ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Министерство высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан
Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»

Ш.Р.Убайдуллаева, Р.Т.Газиева, Д.Р. Убайдуллаева

ОСНОВЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Ташкент- 2023

Составители: Убайдуллаева Ш.Р., Газиева Р.Т., Убайдуллаева Д.Р. Основы системного анализа: Учебное пособие для магистрантов, обучающихся по специальности «Автоматизация технологических процессов и производства». - Ташкент: Изд-во НИУ «ТИИИМСХ», 2023. - 110 с.

В учебном пособии изложены основные системные принципы моделирования и анализа сложных процессов и объектов. Приведен конструктивный анализ и синтез сложных систем. Учебное пособие предназначено для магистрантов вузов, обучающихся по специальности «Автоматизация технологических процессов и производства». Может быть полезно аспирантам, инженерам и научным работникам при исследовании и проектировании автоматических систем в различных отраслях промышленности.

Рецензенты:

Ж.Т. Усмонов, доктор философии (PhD), доцент Ташкентского университета информационных технологий,

Д.Б. Кадыров, D.Sc., заведующий кафедрой «Энергоснабжение и возобновляемые источники энергии» НИУ «ТИИИМСХ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено студентам, обучающихся по образовательным программам подготовки магистров по специальности 70711401 - «Автоматизация и управление технологическими процессами и производством (в водном хозяйстве)», а также для других направлений и специальностей, связанных с проектированием сложных систем, разработкой информационных систем, принятием решений при управлении техническими объектами и процессами. Изучение теоретического материала, включенного в пособие, призвано способствовать формированию у обучающихся представлений о системном анализе, исследовании операций, теории принятия решений, теории управления и других областях прикладной математики, а также об основных проблемах использования системного анализа в процессе разработки информационных комплексов; усвоению теоретических подходов к анализу различных предметных областей с целью выделения процессов, подлежащих автоматизации и последующей разработке и внедрению прикладных информационных комплексов. При разработке учебного пособия использовался опубликованный ранее теоретический материал и опыт преподавания учебных дисциплин, основанных на системном подходе к изучению проблем в различных областях науки и практической деятельности, а также личный методический опыт авторов.

1. Основы теории систем

1.1 Основные понятия теории систем

Термины «*теория систем*» и «*системный анализ*», несмотря на период более 25 лет их использования, все еще не нашли общепринятого, стандартного истолкования.

Причина этого факта заключается в динамичности процессов в области человеческой деятельности и в принципиальной возможности использовать системный подход практически в любой решаемой человеком задаче.

Общая теория систем (ОТС) — научная дисциплина, изучающая самые фундаментальные понятия и аспекты систем. Она изучает различные явления, отвлекаясь от их конкретной природы и основываясь лишь на формальных взаимосвязях между различными составляющими их факторами и на характере их изменения под влиянием внешних условий, при этом результаты всех наблюдений объясняются лишь взаимодействием их компонентов, например характером их организации и функционирования, а не с помощью непосредственного обращения к природе вовлечённых в явления механизмов (будь они физическими, биологическими, экологическими, социологическими, или концептуальными).

Для ОТС объектом исследования является не «физическая реальность», а «система», т.е. абстрактная формальная взаимосвязь между основными признаками и свойствами.

При системном подходе объект исследования представляется как ***система***. Само понятие система может быть относимо к одному из методологических понятий, поскольку рассмотрение объекта исследуется как система или отказ от такого рассмотрения зависит от задачи исследования и самого исследователя [1].

Существует много определений системы.

1. Система есть комплекс элементов, находящихся во взаимодействии.

2. Система — это множество объектов вместе с отношениями этих объектов.

3. Система — множество элементов, находящихся в отношениях или связях друг с другом, образующих целостность или органическое единство (толковый словарь).

Термины «*отношение*» и «*взаимодействие*» используются в самом широком смысле, включая весь набор родственных понятий таких, как ограничение, структура, организационная связь, соединение, зависимость и т.д.

Таким образом, система S представляет собой упорядоченную пару S=(A,R), где A — множество элементов; R — множество отношений между A.

Система — это полный, целостный набор элементов (компонентов), взаимосвязанных и взаимодействующих между собой так, чтобы могла реализоваться функция системы.

Исследование объекта как системы предполагает использование ряда системных представлений (категорий), среди которых основными являются:

1. структурное представление — связано с выделением элементов системы и связей между ними.

2. функциональное представление — выделение совокупности функций (целенаправленных действий) системы и её компонентов, направленное на достижение определённой цели.

3. макроскопическое представление — понимание системы как нерасчленимого целого, взаимодействующего с внешней средой.

