Государственный комитет СССР по народному образованию

М.А. ГОЛОВАНОВ, В.А. ИВАНОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Часть 1

Издательство МГТУ

1990

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

ИЭ - импульсный элемент;

ИИЭ - идеальный импульсный элемент;

НЧ - непрерывная часть;

ПНЧ - приведенная непрерывная часть;

ЛАЧХ - логарифмическая амплитудно-частотная характеристика;

ЛЧХ - логарифмическая частотная характеристика;

ЛДЧХ - логарифмическая фазочастотная характеристика;

Выч - вычет (функции);

ФЭ - формирующий элемент.

1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ САУ

Дискретной называется такая система автоматического управления (САУ), хотя бы один элемент, которой имеет на выходе дискретный сигнал. Дискретный сигнал определяется последовательностью значений $a_0, a_{1,...,} a_{n,...,}$ взятых в дискретные моменты времени. Примером получения дискретного сигнала является квантование по времени, когда непрерывный сигнал $f(t)$ заменяется последовательностью импульсов с амплитудами $f[nT]$, равными значениям сигнала $f(t)$ в дискретные, равноотстоящие моменты времени $t = nT, n = 0,1,2,...$ (рис. 1а). Такое преобразование непрерывного сигнала в последовательность импульсов с амплитудами, определяющими значение сигнала в дискретные моменты времени, называется амплитудно-импульсной модуляцией. При широтно-импульсной модуляции непрерывный сигнал $f(t)$ преобразуется в последовательность импульсов одинаковой амплитуды, но ширина импульса определяется значением $f[nT]$ - сигнала в дискретные моменты времени (рис. 1б). Предположим теперь, что выходная величина $y(t)$ преобразующего устройства может принимать только дискретные значения $y_k(k = 0,1,2,..,)$, например $y_k = kn\ (\mathrm{k} = 0,\pm1,\pm2,...,\pm\mathrm{N})$. В этом случае говорят о квантовании по уровню. При квантовании по уровню значение выходной величины $y^* = kn$ определяется из условия $\left|f(t) - y^*\right| \le n/2$.
Характеристика преобразующего устройства такого типа приведена на рис. 2.

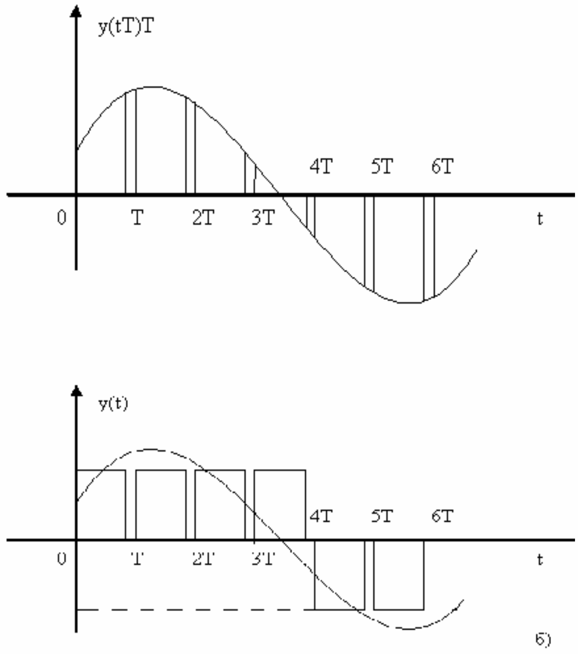


Рис. 1

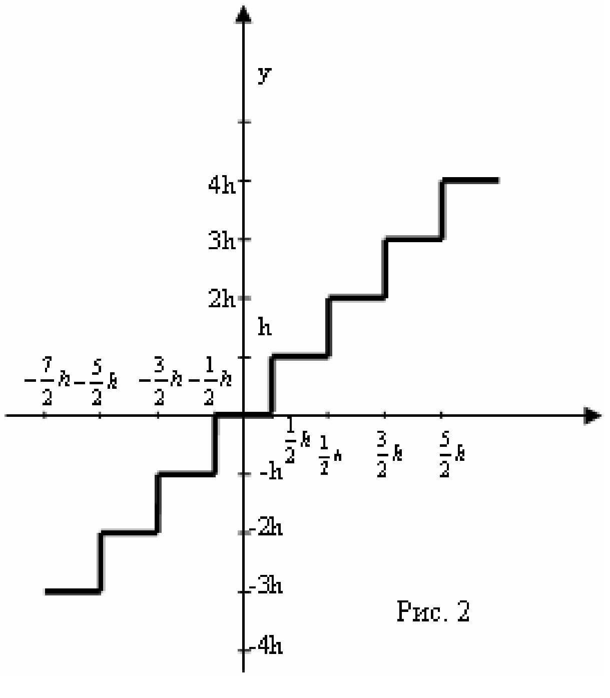


Рис. 2

Для цифровых автоматических систем характерным является квантование сигнала как по времени, так и по уровню. Наличие квантования по уровню делает цифровую систему нелинейной импульсной системой, однако при большом количестве разрядов цифроаналогового (ЦАП) и аналого-цифрового (АЦП) преобразователей эффектом квантования по уровню можно пренебречь и исследовать цифровую автоматическую систему как линейную импульсную.

1.1. Уравнения импульсных систем с одним входом и выходом

Рассмотрим вначале математическую модель разомкнутой импульсной системы с одним входом и выходом для амплитудно-импульсной модуляции непрерывного сигнала. Разомкнутая импульсная система представляет собой последовательное соединение импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ) (рис. 3). Импульсный элемент преобразует непрерывный сигнал $f(t)$ в последовательность импульсов с амплитудой, пропорциональной значению входного сигнала в дискретные моменты времени

$$y(t) = \begin{cases} k_u \cdot f[nT] \cdot s_1(t - nT) & при \;\; nT \le t < (n+\gamma) \cdot T; \\ 0 & при \;\; (n+\gamma) \cdot T \le t < (n+1) \cdot T; \end{cases}$$

Здесь $s_1(t)$ - импульс о единичной амплитудой; γT - ширина импульса $(0 < \gamma \le 1)$.

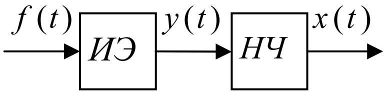


Рис. 3

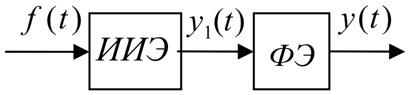


Рис. 4

Обычно импульсный элемент представляется в виде соединения идеального импульсного элемента (ИИЭ) и формирующего элемента (ФЭ) (рис. 4). ИИЭ преобразует непрерывный сигнал в последовательность δ -функций, ФЭ из δ -функции формирует единичный импульс $s_1(t)$. Таким образом, выходной сигнал ИИЭ

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_u \cdot f[nT] \cdot \delta(t - nT), \tag{1.1}$$

импульсная переходная функция ФЭ

$$k_ф(t) = s_1(t).$$

Пусть непрерывная часть импульсной системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$A(p) \cdot x(t) = B(p) \cdot y(t), \tag{1.2}$$

где

$$A(p) = a_0 p^k + a_1 p^{k+1} + \ldots + a_k \;;$$

$$B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m+1} + \ldots + b_m \;;$$

$$p \equiv \frac{d}{dt}; m < k.$$

По формуле Ковш, решение $x(t)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее начальный условиям

$$x(0) = x_0, \ldots, x^{(k+1)}(0) = x_{k-1} \;, \tag{1.3}$$

определяется равенством

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^t \bar{x}(t-\tau) y(\tau) d\tau \qquad (1.4)$$

Здесь $\varphi(t)$ - решение однородного уравнения

$$A(p)x(t) = 0, \qquad (1.5)$$

удовлетворяющее начальным условиям (1.3); $\bar{x}(t)$ - решение однородного уравнения (1.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{x}(t) = \eta_0, ..., \bar{x}^{(k-1)}(0) = \eta_{k-1},$$

. причем величины $\eta_0, ..., \eta_{k-1}$ определяются из уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_0\eta_0 = b_{m-k+1}, \\ a_1\eta_0 + a_0\eta_1 = b_{m-k+2}, \\ a_{k-1}\eta_0 + ... + a_0\eta_{k-1} = b_m, \end{array}\right\}$$

где $b_i = 0,$ если $i < 0.$

Подставив в уравнение (1.4) выражение (1.1) для $y(t)$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_u \cdot f[nT] \cdot s_1(t-nT),$$

получим

$$x(t) = \varphi(t) + \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_u f[nT] s_1(\tau - nT) \bar{x}(t-\tau) d\tau =$$

$$= \varphi(t) + \sum_{n=0}^{\infty} k_u f[nT] \int_0^t s_1(\tau - nT) \bar{x}(t-\tau) d\tau.$$

Учитывая, что $s_1(t-nT)$ при $\tau < nT$ и $\tau \geq (n+\gamma)T$ будем иметь

$$\int_0^t s_1(\tau - nT) \cdot \bar{x}(t-\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{если } t < nT; \\ \int_{nT}^t s_1(\tau - nT) \cdot \bar{x}(t-\tau) d\tau, & \text{если } nT \leq t < (n+\gamma)T; \\ \int_{nT}^{(n+\gamma)T} s_1(\tau - nT) \cdot \bar{x}(t-\tau) d\tau, & \text{если } (n+\gamma)T \leq t < \infty; \end{cases}$$

Введем новые переменные $\eta = \tau - nT, \quad \xi = t - nT$ и обозначим

$$
k(\xi)=\begin{cases} 0, & \textit{если}\ \ \xi<0; \\ \int\limits_0^{\xi} s_1(\eta)\cdot \bar{x}(\xi-\eta)d\eta, & \textit{если}\ \ 0\le\xi<\gamma T; \\ \int\limits_0^{\gamma T} s_1(\eta)\cdot \bar{x}(\xi-\eta)d\eta, & \textit{если}\ \ \gamma T\le\xi<\infty. \end{cases}
$$

Тогда выражение $x(t)$ примет вид

$$
x(t)=\varphi(t)+\sum_{n=0}^{\infty} k_u\cdot f[nT]\cdot k(t-nT) \tag{1.6}
$$

Отметим, что $\bar{x}(t)$ представляет собой импульсную переходную функцию непрерывной части, а функция $k(\xi)$, являющаяся сверткой функций $\bar{x}(t)$ и $s_1(t)$, будет импульсной переходной функцией последовательного соединения ФЭ и непрерывной части. Обычно объединяют ФЭ и непрерывную часть в приведенную непрерывную часть (ПНЧ) (рис. 5). Тогда $k(\xi)$ будет импульсной переходной функцией ПНЧ.

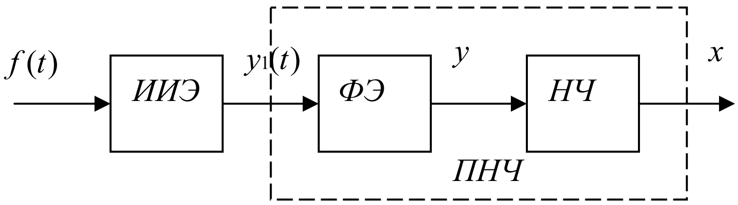


Рис. 5

Перейдем в выражении (1.6) к безразмерному времени, полагая $\bar{t}=t/T$.

Дня нулевых начальных условий

$$
x_T(\bar{t})=\sum_{n=0}^{\infty} k_u\cdot f_T[n]\cdot k_T(\bar{t}-n),
$$

где $x_T(\bar{t})=x(\bar{t}T),\ f_T(\bar{t})=f(\bar{t}T),\ k_T(\bar{t})=k(\bar{t}T).$

Имеем

$$
k_T(\bar{t})=\int\limits_0^{\bar{t}T}\bar{x}(\bar{t}T-\eta)s_1(\eta)d\eta=\frac{1}{T}\int\limits_0^{\bar{t}}\bar{x}_T(\bar{t}-\bar{\eta})s_{1T}(\bar{\eta})d\bar{\eta},
$$

где $s_{1T}(\bar{\eta})=s_1(\bar{\eta}T),\ \bar{x}_T(\bar{t})=\bar{x}(\bar{t}T).$

Пологая $\bar{t}=n+\varepsilon\quad(0\le\varepsilon<1)$, получим

$$
x_T[n+\varepsilon]=\sum_{m=0}^{\infty} k_u f_T[m]k_T[n+\varepsilon-m].
$$

Учитывая, что $k_T(\bar{t})=0\ \ \bar{t}<0$, будем иметь

$$
x_T[n+\varepsilon]=\sum_{m=0}^{n} k_u f_T[m]k_T[n+\varepsilon-m]. \tag{1.7}
$$

При $k_u = 1$ и $\varepsilon = 1$

$$x_T[n] = \sum_{m=0}^{n} f_T[m]k_T[n-m]. \qquad (1.8)$$

Уравнения (1.7) и (1.8) представляют собой разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

1.2. Уравнения многомерных импульсных систем.

Найдем математическую модель импульсной системы с несколькими входами и выходами. Пусть НЧ системы описывается векторным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax + Bx \\ &y = Cx \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

где $x - k$ - мерный, вектор состояния;

$u - r$ - мерный вектор входа;

$y - m$ -мерный вектор выхода;

А - матрица системы размера $(k \times k)$;

В - матрица входа размера $(k \times r)$;

С - матрица выхода размера $(m \times k)$.

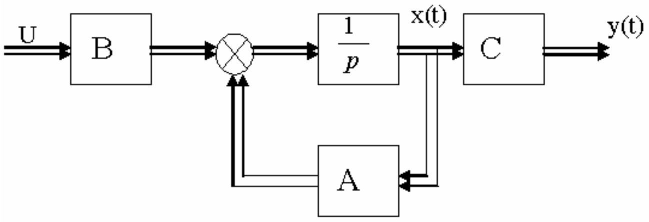


Рис. 6

Входной сигнал $u(t)$ представляет собой амплитудно-модулированную последовательность прямоугольных импульсов широтой γT. Таким образом,

$$u(t) = \begin{cases} u(nT), & \text{если } \mathrm{nT} \le \mathrm{t} < (\mathrm{n}+\gamma)\mathrm{T} \\ 0, & \text{если } (\mathrm{n}+\gamma)\mathrm{T} \le \mathrm{t} < (\mathrm{n}+1)\mathrm{T} \end{cases} \qquad (1.10)$$

По формуле Коши имеем для системы (1.9) с учетом (1.10)

$$x(t) = \begin{cases} e^{A(t-nT)}x[nT] + \int\limits_{nT}^{y} e^{A(t-\tau)}u[nT]d\tau; & nT \le t < (\mathrm{n}+\gamma)\mathrm{T}; \\ e^{A[t-(n+\gamma)T]}x[(n+\gamma)T]; & (\mathrm{n}+\gamma)\mathrm{T} \le \mathrm{t} < (\mathrm{n}+1)\mathrm{T}. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Отсюда получаем

$$x[(n+\gamma)T] = e^{A\gamma T}x[nT] + A^{-1}(e^{A\gamma T} - E)Bu[nT].$$

Подставив это равенство в (1.11) и пологая $t = (n+1)T$, найдем

$$x[(n+1)T] = e^{AT}x[nT] + e^{A(1-\gamma)T}A^{-1}(e^{A\gamma T} - E)Bu[nT]. \qquad (1.12)$$

Обозначим $e^{AT} = \overline{A},\ e^{A(1-\gamma)T} \cdot A^{-1}(e^{A\gamma T} - E)B = \overline{B}$

Тогда уравнение (1.12) примет вид

$$x[(n+1)T] = \overline{A} \cdot x[nT] + \overline{B} \cdot u[nT]. \tag{1.13}$$

Если $\gamma = 1$ (цифровая система), то уравнение разомкнутой импульсной системы

$$x[(n+1)T] = \overline{A} \cdot x[nT] + \overline{B}_1 \cdot u[nT]. \tag{1.14}$$

где $\overline{B}_1 = A^{-1}(e^{A\gamma T} - E) \cdot B.$

Уравнения (1.13) и (1.14) представляют собой линейные разностные уравнения. Для дальнейшего изложения нам потребуются сведения из теории разностных уравнений и дискретного преобразования Лапласа.

2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Дискретные функции. Конечное разности.

Дискретной, или решетчатое, функцией $f[nT]$ называется функция целочисленного аргумента n; постоянная T - периодом дискретности, или периодом квантования. Любой непрерывной функция $f(t)$ можно поставить в соответствие дискретную функцию $f[nT]$, если положить $t = nT$ (рис. 7).

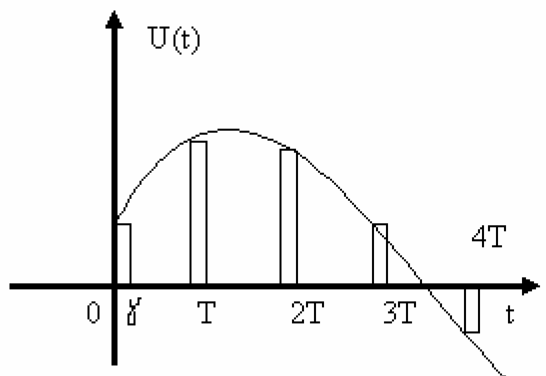


Рис. 7

Если представить непрерывную переменную t в виде $t = (n+\varepsilon)T$, где $0 \le \varepsilon < 1$, то при каждом фиксированном значении ε получаем смещенную решетчатую функцию $f[(n+\varepsilon)T] = f[nT, \varepsilon T]$. Изменяя ε от 0 до 1, можно получить множество смещенных функций $f[nT, \varepsilon T]$, соответствующих непрерывной функции $f(t)$. Если функция $f(t)$ непрерывна, то $f[(n-1)T, T] = f[nT, 0]$.

