обычно при моделировании различных систем применительно к элементарному каналу обслуживания K_i можно считать, что поток заявок , т. е. интервалы времени между моментами появления заявок (вызывающие моменты) на входе K_i образует подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания , т. е. интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявки, образует подмножество управляемых переменных.

- *<u>В разомкнутой</u>* Q-схеме выходной поток обслуженных заявок не может снова поступить на какой-либо элемент, т. е. обратная связь отсутствует.
- *<u>В замкнутых</u>* Q-схемах имеются обратные связи, по которым заявки двигаются в направлении, обратном движению вход-выход.
- Для задания Q-схемы также необходимо описать алгоритмы ее функционирования, которые определяют набор правил поведения заявок в системе в различных неоднозначных ситуациях. В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе $Н_i$, и обслуживания заявок каналом $К_i$ каждого элементарного обслуживающего прибора $П_i$ Q-схемы. Неоднородность заявок, отражающая процесс в той или иной реальной системе, учитывается с помощью введения классов приоритетов.
- В зависимости от динамики приоритетов в Q-схемах различают *<u>статические</u>* и *<u>динамические приоритеты</u>*.
- Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний Q-схемы, т. е. они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования.
- Динамические приоритеты возникают при моделировании в зависимости от возникающих ситуаций.
- Исходя из правил выбора заявок из накопителя $Н_i$ на обслуживание каналом $К_i$ можно выделить *<u>относительные</u>* и *<u>абсолютные</u>* *<u>приоритеты</u>*.
- *<u>Относительный приоритет</u>* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель $Н_i$ ожидает окончания обслуживания предшествующей заявки каналом $К_i$ и только после этого занимает канал.
- *<u>Абсолютный приоритет</u>* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель $Н_i$ прерывает обслуживание каналом $К_i$ заявки с более низким приоритетом и сама занимает канал (при этом вытесненная из $К_i$ заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в $Н_i$).