4. микроскопическое представление — основано на рассмотрении системы как совокупности взаимосвязанных элементов. Оно предполагает раскрытие структуры системы.

5. иерархическое представление — основано на понятии подсистемы, получаемой при разложении (декомпозиции) системы, обладающей системными свойствами, которые следует отличать от её

элемента — неделимого на более мелкие части (с точки зрения решаемой задачи). Система может быть представлена в виде совокупностей подсистем различных уровней, составляющих системную иерархию, которая замыкается снизу только элементами.

6. процессуальное представление — предполагает понимание системного объекта как динамического объекта, характеризующегося последовательностью его состояний во времени.

Рассмотрим определения других понятий, тесно связанных с системой и ее характеристиками [3].

Объект.

Объектом познания является часть реального мира, которая выделяется и воспринимается как единое целое в течение длительного времени. Объект может быть материальным и абстрактным, естественным и искусственным. Реально объект обладает бесконечным набором свойств различной природы. Практически в процессе познания взаимодействие осуществляется с ограниченным множеством свойств, лежащих в пределах возможности их восприятия и необходимости для цели познания. Поэтому система как образ объекта задаётся на конечном множестве отобранных для наблюдения свойств.

Внешняя среда.

Понятие «система» возникает там и тогда, где и когда мы материально или умозрительно проводим замкнутую границу между неограниченным или некоторым ограниченным множеством элементов. Те элементы (с их соответствующей взаимной обусловленностью), которые попадают внутрь , образуют систему.

Те элементы, которые остались за пределами границы, образуют множество, называемое в теории систем «системным окружением» или просто «окружением», или «внешней средой».

Из этих рассуждений вытекает, что немыслимо рассматривать систему без ее внешней среды. Система формирует и проявляет свои свойства в процессе взаимодействия с окружением, являясь при этом ведущим компонентом этого воздействия.

В зависимости от воздействия на окружение и характер взаимодействия с другими системами функции системы можно расположить по возрастающему рангу следующим образом:

- пассивное существование;
- материал для других систем;
- обслуживание систем более высокого порядка;
- противостояние другим системам (выживание);
- поглощение других систем (экспансия);
- преобразование других систем и сред (активная роль).

Всякая система может рассматриваться, с одной стороны, как подсистема более высокого порядка (надсистемы), а с другой, как надсистема системы более низкого порядка (подсистема). Например, система «производственный цех» входит как подсистема в систему более высокого ранга — «фирма». В свою очередь, надсистема «фирма» может являться подсистемой «корпорации».

Обычно в качестве подсистем фигурирует более или менее самостоятельные части системы, выделяемые по определённым признакам, обладающие относительной самостоятельностью, определённой степенью свободы.

Компонент — любая часть системы, вступающая в определённые отношения с другими частями (подсистемами, элементами).

Элементом системы является часть системы с однозначно определёнными свойствами, выполняющая определённые функции и не подлежащая дальнейшему разбиению в рамках решаемой задачи (с точки зрения исследователя).

Понятия *элемент, подсистема, система* взаимопреобразуемы. Система может рассматриваться как элемент системы более высокого порядка (метасистема), а элемент, при углубленном анализе, как система. То обстоятельство, что любая подсистема является одновременно и относительно самостоятельной системой приводит к двум аспектам изучения систем: на *макро*- и *микро*уровнях.

При изучении на макроуровне основное внимание уделяется взаимодействию системы с внешней средой. Причём системы более высокого уровня можно рассматривать как часть внешней среды. При таком подходе главными факторами являются целевая функция системы (цель), условия её функционирования. При этом элементы системы изучаются с точки зрения организации их в единое целое, влияние на функции системы в целом.

На микроуровне основными становятся внутренние характеристики системы, характер взаимодействия элементов между собой, их свойства и условия функционирования.

Для изучения системы сочетаются оба компонента.

Структура системы.

Под структурой системы понимается устойчивое множество отношений, которое сохраняется длительное время неизменным, по крайней мере в течение интервала наблюдения. Структура системы опережает определенный уровень сложности по составу отношений на множестве элементов системы или, что эквивалентно, уровень разнообразных проявлений объекта.

Связи — это элементы, осуществляющие непосредственное взаимодействие между элементами (или подсистемами) системы, а также с элементами и подсистемами окружения.

Связь — одно из фундаментальных понятий в системном подходе. Система как единое целое существует именно благодаря наличию связей между ее элементами, т.е., иными словами, связи выражают законы функционирования системы. Связи различают по характеру взаимосвязи как прямые и обратные, а по виду проявления (описания) как детерминированные и вероятностные.

Прямые связи предназначены для заданной функциональной передачи вещества, энергии, информации или их комбинаций — от одного элемента к другому в направлении основного процесса.