Если при $t = nT$, функция $f(t)$ терпит разрыв 1-ого рода, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 1} f[(n-1)T, \varepsilon T] \ne \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f[nT, \varepsilon T]$. Тогда под значением функции $f[nT]$ будем понимать предел справа

$$f[nT] = \lim_{\varepsilon\to 0} f[nT, \varepsilon T].$$

Перейдя к безразмерному времени $\bar{t} = \dfrac{t}{T}$, получим $f_T(\bar{t}) = f(\bar{t}T)$. Тогда при перехода к дискретной функции о помощью замены $\bar{t} = n + \varepsilon$ будем иметь $f_T[n+\varepsilon] = f_T[n, \varepsilon]$. Примеры дискретных функций:

$$f[n,\varepsilon] = 1[n,\varepsilon];\ \ f[n,\varepsilon] = n + \varepsilon;\ \ f[n] = \varepsilon^{\alpha n}.$$

Введем понятия конечных разностей и сумм решетчатых функций. Пусть $f[n]$ - решетчатая функция. Разностью 1-го порядка, или первой разностью, $\Delta f[n]$ называется $\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$. Соответственно разность k -го порядка определяется равенством $\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n]$.

Можно выразить разность k -го порядка через значения функции $f[n]$ в точках $n, n+1, ... n+k$:

$$\Delta^k f[n] = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^{\ m} f[n+k-m], \tag{2.1}$$

где $C_k^{\ m} = \dfrac{k!}{m!(k-m)!}$.

В свою очередь, значение функции $f[n+k]$ может быть выражено через разности различных порядков:

$$f[n+k] = \sum_{m=0}^{k} C_k^{\ m} \Delta^m f[n].$$

Первая разность произведения двух функций $f[n]$ и $g[n]$

$$\Delta\{f[n]g[n]\} = g[n+1]\Delta f[n] + f[n]\Delta g[n].$$

Конечной суммой решетчатой функции $f[n]$ называется функция $g[n]$, определяемая выражением

$$g[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m].$$

Нетрудно видеть, что

$$\Delta g[n] = \sum_{m=0}^{n} f[m] - \sum_{m=0}^{n-1} f[m] = f[n]$$

и

$$\sum_{m=0}^{n-1} \Delta f[m] = \sum_{m=0}^{n-1} (f[m+1] - f[m]) = f[n] - f[0].$$

Конечные разности и суммы решетчатых функций являются аналогами производных и интегралов непрерывных функций. Справедлива формула суммирования по частям:

$$\sum_{m=n_0}^{n-1} f[m]\Delta g[m] = f[m]g[m]\Big|_{n_0}^{n+1} - \sum_{m=n_0}^{n} g[m+1]\Delta f[m].$$

Примеры. 1) Найдем конечные разности функции $f[n] = n^2$:

$$\Delta f[n] = (n+1)^2 - n^2 = 2n;$$
$$\Delta^2 f[n] = 2(n+1) - 2n = 2;$$
$$\Delta^3 f[n] = 2 - 2 = 0.$$

2) Определим конечные разности функции $f[n] = e^{\alpha n}$:

$$\Delta f[n] = e^{\alpha(n+1)} - e^{\alpha n} = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1);$$
$$\Delta^2 f[n] = (e^{\alpha} - 1)(e^{\alpha(n+1)} - e^{\alpha n}) = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1)^2;$$

и т.д.

3) Определим конечные сумму функции $f[n] = n$:

$$\sum_{m=0}^{n-1} f[m] = \sum_{m=0}^{n-1} m = \frac{n(n-1)}{2} = C_n^2.$$

4) Обозначим $n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1)$.

Тогда

$$\Delta n^{(k)} = (n+1)n(n-1)...(n-k+2) - n(n-1)...(n-k+1) =$$
$$= n(n-1)...(n-k+2)(n+1-n+k-1) = kn^{(k-1)}.$$

Аналогично $\sum_{m=0}^{n-1} m^{(k)} = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1}$.

2.2. Разностные уравнения

Соотношение, связывающее дискретную функцию $x[n]$ и ее разности до порядка k, называется разностным уравнением:

$$\phi(n, x[n], \Delta x[n], ..., \Delta^k x[n]) = 0 \tag{2.2}$$

Заманив разности $\Delta^i x[n]$ их значениями из формулы (2.1), разностное уравнение (2.2) можно привести к виду

$$\phi_1(n, x[n], x[n+1], ..., x[n+k]) = 0 \tag{2.3}$$

Если в уравнение (2.3) входят в явном виде $x[n]$ и $x[n+k]$, то это уравнение имеет порядок k. Разрешив уравнение (2.3) относительно $x[n+k]$, можно привести его к виду

$$x[n+k] = f(n, x[n], ...x[n+k-1]). \tag{2.4}$$

Система разностных уравнений в нормальной форма выглядит так:

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n+1] = f_1(n, x_1[n], ..., x_k[n]), \\ x_2[n+1] = f_2(n, x_1[n], ..., x_k[n]), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k[n+1] = f_k(n, x_1[n], ..., x_k[n]); \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

она же в векторной форме

$$x[n+1] = f(n, x[n]),$$

где

$$x[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ \dots\dots \\ x_k[n] \end{bmatrix}; \qquad f(n, x[n]) = \begin{bmatrix} f_1(n, x_1[n], ..., x_k[n]), \\ f_2(n, x_1[n], ..., x_k[n]), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_k(n, x_1[n], ..., x_k[n]); \end{bmatrix}.$$

От уравнения (2.4) всегда можно перейти к системе уравнений (2.5), если обозначить:

$$x[n] = x_1[n], \quad x[n+1] = x_2[n], ..., x[n+k-1] = x_k[n]$$

Тогда вместо уравнения (2.4) получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n+1] = x_2[n], \\ x_2[n+1] = x_3[n]), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k[n+1] = f(n, x_1[n], ..., x_k[n]. \end{array}\right\}$$

Совокупность дискретных функций $\xi_1 = x_1[n], ..., \xi_k = x_k[n].$ обращающая все уравнения системы (2.5) в тождества, называется решением системы (2.5).

Если правые части системы уравнений (2.5) определены, ограничены и однозначны при всех значениях аргументов, то существует и притом единственное решение системы (2.5), удовлетворяющее заданным начальным условиям $x[n_0] = x_0$. Это решение определяется последовательным вычислением. Решение $\xi_i = x_i(n, c_1, ..., c_k) \qquad (i = 1,2,...,k)$ называется общим решением системы уравнений (2.5), если путем соответствующего набора постоянных c_i можно получить любое решение.

2.3. <u>Линейные разностные уравнения</u>

Сначала рассмотрим системы линейных разностных уравнений. Неоднородная система линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами выглядит так:

$$x_i[n+k] = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}[n] x_j[n] + f_j[n] \qquad (i = 1,2,...,k), \tag{2.6}$$

или в векторном виде

$$x[n+k] = A[n]x[n] + f[n]. \tag{2.6$'$}$$

Соответствующая однородная система

$$x[n+k] = A[n]x[n]. \tag{2.7}$$

Пусть $\xi_1[n],...,\xi_k[n]$ — решения однородной системы (2.7). Обозначим

$$W[n] = \det(\xi_1[n],...,\xi_k[n]).$$

Этот определитель называется определителем Вронского.

Матрица $x_1[n] = \xi_1[n],...,\xi_k[n]$ удовлетворяет матричному уравнению

$$x[n+k] = A[n]x[n].$$

Тогда имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &x_1[n_0+1] = A[n_0]x_1[n_0], \\ &x_1[n_0+2] = A[n_0+1]x_1[n_0+1], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_1[n] = A[n-1]x_1[n-1]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\det x_1[n] = W[n] = \prod_{m=n_0}^{n-1} \det A[m] W[n_0]. \tag{2.8}$$

Получали аналог формулы Лиувилля-Оотроградокого.

Из формулы (2.8) следует, что $W[n] \neq 0$, если $\det A[m] \neq 0$ при $m = n_0,...,n-1$ и $\det W[n_0] \neq 0.$

Пусть $\xi_1[n],...,\xi_k[n]$ - линейно независимые решения системы уравнений (2.7). Тогда общее решение этой системы

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i[n]. \tag{2.9}$$

В самом деле, пусть заданы некоторые начальные условия $x[n_0] = x^0$. Для определения решения, удовлетворяющего этим начальным условиям, найдем соответствующие значения произвольных постоянных c_i. Из равенства (2.9) получим

$$x^0 = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i [n_0]. \tag{2.10}$$

Равенства (2.10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно c_i с определителем $W[n_0] = \det(\xi_1[n_0],...,\xi_k[n_0]) \neq 0$, так как $\xi_i[n]$ - линейно независимые решения. Эта система имеет единственное решение $\widetilde{c}_1,...,\widetilde{c}_k$ которому соответствует решение $\widetilde{x}[n] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n]$ системы (2.7), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Общее решение неоднородной системы (2.6)

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i [n] + \varphi[n],$$

где $\xi_1[n],...,\xi_k[n]$ - линейно независимые решения однородной системы (2.7);

$\varphi[n]$ - частное решение неоднородной системы (2.6).

Частное решение $\varphi[n]$ неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Полагаем

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} c_i [n] \xi_i [n]$$

и подставим это значение $x[n]$ в систему (2.6). Получим

$$\sum_{i=1}^{k} c_i [n+1] \xi_i [n+1] = A[n] \sum_{i=1}^{k} c_i [n] \xi_i [n] + f[n].$$

Но $\xi_i[n+1] = A[n]\xi_i[n]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i [n] \xi_i [n+1] = f[n]. \tag{2.11}$$

Определитель этой системы $W[n+1] = \det(\xi_1[n+1],...,\xi_n[n+1]) \neq 0.$

Решив систему уравнений (2.11) по правилу Крамера, будем иметь

$$\Delta c_i [n] = \frac{W_i[n]}{W[n+1]} \qquad (i = 1,2,...,k),$$

где $W_i[n] = \det(\xi_1[n],..., f^i[n],...,\xi_n[n]).$

Тогда

$$c_i[n] = \widetilde{c}_i + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{W_i[m]}{W[m+1]} \qquad (i = 1,2,...,k),$$

и

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n] + \sum_{i=1}^{k} \xi_i [n] \sum_{m=0}^{n-1} \frac{W_i[m]}{W[m+1]}.$$

Пусть теперь $x_1[n] = \xi_1[n],...,\xi_k[n]$, где $\xi_1[n],...,\xi_k[n]$ - линейно независимые решения системы (2.7). Поэтому $\det x_1[n] \neq 0$. Образуем матрицу

$$x[n,n_0]=x_1[n]x_1^{-1}[n_0].$$

Столбцы матрица $x[n,n_0]$ также являются линейно независимыми решениями системы уравнений (2.7) и составляют фундаментальную матрицу решений система (2.7). Отметим следующие свойства фундаментальной матрицы решений:

1. $x[n_0,n_0]=x_1[n_0]x_1^{-1}[n_0]=E;$

2. $x[n+1,n_0]=x_1[n+1]x_1^{-1}[n_0]=A[n]x_1[n]x_1^{-1}[n_0]=A[n]x[n,n_0]$

т.е. фундаментальная матрица решений удовлетворяет матричному уравнению

$$x[n+1]=A[n]x[n];$$

3. $x[n_1,n_0]x[n_0,n_2]=x_1[n_1]x_1^{-1}[n_0]x_1[n_0]x_1^{-1}[n_2]=x[n_1,n_2].$ - групповое свойство фундаментальной матрицы решений;

4. $x[n_2,n_1]=x_1[n_2]x_1^{-1}[n_1]=(x_1[n_1]x_1^{-1}[n_2])^{-1}=x^{-1}[n_1,n_2].$

Если известна фундаментальная матрица решений, то решение $x[n]$ однородной системы (2.7), удовлетворяющее заданным начальным условиям $x[n_0]=x^0$ имеет вид

$$x[n]=x[n,n_0]x^0.$$

В самом деле,

$$x[n_0]=x[n_0,n_0]x^0=x^0 \text{ и } x[n+1]=x[n+1,n_0]x^0=A[n]x[n,n_0]x^0=A[n]x[n].$$

Решение неоднородной системы (2.6) ищем в виде $x[n]=x[n,n_0]y[n].$ Подставив это выражение в уравнение (2.6), получим

$$x[n+1,n_0]y[n+1]=A[n]x[n,n_0]y[n]+f[n],$$

или

$$x[n+1,n_0]\Delta y[n]=f[n],$$

откуда

$$\Delta y[n]=x^{-1}[n+1,n_0]f[n]=x[n_0,n+1]f[n].$$

Просуммировав обе части равенства, найдем

$$y[n]=\sum_{m=n_0}^{n-1}x[n_0,m+1]f[m]+y[n_0].$$

Учитывая, что $y[n_0]=x^0,$ получим

$$x[n]=x[n,n_0]x^0+\sum_{m=n_0}^{n-1}x[n,m+1]f[m]. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) представляет собой формулу Коши дня систем линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами.

Разностное уравнение вида

$$a_0[n]x[n+k]+a_1[n]x[n+k-1]+...+a_k[n]x[n]=f[n], \tag{2.13}$$

где $a_0[n]\neq 0,\ \ a_k[n]\neq 0,$ называется неоднородным линейным разностным уравнение k -ого порядка. Если $f[n]\equiv 0,$ т.е. уравнение имеет вид

$$a_0[n]x[n+k]+a_1[n]x[n+k-1]+\ldots+a_k[n]x[n]=0, \qquad (2.14)$$

то уравнение называется однородным.

Обозначив

$$x[n]=x_1[n],$$
$$x[n+k]=x_2[n],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x[n+k-1]=x_k[n].$$

сведем уравнение (2.13) к системе k уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1[n+1]=x_2[n], \\ x_2[n+1]=x_3[n], \\ x_{k-1}[n+1]=x_k[n], \\ x_k[n+1]=-\dfrac{a_k[n]}{a_0[n]}x_1[n]-\ldots-\dfrac{a_1[n]}{a_0[n]}x_k[n]+\dfrac{1}{a_0[n]}f[n]. \end{cases}$$

Получили систему уравнений вида (2.6), где

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_k}{a_0} & -\dfrac{a_{k-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{k-2}}{a_0} & \ldots & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, f[n]=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{f[n]}{a_0[n]} \end{bmatrix}.$$

Начальные условия задаются в виде

$$x[n_0]=x_0,\quad x[n_0+1]=x_1,\ldots,x[n_0+k-1]=x_{k-1}. \qquad (2.15)$$

Пусть $\xi_1[n],\ldots,\xi_k[n]$ - линейно независимые решения однородного уравнения (2.14). Тогда определитель Вронского

$$W[n]=\begin{bmatrix} \xi_1[n]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\xi_k[n] \\ \xi_1[n+1]\ldots\ldots\ldots\ldots\xi_k[n+1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_1[n+k-1]\ldots\xi_k[n+k-1] \end{bmatrix}$$

Учитывая, что

$$\det A[n]=(-1)^{k+1}\left(-\frac{a_k[n]}{a_0[n]}\right)=(-1)^k\left(\frac{a_k[n]}{a_0[n]}\right),$$

получим формулу Лиувилля-Остроградского для уравнения (2.14):

$$W(\xi_1[n],\ldots,\xi_k[n])=\prod_{m=n_0}^{n-1}(-1)^k\frac{a_k[m]}{a_0[m]}W(\xi_1[n_0],\ldots,\xi_k[n_0]).$$

Общее решение однородного уравнения (2.14)

$$x[n]=\sum_{i=1}^{k}c_i\xi_i[n],$$

а общее решение неоднородного уравнения (2.13)

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i[n] + \varphi[n],$$

где $\xi_1[n],...,\xi_k[n]$ - линейно независимые решения однородного уравнения;

$\varphi[n]$ - частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение $\varphi[n]$ может быть найдено методом вариации производной постоянной. Пусть решение уравнения (2.13) имеет вид

$$x[n] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n].$$

Тогда

$$x[n+1] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n+1] \xi_i[n+1] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n+1] \xi_i[n+1] - \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+1] + \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+1]$$

Полагаем $\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+1] = 0.$ Тогда $x[n+1] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+1].$

Аналогично $x[n+2] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+2],$ причем $\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+2] = 0,$ ……

$x[n+k] = \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+k],$ и $\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] = 0.$

Подставив значения $x[n],...,x[n+k]$ в уравнение (2.13) и учитывая, что $\xi_i[n]$ представляет собой решение однородного уравнения (2.14), получим

$$a_0[n] \left(\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] + \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+k] \right) + a_1 \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n+k-1] + ...$$

$$... + a_k \sum_{i=1}^{k} c_i[n] \xi_i[n] = f[n]$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] = \frac{f[n]}{a_0[n]}.$$

Относительно $\Delta c_i[n] \quad (i = 1,2,...,k)$ получили систему из k линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+1] = 0 \\ &.................................... \\ &\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i[n] \xi_i[n+k] = \frac{f[n]}{a_0[n]}. \end{aligned} \right\} \qquad (2.16)$$

Определитель этой системы

$$W[n+1]=\begin{vmatrix}\xi_1[n+1]................\xi_k[n+1]\\ ....\\ \xi_1[n+k]..............\xi_k[n+k]\end{vmatrix}\neq 0,$$

поэтому система имеет единственное решение. Решив систему уравнений (2.16) по правилу Крамера, будем иметь

$$\Delta c_i[n]=(-1)^{k+i}\,\frac{f[n]}{a_0[n]}\frac{W_i[n+1]}{W[n+1]}\qquad (i=1,2,...,k) \tag{2.17}$$

где

$$W_i[n+1]=\begin{vmatrix}\xi_i[n+1]........\xi_{i-1}[n+1]\xi_{i+1}[n+1]..........\xi_k[n+1]\\ ....\\ \xi_1[n+k].......\xi_{i-1}[n+k]\xi_{i+1}[n+k].......\xi_k[n+k]\end{vmatrix}.$$

Из равенств (2.17) найдем

$$c_i[n]=\widetilde{c}_i+(-1)^{k+i}\sum_{m-n_0}^{n\text{-}1}\frac{f[m]}{a_0[m]}\frac{W_i[m+1]}{W[m+1]}$$

Тогда

$$x[n]=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{c}_i\xi_i[n]+\sum_{m-n_0}^{n\text{-}1}\frac{f[m]}{a_0[m]}\frac{G[n,m+1]}{W[m+1]} \tag{2.18}$$

где $G[n,m-1]=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+i}\xi_i[n]W_i[m+1]$

Нетрудно видеть, что

$$G[n,m+1]=\begin{vmatrix}\xi_1[m+1]..............\xi_k[m+1]\\ ....\\ \xi_1[m+k+1]...\xi_k[m+k+1]\\ \xi_1[n]..........................\xi_k[n]\end{vmatrix},$$

отсюда следует, что

$$K[n,m+1]=\frac{G[n,m+1]}{W[m+1]}=0 \text{ при } n=m+1;...n=m+k-1$$

и $K[n,m+1]=1$ при $n=m+k$ или

$K[m+i,m+1]=0$ при $i=1,2,...,k-1;K[m+k,m+1]=1$.

