

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

---

# План

- Моделирование случайных событий.
- Моделирование дискретных случайных величин.
- Моделирование непрерывных случайных величин.
- Моделирование случайных векторов.

- При моделировании системы **S** методом имитационного моделирования, в частности методом статистического моделирования на ЭВМ, существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему. Для их формализации используются случайные события, дискретные и непрерывные величины, векторы, процессы. Формирование на ЭВМ реализаций случайных объектов любой природы из перечисленных сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел.

# Моделирование случайных событий.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании систем являются *случайные события*.

Имеются случайные числа  $x_i$  т. е. возможные значения случайной величины  $\xi$ , равномерно распределенной в интервале  $(0, 1)$ . Необходимо реализовать случайное событие  $A$ , наступающее с заданной вероятностью  $p$ . Определим  $A$  как событие, состоящее в том, что выбранное значение  $x_i$  случайной величины  $\xi$ , удовлетворяет неравенству

$$x_i \leq p. \quad (10.1)$$

Тогда вероятность события  $A$  будет  $P(A) = \int_0^p dx = p$ . Противоположное событие  $A$  состоит в том, что  $x_i > p$ . Тогда  $P(\bar{A}) = 1 - p$ .

Процедура моделирования в этом случае состоит в выборе значений  $x_i$  и сравнении их с  $p$ . При этом, если условие (10.1) выполняется, исходом испытания является событие  $A$ .

Таким же образом можно рассмотреть группу событий. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_s$  — полная группа событий, наступающих с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_s$  соответственно. Определим  $A_m$  как событие, состоящее в том, что выбранное значение  $x$ , случайной величины  $\xi$  удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} < x_i \leq l_m, \quad (10.2)$$

где  $l_r = \sum_{i=1}^r p_i$ . Тогда

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = p_m$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательном сравнении случайных чисел  $x_i$  со значениями  $l_r$ . Исходом испытания оказывается событие  $A_m$ , если выполняется условие (10.2). Эту процедуру называют определением исхода испытания *по жребию* в соответствии с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_s$ .

- При моделировании на ЭВМ используются псевдослучайные числа с квазиравномерным распределением, что приводит к некоторой ошибке.
- Часто необходимо осуществить такие испытания, при которых искомый результат является сложным событием, зависящим от двух (и более) простых событий, например  $A$  и  $B$ .
- Для моделирования совместных испытаний можно использовать два варианта процедуры:
  - 1) последовательную проверку условия (10.1);
  - 2) определение одного из исходов  $, , ,$  по жребию с соответствующими вероятностями, т. е. аналогия (10.2).
- Первый вариант требует двух чисел  $x_i$  и сравнений для проверки условия (10.2).
- При втором варианте можно обойтись одним числом  $x_i$  но сравнений может потребоваться больше. С точки зрения удобства построения моделирующего алгоритма и экономии количества операций и памяти ЭВМ более предпочтителен первый вариант.

# Моделирование дискретных случайных величин.

Дискретная случайная величина  $\eta$  принимает значения  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_j \leq \dots$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ , составляющими дифференциальное распределение вероятностей

$$P(\eta = y) = \begin{matrix} y & y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots \\ p & p_1 & p_2 & \dots & p_j & \dots \end{matrix} \quad (10.3)$$

При этом интегральная функция распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = \sum_{j=1}^m p_j; \quad y_m \leq y \leq y_{m+1}; \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$F_\eta(y) = 0; \quad y < y_1. \quad (10.4)$$

Для получения дискретных случайных величин можно использовать метод обратной функции. Если  $\xi$  — равномерно распределенная на интервале  $(0, 1)$  случайная величина, то искомая случайная величина  $\eta$  получается с помощью преобразования

$$\eta = F_\eta^{-1}(\xi), \quad (10.5)$$

где  $F_\eta^{-1}$  — функция, обратная  $F_\eta$

Алгоритм вычисления по (10.4) и (10.5) сводится к выполнению следующих действий:

если  $x_1 < p$ , то  $\eta = y_1$ , иначе

если  $x_2 < p_1 + p_2$ , то  $\eta = y_2$  иначе,

.....

если  $x_i < \sum_{j=1}^m p_j$  то  $\eta = y_m$ , иначе,

$$(10.6)$$

# Моделирование непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина  $\eta$  задана интегральной функцией распределения

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy,$$

Где  $f_{\eta}(y)$  — плотность вероятностей.