Обратные связи, в основном, выполняют осведомляющие функции, отражая изменение состояния системы в результате управляющего воздействия на нее. Открытие принципа обратной связи явилось выдающимся событием в развитии техники и имело исключительно важные последствия. Процессы управления, адаптации, саморегулирования, самоорганизации, развития невозможны без использования обратных связей.

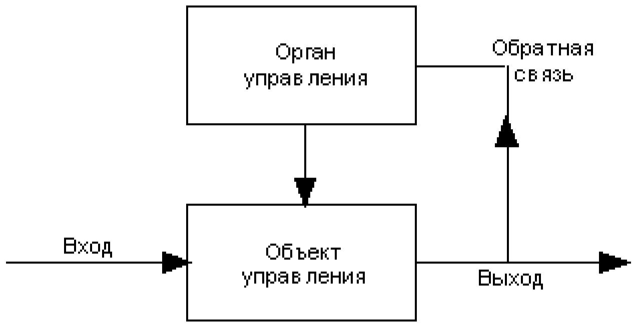


Рис.1.1 Пример принципа обратной связи

С помощью обратной связи сигнал (информация) с выхода системы (объекта управления) передается в орган управления. Здесь этот сигнал, содержащий информацию о работе, выполненной объектом управления, сравнивается с сигналом, задающим содержание и объем работы (например, план). В случае возникновения рассогласования между фактическим и плановым состоянием работы принимаются меры по его устранению.

Основными функциями обратной связи являются:

1. противодействие тому, что делает сама система, когда она выходит за установленные пределы (например, реагирование на снижение качества);

2. компенсация возмущений и поддержание состояния устойчивого равновесия системы (например, неполадки в работе оборудования);

3. синтезирование внешних и внутренних возмущений, стремящихся вывести систему из состояния устойчивого равновесия, сведение этих возмущений к отклонениям одной или нескольких управляемых величин (например, выработка управляющих команд на одновременное появление нового конкурента и снижение качества выпускаемой продукции);

4. выработка управляющих воздействий на объект управления по плохо формализуемому закону. Например, установление более высокой цены на энергоносители вызывает в деятельности различных организаций сложные изменения, меняют конечные результаты их функционирования, требуют внесения изменений в производственно-хозяйственный процесс путем воздействий, которые невозможно описать с помощью аналитических выражений.

Нарушение обратных связей в социально-экономических системах по различным причинам ведет к тяжелым последствиям. Отдельные локальные системы утрачивают способность к эволюции и тонкому восприятию намечающихся новых тенденций, перспективному развитию и научно обоснованному прогнозированию своей деятельности на длительный период времени, эффективному приспособлению к постоянно меняющимся условиям внешней среды.

Особенностью социально-экономических систем является то обстоятельство, что не всегда удается четко выразить обратные связи, которые в них, как правило, длинные, проходят через целый ряд промежуточных звеньев, и четкий их просмотр затруднен. Сами управляемые величины нередко не поддаются ясному определению, и трудно установить множество ограничений, накладываемых на параметры управляемых величин. Не всегда известны также действительные причины выхода управляемых переменных за установленные пределы.

Детерминированная (жесткая) связь, как правило, однозначно определяет причину и следствие, дает четко обусловленную формулу взаимодействия элементов. Вероятностная (гибкая) связь определяет неявную, косвенную зависимость между элементами системы. Теория вероятности предлагает математический аппарат для исследования этих связей, называемый «корреляционными зависимостями»[4].

Критерии — признаки, по которым производится оценка соответствия функционирования системы желаемому результату (цели) при заданных ограничениях.

Эффективность системы — соотношение между заданным (целевым) показателем результата функционирования системы и фактически реализованным.

Функционирование любой произвольно выбранной системы состоит в переработке входных (известных) параметров и известных параметров воздействия окружающей среды в значения выходных (неизвестных) параметров с учетом факторов обратной связи.

Рис.1.2 Функционирование системы

Вход — все, что изменяется при протекании процесса (функционирования) системы.

Выход — результат конечного состояния процесса.

Процесс — перевод входа в выход.

Система осуществляет свою связь со средой следующим образом.

Вход данной системы является в то же время выходом предшествующей, а выход данной системы — входом последующей. Таким образом, вход и выход располагаются на границе системы и выполняют одновременно функции входа и выхода предшествующих и последующих систем.

Управление системой связано с понятиями прямой и обратной связи, ограничениями.

Обратная связь — предназначена для выполнения следующих операций:

- сравнение данных на входе с результатами на выходе с выявлением их качественно-количественного различия;
- оценка содержания и смысла различия;
- выработка решения, вытекающего из различия;
- воздействие на ввод.