Формула (2.18) примет вид

$$x[n]=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{c}_i\xi_i[n]+\sum_{m-n_0}^{n\text{-}1}\frac{f[m]}{a_0[m]}K[n,m+1]. \tag{2.19}$$

Здесь $\sum_{m-n_0}^{n\text{-}1}\frac{f[m]}{a_0[m]}K[n,m+1]=\varphi[n]$ - частное решение неоднородного уравнения (2.13).

Полагая в равенстве (2.19) $n=n_0,...,n=n_0+k-1$ и учитывая начальные условия (2.15) имеем

$$x[n_0] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n_0] = x_0;$$

$$x[n_0+1] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n_0+1] + \frac{f[n_0]}{a_0[n_0]} K[n_0+1, n_0+1] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n_0+1] = x_1;$$

....

$$x[n_0+k-1] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n_0+k-1] + \frac{f[n_0]}{a_0[n_0]} K[n_0+k-1, n_0+1] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f[n_0+k-2]}{a_0[n_0+k-2]} K[n_0+k-1, n_0+k-1] = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{c}_i \xi_i [n_0+k-1] = x_{k-1}.$$

Получим k уравнений относительно k неизвестных $\widetilde{c}_i$. Определитель этой системы $W(\xi_1[n_0],\ldots,\xi_k[n_0])$,

Поэтому система имеет единственное решение $\widetilde{c}_i = a_i$. Тогда $\bar{x}[n] = \sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i [n]$ будет решением однородного уравнения (2.14), удовлетворяющим начальным условиям (2.15).

Выражение (2.19) запишем в виде

$$x[n] = \bar{x}[n] + \sum_{m-n_0}^{n\text{-}1} \frac{f[m]}{a_0[m]} K[n,m+1]. \qquad (2.20)$$

Здесь $x[n]$ - решение неоднородного уравнения (2.13) при начальных условиях (2.15);

$\bar{x}[n]$ - решение соответствующего однородного уравнения (2.14), удовлетворяющее начальным условиям (2.15);

$K[n,m+1]$ - решение однородного уравнения (2.14), удовлетворяющее начальным условиям:

$K[n,m+1] = 0$ при $n = m+1;\ldots n = m+k-1$,

$K[n,m+1] = 1$ при $n = m+1;\ldots n = m+k$.

В самом деле, $\bar{x}[n] = \sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i [n]$ - решение однородного уравнения (2.14) как линейная комбинация его решений $\xi_i[n]$. Удовлетворение начальным условиям (2.15)следует из способа определения произвольных постоянных $\widetilde{c}_i$.

Легко показать, что функция $K[n,m+1]$ является решением однородно уравнения (2.14). Действительно,

$$a_0[n]K[n+k,m+1]+a_1[n]K[n+k-1,m+1]+...+a_k[n]K[n,m+1]=$$

$$=\frac{1}{W[m+1]}\left\{a_0[n]\begin{vmatrix}\xi_1[m+1]..............\xi_k[m+1]\\ ....\\ \xi_1[m+k+1]...\xi_k[m+k+1]\\ \xi_1[n]........................\xi_k[n]\end{vmatrix}+...+a_k[n]\begin{vmatrix}\xi_1[m+1]..............\xi_k[m+1]\\ ....\\ \xi_1[m+k+1]...\xi_k[m+k+1]\\ \xi_1[n]........................\xi_k[n]\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{W[m+1]}\begin{vmatrix}\xi_1[m+1]..\xi_k[m+1]\\ \xi_1[m+k-1]..\xi_k[m+k-1]\\ a_0[n]\xi_1[n+k]+...+a_k[n]\xi_1[n]...a_0[n]\xi_k[n+k]+...+a_k[n]\xi_k[n]\end{vmatrix}=0$$

Формула (2.20) носит название формулы Коши для линейного разностного уравнения k -го порядка.

2.4. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

Неоднородная система линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x_i[n+1]=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_j[n]+f_i[n] \qquad (i=1,2,...,k). \tag{2.21}$$

или в векторной форме

$$x[n+1]=Ax[n]+f[n]; \tag{2.21$'$}$$

соответствующая ей однородная система

$$x[n+1]=Ax[n], \tag{2.22}$$

где А - матрица размера $(k\times k)$; $x[n]$, $f[n]$ - столбцы $(k\times 1)$.

Рассмотрим определение решения однородной системы (2.22). Выполнив невырожденное преобразование

$$x=Ty,$$

Приведем систему уравнений (2.22) к виду

$$y[n+1]=\zeta y[n], \tag{2.23}$$

где матрица $\zeta=T^{-1}AT$ представляет собой жорданову форму матрицы А

$$\zeta=\begin{vmatrix}K_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & K_i\end{vmatrix};$$

здесь $K_i=\begin{vmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i\end{vmatrix}$ - клетка Жордана порядка r_i, отвечающая собственному значению λ_i.

Подсистема системы уравнений (2.23), соответствующая клетке K_i. будет

$$\left.\begin{aligned}
&y_{j+1}[n]=\lambda_i y_{j+1}[n]+y_{j+2}[n],\\
&y_{j+2}[n]=\lambda_i y_{j+1}[n]+y_{j+3}[n],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{j+r_i-1}[n]=\lambda_i y_{j+r_j-1}[n]+y_{j+r_i}[n],\\
&y_{j+r_i}[n]=\lambda_i y_{j+r_i}[n].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

Введем новые функции $z_{j+s}[n] \quad (s=1,2,...,r_i)$ с помощью равенств

$$y_{j+s}[n]=z_{j+s}[n]\lambda_i^n\,. \qquad (2.25)$$

Тогда система уравнений (2.24) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta z_{j+1}[n]=\frac{1}{\lambda_i}z_{j+2}[n],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta z_{j+r_i-1}[n]=\frac{1}{\lambda_i}z_{j+r_i}[n],\\
&\Delta z_{j+r_i}[n]=0.
\end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы

$$\left.\begin{aligned}
&z_{j+r_i}[n]=c_{i0},\ z_{j+r_i-1}[n]=c_{i1}+\frac{c_{i0}}{\lambda_i}n,...,\\
&z_{j+1}[n]=\frac{c_{i0}}{(r_i-1)!\lambda_i}\quad \mathrm{n}^{r_i-1}+...+\frac{c_{ir_i-2}}{\lambda_i}\mathrm{n}+\mathrm{c}_{ir_i-1}
\end{aligned}\right\}$$

равенство (2.25), получим

$$\left.\begin{aligned}
&y_{j+r_i-1}[n]=c_{i0}\lambda_i^{\ n},\\
&y_{j+r_i-2}[n]=c_{i0}\lambda_i^{\ n-1}n+c_{i0}\lambda_i^{\ n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{j+1}[n]=c_{i0}c_n^{r_i-1}\lambda_i^{\ n-r_i-1}+...+c_{ir_i-1}\lambda_i^{\ n}
\end{aligned}\right\}$$

Аналогичные результаты могут быть найдены для остальных клеток Жордана матрицы ζ . Возвращаясь к исходным переменным, $x_i[n]$ получим общее решение однородной системы (2.22)

$$x_i[n]=\sum_{j=1}^{l}P_{ij}[n]\lambda_i^n \quad (i=1,2,...,k) \qquad (2.26)$$

Здесь $P_{ij}[n]$ - полиномы системы $\le r_i-1$, коэффициенты которых могут быть определены путем подстановки (2.26) в исходную систему уравнений (2.22).

Таким образом, для решения однородной системы разностных уравнений (2.22) необходимо определить корни λ_j характеристического уравнения матрицы А, записать решение в виде (2.26) и определить полиномы $P_{ij}[n]$. Частное решение неоднородной системы уравнений (2.21) может быть найдено методом вариации произвольной постоянной. Когда функции $f_i[n]$ имеют вид $f_i[n]=c_i\alpha^n n^\beta$. (α - в общем случае комплексное число; $\beta\ge 0$ - целое), частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов аналогично тому, как это делается в теории дифференциальных уравнений. Здесь могут иметь место два случая.

1. Пусть число α не является корнем характеристического уравнения, т.е.

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

Тогда частное решение отыскивается в виде

$$x_i[n]=P_i^{\beta}[n]\alpha^n \qquad (i=1,2,...,k)$$

где $P_i^{\beta}[n]$ - многочлен степени $\beta.$ Его коэффициенты определяются путем подстановки $x_i[n]$ в исходную систему уравнений.

2. Если α является корнем характеристического уравнения, то частное решение отыскивается в виде

$$x_i[n]=P_i^{\beta+e}[n]\alpha^n \qquad (i=1,2,...,k)$$

где $P_i^{\beta+e}[n]$ - многочлен степени $\beta.+e,$ e - наивысший показатель степени у элементарных делителей матрица $A-\lambda E,$ соответствующих собственному значению α .

Пример. Найти общее решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x_1[n+1]=x_2[n],\\ &x_2[n+1]=-2x_1[n]-3x_2[n]+n^2.\end{aligned}\right\}$$

Найдем вначале общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=0.$$

Его корни $\lambda_i=-2,$ $\lambda_2=-1$.

Составляющую решения, соответствующую $\lambda_i=-2,$ ищем в виде

$x_1=a_1(-2)^n;$ $x_2=a_2(-2)^n.$

Для определения a_1 и a_2 имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(-2)^{n+1}a_1=(-2)^n a_2,\\ &(-2)^{n+1}a_2=(-2)^{n+1}a_1-3(-2)^n a_2.\end{aligned}\right\}$$

Ее решение $-2a_1=a_2.$

Аналогично для $\lambda_2=-1$ ищем $x_1[n]=b_1(-1)^n;$ $x_2[n]=b_2(-1)^n.$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{n+1}b_1=(-1)^n b_2,\\ &(-1)^{n+1}b_2=-2(-1)^n b_1-3(-1)^n b_2.\end{aligned}\right\}$$

Откуда $-b_1=b_2.$

Общее решение однородной системы

$$\left.\begin{aligned} &x_1[n]=c_1(-2)^n+c_2(-1)^n,\\ &x_2[n]=-2c_1(-2)^n-c_2(-1)^n.\end{aligned}\right\}$$

Частное решение неоднородной системы ищем в вида

$$\bar{x}_1[n] = A_0 + A_1 n + A_2 n^2,$$
$$\bar{x}_2[n] = B_0 + B_1 n + B_2 n^2.$$

Дня определения коэффициентов подставим $\bar{x}_1[n]$ и $\bar{x}_2[n]$ в исходную систему уравнений и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n. Получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &A_0 + A_1 + A_2 = B_0,\\ &A_1 + 2A_2 = B_1,\\ &A_2 = B_2,\\ &B_0 + B_1 + B_2 = -2A_0 - 3B_0,\\ &B_0 + 2B_2 = -2A_1 - 3B_1,\\ &B_2 = -2A_2 - 3B_2 + 1. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение: $A_2 = B_2 = \dfrac{1}{6}$; $A_1 = -\dfrac{5}{18}$; $B_1 = \dfrac{1}{18}$; $A_0 = \dfrac{1}{27}$; $B_0 = -\dfrac{2}{27}$.

Тогда общее решение неоднородной системы уравнений будет

$$x_1[n] = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + \frac{1}{54}(2 - 15n + 9n^2)$$
$$x_2[n] = -2c_1(-2)^n - c_2(-1)^n + \frac{1}{54}(-4 + 3n + 9n^2).$$

Формула Коши дня системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x[n] = x[n - n_0]x_0 + \sum_{m=n_0}^{n-1} x[n - m - 1]f[m].$$

Здесь $x_0 = x[n_0]$ - вектор начальных условий; $x[n]$ - фундаментальная матрица решений, причем $x[n] = A^n$.

Рассмотрим способ определения фундаментальной матрицы решений. Пусть $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$) - характеристический многочлен матрицы А. В силу теорема Кэли-Гамильтона $D(A) = 0$ • Пусть теперь $N(\lambda)$ - многочлен степени $n > k$. Тогда

$$N(\lambda) = D(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

причем степень остатка $R(\lambda) \le k - 1$.

Если λ_i - корень характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$,

$$N(\lambda_i) = R(\lambda_i) \quad \text{и} \quad N(A) = R(A) \qquad (2.27)$$

Если λ_i - простой корень характеристического уравнения, то для определения коэффициентов b_j, полинома $R(\lambda) = b_0^{k-1} + \ldots = b_k$ используется k -равенств (2.27).

Если λ_i - корень кратности r_i, то используется равенства

$$\left.\frac{d^m}{d\lambda^m} N(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^m}{d\lambda^m} R(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_i} \qquad (m = 0,1,\ldots,r_i - 1)$$

Пример. Найти фундаментальную матрицу решении системы линейных разностных уравнении

$$\left.\begin{aligned} x_1[n+1] &= x_2[n], \\ x_2[n+1] &= -2x_1[n] - 3x_2[n]. \end{aligned}\right\}$$

Матрица A системы имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Будут $\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -1$.

Многочлен $R(\lambda) = b_0\lambda + b_1$, причем для определения b_0 и b_1 имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} (-2)^n &= -2b_0 + b_1, \\ (-1)^n &= -b_0 + b_1, \end{aligned}\right\} \text{ откуда } \quad \begin{aligned} b_0 &= (-1)^n - (-2)^n, \\ b_1 &= 2(-1)^n - (-2)^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$A^n = R(A) = b_0 A + b_1 E = \begin{bmatrix} 2(-1)^n - (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n \\ -2(-1)^n + 2(-2)^n & (-1)^n + (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим линейное неоднородное разностное уравнение k -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \ldots + a_k x[n] = f[n] \tag{2.28}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$a_0 x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \ldots + a_k x[n] = 0 \tag{2.29}$$

Решение однородного уравнения. (2.29) ищем в виде $x[n] = a\lambda^n$.

Подставив в уравнение (2.29), будем иметь

$$a\lambda^n (a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k) = 0$$

Или

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k = 0 \tag{2.30}$$

Таким образом, λ является корнем характеристического уравнения (2.30).

Пусть корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения (2.30) вещественны и различны. Тогда решения $x_i = \lambda_i^k\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ образуют линейно независимую систему решений. Определитель Вронского

$$W(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} = \prod_{k \ge i \ge j \ge 1} (\lambda_i - \lambda_j) \ne 0,$$

и общее решение уравнения (2.29)

$$x[n]=\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \qquad (2.31)$$

где $c_i,\dots,c_k$ - произвольные постоянные.

Рассмотрим случай комплексных корнай характеристического уравнения. Пусть $\lambda_i=\rho_i(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i)$ - комплексный корень уравнения (2.30). Тогда $\overline{\lambda_i}=\rho_i(\cos\varphi_i - j\sin\varphi_i)$ также является корнем характеристического уравнения. Выделим из общего решения (2.31) слагаемые, соответствующие комплексным корням λ_i и $\overline{\lambda_i}$ характеристического уравнения (2.30):

$$c_i\lambda_i^{\,n}+c_{i+1}\overline{\lambda_i}^{\,n}=c_i\rho_i^{\,n}(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i)+c_{i+1}\rho_i^{\,n}(\cos\varphi_i - j\sin\varphi_i)=\rho_i^{\,n}(c_i^1\cos\varphi_i + c_i^2\sin\varphi_i),$$

где $c_i^1=c_i+c_{i+1}, c_i^2=j(c_i+c_{i+1})$.

Таким образом, комплексным корнам характеристического уравнения (2.30) соответствуют в общем решении (2.31) вещественные составляющие вида $\rho^n(c_1\cos\varphi + c_2\sin\rho)$. Если корни характеристического уравнения кратные, то общее решение $x[n]$ имеет вид

$$x[n]=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^n P_i[n],$$

причем $P_i[n]$ - многочлены степени r_i-1, где r_i - кратность корня λ_i характеристического уравнения (2.30).