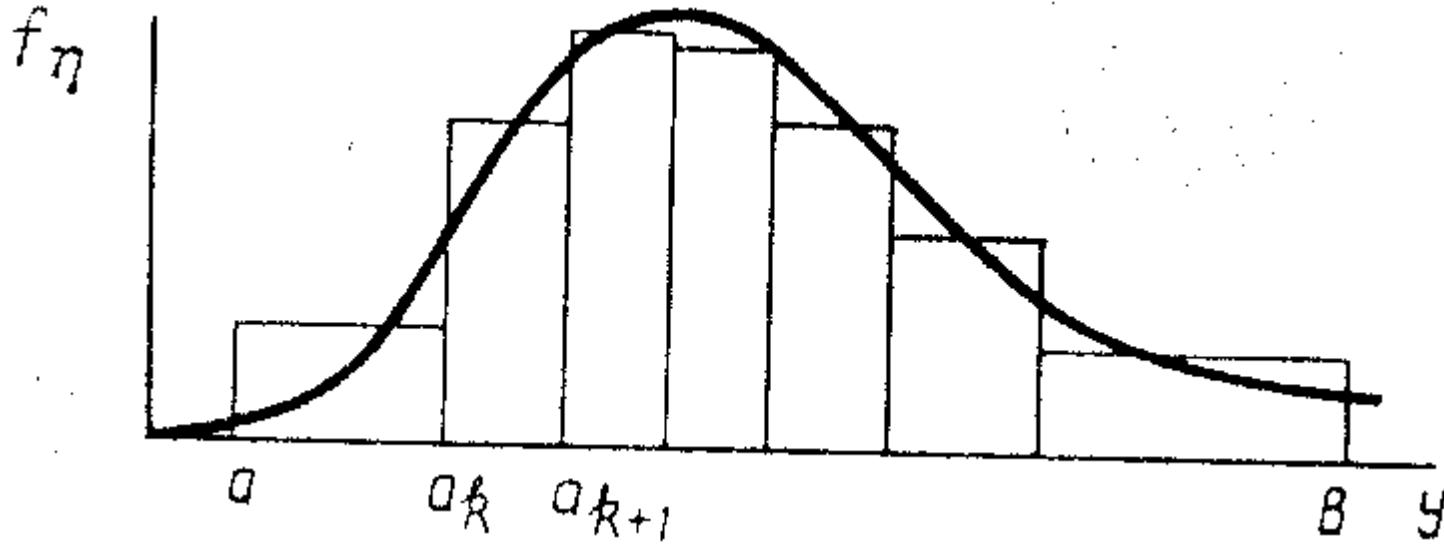
Для получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, как и для дискретных величин, можно воспользоваться методом обратной функции.

Взаимно однозначная монотонная функция  $\eta = F^{-1\eta}(\xi)$ , полученная решением относительно  $\eta$  уравнения  $F_{\eta}(y) = \xi$ , преобразует равномерно распределенную на интервале  $(0, 1)$  величину  $\xi$  в  $\eta$  с требуемой плотностью  $f_{\eta}(y)$ .

В практике моделирования систем часто пользуются приближенными способами преобразования случайных чисел, которые можно классифицировать следующим образом:

- а) универсальные способы, с помощью которых можно получать случайные числа с законом распределения любого вида;
- б) неуниверсальные способы, пригодные для получения случайных чисел с конкретным законом распределения.

Универсальный способ получения случайных чисел, основанный на кусочной аппроксимации функции плотности. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел функцией плотности  $f_{\eta}(y)$ , возможные значения которой лежат в интервале  $(a, b)$ . Представим  $f_{\eta}(y)$  в виде кусочно-постоянной функции, т. е. разобьем интервал  $(a, b)$  на  $m$  интервалов, как это показано на рис. 1.



- $m$  интервалов, как это показано на рис. 1.



- Алгоритм машинной реализации этого способа получения случайных чисел сводится к последовательному выполнению следующих действий:
- 1) генерируется случайное равномерно распределенное число  $x_i$  из интервала  $(0, 1)$ ;
- 2) с помощью этого числа случайным образом выбирается интервал  $(a_k, a_{k+1})$ ;
- 3) генерируется число  $x_{i+1}$  и масштабируется с целью приведения его к интервалу  $(a_k, a_{k+1})$  т. е. домножается на коэффициент  $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ ;
- 4) вычисляется случайное число  $y_j = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$  с требуемым законом распределения.
- Достоинства этого приближенного способа преобразования случайных чисел: при реализации на ЭВМ требуется небольшое количество операций для получения каждого случайного числа, так как операция масштабирования (10.7) выполняется только один раз перед моделированием, и количество операций не зависит от точности аппроксимации, т. е. от количества интервалов  $m$ .

# Моделирование случайных векторов.

При решении задач исследования характеристик процессов функционирования систем методом статистического моделирования на ЭВМ возникает необходимость в формировании реализаций *случайных векторов*, обладающих заданными вероятностными характеристиками. Случайный вектор можно задать проекциями на оси координат, причем эти проекции являются случайными величинами, описываемыми совместным законом распределения. В простейшем случае, когда рассматриваемый случайный вектор расположен на плоскости  $xOy$ , он может быть задан совместным законом распределения его проекций  $\xi$  и  $\eta$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Когда двумерная случайная величина  $(\xi, \eta)$  является дискретной и ее составляющая  $\xi$  принимает возможные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а составляющая  $\eta$  — значения  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , причем каждой паре  $(x_i, y_j)$  соответствует вероятность  $p_{ij}$ . Тогда каждому возможному значению  $x_i$  случайной величины  $\xi$  будет соответствовать

$$P_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

Тогда в соответствии с этим распределением вероятностей можно определить конкретное значение  $x_i$  случайной величины  $\xi$ , и из всех значений  $p_{ij}$  выбрать последовательность

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n},$$

При моделировании непрерывного случайного вектора с составляющими  $\xi$ , и  $\eta$ . В этом случае двумерная случайная величина  $(\xi, \eta)$  описывается совместной функцией плотности  $f(x, y)$ . Эта функция может быть использована для определения функции плотности случайной величины  $\xi$  как

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Имея функцию плотности  $f_{\xi}(x)$ , можно найти случайное число  $x_i$ , а затем при условии, что  $\xi = x_i$ , определить условное распределение случайной величины  $\eta$ :

$$f_{\eta}(y/\xi = x_i) = f(x, y)/f_{\xi}(x_i).$$

В соответствии с этой функцией плотности можно определить случайное число  $y_i$ . Тогда пара чисел  $(x_i, y_i)$  будет являться искомой реализацией вектора  $(\xi, \eta)$ .

Способ формирования реализаций двумерных векторов можно обобщить и на случай многомерных случайных векторов. Однако при больших размерностях этих векторов объем вычислений существенно увеличивается, что создает препятствия к использованию этого способа в практике моделирования систем.

В пространстве с числом измерений более двух практически доступным оказывается формирование случайных векторов, заданных в рамках корреляционной теории.