Ограничение — обеспечивает соответствие между выходом системы и требованием к нему, как к входу в последующую систему — потребитель. Если заданное требование не выполняется, ограничение не пропускает его через себя. Ограничение, таким образом, играет роль согласования функционирования данной системы с целями (потребностями) потребителя.

Определение функционирования системы связано с понятием «проблемной ситуации», которая возникает, если имеется различие между необходимым (желаемым) выходом и существующим (реальным) входом.

Проблема — это разница между существующей и желаемой системами. Если этой разницы нет, то нет и проблемы.Решить проблему — значит скорректировать старую систему или сконструировать новую, желаемую.

Состоянием системы называется совокупность существенных свойств, которыми система обладает в каждый момент времени.

Контрольные вопросы.

1. Основные системные категории.
2. Понятийные термины, связанные с системой и ее характеристиками.
3. Структура системы.
4. Состояние системы.

1.2. Системные свойства. Классификация систем

Свойства систем.

Итак, *состоянием системы* называется совокупность существенных свойств, которыми система обладает в каждый момент времени.

Под *свойством* понимают сторону объекта, обусловливающую его отличие от других объектов или сходство с ними, проявляющуюся при взаимодействии с другими объектами [1].

Характеристика — то, что отражает некоторое свойство системы.

Какие свойства системы известны?

Из определения «системы» следует, что главным свойством системы является целостность, единство, достигаемое посредством определенных взаимосвязей и взаимодействий элементов системы и проявляющиеся в возникновении новых свойств, которыми элементы системы не обладают. Это свойство *эмерджентности* (от анг. emerge — возникать, появляться).

1. Эмерджентность — степень несводимости свойств системы к свойствам элементов, из которых она состоит.
2. Эмерджентность — свойство систем, обусловливающее появление новых свойств и качеств, не присущих элементам, входящих в состав системы.

Эмерджентность — принцип противоположный *редукционизму*, который утверждает, что целое можно изучить, расчленив его на части и затем, определяя их свойства, определить свойства целого.

Свойству эмерджентности близко свойство *целостности* системы. Однако их нельзя отождествлять.

Целостность системы означает, что каждый элемент системы вносит вклад в реализацию целевой функции системы. Целостность и эмерджентность — интегративные свойства системы.Наличие интегративных свойств является одной из важнейших черт системы. Целостность проявляется в том, что система обладает собственной закономерностью функциональности, собственной целью.

Организованность — сложное свойство системы, заключающееся в наличие структуры и функционирования (поведения). Непременной принадлежностью системы являются его компоненты, именно те структурные образования, из которых состоит целое и без чего оно невозможно.

Функциональность — это проявление определенных свойств (функций) при взаимодействии с внешней средой. Здесь же определяется цель (назначение системы) как желаемый конечный результат.

Структурность — это упорядоченность системы, определенный набор и расположение элементов со связями между ними. Между функцией и структурой системы существует взаимосвязь, как между философскими категориями - содержанием и формой. Изменение содержания (функций) влечет за собой изменение формы (структуры), и наоборот.

Важным свойством системы является наличие поведения — действия, изменений, функционирования и т.д.Считается, что это поведение системы связано со средой (окружающей), т.е. с другими системами с которыми она входит в контакт или вступает в определенные взаимоотношения.

Процесс целенаправленного изменения во времени состояния системы называется *поведением*. В отличие от управления, когда изменение состояния системы достигается за счет внешних воздействий, поведение реализуется исключительно самой системой, исходя из собственных целей.Поведение каждой системы объясняется структурой систем низшего порядка, из которых состоит данная система, и наличием признаков равновесия (гомеостаза). В соответствии с признаком равновесия система имеет определенное состояние (состояния), которое является для нее предпочтительным. Поэтому поведение системы описывается в терминах восстановления этих состояний, когда они нарушаются в результате изменения окружающей среды.

Еще одним свойством является свойство *роста (развития)*. Развитие можно рассматривать как составляющую часть поведения (при этом важнейшую).

Одним из первичных, а, следовательно, основополагающих атрибутов системного подхода является недопустимость рассмотрения объекта вне его развития, под которым понимается необратимое, направленное, закономерное изменение материи и сознания. В результате возникает новое качество или состояние объекта. Отождествление (может быть и не совсем строгое) терминов «развитие» и «движение» позволяет выразиться в таком смысле, что вне развития немыслимо существование материи, в данном случае — системы. Наивно представлять себе развитие, происходящее стихийно. В неоглядном множестве процессов, кажущихся на первый взгляд чем-то вроде броуновского (случайного, хаотичного) движения, при пристальном внимании и изучении вначале как бы проявляются контуры тенденций, а затем и довольно устойчивые закономерности. Эти закономерности по природе своей действуют объективно, т.е. не зависят от того, желаем ли мы их проявления или нет. Незнание законов и закономерностей развития — это блуждание в потемках.