Частное решение неоднородного уравнения (2.28) в общем случае может быть найдено методом вариации произвольное постоянной. Если правая часть $f[n]$ неоднородного уравнения имвет вид $f[n]=c\alpha^n n^\beta$ где α - любое число, в том числе и комплексное $\beta\ge 0, c=const$, то частное решение может быть определено методом неопределенных коэффициентов. Здесь имеют место два случая.

1. Число α не является норнам характеристического уравнения (2.30). Частное решение отыскивается в виде

$$\overline{x}[n]=P^\beta[n]\alpha^n,$$

где $P^\beta[n]$ - многочлен степени β с неопределенными коэффициентами. Коэффициента многочлена $P^\beta[n]$ определяются путей подстановки $\overline{x}[n]$ в уравнение (2.28) в приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях n.

2. Число α является корнем характеристического уравнения (2.30) с кратностью r. Частное решение неоднородного уравнения (2.28) отыскивается в виде

$$\overline{x}[n]=P^{\beta+r}[n]\alpha^n,$$

где $P^{\beta+r}[n]$ - многочлен степени $\beta+r$ с неопределенными коэффициентами.

<u>Пример</u>. Найти решение уравнения

$$x[n+3]-4x[n+2]+5x[n+1]-2x[n]=n,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x[0]=x[1]=x[2]=0.$$

Вначале определим общее решение однородного уравнения

$$x[n+3]-4x[n+2]+5x[n+1]-2x[n]=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0;$$

его корим $\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 2.$

Общее решение однородного уравнения

$$x[n] = c_1 + c_2 n + c_3 2^n.$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов. Согласно изложенному выше, имеем

$$\bar{x}[n] = (a_0 + a_1 n)n^2.$$

Подставив $\bar{x}[n]$ в исходное уравнение, получим

$$[a_0 + a_1(n+3)](n+3)^2 - 4[a_0 + a_1(n+2)](n+2)^2] +$$
$$+5[a_0 + a_1(n+1)](n+1)^2 - 2(a_0 + a_1(n))]n^2 = n,$$

откуда $a_1 = -\dfrac{1}{6}, a_0 = 0.$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$x[n] = c_1 + c_2 2^n + c_3 2^n - \frac{n^3}{6}$$

Произвольные постоянные определим, исходя из заданных начальных условий. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &c_1 + c_3 = 0, \\ &c_1 + c_2 + 2c_3 = \frac{1}{6}, \\ &c_1 + 2c_2 + 4c_3 = \frac{4}{3}, \end{aligned}\right\}$$

откуда $c_1 = -1; c_2 = -\dfrac{5}{6}; c_3 = 1.$

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$x[n] = -1 - \frac{5}{6}n + 2^n - \frac{n^3}{6}\ .$$

3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

3.1. Функции-оригиналы. Формула обращения.

Введем понятие дискретных функций-оригиналов. Функция $x[n]$ называется функцией-оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $x[n]$=0 при $n < 0$;

2. $x[n]$ растет не быстрее некоторой показательной функции, т.е. существуют такие $M > 0$ и $\sigma_0 \geq 0$, что

$$\left|x[n]\right| \le Me^{\sigma_0 n}.$$

Число σ_0 называется показателем роста, или абсциссой абсолютной сходимости.

Изображением по Лапласу дискретной функции $x[n]$ называется функция $x^*(q)$ комплексной переменной $q = \sigma + j\overline{\omega}$, удовлетворяющая соотношению

$$x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} x[n]. \tag{3.1}$$

Функция $x^*(q)$ называется изображением функции $x[n]$; операция дискретного преобразования обозначается так:

$$x^*(q) = D\{x[n]\}; \text{ или } x^*(q) \underset{0}{\overset{0}{\rightarrow}} x[n].$$

Свойства изображения $x^*(q)$ характеризует следующая **теорема**:

Функция $x^*(q)$ определена в полуплоскости $\mathrm{Re}\ q > \sigma_0$ и является в ней аналитической функцией.

Доказательство. Исследуем сходимость ряда (3.1):

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} x[n]\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\sigma} Me^{\sigma_0 n} = \sum_{n=0}^{\infty} Me^{-(\sigma-\sigma_0)n} = \frac{Me^{\sigma}}{e^{\sigma} - e^{\sigma_0}}.$$

Отсюда следует, что ряд (3.1) сходится, прием абсолютно, в полуплоскости $\mathrm{Re}\ q > \sigma_0$. Покажем возможность полученного дифференцирования ряда (3.1). Дня этого исследуем сходимость ряда, составленного из производных:

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} x[n]\right)'\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\sigma}\left|x[n]\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} Mne^{-(\sigma-\sigma_0)n} \le \sum_{n=0}^{\infty} Me^{-(\sigma-\sigma_0')n} = \frac{Me^{\sigma}}{e^{\sigma} - e^{\sigma_0'}}.$$

Где $\sigma_0' = \sigma_0 + \alpha$ (α -произвольное малое число)

Пример. Определим изображения некоторых дискретных функций:

1) $x[n] = 1[n]; x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} \cdot 1 = \dfrac{e^q}{e^q - 1}.$

2) $x[n] = e^{\alpha n}; x^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} \cdot e^{\alpha n} = \dfrac{e^q}{e^q - e^{\alpha}}.$

3) $x[n] = e^{n^2}$; эта дискретная функция не является функцией-оригиналом и не имеет изображения.

Изображение функции $x[n]$ преобразуемой по Лапласу, является единственным. В самом деле, пусть $x_1^*(q) = D\{x[n]\}$ и $x_2^*(q) = D\{x[n]\}$. Тогда

$$x_1^*(q) - x_2^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}(x[n] - x[n]) \equiv 0,$$

Т.е. $x_1^*(q) \equiv x_2^*(q)$.

Изображение $x^*(q)$ является функцией e^q, поэтому $x^*(q)$ -периодическая функция с периодом $T = 2\pi j$.

В ряде случаев используется Z -преобразование, определяемое выражением

$$x_z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x[n],$$

которое получается из $x^*(q)$ с помощью замены $e^q = z$. Получим формулу обращения, позволяющую определить по известному изображению функцию-оригинал. Для этого умножим обе части равенства (3.1) на e^{mq} и проинтегрируем по отрезку $L: q = \sigma + j\overline{\omega};\ -\pi < \overline{\omega} \le \pi$, причем $\sigma > \sigma_0$ (рис. 8). Получим

$$\int_{\sigma-j\pi}^{\sigma+j\pi} x^*(q)e^{mq}dq = \int_{\sigma-j\pi}^{\sigma+j\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n-m)q} x[n]dq = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \int_{\sigma-j\pi}^{\sigma+j\pi} e^{-(n-m)q}dq = x[m]\cdot 2\pi j.$$

При этом

$$\int_{\sigma-j\pi}^{\sigma+j\pi} e^{-(n-m)q}dq = \frac{e^{-(n-m)(\sigma+j\pi)} - e^{-(n-m)(\sigma-j\pi)}}{n-m} = \frac{e^{-(n-m)\sigma}}{n-m}(e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)}) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n \ne m; \\ 2\pi j, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

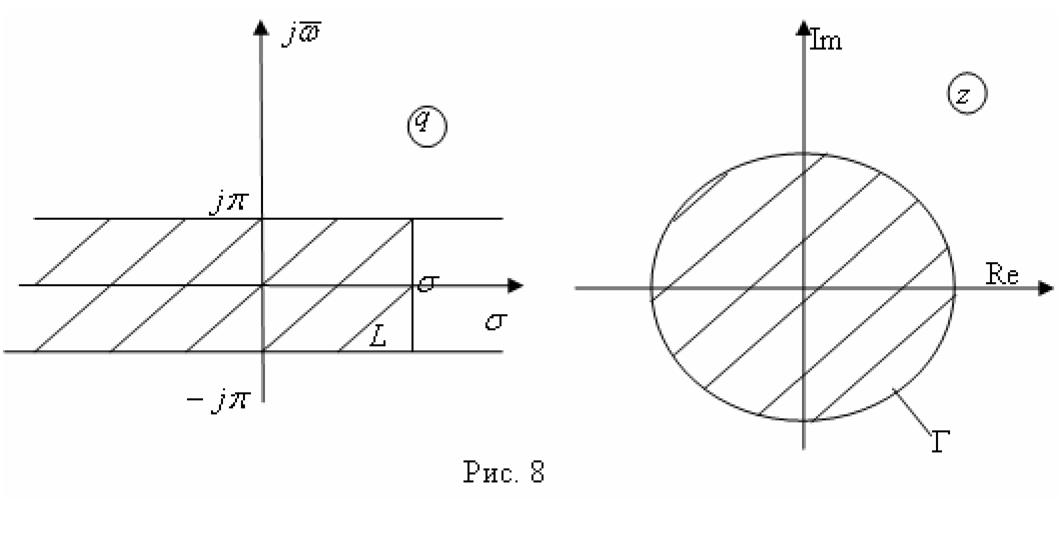


Рис. 8

Тогда

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\pi}^{\sigma + j\pi} x^*(q)e^{nq}dq. \tag{3.2}$$

Интеграл (3.2) можно вычислить следующим образом. С помощью замены $e^q = z$ отобразим левую полу полосу $\operatorname{Re} q \le \sigma, -\pi < \operatorname{Im} q \le \pi$ на внутренность круга $|z| \le e^{\sigma}$ (рис. 8). Обозначив

$$x^*[n]\Big|_{e^q = z} = x_z(z),$$

Получим

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\pi}^{\sigma + j\pi} x^*(q)e^{nq}dq = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} x_z(z)z^{n-1}dz = \sum_{\nu} Выч[x_z(z)z^{n-1}], \tag{3.3}$$

Причем вычеты берутся по всем особым точкам, расположенным внутри контура Г.

Пример. Пусть $x^*(q) = \dfrac{e^q}{\left(e^q - e^{\alpha}\right)^2}$. определим соответствующую функцию-оригинал:

$$x[n] = \sum_{\nu} Выч[\frac{z^n}{\left(z - e^{\alpha}\right)^2} = \lim_{z \to e^{\alpha}} \frac{d}{dz} z^n = ne^{\alpha n}.$$

3.2 <u>Свойства дискретного преобразования Лапласа</u>

1. **<u>Линейность</u>**. Изображение линейной комбинации дискретных функций равно линейной комбинации изображений этих функций, т.е.

$$D\{\sigma_1 x_1[n] + \sigma_2 x_2[n]\} = \sigma_1 X_1^*(q) + \sigma_2 X_2^*(q).$$

В самом деле,

$$D\{\sigma_1 x_1[n] + \sigma_2 x_2[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}\left(\sigma_1 x_1[n] + \sigma_2 x_2[n]\right) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}\sigma_1 x_1[n] + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}\sigma_2 x_2[n] = \sigma_1 X_1^*(q) + \sigma_2 X_2^*(q).$$

<u>Пример</u>. Найти изображение функции $x[n] = \sin\omega_0 n.$

Имеем

$$\sin\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}$$

Тогда

$$X^*(q) = D\left\{\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{e^q}{e^q - e^{j\omega_0}} - \frac{e^q}{e^q - e^{-j\omega_0}}\right] = \frac{e^q \sin\omega_0}{e^{2q} - 2e^q\cos\omega_0 + 1}.$$

2. **Теорема сдвига**. Для любого целого $k > 0$

$$D\{x[n+k]\} = e^{kq} X^*(q).$$

Т.е. запаздывание оригинала на k соответствует умножению изображения на e^{-kq}

Доказательство

$$D\{x[n-k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} x[n-k] = \sum_{m=-k}^{\infty} e^{-(k+m)q} x[m] = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(k+m)q} x[m] = e^{-kq} X^*(q).$$

Здесь учтено, что $x[n] = 0$ при $n < 0$.

Найдем изображение $x[n+k] = 0$ при $k > 0$:

$$D\{x[n+k]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq} x[n+k] = \sum_{m=k}^{\infty} e^{-(m-k)q} x[m] =$$

$$= e^{kq}\left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-mq} x[m] - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mq} x[m]\right) = e^{kq}\left(X^*(q) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mq} x[m]\right)$$

Если $x[0] = ... = x[n-1] = 0,$ то

$$D\{x[n+k]\} = e^{kq} x^*(q).$$

3. **Теорема смещения в области изображений**.

Смещение в области изображений на $\pm\lambda$ соответствует умножению оригинала на $e^{\pm\lambda n}$

Доказательство:

$$D\left\{e^{\pm\lambda n} x[n]\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(q\pm\alpha)} x[n] = X^*(q \pm \lambda).$$

Пример.

$$D\left\{e^{-\lambda n} \sin\omega_0 n\right\} = \frac{e^{q+\lambda} \sin\omega_0}{e^{2(q+\lambda)} - 2e^{(q+\lambda)} \cos\omega_0 + 1}.$$

4. **Изображение разностей**. Изображение первой разности

$$D\left\{\Delta x[n]\right\} = (e^q - 1) X^*(q) - e^q x[0],$$

И для разности k-го порядка

$$D\left\{\Delta^k x[n]\right\} = (e^q - 1)^k X^*(q) - e^q \sum_{m=0}^{k-1} (e^q - 1)^{k-1-m} \Delta^m x[0]. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Имеем $\Delta x[n] = x[n+1] = x[n].$ Тогда

$$D\left\{\Delta x[n]\right\} = e^q \left\{x^*(q) - x[0]\right\} - x^*(q) = \left(e^q - 1\right) x^*(q) - e^q x[0].$$

Докажем формулу (3.4) методом математической индукции. Пуста формула (3.4) верна для $m = k-1$.

Докажем, что она верна для $m = k$. Имеем

$$D\left\{\Delta^k x[n]\right\} = D\left\{\Delta^{k-1} x[n+1] - \Delta^{k-1} x[n]\right\} =$$
$$= e^q \left\{ \left(e^q - 1\right)^{k-1} X^*(q) - e^q \sum_{m=0}^{k-2} \left(e^q - 1\right)^{k-2-m} \Delta^m x[0] \right\} - \Delta^{k-1} x[0] -$$
$$- \left[\left(e^q - 1\right)^{k-1} X^*(q) - e^q \sum_{m=0}^{k-2} \left(e^q - 1\right)^{k-2-m} \Delta^m x[0] \right] =$$
$$= \left(e^q - 1\right)^k X^*(q) - e^q \sum_{m=0}^{k-1} \left(e^q - 1\right)^{k-1-m} \Delta^m x[0].$$

Если разрешить полученное соотношение относительно $X^*(q),$ то

$$X^*(q) = \frac{e^q}{e^q - 1} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\Delta^m x[0]}{\left(e^q - 1\right)^m} + \frac{1}{\left(e^k - 1\right)^k} D\left\{\Delta^k x[n]\right\}. \quad (3.5)$$

Пример.

1) Определить изображение для функции $x[n] = n.$

Имеем

$$\Delta x[n] = n + 1 - n = 1; \quad \Delta^2 x[n] = 0.$$

Тогда

$$X^*(q) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^2}.$$

2) Пусть

$$x[n] = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n^2}{2}.$$

Тогда

$$\Delta x[n] = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{n(n-1)}{2} n$$
$$\Delta^2 x[n] = 1$$
$$\Delta^3 x[n] = 0.$$

Согласно формуле (3.5),

$$X^*(q) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^2}.$$

Аналогично

$$D\left\{C_n^m\right\} = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^{m+1}}.$$

Здесь

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n^m}{m!}.$$

5. **Изображение суммы**. Суммированию в области оригиналов соответствует деление на $\left(e^q - 1\right)$ в области изображений

$$D\left\{\sum_{m=0}^{n-1} x[m]\right\} = \frac{X^*(q)}{e^q - 1}.$$

Доказательство. Пусть $y[n] = \sum_{m=0}^{n-1} x[m].$ Тогда $\Delta y[n] = x[n],$ причем $y[0] = 0.$ Согласно предыдущей теореме,

$$D\{\Delta y[n]\} = (e^q - 1)Y^*(q), \text{ но } D\{\Delta y[n]\} = D\{x[n]\} = X^*(q).$$

Тогда

$$Y^*(q) = \frac{X^*}{e^q - 1}.$$

Пример. Найти функцию-оригинал, соответствующую изображению

$$X^*(q) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)\left(e^q - e^\alpha\right)}.$$

Замечая, что $D\{e^{\alpha n}\} = \dfrac{e^q}{e^q - e^\alpha}$, получим

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n-1} e^{\alpha m} = \frac{e^{\alpha n} - 1}{e^\alpha - 1}.$$

Из свойств 4 и 5 следует, что множитель $e^q - 1$ в дискретном преобразовании Лапласа играет роль переменной s в непрерывном преобразовании.

6. **Умножение функции-оригинала на n^k** соответствует k -кратному дифференцированию изображения по $-q$.

Доказательство. Изображение $X^*(q)$ - аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} q > \sigma_0$. Дифференцируя обе части равенства (3.1), будем иметь

$$\frac{dX^*(q)}{dq} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n)e^{-nq} x[n] = D\{-nx[n]\} \quad \text{и.д.}$$

$$\frac{d^k X^*(q)}{dq^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n)^k e^{-nq} x[n] = D\left\{(-n)^k x[n]\right\}.$$

Пример. Найти изображение функции $x[n] = n^2$

Имеем

$$D\{n\} = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^2}.$$

Тогда

$$D\{n^2\} = -\frac{d}{dq}\left\{\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^2}\right\} = -\frac{e^q\left(e^q-1\right)^2 - 2e^{2q}(e^q-1)}{\left(e^q-1\right)^4} = \frac{e^q(e^q+1)}{\left(e^q-1\right)^3}.$$

7. **<u>Деление функции-оригинала на n.</u>** Если интеграл $\int_q^\infty X^*(q)dq$ Существует, то он является изображением функции

$\frac{x[n]}{n}$, т.е

<u>Доказательство.</u> Выполним почленное интегрирование ряда (3.1), полагая при атом - $x[0]=0.$ Получим

$$\int_q^\infty X^*(q)dq = \int_q^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-nq}x[n]\right)dq.$$

Так как интеграл слева существует, а ряд сходится равномерно, то можно изменить порядок суммирования и интегрирования, и тогда

$$\int_q^\infty X^*(q)dq = \sum_{n=0}^\infty x[n]\int_q^\infty e^{-nq}dq = \sum_{n=0}^\infty \frac{x[n]}{n}e^{-nq} = D\left\{\frac{x[n]}{n}\right\}.$$

<u>Пример</u>. Найти изображение функции

$$x[n] = \frac{1[n-1]}{n}, x[0]=0.$$

Согласно свойству 2, имеем $D\{1[n-1]\} = \frac{1}{\left(e^q-1\right)}$. Следовательно,

$$D\left\{\frac{1[n-1]}{n}\right\} = \int_q^\infty \frac{dq}{\left(e^q-1\right)} = \int_z^\infty \frac{dz}{z(z-1)} = \ln\frac{z}{z-1} = \ln\frac{e^q}{e^q-1}.$$

8. **<u>Теорема свертки</u>**. Произведение двух изображений $X_1^*(q)$ и $X_2^*(q)$ также является изображением, причем

$$X_1^*(q)X_2^*(q) = D\left\{\sum_{m=0}^n x_1[m]x_2[n-m]\right\}.$$

Выражение $\sum_{m=0}^n x_1[m]x_2[n-m]$ называется сверткой дискретных функций $x_1[n]$ и $x_2[n]$. Таким образом, операция свертки в области оригиналов соответствует операции умножения в области изображений.

<u>Доказательство.</u> Легко проверить, что свертка двух функций $x_1[n]$ и $x_2[n]$ является функцией-оригиналом. Рассмотрим изображение свертки -

$$D\left\{\sum_{m=0}^n x_1[m]x_2[n-m]\right\} = \sum_{n=0}^\infty e^{-nq}\sum_{m=0}^n x_1[m]x_2[n-m].$$

Переменим порядок суммирования, и тогда

$$\sum_{m=0}^{n} x_1[m]\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nq}x_2[n-m] = \sum_{m=0}^{n} x_1[m]\sum_{r=0}^{\infty} e^{-q(m+r)}x_2[r] = D\left\{\sum_{m=0}^{n} x_1[m]x_2[n-m]\right\} = X_1^*(q)X_2^*(q).$$

<u>Пример.</u> Найти функцию-оригинал $x[n]$, если ее изображение

$$X^*(q) = \frac{e^q}{\left(e^q - e^{\alpha_1}\right)\left(e^q - e^{\alpha_2}\right)}.$$

Представим

$$X_1^*(q) = X_1^*(q)X_2^*(q),$$

Где

$$X_1^*(q) = \frac{1}{e^q - e^{\alpha_1}}; \quad X_2^*(q) = \frac{1}{e^q - e^{\alpha_2}}.$$

Тогда

$$x_1[n] = e^{\alpha_1(n-1)}; \quad \mathrm{x}_2[n] = e^{\alpha_2 n}$$

И

$$x[n] = \sum_{m=0}^{n} e^{\alpha_1(n-1)}e^{\alpha_2(n-m)} = e^{\alpha_2(n-1)}\sum_{m=0}^{n} e^{(\alpha_1-\alpha_2)(m-1)} = \frac{e^{\alpha_2 n} - e^{\alpha_1 n}}{e^{\alpha_2} - e^{\alpha_1}}.$$

9. **<u>Свертка в комплексной области</u>** (теорема умножения). Если функции $x_1[n]$ и $x_2[n]$ являются оригиналами о показателями роста σ_1 и σ_2 соответственно, то их произведение $x_1[n]x_2[n]$ также является функцией-оригиналом, причем

$$D\{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\pi}^{a+j\pi} X_1^*(\eta)X_2^*(q-\eta)d\eta,$$

Где $a > \sigma_1, \operatorname{Re} q > \sigma_2 + a.$

<u>Доказательство.</u> Легко проверяется, что произведение $x_1[n]x_2[n]$ является функцией-оригиналом. Найдем ее изображение

$$D\{x_1[n]x_2[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}x_1[n]x_2[n];$$

заменим $x_1[n]$ по формуле обращения и переменим порядок суммирования и интегрирования

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nq}\left\{\frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\pi}^{a+j\pi} X_1^*(\eta)e^{n\eta}d\eta\right\}x_2[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\pi}^{a+j\pi} X_1^*(\eta)\sum_{n=0}^{\infty} x_2[n]e^{-n(q-\eta)}d\eta = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\pi}^{a+j\pi} X_1^*(\eta)X_2^*(q-\eta)d\eta,$$

<u>Причем</u> $\operatorname{Re}(q-\eta) > \sigma_2$, откуда следует что $\operatorname{Re} q > a + > \sigma_2.$

10. **<u>Теорема о начальном и конечном значении.</u>**

а) Пусть $q \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} q \to \infty.$ Тогда

$$\lim_{q\to\infty} X^*(q) = x[0].$$

Доказательство. По определению

$$X^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-nq} = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n]e^{-nq}.$$

Переходя к пределу при $q \to \infty$ в обеих частях равенства, получим

$$\lim_{q\to\infty} X^*(q) = x[0] + \lim_{q\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x[n]e^{-nq} = x[0].$$

б) Если $x[n]$ и $\Delta x[n]$ функции-оригиналы и существует предел $\lim\limits_{q\to\infty} x[n]$, то

$$\lim_{q\to\infty} \left(e^q - 1\right) X^*(q) = \lim_{n\to\infty} x[n].$$

Доказательства. Рассмотрим изображение первой разности

$$D\{\Delta x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x[n+1] - x[n]\right)e^{-nq} = \left(e^q - 1\right)X^*(q) - e^q x[0].$$

Перейдем к пределу в обеих частях равенства при $q \to 0$. Получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x[n+1] - x[n]\right) = \lim_{q\to 0}\left(e^q - 1\right)X^*(q) - x[0]$$

Или

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{q\to\infty}\left(e^q - 1\right)X^*(q).$$

11. **Теорема разложения**. Если изображение $X^*(q) = \dfrac{R^*(q)}{Q^*(q)}$ дробно-рациональная функция e^q , причем степень числителя меньше степени знаменателя, то функция-оригинал

$$x[n] = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{q\to q_k} \frac{d^{n_k - 1}}{\left(de^q\right)^{n_k - 1}} \left\{X^*(q)\left(e^q - e^{q_k}\right)^{n_k} e^{q(n-1)}\right\},$$

Где $q_k (k = 1,2,..,l)$ - полосы $X^*(q)$, а n_k - их кратности. Сумма берется по воем полюсам функции $X^*(q)$.

Доказательство. По формуле обращения, используя равенство (3.3), имеем

$$x[n] = \sum_k Выч\left[X_z^*(z)z^{n-1}\right] = \sum_k Выч\left[X^*(q)e^{q(n-1)}\right].$$

Но вычет в полюсе q_k порядка n_k будет

$$\sum_k Выч\left[X^*(q)e^{q(n-1)}\right]\Big|_{q=q_k} = \frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{q\to q_k}\frac{d^{n_k-1}}{(de^q)^{n_k-1}}\left[X^*(q)\left(e^q-e^{q_k}\right)^{n_k}e^{q(n-1)}\right],$$

что и доказывает теорему.

Следствия:

1. Если все полюсы q_k функции $X^*(q)$ простые, то

$$x[n]=\sum\frac{R^*(q_k)}{e^{q_k}\overset{\circ}{Q}{}^*(q_k)}e^{q_k n},$$

Где

$$\overset{\circ}{Q}{}^*(q_k)=\frac{dQ^*(q)}{de^q}\Big|_{q=q_k}.$$

2. Если $X^*(q)=\dfrac{R^*(q)}{Q^*(q)}\dfrac{e^q}{e^q-1}$, причем степень $R^*(q)$ не превосходит степень $Q^*(q)$ и знаменатель $Q^*(q)$ имеет простые, отличные от нуля корни, то

$$x[n]=\frac{R^*(0)}{Q^*(0)}+\sum_{k=1}^{l}\frac{R^*(q_k)}{e^{q_k}\overset{\circ}{Q}{}^*(q_k)}e^{q_k n}.$$

3.3 Применении дискретного преобразования Лапласа для решения разностных уравнений

Пусть задано разностное уравнение k-го порядка

$$a_0x[n+k]+\ldots+a_kx[n]=f[n]. \quad (3.6)$$

Требуется определить решение этого уравнения, удовлетворявшее заданным начальным условиям $x[0]=x_0,\ldots,x[k-1]=x_{k-1}$.

Полагаем, что $a_0\neq 0, a_k\neq 0$ и $f[n]$ - функция-оригинал.

Обозначим $D\{x[n]\}=X^*(q); D\{f[n]\}=F^*(q).$ Применим к обеим частям уравнения (3.6) дискретное преобразование Лапласа. Используя свойство линейности и теорему сдвига, получим

$$\left(a_0e^{kq}+a_1e^{(k-1)q}+\ldots+a_k\right)X^*(q)=$$
$$=F^*(q)+\left(a_0e^{kq}+\ldots+a_{k-1}e^q\right)x_0+\left(a_0e^{(k-1)q}+\ldots+a_{k-2}e^q\right)x_1+\ldots+a_0e^qx_{k-1},$$

или

$$Q^*(q)X^*(q)=F^*(q)+H^*(q), \qquad (3.7)$$

где $Q^*(q)$ и $H^*(q)$ - известные многочлены e^q.

Уравнение (3.7) представляет собой уравнение в изображениях. Решая его, будем иметь

$$X^*(q)=\frac{F^*(q)+H^*(q)}{Q^*(q)}.$$

Затем необходимо по найденному изображению $X^*(q)$ определить функцию-оригинал $x[n]$.

Аналогично определяется решение системы линейных разностных уравнений. Пусть задана система линейных разностных уравнений

$$x_i[n+1] = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j[n] + f_i[n] \quad (i = 1,2,...,k). \tag{3.8}$$

Требуется найти решение этой системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i[0] = x_{i0} \quad (i = 1,2,...,k).$$

Применим к уравнениям (3.8) дискретное преобразование Лапласа.

Получим

$$\begin{aligned} &-a_{i1}X_1^*(q) - a_{i2}X_2^*(q) - ... - \left(a_{ii} - e^q\right)X_i^*(q) - ... - a_{ik}X_k^*(q) = \\ &= F_i^*(q) + e^q x_{i0} \quad (i = 1,2,...,k). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $F_i^*(q) = D\{f_i[n]\}$.

Уравнение (3.9) можно записать в векторной форме:

$$\left(e^q E - A\right)X^*(q) = F^*(q) + e^q x^0, \tag{3.10}$$

где

$$e^q E - A = \begin{bmatrix} -a_{11} + e^q ... - a_{12} ... - a_{1k} \\ .... \\ -a_{k1} - a_{k2} ... - a_{kk} + e^q \end{bmatrix}; X^*(q) = \begin{bmatrix} X_1^*(q) \\ \vdots \\ X_k^*(q) \end{bmatrix}.$$

$$F^*(q) = \begin{bmatrix} F_1^*(q) \\ \vdots \\ F_k^*(q) \end{bmatrix}, x^0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{k0} \end{bmatrix}.$$

Решив уравнение (3.10), определим

$$X^*(q) = \left(e^q E - A\right)^{-1}\left(F^*(q) + e^q x^0\right).$$

Далее требуется по найденному изображению определить функцию-оригинал $x[n]$.

Примеры.

1) Найти решение уравнения

$$x[n+3] - 4x[n+2] + 5x[n+1] - 2x[n] = n,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x[0] = x[1] = x[2] = 0.$$

Применим к обеим частям уравнения дискретное преобразование Лапласа:

$$\left(e^{3q} - 4e^{2q} + 5e^q - 2\right)X^*(q) = \frac{e^q}{\left(e^q - 1\right)^2}.$$

Тогда

$$X^*(q)=\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^2\left(e^q-2\right)\left(e^q-1\right)^2}=\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^4\left(e^q-2\right)}.$$

Полагая $e^q=z$, получим

$$Z^*(q)=\frac{z}{\left(z-1\right)^4\left(z-2\right)}.$$

По формуле обращения

$$x[n]=\sum_k Выч\left[Z^*(z)z^{n-1}\right]=Выч\left.\frac{z^n}{\left(z-1\right)^4\left(z-2\right)}\right|_{z+1}+Выч\left.\frac{z^n}{\left(z-1\right)^4\left(z-2\right)}\right|_{z=2}=$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 1}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{z^n}{z-2}\right]+\lim_{z\to 2}\frac{z^n}{\left(z-1\right)^4}=\frac{-n^3-5n-6}{6}+2^n=2^n-1-\frac{5}{6}n-\frac{n^3}{6}.$$

2) Найти решение уравнения $\Delta x[n]=n,$ удовлетворяющее начальному условию $x[0]=x_0$.

Перейдем к уравнению для изображений. Получим

$$\left(e^q-1\right)X^*(q)-e^q x[0]=\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^2};$$

Откуда

$$X^*(q)=\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^3}+\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)}x[0].$$

Переходя к оригиналам, будем иметь

$$x[n]=\frac{n(n-1)}{2}+x_0.$$

3) Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases}x_1[n+1]=x_1[n],\\ x_2[n+1]=-2x_1[n]-3x_2[n]+n^2,\end{cases}$$

Удовлетворяющее начальным условиям $x_1[0]=0, x_2[0]=0$

Имеем

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\ F_1^*(q)=0,\ F_2^*(q)=\frac{e^q\left(e^q+1\right)}{\left(e^q-1\right)^3}.$$

Тогда

$$e^q E-A=\begin{bmatrix}e^q & -1\\ 2 & e^q+3\end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$\left(e^q E-A\right)^{-1}=\frac{1}{e^{2q}+3e^q+2}\begin{bmatrix}e^q+3 & 1\\ -2 & e^q\end{bmatrix}.$$

Имеем

$$X^*(q)=\frac{1}{e^{2q}+3e^q+2}\begin{bmatrix} e^q+3 & 1 \\ -2 & e^q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^q\left(e^q+1\right)}{\left(e^q-1\right)^3} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$X_1^*(q)=\frac{e^q}{\left(e^q-1\right)^3\left(e^q+2\right)};\ X_2^*(q)=\frac{e^{2q}}{\left(e^q-1\right)^3\left(e^q+2\right)}.$$

Тогда

$$x_1[n]=\frac{1}{27}\left[-(-2)^n+\frac{9}{2}n^2-\frac{15}{2}n+1\right],$$

$$x_2[n]=\frac{1}{27}\left[-(-2)^{n+1}+\frac{9}{2}n^2+\frac{3}{2}n-2\right].$$

3.4. <u>Связь между изображениями непрерывной и соответствующей ей дискретной функции</u>

Пусть $x_T(t)$ - непрерывная функция. Выполнив замену переменной $t=\tau T$ и обозначим $x(\tau)=x_T(T\tau)$.

Пусть, кроме того, изображение непрерывной функции по Лапласу

$$X(q)=L\{x(\tau)\}=\int_0^\infty x(\tau)e^{-q\tau}d\tau.$$

Если $X_T(q)$ - изображение $x_T(t)$, то по теореме об изменении масштаба

$$X(q)=\frac{1}{T}X_T\left(\frac{q}{T}\right).$$

Смешанная решетчатая функция $x[n,\xi]$, соответствующая непрерывной функции $x(\tau)$, будет

$$x[n,\xi]=x(\tau)\big|_{\tau=n+\xi},\ \text{где}\ 0\le\xi<1.$$

Изображение функции $x[n,\xi]$

$$X^*(q,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n,\xi]e^{-nq}. \qquad (3.11)$$

По формуле обращения

$$x(\tau)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}x(\eta)e^{\tau\eta}d\eta.$$

Заменим в этом выражении τ на $n+\xi$ и подставим $x[n,\xi]$ в формулу (3.11). Получим

$$X^*(q,\xi)=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nq}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}x(\eta)e^{(n+\xi)\eta}d\eta=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}x(\eta)e^{\xi\eta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(q-\eta)q}d\eta=$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}x(\eta)\frac{e^q}{e^q-e^\eta}e^{\xi\eta}d\eta \qquad (3.12)$$

При $\xi=0$ будем иметь

$$X^*(q,\xi) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^q}{e^q - e^\eta} x(\eta) d\eta. \qquad (3.13)$$

Отметим, что в (3.12) и (3.13) $\operatorname{Re} q > c;$ подынтегральная функция в формулах (3.12) и (3.13) имеем полюсы $\eta = \eta_k$, совпадающие с полюсами $x(\eta)$, и полюсы $\eta_r = q + 2\pi jr \quad (r = 0,+1,...)$ совпадающие с полюсами функции $\frac{e^q}{e^q - e^\eta}$. Расположение полюсов на комплексной плоскости указано на рис. 9. Полюсы η_k и $x(\eta)$ функции $x(\eta)$ расположены левее прямой $\operatorname{Re}\eta = c$, поэтому по лемме Жордана

$$\int_{c_1} x(\eta) \frac{e^q}{e^q - e^\eta} e^{\xi\eta} d\eta \to 0 \text{ при } R \to \infty \text{ и}$$

$$X^*(q,\xi) = \sum_{k=1}^{l} Выч \frac{e^q e^{\xi\eta}}{e^q - e^\eta} x(\eta),$$

причем вычеты берутся по всем полюсам функции $x(\eta)$.