«Кто не знает, в какую гавань он плывет, для того нет попутного ветра» Сенека.

Поведение системы определяется характером реакции на внешние воздействия.

Фундаментальным свойством систем является *устойчивость*, т.е. способность системы противостоять внешним возмущающим воздействиям. От нее зависит продолжительность жизни системы.

Простые системы имеют пассивные формы устойчивости: прочность, сбалансированность, регулируемость, гомеостаз. А для сложных определяющими являются активные формы: надежность, живучесть и адаптируемость.

Если перечисленные формы устойчивости простых систем (кроме прочности) касаются их поведения, то определяющая форма устойчивости сложных систем носит в основном структурный характер.

Надежность — свойство сохранения структуры системы, несмотря на гибель отдельных ее элементов с помощью их замены или дублирования, а *живучесть* — как активное подавление вредных качеств. Таким образом, надежность является более пассивной формой, чем живучесть.

Адаптируемость — свойство изменять поведение или структуру с целью сохранения, улучшения или приобретения новых качеств в условиях изменения внешней среды. Обязательным условием возможности адаптации является наличие *обратных связей.*

Всякая реальная система существует в *среде.* Связь между ними бывает настолько тесной, что определить границу между ними становится сложно. Поэтому выделение системы из среды связано с той или иной степенью идеализации.

Можно выделить два аспекта взаимодействия:

- во многих случаях принимает характер обмена между системой и средой (веществом, энергией, информацией);
- среда обычно является источником неопределенности для систем.

Воздействие среды может быть пассивным либо активным (антогонистическим, целенаправленно противодействующее системе).Поэтому в общем случае среду следует рассматривать не только безразличную, но и антогонистическую по отношению к исследуемой системе.

Классификация систем

Классификацией системы называется разбиение её на классы по наиболее существенным признакам. Под *классом* понимается совокупность объектов, обладающих некоторыми признаками общности. Признак (или совокупность признаков) является основанием (критерием) классификации[1].

Система может быть охарактеризована одним или несколькими признаками и, соответственно, ей может быть найдено место в различных классификациях, каждая из которых может быть полезной при выборе методологии исследования. Обычно цель классификации ограничить выбор подходов к отображению систем, выработать язык описания, подходящий для соответствующего класса.

Рис.1.3 Классификация систем

По содержанию различают *реальные* (материальные), объективно существующие, и *абстрактные* (концептуальные, идеальные) системы, являющиеся продуктом мышления.

Реальные системы делятся на *естественные* (природные системы) и *искусственные* (антропогенные). Естественные системы: системы неживой (физические, химические) и живой (биологические) природы. Искусственные системы: создаются человечеством для своих нужд или образуются в результате целенаправленных усилий.

Искусственные системы делятся на *технические* (технико-экономические) и *социальные* (общественные).Техническая система спроектирована и изготовлена человеком в определенных целях.К социальным системам относятся различные системы человеческого общества.

Выделение систем, состоящих из одних только технических устройств почти всегда условно, поскольку они не способны вырабатывать свое состояние. Эти системы выступают как части более крупных, включающие людей — организационно-технических систем.

Таблица 1.1.Классы систем

Основание (критерий) классификации	**Классы систем**
По взаимодействию с внешней средой	Открытые Закрытые Комбинированные
По структуре	Простые Сложные Большие
По характеру функций	Специализированные Многофункциональные (универсальные)
По характеру развития	Стабильные Развивающиеся
По степени организованности	Хорошо организованные Плохо организованные (диффузные)
По сложности поведения	Автоматические Решающие Самоорганизующиеся Предвидящие Превращающиеся
По характеру связи между элементами	Детерминированные Стохастические
По характеру структуры управления	Централизованные Децентрализованные
По назначению	Производящие Управляющие Обслуживающие

Организационная система, для эффективного функционирования которой существенным фактором является способ организации взаимодействия людей с технической подсистемой, называется *человеко-машинной системой.* Примеры человеко-машинных систем: автомобиль — водитель; самолет — летчик; ЭВМ — пользователь и т.д.

Таким образом, под *техническими* системами понимают единую конструктивную совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих объектов, предназначенных для целенаправленных действий с задачей достижения в процессе функционирования заданного результата.

Отличительными признаками технических систем по сравнению с произвольной совокупностью объектов или по сравнению с отдельными элементами является *конструктивность* (практическая осуществляемость отношений между элементами), *ориентированность, взаимосвязанность составных элементов и целенаправленность*.