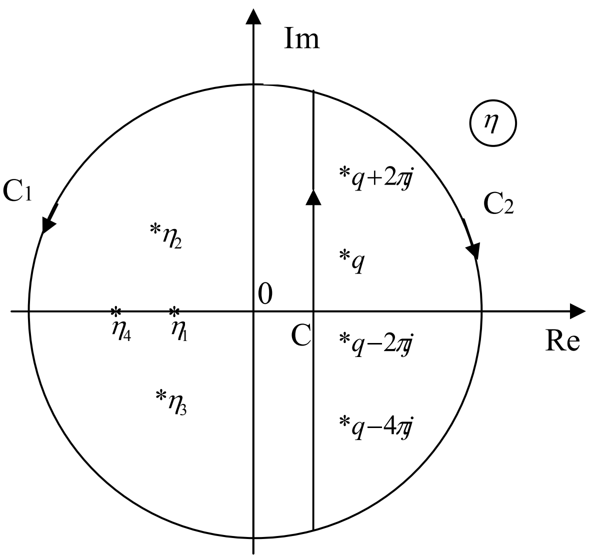


Рис. 9

Примеры:

1) Пусть изображение непрерывной функции

$$X(q) = \frac{1}{q+\beta}.$$

Найдем изображение соответствующей дискретной функции. По формуле (3.12) получим

$$X^*(q,\xi) = Выч\left[\frac{1}{\eta + q}\frac{e^q e^{\xi\eta}}{e^q - e^\eta}\right]_{\eta=-\beta} = \frac{e^q e^{-\xi\beta}}{e^q - e^{-\beta}}.$$

2) Изображение $X(q)$ непрерывной функции $x(\tau)$ имеет вид $X(q)=\dfrac{1}{q(q+\beta)}$. Найдем изображение соответствующей дискретной функции $x[n,\xi]$:

$$X^*(q,\xi)=\sum_k \text{Выч}\left[\eta\frac{1}{(\eta+\beta)}\frac{e^q e^{\xi\eta}}{e^q-e^\eta}\right]_{\eta=-\beta}=$$

$$=\text{Выч}\left[\frac{e^q e^{\xi\eta}}{\eta(\eta+\beta)\left(e^q-e^\eta\right)}\right]_{\eta=0}+\text{Выч}\left[\frac{e^q e^{\xi\eta}}{\eta(\eta+\beta)\left(e^q-e^\eta\right)}\right]_{\eta=-\beta}=$$

$$=\frac{e^q}{\beta\left(e^q-1\right)}-\frac{e^q e^{-\xi\beta}}{\beta\left(e^q-e^{-\beta}\right)}.$$

Если замкнуть контур интегрирования с помощью дуги c_2, то, записывав интеграл (3.12) в виде

$$X^*(q,\xi)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}x(\eta)\frac{e^q}{e^{q-\eta}-1}e^{-(1-\xi)\eta}d\eta,$$

получим согласно лемме Жордан

$$\int_{c_2}\frac{e^q}{e^{q-\eta}-1}e^{-(1-\xi)\eta}x(\eta)d\eta\to 0 \quad \text{при } R\to\infty$$

и

$$X^*(q,\xi)=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}\text{Выч}\frac{e^q}{e^{q-\eta}-1}e^{-(1-\xi)\eta}x(\eta)\ \Big|_{\eta=q+2\pi jr}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X(q+2\pi jr). \quad (3.14)$$

При $\xi=0$ формула (3.14) имеет вид

$$X^*(q)\frac{1}{2}x[0]+\sum_{r=-\infty}^{\infty}X(q+2\pi jr),$$

где $x[0]=x(+0)$.

Найдем формулу, выражающую $x(q)$ через $X^*(q,\xi)$:

$$\begin{aligned}X(q)&=\int_0^\infty x(\tau)e^{-q\tau}d\tau=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x[n,\xi]e^{-q(n+\xi)}d\xi=\\&=\int_0^1 e^{-q\xi}\sum_{n=0}^{\infty}x[n,\xi]e^{-nq}d\xi=\int_0^1 e^{-q\xi}X^*(q,\xi)d\xi.\end{aligned} \quad (3.15)$$

<u>Пример.</u>

Пусть $X^*(q,\xi)=\dfrac{e^q\left[e^q\left(e^{\alpha\xi}-1\right)-\left(e^{\alpha\xi}-e^\alpha\right)\right]}{\left(e^q-e^\alpha\right)\left(e^q-1\right)}.$

Определим $X(q)$. Из соотношения (3.15)

$$X(q)=\int_0^1 e^{-\xi q}X^*(q,\xi)d\xi=\frac{e^q}{\left(e^q-e^\alpha\right)\left(e^q-1\right)}\int_0^1\left[e^q\left(e^{\alpha\xi}-1\right)-\left(e^{\alpha\xi}-e^\alpha\right)\right]e^{-\xi q}d\xi=$$

$$=\frac{e^q}{\left(e^q-e^\alpha\right)\left(e^q-1\right)}\left[\frac{e^{\alpha-q}-1}{q-\alpha}-\frac{e^{\alpha-q}-e^\alpha}{q}+\frac{e^q-e^\alpha}{q-\alpha}-\frac{e^q-1}{q}\right]=\frac{\alpha}{q(q-\alpha)}.$$

Формулы (3.12) и (3.14), выражающие $X^*(q,\xi)$ через $X(q)$, и формулу (3.15), выражающую $X(q)$ через $X^*(q,\xi)$, можно рассматривать как некоторые операторы, устанавливающие связь между изображениями непрерывных и соответствующих дискретных функций. Эти соответствия обозначаются $X^*(q,\xi)=\overline{D}\{X(a)\}$ и $X(q)=\overline{D}^{-1}\{X^*(q_i,\xi)\}$. Само преобразование носит название преобразование $\overline{D}$.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования $\overline{D}$.

1. Свойство линейности. Пусть $X(q)=\alpha_1 X_1(q)+\alpha_2 X_2(q)$.

Тогда $X^*(q,\xi)=\alpha_1 X_1^*(q,\xi)+\alpha_2 X_2^*(q,\xi)$.

Доказательство. Воспользуемся равенством (3.14):

$$\overline{D}\{X(q)\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}\left[\alpha_1 X_1(q)+\alpha_2 X_2(q)\right]=$$
$$=\alpha_1\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X_1(q)+\alpha_2\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X_2(q)=\alpha_1 X_1^*(q,\xi)+\alpha_2 X_2^*(q,\xi).$$

Пример. Найдем $X^*(q,\xi)$, если $X(q)=\dfrac{k}{(q+\beta_1)(q+\beta_2)}$.

Имеем

$$X(q)=\frac{k_1}{(q+\beta_1)}+\frac{k_2}{(q+\beta_2)}=k_1X_1(q)+k_2X_2(q),$$

где $X_1(q)=\dfrac{k_1}{q+\beta_1},X_2(q)=\dfrac{k_2}{q+\beta_2},k_1=\dfrac{k}{\beta_2-\beta_1},k_2=\dfrac{k}{\beta_1-\beta_2}$.

Тогда

$$\overline{D}\{X_1(q)\}=\frac{e^q e^{-\xi\beta_1}}{e^q-e^{-\beta_1}};\quad \overline{D}\{X_2(q)\}=\frac{e^q e^{-\xi\beta_2}}{e^q-e^{-\beta_2}};$$

и

$$X^*(q,\xi)=k_1X_1^*(q,\xi)+k_2X_2^*(q,\xi)=\frac{k_1e^q e^{-\xi\beta_1}}{e^q-e^{-\beta_1}}+\frac{k_2e^q e^{-\xi\beta_2}}{e^q-e^{-\beta_2}}.$$

2. Умножение $X(q)$ на e^{kq} (k-целое) соответствует умножению $X^*(q,\xi)$ на e^{kq} (k-целое).

Доказательство:

$$\overline{D}\{e^{kq}X(q)\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}e^{k(q+2\pi jr)}X(q+2\pi jr)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}e^{kq}X(q+2\pi jr)=e^{kq}X^*(q,\xi).$$

3. Умножение $X(q)$ на $e^{-\gamma q}$ $0<\gamma\le 1$ соответствует при $0\le\xi\le\gamma$ умножению $X^*(q,\xi)$ на e^{-q} с заменой ξ на $1+\xi-\gamma$, а при $\gamma<\xi\le 1$ - замене параметра ξ на $\xi-\gamma$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\overline{D}\left\{e^{-\gamma q}X(q)\right\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}e^{-\gamma(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)=$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}e^{(\xi-\gamma)(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)=X^*(q,\xi-\gamma);\ \xi>\gamma,\\ \sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}e^{-(q+2\pi jr)}e^{(1+\xi-\gamma)(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)=e^{-q}X^*(q,1+\xi-\gamma);\ \xi\le\gamma\end{cases}.$$

Пример. Вычислить $X^*(q,\xi)$, если $X(q)=\dfrac{e^{-\gamma q}}{q+\beta}$.

Имеем

$$\overline{D}\left\{\frac{e^{-\gamma q}}{q+\beta}\right\}=\begin{cases}\dfrac{e^{q}e^{-(\xi-\gamma)\beta}}{e^{q}-e^{-\beta}}, & \text{елси } \gamma<\xi;\\ \dfrac{e^{-(1+\xi-\gamma)\beta}}{e^{q}-e^{-\beta}}, & \text{елси } \gamma\ge\xi.\end{cases}$$

4. Умножение $X(q)$ на $X_1^*(q,\xi)$ соответствует умножению $X^*(q,\xi)$ на $X_1^*(q,\xi)$.

Доказательство:

$$\overline{D}\left\{X(q)X^*(q,\xi)\right\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)X_1^*\left(q+2\pi jr,\xi\right)=$$

$$=X_1^*(q,\xi)\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)=X_1^*(q,\xi)X^*(q,\xi).$$

5. Смещение переменной q на $\pm\lambda$ соответствует смещению переменной q на $\pm\lambda$ в $X^*(q,\xi)$ и умножению $X^*(q,\xi)$ на $e^{\pm\lambda\xi}$.

Доказательство:

$$\overline{D}\left\{X(q\pm\lambda)\right\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X\left(q\pm\lambda+2\pi jr\right)=$$

$$=e^{\pm\lambda\xi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q\pm\lambda+2\pi jr)}X\left(q\pm\lambda+2\pi jr\right)=e^{\mp\lambda\xi}X^*(q\pm\lambda,\xi).$$

6. Умножение $X(q)$ на q соответствует дифференцированию $X^*(q,\xi)$ по ξ.

Доказательство:

$$\frac{\partial X^*(q,\xi)}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}X\left(q+2\pi jr\right)=$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}(q+2\pi jr)X\left(q+2\pi jr\right)=\overline{D}\left\{qX(q)\right\}.$$

7. Деление $X(q)$ на q соответствует интегрированию $X^*(q,\xi)$ по ξ.

Доказательство:

Имеем

$$\overline{D}\left\{\frac{X(q)}{q}\right\}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}e^{\xi(q+2\pi jr)}\frac{X\left(q+2\pi jr\right)}{q+2\pi jr}.$$

но

$$\int_0^{\xi} e^{\xi(q+2\pi jr)}d\xi = \frac{e^{\xi(q+2\pi jr)}-1}{q+2\pi jr}.$$

Тогда

$$\overline{D}\left\{\frac{X(q)}{q}\right\} = \int_0^{\xi} X^*(q,\xi)d\xi + \frac{1}{e^q-1}\int_0^1 X^*(q,\xi)d\xi.$$

8. <u>Дифференцирование $X(q)$ по q</u> соответствует дифференцированию $X^*(q,\xi)$ по q и вычитанию $\xi X^*(q,\xi)$.

<u>Доказательство:</u>

$$\overline{D}\left\{\frac{dX(q)}{dq}\right\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\xi(q+2\pi jr)}\frac{dX(q+2\pi jr)}{d(q+2\pi jr)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\xi(q+2\pi jr)}\frac{dX(q+2\pi jr)}{dq}.$$

но

$$\frac{\partial}{\partial q}X^*(q,\xi) = \frac{\partial}{\partial q}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\xi(q+2\pi jr)}X(q+2\pi jr) =$$
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\xi(q+2\pi jr)}\frac{dX(q+2\pi jr)}{dq} + \sum_{r=-\infty}^{\infty}\xi e^{\xi(q+2\pi jr)}X(q+2\pi jr).$$

Отсюда

$$\overline{D}\left\{\frac{dX(q)}{dq}\right\} = \frac{\partial}{\partial q}X^*(q,\xi) - \xi X^*(q,\xi).$$

4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ САУ

4.1. <u>Передаточные функции</u>

Дискретное преобразование Лапласа позволяет существенно упростить решение многих задач, связанных с исследованием и проектированием линейных импульсных систем с постоянными параметрами. Рассмотрим вначале разомкнутую импульсную систему с одним импульсным элементом, причем мы ее представим в виде последовательного соединения простейшего импульсного элемента, формирующего элемента и непрерывной части (рис. 10). Непрерывную часть и формирующий элемент обычно объединяют, называя их последовательное соединение ПНЧ импульсной системы.

Уравнение этой системы во временной области при нулевых начальных условиях имеет вид

$$x[n,\xi] = \sum_{m=0}^{\infty} g[m]k[n-m,\xi],$$

где $x[n,\xi]$ - импульсная переходная функция приведенной непрерывкой части; $g[n]$ - воздействие, приложенное ко входу системы и измеренное в дискретные моменты времени; $k[n-m,\xi]$ - сигнал на выходе системы.

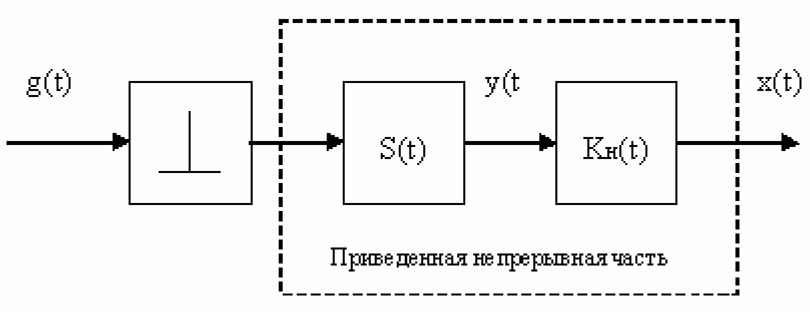


Рис. 10

Применим к обеим частям последнего равенства D - преобразование:

$$X^*(q,\xi) = G^*(q)W^*(q,\xi),$$

Где

$$X^*(q,\xi) = D\{x[n,\xi]\},\ G^*(q) = D\{g[n]\},\ \ W^*(q,\xi) = D\{k[n,\xi]\}.$$

Получено уравнение разомкнутой импульсной системы, связывающее изображение входного воздействия $G^*(q)$ выходного сигнала $X^*(q,\xi)$ Отношение изображения выходного сигнала $x[n,\xi]$ к изображению внешнего воздействия $G^*(q)$ при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией импульсной системы. В данном случае

$$W^*(q,\xi) = \frac{X^*(q,\xi)}{G^*(q)}.$$

Выясним, как связаны изображения решетчатых функций $x[n,\xi]$ и $k[n,\xi]$ с изображениями по Лапласу соответствующих непрерывных функций $x(t)$ и $k(t)$. В частности, для $x(t)$ имеем

$$x(s)\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt.$$

Выполняя замену переменной $t = \bar{t}T, q = sT$, получим

$$x(s)\int_0^\infty e^{-s\bar{t}T}x(\bar{t}T)Td\bar{t} = T\int_0^\infty x_T(\bar{t})e^{-q\bar{t}}d\bar{t}.$$

Обозначим $x_T(q) = \int_0^\infty x_T(\bar{t})e^{-q\bar{t}}d\bar{t},$ тогда

$$x_T(q) = \frac{1}{T}x(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}}.$$

Изображения $x_T(q)$ и $x^*(q,\xi)$ связаны $\overline{D}$ - преобразованием:

$$x^*(q,\xi) = \overline{D}\{x_T(q)\} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x_T(q+2\pi jr)e^{\varepsilon(q+2\pi jr)}.$$

Аналогично найдем

$$W^*(q,\xi) = \overline{D}\{W_T(q)\},$$

где

$$W_T(q)=\frac{1}{T}W(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}};\quad W(s)=\int_0^\infty e^{-st}k(t)dt.$$

Введем передаточные функции непрерывной части и формирующего устройства. Обозначая через $k_H(t)$ и $\omega(t)$ соответствующие весовые функции, получим

$$W(s)=L\{k_H(t)\};\;\; W_\phi(s)=L\{\omega(t)\}.$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(s)=W_H(s)\cdot W_\phi(s).$$

Таким образом,

$$W_T(s)=\frac{1}{T}W_\phi(s)W_H(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}}.$$