Для того чтобы система была устойчивой к воздействию внешних влияний, она должна иметь устойчивую структуру. Выбор структуры практически определяет технический облик как всей системы, так ее подсистем и элементов. Вопрос о целесообразности применения той или иной структуры должен решаться исходя из конкретного назначения системы. От структуры зависит также способность системы к перераспределению функций в случае полного или частичного отхода отдельных элементов и, следовательно, надежность и живучесть системы при заданных характеристиках ее элементов.

Абстрактные системы являются результатом отражения действительности (реальных систем) в мозге человека.

Их настроение — необходимая ступень обеспечения эффективного взаимодействия человека с окружающим миром. Абстрактные (идеальные) системы объективны по источнику происхождения, поскольку их первоисточником является объективно существующая действительность.

Абстрактные системы разделяют на системы *непосредственного* отображения (отражающие определенные аспекты реальных систем) и системы *генерализирующего* (обобщающего) отображения. К первым относятся математические и эвристические модели, а ко вторым — концептуальные системы (теории методологического построения) и языки.

На основе понятия внешней среды системы разделяются на: *открытые, закрытые* (замкнутые, изолированные) и *комбинированные*. Деление систем на открытые и закрытые связано с их характерными признаками: возможность сохранения свойств при наличии внешних воздействий. Если система нечувствительна к внешним воздействиям ее можно считать закрытой. В противном случае — открытой.

Контрольные вопросы.

1. Свойства систем.
2. Поведение системы.
3. Классификация систем.

1.3. Свойства открытых систем

Открытой называется система, которая взаимодействует с окружающей средой. *Все реальные системы являются открытыми[4]*. Открытая система является частью более общей системы или нескольких систем. Если вычленить из этого образования собственно рассматриваемую систему, то оставшаяся часть — *её среда*. Открытая система связана со средой определенными коммуникациями, то есть сетью внешних связей системы. Выделение внешних связей и описание механизмов взаимодействия «система-среда» является центральной задачей теории открытых систем. Рассмотрение открытых систем позволяет расширить понятие структуры системы. Для открытых систем оно включает не только внутренние связи между элементами, но и внешние связи со средой. При описании структуры внешние коммуникационные каналы стараются разделить на входные (по которым среда воздействует на систему) и выходные (наоборот). Совокупность элементов этих каналов, принадлежащих собственной системе называются *входными* и *выходными* полюсами системы. У открытых систем, по крайней мере, один элемент имеет связь с внешней средой, по меньшей мере, один входной полюс и один выходной, которыми она связана с внешней средой.

Для каждой системы связи со всеми подчиненными ей подсистемами и между последними, являются *внутренними*, а все остальные — *внешними*. Связи между системами и внешней средой также, как и между элементами системы, носят, как правило, направленный характер.

Важно подчеркнуть, что в любой реальной системе, в силу законов диалектики о всеобщей связи явлений, число всех взаимосвязей так огромно, что учесть и исследовать абсолютно все связи невозможно, поэтому их число искусственно ограничивают. Вместе с тем, учитывать все возможные связи нецелесообразно, так как среди них есть много несущественных, практически не влияющих на функционирование системы и количество полученных решений (с точки зрения решаемых задач). Если изменение характеристик связи, ее исключение (полный разрыв) приводят к значительному ухудшению работы системы, снижению эффективности, то такая связь — *существенна*. Одна из важнейших задач исследователя — выделить существенные для рассмотрения системы в условиях решаемой задачи связи и отделить их от несущественных. В связи с тем, что входные и выходные полюса системы не всегда удается четко выделить, приходится прибегать к определенной идеализации действий. Наибольшая идеализация имеет место при рассмотрении закрытой системы.

Закрытой называется система, которая не взаимодействует со средой или взаимодействует со средой строго определенным образом. В первом случае предполагается, что система не имеет входных полюсов, а во втором, что входные полюса есть, но воздействие среды носит неизменный характер и полностью (заранее) известно. Очевидно, что при последнем предположении указанные воздействия могут быть отнесены собственно к системе, и ее можно рассматривать, как закрытую. Для закрытой системы, любой ее элемент имеет связи только с элементами самой системы.

Разумеется, закрытые системы представляют собой некоторую абстракцию реальной ситуации, так как, строго говоря, изолированных систем не существует. Однако, очевидно, что упрощение описания системы, заключающееся в отказе от внешних связей, может привести к полезным результатам, упростить исследование системы. Все реальные системы тесно или слабо связаны с внешней средой — открытые. Если временный разрыв или изменение характерных внешних связей не вызывает отклонения в функционировании системы сверх установленных заранее пределов, то система связана с внешней средой слабо. В противном случае — тесно.