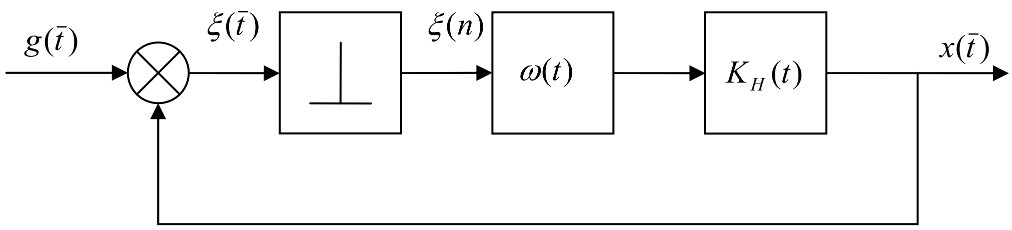
Если

$$W_\phi(s)=\frac{1}{T}W_\phi(s)_{s=\frac{q}{T}}\quad\text{и}\quad \widetilde{W}_H(q)=W_H(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}},$$

то $W_T(q)=W_\phi(q)\widetilde{W}_H(q)$

Найдем теперь уравнение замкнутой импульсной системы в области изображений и определим ее передаточную функцию. Уравнение системы (рис. 11) имеет вид

$$x[q,\xi]=\sum_{m=0}^{\infty}g[m]k[n-m,\xi]-\sum_{m=0}^{\infty}x[m]k[n-m,\xi].$$



Применяя к обеим частям этого уравнения D-преобразование, будем иметь

$$X^*(q,\xi)=G^*(q)W^*(q,\xi)-X^*(q)W^*(q,\xi)$$

Положив $\xi=0$, определим изображение

$$X^*(q)=\frac{G^*(q)W^*(q)}{1+W^*(q)}.$$

Подставляя его в предыдущее соотношение, получим

$$X^*(q,\xi)=G^*(q)W^*(q,\xi)-\frac{G^*(q)W^*(q)}{1+W^*(q)}W^*(q,\xi)=W^*(q,\xi)\frac{G^*(q)}{1+W^*(q)}.$$

В соответствии с определением передаточная функция замкнутой импульсной системы:

$$\Phi^*(q,\xi)=\frac{X^*(q,\xi)}{G^*(q)}=\frac{W^*(q,\xi)}{1+W^*(q)}.$$

Таким образом, с помощью D-преобразования найдена связь между изображением $X^*(q,\xi)$ выходной величины и изображением. Применяя обратное D-преобразование к обеим частям равенства

$$X^*(q,\xi)=G^*(q)\Phi^*(q,\xi),$$

Можно определить зависимость между входной величиной и выходной величинами системы во временной области:

$$x[n,\xi]=\sum_{m=0}^{\infty}g[m]K_З[n-m,\xi];$$

Здесь весовая функция замкнутой импульсной системы $K_З[n,\xi]$ определяется как обратное дискретное преобразование Лапласа передаточной функции замкнутой импульсной системы:

$$K_З[n,\xi]=D^{-1}\{\Phi^*(q,\xi)\}.$$

Пример. В разомкнутой импульсной системе (см. рис. 10) передаточная функция непрерывной части

$$W_H(s)=\frac{1}{T_1 s+1},$$

А импульсный элемент осуществляет модуляцию с помощью последовательности кратковременных импульсов. Определим передаточную функцию импульсной системы. В рассматриваемом случае импульсная переходная функция непрерывной приведенной части определяется соотношением

$$K(\bar{t})=K_H(\bar{t})K_S,$$

Где K_S - постоянный коэффициент; $K_H(\bar{t})$ - импульсная переходная функция приведенной непрерывной части. Следовательно, передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(q)=W_H(q)K_S,$$

Где

$$W_H(q)=\int_0^{\infty}e^{-q\bar{t}}K_H(\bar{t})d\bar{t};\quad W(q)=\int_0^{\infty}e^{-q\bar{t}}K(\bar{t})d\bar{t}.$$

Тогда

$$W_H(q)=\frac{1}{T}W_H(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}}=\frac{1}{T}\frac{1}{\frac{T_1}{T_1}q+1}=\frac{1}{T}\frac{\beta}{q+\beta},$$

Где

$$\beta=\frac{T}{T_1};W(q)=\frac{K_S\beta}{T}\frac{1}{q+\beta}.$$

Теперь определим передаточную функцию импульсной системы с помощью $\overline{D}$-преобразования:

$$W^*(q,\xi)=\overline{D}\{W(q)\}=\frac{K_S\beta}{T}\frac{e^q}{e^q+e^{-\beta}}e^{-\beta\xi}.$$

<u>Пример</u>. Определить передаточную функцию разомкнутой импульсной системы (см. рис. 10), имеющей ту же непрерывную часть, что и в предыдущем примере. ИЭ осуществляет амплитудноимпульсную модуляцию с помощью последовательности прямоугольных импульсов высотой K_U и шириной γT $(\gamma \le 1)$.

Весовая функция ИЭ

$$s(t) = K_U\left(1(t) - 1(t-\gamma T)\right).$$

Преобразуя по Лапласу обе части этого равенства, получим

$$W_\Phi(t) = K_U\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\gamma Ts}}{s}\right) = K_U\,\frac{1-e^{-\gamma Ts}}{s}.$$

Передаточная функция ПНЧ

$$W(q) = \frac{1}{T}W_\Phi(t)W_H(s)\Big|_{s=\frac{q}{T}} = K_U\,\frac{1-e^{-\gamma Ts}}{s}\,\frac{\beta}{\beta+q}.$$

Найдем передаточную функцию импульсной системы:

$$W^*(q,\xi) = \overline{D}\{W(q)\} = \overline{D}\left\{K_U\,\frac{1-e^{-\gamma Ts}}{s}\,\frac{\beta}{\beta+q}\right\} = K_U\overline{D}\left\{\frac{\beta}{q(\beta+q)}\right\} - K_U\overline{D}\left\{\frac{\beta}{q(\beta+q)}e^{-\gamma Ts}\right\};$$

$$\overline{D}\left\{\frac{\beta}{q(\beta+q)}\right\} = \overline{D}\left\{\frac{1}{q}\right\} - \overline{D}\left\{\frac{1}{\beta+q}\right\} = \frac{e^q}{e^q-1} - \frac{e^q}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta\xi};$$

$$\overline{D}\left\{\frac{e^{-\gamma q}\beta}{q(\beta+q)}\right\} = \begin{cases} \dfrac{e^q}{e^q-1} - \dfrac{e^q}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta(\xi-\gamma)}, & \xi > \gamma \\ \dfrac{e^q}{e^q-1} - \dfrac{1}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta(1+\xi-\gamma)}, & \xi \le \gamma \end{cases}$$

Суммируя эти соотношения, получим передаточную функцию импульсной системы с прямоугольными импульсами. Она описывается двумя различными выражениями в зависимости от параметра ξ:

$$W^*(q,\xi) = \begin{cases} \dfrac{K_U e^q}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta\xi}\left(e^{\beta\xi}-1\right), & \gamma \le \xi \le 1 \\ K_U\left(1 - \dfrac{e^q - e^{-\beta(1-\gamma)}}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta\xi}\right), & 0 \le \xi \le \gamma \end{cases}$$

В частности, если ширина импульсов совпадает о периодом квантования, т.е. $\gamma = 1$, то

$$W^*(q,\xi) = K_U\left(1 - \frac{e^q-1}{e^q-e^{-\beta}}e^{-\beta\xi}\right).$$

Отметим свойства передаточных функций импульсных систем. Передаточная функция импульсных систем является дробно-рациональной функцией переменкой $e^q = z$. Числитель этой функция зависит от ξ:

$$W^*(q,\xi) = \frac{P^*(q,\xi)}{Q^*(q)};$$

Здесь $P^*(q,\xi)$ и $Q^*(q,\xi)$ - полиномы от e^q,

$$P^*(q,\xi) = a_0(\xi)e^{mq} + a_1(\xi)e^{(m-1)q} + \ldots + a_{m-1}(\xi)e^q + a_m(\xi);$$

$$Q(q) = b_0 e^{kq} + b_1 e^{(k-1)q} + \ldots + ba_{k-1} e^q + b_k;$$

Также $k \geq m.$

В соответствии со свойствами D - преобразования передаточная функция импульсных систем периодична вдоль мнимой оси плоскости q с периодом 2π , т.е. $W^*(q + 2\pi jr, \xi) = W^*(q, \xi)$, где r - любое целое число. Передаточная функция полностью определена своими значениями в полосе шириной $2\pi; -\pi < \operatorname{Im} q \leq \pi, -\infty < \operatorname{Re} q < \infty$. Эта полоса называется основной. Внутри основной полосы функция $W^*(q, \xi)$ является аналитической, за исключением конечного числа полюсов.

Полюсы передаточной функции разомкнутой импульсной системы совпадают с полюсами приведенной непрерывной части $W(q)$ или отличаются от них на $2\pi jr; r = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

Выполнив в выражении передаточной функции $W^*(q, \xi)$ замену $e^q = z$, получим

$$W_z^*(z, \xi) = \frac{P_z^*(z, \xi)}{Q_z^*(z)},$$

Где

$$P_z^*(z, \xi) = a_0(\xi) z^m + a_1(\xi) z^{m-1} + \ldots + a_m(\xi),$$

$$Q_z^*(z) = b_0 z^{kq} + b_1 z^{k-1} + \ldots + b_k.$$

При такой замене передаточная функция импульсной системы становится дробно-рациональной функцией комплексной переменной z Преобразование $z = e^q$ отображает мнимую ось плоскости q в окружность единичного радиуса $z = e^{j\overline{\omega}}$ с центром в начале координат на плоскости $z; \left(-\pi < \overline{\omega} \leq \pi\right)$; правая полу полоса $\operatorname{Re} q > 0$ при этом отображается на внешность единичного круга, а левая полу полоса $\operatorname{Re} q < 0$ отображается на внутренность единичного круга. Следовательно, все полюсы $W^*(q, \xi)$, лежащие в левой полуплоскости, отображаются в полюсы $W_z^*(z, \xi)$, лежащие внутри единичного круга.

Таким образом, передаточная функция $W_z^*(z, \xi)$ определена на всей расширенной плоскости комплексной переменной z , причем во внешность единичного круга $z = e^{j\overline{\omega}}$ она является аналитической функцией. Внутри единичного круга передаточная функция $W_z^*(z, \xi)$ имеет полюсы $z_\nu = e^{q\nu}; \nu = 1, 2, \ldots$

4.2. <u>Определение процессов в импульсных системах при типовых воздействиях</u>

Если известна передаточная функция импульсной системы $W^*(q, \xi)$ и изображение входного сигнала $G^*(q)$, то процесс на выходе системы может быть найден с помощью формулы обратного D - преобразования (или обратного Z - преобразования):

$$x[n, \xi] = D^{-1}\left\{G^*(q) W^*(q, \xi)\right\} = Z^{-1}\left\{G_z^*(z) W_z^*(z, \xi)\right\}.$$

Выполнить обратное D - преобразования можно с помощью вычетов:

$$x[n, \xi] = \sum_{\nu=0}^{k} Выч G^*(q) W^*(q, \xi) e^{q(n-1)}\Big|_{q=q_\nu} = \sum_{\nu=0}^{k} Выч G_z^*(z) W_z^*(z, \xi) z^{n-1}\Big|_{z=z_\nu},$$

Где $z_\nu = e^{q_\nu}$ - полюсы функций, стоящих под знаком обратного преобразования.

Определим реакцию импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие $g(\bar{t}) = 1(\bar{t})$. Принимая во внимание, что

$$D\{1(\bar{t})\} = \frac{e^q}{e^q - 1},$$

Будем иметь

$$x[n,\xi] = D^{-1}\left\{W^*(q,\xi)\frac{e^q}{e^q - 1}\right\},$$

Используя формулу обращения, получим

$$x[n,\xi] = \sum_{\nu=0}^{k} Выч W^*(q,\xi)\frac{e^q}{e^q-1}e^{q(n-1)}\bigg|_{q=q_\nu}$$

Вычеты берутся в полосе $q = 0$ и в полосах $q = q_\nu (\nu = 1,2,...,k)$ передаточной функции $W^*(q,\xi)$. Будем предполагать, что все полосы $q = q_\nu$ ненулевые. Найдем вычет в точке $q_\nu = 0$:

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^q}{e^q-1}e^{q(n-1)}\bigg|_{q=0} = Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q-1}\bigg|_{q=0} = \lim_{q\to 0} W^*(q,\xi)e^{qn} = W^*(0,\xi).$$

Определим теперь вычеты в полюсах передаточной функции $W^*(q,\xi)$. Для простых полюсов

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q-1}\bigg|_{q=q_\nu} = \lim_{q\to q_\nu} W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}(e^q - e^{q_\nu})}{e^q-1}.$$

Учитывая, что $W^*(q,\xi)$ - дробно-рациональная функция по отношению к переменной e^q, и обозначая

$$W^*(q,\xi) = \frac{P^*(q,\xi)}{Q^*(q)},$$

Где $P^*(q,\xi), Q^*(q)$ - полиномы относительно переменной e^q, найдем, что

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q-1}\bigg|_{q=q_\nu} = \lim_{q\to q_\nu}\frac{P^*(q,\xi)}{Q^*(q)}\frac{e^{qn}(e^q - e^{q_\nu})}{e^q-1} = \frac{P^*(q_\nu,\xi)}{Q^*(q_\nu)\left(e^{q_\nu}-1\right)}e^{q_\nu n}.$$

Если q_ν - полюс кратности r_ν, то соответствующий вычет, как известно, будет определяться по соотношению

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^q}{e^q-1}\bigg|_{q=q_\nu} = \frac{1}{\left(r_\nu - 1\right)!}\lim_{q\to q_\nu}\frac{d^{r_\nu - 1}}{de^{q(r_\nu-1)}}\left[W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}(e^q - e^{q_\nu})^{r_\nu}}{e^q-1}\right].$$

Если полюсы $q_\nu(\nu = 1,2,...,r)$ передаточной функции $W^*(q,\xi)$ имеют кратности соответственно r_ν, то

$$x[n,\xi] = W^*[0,\xi] + \sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=0}^{r_\nu - 1} c^\nu_{r_\nu - 1 - j}(\xi)\frac{n^{(j)}e^{q_\nu(n-j)}}{j!(r_\nu - 1 - j)!},$$

Где $n^{(j)} = n(n-1)(n-2)...(n-j+1)$ факториальная функция;

$$
c_e^{\nu}(\xi) = \left. \frac{d^e W^*(q,\xi) \dfrac{\left(e^q - e^{q_\nu}\right)^{r_\nu}}{e^q - 1}}{d e^{eq}} \right|_{q=q_\nu} .
$$

В частности, если все полюсы простые, то последняя формула упростится:

$$
x[n,\xi] = W^*(0,\xi) + \sum_{\nu=1}^{k} c_0^{\nu}(\xi) e^{q_\nu n},
$$

Где $c_0^{\nu}(\xi) = \dfrac{P^*(q_\nu,\xi)}{Q^*(q_\nu)\left(e^{q_\nu} - 1\right)}$.

Мы получили выражение, характеризующее реакцию импульсной системы на единичное ступенчатое воздействие. Первое слагаемое $W^*(0,\xi)$ описывает установившийся процесс в системе, а второе характеризует переходный процесс. Из выражения для $x[n,\xi]$ следует, что, когда все полюсы имеют отрицательные вещественные части $\operatorname{Re} q_\nu < 0 (\nu = 1,2,...,k)$, второе слагаемое в правой части равенства будет о течением времени стремиться к нулю. При этом подучим выражение для установившегося процесса в системе

$$
x_{уст}[n,\xi] = \lim_{n\to\infty} x[n,\xi] = W^*(0,\xi).
$$

Таким образом, установившийся процесс в импульсной системе можно определить непосредственно по ее передаточной функции.

Пример.

Найти реакцию на единичное ступенчатое воздействие для разомкнутой импульсной системы с кратковременными импульсами, если передаточная функция ПНЧ

$$
W(q) = \frac{K_S \beta}{T} \frac{1}{q+\beta} = \frac{K_1}{q+\beta},
$$

Где $K_1 = \dfrac{K_S \beta}{T}$

Передаточная функция рассматриваемой импульсной системы была найдена ранее:

$$
W^*(q,\xi) = \frac{K_1 e^q}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta\xi}
$$

Или в z - символике

$$
W_z^*(z,\xi) = \frac{K_1 z e^{-\beta\xi}}{z - e^{-\beta}}
$$

Изображение искомой реакции

$$
X_z^*(z,\xi) = W_z^*(z,\xi) \frac{z}{z-1} = \frac{K_1 z^2 e^{-\beta\xi}}{\left(z - e^{-\beta}\right)(z-1)}.
$$

Переходя к оригиналу, будем иметь

$$x[n,\xi] = W_z^*(1,\xi) + Выч X_z^*(z,\xi) z^{n-1}\Big|_{z=e^{-\beta}} =$$

$$= \frac{K_1 e^{-\beta\xi}}{1-e^{-\beta}} + \frac{e^{-2\beta-\beta\xi-\beta(n-1)}}{e^{-\beta}-1} = \frac{K_1 e^{-\beta\xi}}{1-e^{-\beta}}\left[1-e^{-\beta(1+n)}\right].$$

Этот процесс показан на рис. 12.