Комбинированные системы содержат открытые и закрытые подсистемы. Наличие комбинированных систем свидетельствует о сложной комбинации открытой и закрытой подсистем.

В зависимости от структуры и пространственно-временных свойств системы делятся на *простые, сложные и большие.*

Простые — системы, не имеющие разветвленных структур, состоящие из небольшого количества взаимосвязей и небольшого количества элементов. Такие элементы служат для выполнения простейших функций, в них нельзя выделить иерархические уровни. Отличительной особенностью простых систем является *детерминированность* (четкая определенность) номенклатуры, числа элементов и связей как внутри системы, так и со средой.

Сложные — характеризуются большим числом элементов и внутренних связей, их неоднородностью и разнокачественностью, структурным разнообразием, выполняют сложную функцию или ряд функций. Компоненты сложных систем могут рассматриваться как подсистемы, каждая из которых может быть детализирована еще более простыми подсистемами и т.д. до тех пор, пока не будет получен элемент.

Определение 1: система называется сложной (с гносеологических позиций), если ее познание требует совместного привлечения многих моделей, теорий, а в некоторых случаях многих научных дисциплин, а также учета неопределенности вероятностного и невероятностного характера. Наиболее характерным проявлением этого определения является многомодельность.

Модель — некоторая система, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе. Это описание систем (математическое, вербальное и т.д.) отображающее определенную группу ее свойств.

Определение 2: систему называют сложной, если в реальной действительности рельефно (существенно) проявляются признаки ее сложности. А именно:

1. структурная сложность — определяется по числу элементов системы, числу и разнообразию типов связей между ними, количеству иерархических уровней и общему числу подсистем системы. Основными типами считаются следующие виды связей: *структурные* (в том числе, иерархические), *функциональные, каузальные* (причинно-следственные), *информационные, пространственно-временные*;

2. сложность функционирования (поведения) — определяется характеристиками множества состояний, правилами перехода из состояния в состояние, воздействие системы на среду и среды на систему, степенью неопределенности перечисленных характеристик и правил;

3. сложность выбора поведения — в многоальтернативных ситуациях, когда выбор поведения определяется целью системы, гибкостью реакций на заранее неизвестные воздействия среды;

4. сложность развития — определяемая характеристиками эволюционных или скачкообразных процессов.

Естественно, что все признаки рассматриваются во взаимосвязи. *Иерархическое построение* — характерный признак сложных систем, при этом уровни иерархии могут быть как однородные, так и неоднородные. Для сложных систем присущи такие факторы, как невозможность предсказать их поведение, то есть слабо предсказуемость, их скрытность, разнообразные состояния.

Сложные системы можно подразделить на следующие факторные подсистемы:

1. решающую, которая принимает глобальные решения во взаимодействии с внешней средой и распределяет локальные задания между всеми другим подсистемами;

2. информационную, которая обеспечивает сбор, переработку и передачу информации, необходимой для принятия глобальных решений и выполнения локальных задач;

3. управляющую для реализации глобальных решений;

4. гомеостазную, поддерживающую динамическое равновесие внутри систем и регулирующую потоки энергии и вещества в подсистемах;

5. адаптивную, накапливающую опыт в процессе обучения для улучшения структуры и функций системы.

Большой системой называют систему, ненаблюдаемую одновременно с позиции одного наблюдателя во времени или в пространстве, для которой существенен пространственный фактор, число подсистем которой очень велико, а состав разнороден.

Система может быть и большой и сложной. Сложные системы объединяют более обширную группу систем, то есть большие — подкласс сложных систем.

Основополагающими при анализе и синтезе больших и сложных систем являются процедуры декомпозиции и агрегирования.

Декомпозиция — разделение систем на части, с последующим самостоятельным рассмотрением отдельных частей.

Очевидно, что декомпозиция представляют собой понятие, связанное с моделью, так как сама система не может быть расчленена без нарушений свойств. На уровне моделирования, разрозненные связи заменятся соответственно эквивалентами, либо модель системы строится так, что разложение ее на отдельные части при этом оказывается естественным.

Применительно к большим и сложным системам декомпозиция является мощным инструментом исследования.

Агрегирование является понятием, противоположным декомпозиции. В процессе исследования возникает необходимость объединения элементов системы с целью рассмотреть ее с более общих позиций.

Декомпозиция и агрегирование представляют собой две противоположные стороны подхода к рассмотрению больших и сложных систем, применяемые в диалектическом единстве.

Системы, для которых состояние системы однозначно определяется начальными значениями и может быть предсказано для любого последующего момента времени, называются *детерминированными.*

Стохастические системы — системы, изменения в которых носят случайный характер. При случайных воздействиях данных о состоянии системы недостаточно для предсказания в последующий момент времени.