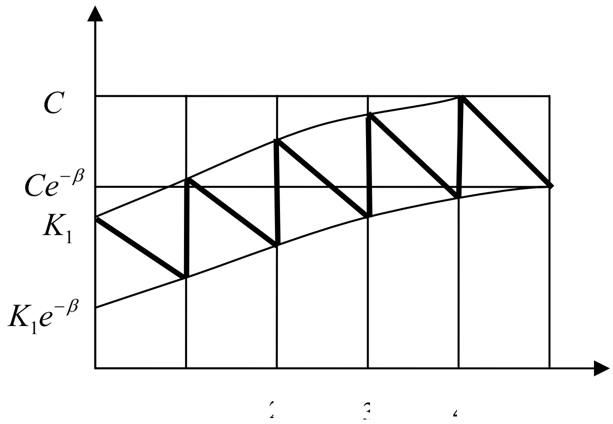


Рис. 12

Установившийся процесс в данном случае

$$W_z^*(1,\xi) = \frac{K_1 e^{-\beta\xi}}{1-e^{-\beta}}.$$

Среднее значение установившегося процесса

$$\bar{x}_y[n,\xi] = \int_0^1 \frac{K_1 e^{-\beta\xi}}{1-e^{-\beta}} d\xi = \frac{K_1}{\beta} = \frac{K_S}{T}.$$

Это же значение можно получить по-другому:

$$\bar{x}_y[n,\xi] = W(0) = \frac{K_S\beta}{(q+\beta)T}\Bigg|_{q=0} = \frac{K_S}{T}.$$

Применим теперь D - преобразование для того, чтобы определять реакцию импульсной системы с передаточной функцией $W^*(q,\xi)$ на гармоническое воздействие $g(n) = A_1\cos(\bar{\omega}_1 n + \varphi)$.

Вначале найдем реакцию системы $z[n,\xi]$ на воздействие $f[n] = A_1 e^{j(\bar{\omega}_1 n+\varphi)}$, а затем рассмотрим вещественную часть $x[n,\xi] = \operatorname{Re} z[n,\xi]$ полученного выражения.

Изображение входного воздействия

$$F^*(q) = D\left\{A_1 e^{j(\bar{\omega}_1 n+\varphi)}\right\} = A_1 e^{j\varphi}\frac{e^q}{e^q - e^{j\bar{\omega}_1}}.$$

Реакция системы $z[n,\xi]$ определяется соотношением

$$z[n,\xi] = D^{-1}\left\{W^*(q,\xi) A_1 e^{j\varphi}\frac{e^q}{e^q - e^{j\bar{\omega}_1}}\right\} = A_1 e^{j\varphi}\sum_{\nu=0}^{k} Выч W^*(q,\xi)\frac{e^q e^{q(n-1)}}{e^q - e^{j\bar{\omega}_1}}\Bigg|_{q=q_\nu}.$$

Здесь вычеты берутся в полюсах $q_1, q_2, ..., q_k$ передаточной функции импульсной системы $W^*(q,\xi)$ и в точке $q_0 = j\overline{\omega}_1$.

Предполагаем, что функция $W^*(q,\xi)$ не имеет полюсов на мнимой оси плоскости комплексного переменного q. Тогда вычет в точке $q_0 = j\overline{\omega}_1$ равен

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}}\Bigg|_{q=j\overline{\omega}_1} = \lim_{q\to j\overline{\omega}_1} W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}\left(e^q - e^{j\overline{\omega}_1}\right)}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}} = W^*(j\overline{\omega}_1,\xi)e^{j\overline{\omega}_1 n}.$$

Вычет в простом полюсе q_ν функции $W^*(q,\xi)$ определяется по соотношению

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}}\Bigg|_{q=q_\nu} = \lim_{q\to q_\nu} W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}\left(e^q - e^{q_\nu}\right)}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}} = \frac{P^*(q_\nu,\xi)e^{q_\nu n}}{Q^*(q_\nu)\left(e^q - e^{j\overline{\omega}_1}\right)}.$$

В случае полюса кратности

$$Выч W^*(q,\xi)\frac{e^{qn}}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}}\Bigg|_{q=q_\nu} = \sum_{i=0}^{r_\nu - 1} c^\nu_{r_\nu - 1 - i}(\overline{\omega}_1,\xi)\frac{n^{(j)}e^{q_\nu(n-i)}}{j!(r_\nu - 1 - i)!},$$

Где $n^{(j)} = n(n-1)(n-2)...(n-j+1)$ факториальная функция;

$$c^\nu_l(\xi) = \frac{d^l W^*(q,\xi)\dfrac{\left(e^q - e^{q_\nu}\right)^{r_\nu}}{e^q - e^{j\overline{\omega}_1}}}{dl^{q_l}}\Bigg|_{q=q_\nu}.$$

В частности, простого полюса q:

$$c^\nu_0(\overline{\omega}_1,\xi) = \frac{P^*(q_\nu,\xi)}{Q^*(q_\nu)\left(e^{q_\nu} - e^{j\overline{\omega}_1}\right)}.$$

Предполагая, что полюс q_ν функции $W^*(q,\xi)$ имеет кратность $r_\nu (\nu = 1,2,...,k)$, можно записать выражение, определяющее реакцию импульсной системы на воздействие $f[n]$, следующим образом:

$$z[n,\xi] = A_1 e^{j(\varphi+\overline{\omega}_1 n)}W^*[j\overline{\omega}_1,\xi] + A_1 e^{j\varphi}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{i=0}^{r_\nu - 1} c^\nu_{r_\nu - i - 1}(\overline{\omega}_1,\xi)\frac{n^{(i)}e^{q_\nu(n-1)}}{i!(r_\nu - 1 - i)!},$$

В частности, если все полюсы функции $W^*(q,\xi)$ простые, то

$$z[n,\xi] = A_1 e^{j(\varphi+\overline{\omega}_1 n)}W^*[j\overline{\omega}_1,\xi] + A_1 e^{j\varphi}\sum_{\nu=1}^{k} c^\nu_0(\overline{\omega}_1,\xi)e^{q_\nu n}.$$

Если действительные части всех полюсов q_ν отрицательна, то второе слагаемое в двух последних выражениях с течением времени будет стремиться к нулю, а первое слагаемое будет характеризовать установившийся процесс в системе:

$$z_y[n,\xi] = \lim_{n\to\infty} z[n,\xi] = A_1 e^{j(\varphi+\overline{\omega}_1 n)} W^*[j\overline{\omega}_1,\xi].$$

Рассматривая действительную часть комплексной решетчатой функции $z[n,\xi]$, определим реакцию импульсной системы $x[n,\xi]$ на заданное гармоническое воздействие. В частности, установившийся процесс в импульсной системе определяется выражением

$$x_y[n,\xi] = \operatorname{Re} z_y[n,\xi] = A_1 \left|W^*(j\overline{\omega}_1,\xi)\right| \cos\left(\overline{\omega}_1 n + \varphi + \arg W^*(j\overline{\omega}_1,\xi)\right).$$

4.3. Частотные характеристики

Амплитудно-фазовая частотная характеристика импульсной системы $W^*(j\overline{\omega},\xi)$ может быть получена из передаточной функции

$$W^*(q,\xi) \text{ при } q = j\overline{\omega}; 0 \le \xi \le \pi$$

Функция $\left|W^*(j\overline{\omega},\xi)\right| = A^*(\overline{\omega},\xi)$ называется амплитудно-частотной характеристикой, а функция $\arg W^*(j\overline{\omega},\xi) = \varphi^*(\overline{\omega},\xi)$ -фазочастотной характеристикой ишульоной системы. Частотные характеристики импульсной системы имеют тот же физический смысл, что и частотные характеристики непрерывной системы: амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) определяет изменение амплитуда гармонического воздействия при прохождении через импульсную систему; фазочастотная характеристика (ФЧХ) определяет сдвиг по фазе приложенного гармонического воздействия в установившемся режиме. Частотные характеристики позволяют найти установившуюся реакцию на гармоническое входное воздействие.

Амплитудно-базовая частотная характеристика может быть определена по следующим соотношениям:

$$W^*(j\overline{\omega},\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\overline{\omega}n} k_T[n,\xi],$$

$$W^*(j\overline{\omega},\xi) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j(\overline{\omega}+2\pi r)\xi} W_T\left(j(\overline{\omega}+2\pi r)\right),$$

Где

$$k_T[n,\xi] = D^{-1}\left\{W^*(q,\xi)\right\};$$
$$W_T(q) = \overline{D}^{-1}\left\{W^*(q,\xi)\right\}.$$

Если, в частности, рассматривается разомкнутая импульсная система, то функция $k_T[n,\xi] = k(\bar{t}T)\big|_{\bar{t}=n+\xi}$ - импульсная характеристика приведенной непрерывной части, а функция $W_T(j\overline{\omega})$ - амплитудно-фазовая характеристика ПНЧ при измерении частот в относительных единицах. В этом случав приведенные выше соотношения позволяют определить частотные характеристики импульсной системы непосредственно по заданным характеристикам приведенной непрерывной части.

Рассмотрим свойства частотных характеристик импульсных систем.

1. Импульсная система в отличие от непрерывной описывается не одной амплитудно-фазовой частотной характеристикой, а семейством частотных характеристик $W^*(j\overline{\omega},\xi)$, в силу того, что она зависит еще и от $\xi (0 \le \xi < 1)$. Однако при исследовании импульсных систем часто достаточно звать частотную характеристику только при одном значении $\xi = 0$.

2. Частотные характеристики импульсных систем являются периодическими функциями с периодом 2π. Это следует из периодичности D - преобразований:

$$W^*(j\overline{\omega},\xi) = W^*\left(j(\overline{\omega}+2\pi r),\xi\right), \quad r = 0,\pm1,\pm2...$$

Поэтому частотная характеристика $W^*(j\overline{\omega},\xi)$ полностью определяется своими значениями в интервале шириной 2π . Как правило, рассматривается интервал, лежащий в основной полосе $-\pi < \omega \le \pi$.

Выясним физический смысл периодичности частотных характеристик импульсных систем. Пусть на вход ИИЭ приложено гармоничеокое воздействие $f(t) = \cos\omega_1 t$. На выходе будем иметь

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\cos\omega_1 nT.$$

Пусть теперь приложено другое воздействие

$$f(t) = \cos(\omega_1 + \omega_0)t,$$

Где $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ - частота квантование.

Тогда

$$\cos(\omega_1 + \omega_0)nT = \cos\omega_1 nT$$

И

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\cos\omega_1 nT,$$

т.е. оба воздействия дают одну и ту же реакцию на выходе ИЭ.

Нетрудно показать, что реакция не изменится, если ко входу ИЭ приложить воздействие $f(t) = \cos(\omega_1 + r\omega_0)t, \quad r = 0,1,2...$ - любое целое число, или, в относительном времени, $f_T(\bar{t}) = \cos(\omega_1 + r\omega_0)\bar{t}T = \cos(\overline{\omega}_1 + 2\pi r)t; \overline{\omega}_1 = \omega_1 T$. При $\bar{t} = n$ по-прежнему

$f_T[n] = \cos\overline{\omega}_1 n$. Поэтому и реакция системы на гармоническое воздействие о частотой $\overline{\omega}_1 + 2\pi r$ будет такой же, как и на воздействие о частотой $\overline{\omega}_1$

3. Действительная часть амплитудно-фазовой частотной характеристики $W^*(j\overline{\omega},\xi)$ является четной функцией, а мнимая часть - нечетной, что следует из соотношения

$$W^*(j\overline{\omega},\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\overline{\omega}n} k_T[n,\xi] = \sum_{n=0}^{\infty} k_T[n,\xi]\cos\overline{\omega}n - j\sum_{n=0}^{\infty} k_T[n,\xi]\sin\overline{\omega}n.$$

Следовательно $W^*(j\overline{\omega},\xi) = \overline{W^*(-j\overline{\omega},\xi)}$. Благодаря этому свойству частотная характеристика $W^*(j\overline{\omega},\xi)$ определяется своими значениями при $0 \le \overline{\omega} < \pi$.

4. При $\overline{\omega} = 0$ и $\overline{\omega} = \pi$ амплитудно-фазовая частотная характеристика принимает следующие вещественные значения:

$$W^*(0,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_T[n,\xi]; \quad W^*(j\pi,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k_T[n,\xi].$$

4.4. <u>Логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики</u>

При исследовании непрерывных систем широко применяются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ), позволяющие судить о качестве работы автоматической системы, причем строятся они значительно проще, чем годографы. Но для импульсных систем нельзя построить ЛЧХ по амплитудно-фазовой частотной характеристике $W^*(j\overline{\omega})$ теми же приемами, что и для непрерывных систем.

Это объясняется тем, что $W^*(j\overline{\omega})$ не является дробно-рациональной функцией по отношению к $j\overline{\omega}$ и кроме того, переменная меняется на конечном интервале $0 \le \overline{\omega} < \pi$. Для использования обычной методики построения ЛЧХ, необходимо выполнить отображение отрезка мнимой оси $-\pi \le \overline{\omega} < \pi$ на всю мнимую ось, причем так, чтобы функция $W^*(j\overline{\omega})$ стала дробно-рациональной. Указанное отображение выполняется с помощью так называемого W - преобразование:

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{e^q - 1}{e^q + 1};$$

W - преобразование можно представить себе как последовательное преобразование сначала переменной q в переменную $z = e^q$. Это преобразование отображает отрезок мнимой оси длиной 2π в окружность единичного радиуса $z = e^{j\overline{\omega}}$. Затем следует преобразование переменной z в переменную ω :

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{z - 1}{z + 1},$$

которое является дробно-линейным. В соответствии со свойствами дробно-линейных преобразований оно взаимно-однозначно во всех точках расширенной плоскости комплексной переменной z , за исключением точки $z = -1$. Единичная окружность $|z| = 1,$ проходящая через эту, точку, отображается в прямую:

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{e^{j\overline{\omega}} - 1}{e^{j\overline{\omega}} + 1} = \frac{2}{T} j \frac{\sin\overline{\omega}}{1 + \cos\overline{\omega}} = \frac{2}{T} jtg\frac{\overline{\omega}}{2}.$$

При изменении $\overline{\omega}$ от $-\pi$ до $+\pi$ значения переменной ω изменяются от $-j\infty$ до $+j\infty$, т.е. отображением единичной окружности в плоскости ω является мнимой ось. Обозначим значения переменной ω на мнимой оси через $j\omega^*$. Таким образом,

$$j\omega^* = \frac{2}{T} jtg\frac{\overline{\omega}}{2}$$

Или

$$\omega^* = \frac{2}{T} tg\frac{\overline{\omega}}{2}$$

Величина ω^* имеет размерность частоты c^{-1} и называется псевдочастотной ω . При изменении $\overline{\omega}$ от $-\pi$ до $+\pi$ псевдочастота меняется от $-\infty$ до $+\infty$ причем при малых значениях $\overline{\omega}$

$$\omega^* \approx \frac{2}{T} tg\frac{\omega T}{2} \approx \omega.$$

Рассмотрим отображение одной из точек плоскости z на плоскость ω , а именно, точки $z = 0; \omega = -\frac{2}{T}$. С учетом свойств дробно-линейных преобразований отсюда следует, что внутренность единичного круга плоскости z отображается в левую полуплоскость переменной ω , а внешность единичного крута -

на правую полуплоскость ω .

Передаточные функции импульсных систем в плоскости ω получают заменой переменной q (или z):

$$W_{\omega}^{*}(\omega,\xi)=W^{*}(q,\xi)\Big|_{e^{q}=z=\frac{1+\omega\frac{T}{2}}{1+\omega\frac{T}{2}}}$$

Например, для системы о кратковременными импульсами при $\xi=0$

передаточная функция имеет вид

$$W^{*}(q)=\frac{k_{1}e^{q}}{e^{q}-e^{-\beta}},$$

$$W_{\omega}^{*}(\omega)=\frac{k_{1}\left(1+\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(1+\frac{\omega T}{2}\right)-e^{-\beta}\left(1-\frac{\omega T}{2}\right)}=\frac{k_{1}\left(1+\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(1-e^{-\beta}\right)\left(1+\omega\frac{T}{2}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\right)}=k\frac{1+\frac{\omega T}{2}}{1+\omega T_{1}^{'}},$$

где

$$k=\frac{k_{1}}{1-e^{-\beta}};\;\; T_{1}^{'}=\frac{T}{2}\frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}};$$

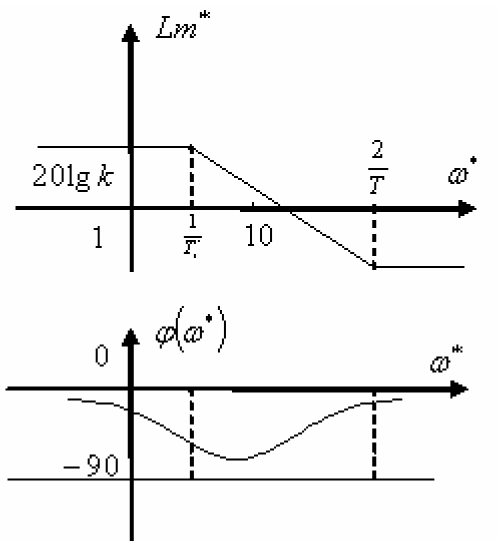


Рис. 13

Тогда ЛАЧХ

$$Lm^{*}=20\lg k+20\lg\sqrt{1+\frac{T^{2}}{4}\left(\omega^{*}\right)^{2}}-20\lg\sqrt{1+\left(T_{1}^{'}\right)^{2}\left(\omega^{*}\right)^{2}};$$

А ЛФЧХ

$$\varphi^*(W^*) = arctg\frac{T}{2}\omega^* - arctgT_1^{'}\omega^*.$$

Их графики приведены на рис. 13.