По степени организованности: *хорошо организованные*, *плохо организованные* (*диффузные*).

Представить анализируемый объект или процесс в виде *хорошо организованной системы* означает определить элементы системы, их взаимосвязь, правила объединения в более крупные компоненты. Проблемная ситуация может быть описана в виде математического выражения. Решение задачи при представлении ее в виде хорошо организованной системы осуществляется аналитическими методами формализованного представления системы.

Примеры хорошо организованных систем: солнечная система, описывающая наиболее существенные закономерности движения планет вокруг Солнца; отображение атома в виде планетарной системы, состоящей из ядра и электронов; описание работы сложного электронного устройства с помощью системы уравнений, учитывающей особенности условий его работы (наличие шумов, нестабильности источников питания и т. п.).

Описание объекта в виде хорошо организованной системы применяется в тех случаях, когда можно предложить детерминированное описание и экспериментально доказать правомерность его применения, адекватность модели реальному процессу. Попытки применить класс хорошо организованных систем для представления сложных многокомпонентных объектов или многокритериальных задач плохо удаются: они требуют недопустимо больших затрат времени, практически нереализуемы и неадекватны применяемым моделям.

Плохо организованные системы. При представлении объекта в виде плохо организованной или диффузной системы не ставится задача определить все учитываемые компоненты, их свойства и связи между ними и целями системы. Система характеризуется некоторым набором макропараметров и закономерностями, которые находятся на основе исследования не всего объекта или класса явлений, а на основе определенной с помощью некоторых правил выборки компонентов, характеризующих исследуемый объект или процесс. На основе такого выборочного исследования получают характеристики или закономерности (статистические, экономические) и распространяют их на всю систему в целом. При этом делаются соответствующие оговорки. Например, при получении статистических закономерностей их распространяют на поведение всей системы с некоторой доверительной вероятностью.

Подход к отображению объектов в виде диффузных систем широко применяется при: описании систем массового обслуживания, определении численности штатов на предприятиях и учреждениях, исследовании документальных потоков информации в системах управления и т. д.

С точки зрения характера функций различаются *специальные, многофункциональные, и универсальные системы.*

Для *специальных систем* характерна единственность назначения и узкая профессиональная специализация обслуживающего персонала (сравнительно несложная).

Многофункциональные системы позволяют реализовать на одной и той же структуре несколько функций. Пример: производственная система, обеспечивающая выпуск различной продукции в пределах определенной номенклатуры.

Для *универсальных систем*: реализуется множество действий на одной и той же структуре, однако состав функций по виду и количеству менее однороден (менее определен). Например, комбайн.

По характеру развития различают 2 класса систем: *стабильные и развивающиеся.*

У *стабильной системы* структура и функции практически не изменяются в течение всего периода ее существования и, как правило, качество функционирования стабильных систем по мере изнашивания их элементов только ухудшается. Восстановительные мероприятия обычно могут лишь снизить темп ухудшения.

Отличной особенностью *развивающихся систем* является то, что с течением времени их структура и функции приобретают существенные изменения. Функции системы более постоянны, хотя часто и они видоизменяются. Практически неизменными остается лишь их назначение. Развивающиеся системы имеют более высокую сложность.

В порядке усложнения поведения: *автоматические, решающие, самоорганизующиеся, предвидящие, превращающиеся*.

Автоматические: однозначно реагируют на ограниченный набор внешних воздействий, внутренняя их организация приспособлена к переходу в равновесное состояние при выводе из него (гомеостаз).

Решающие: имеют постоянные критерии различения их постоянной реакции на широкие классы внешних воздействий. Постоянство внутренней структуры поддерживается заменой вышедших из строя элементов.

Самоорганизующиеся: имеют гибкие критерии различения и гибкие реакции на внешние воздействия, приспосабливающиеся к различным типам воздействия. Устойчивость внутренней структуры высших форм таких систем обеспечивается постоянным самовоспроизводством.Самоорганизующиеся системы обладают признаками диффузных систем: стохастичностью поведения, нестационарностью отдельных параметров и процессов. К этому добавляются такие признаки, как непредсказуемость поведения; способность адаптироваться к изменяющимся условиям среды, изменять структуру при взаимодействии системы со средой, сохраняя при этом свойства целостности; способность формировать возможные варианты поведения и выбирать из них наилучший и др. Иногда этот класс разбивают на подклассы, выделяя адаптивные или самоприспосабливающиеся системы, самовосстанавливающиеся, самовоспроизводящиеся и другие подклассы, соответствующие различным свойствам развивающихся систем.

Примеры: биологические организации, коллективное поведение людей, организация управления на уровне предприятия, отрасли, государства в целом, т.е. в тех системах, где обязательно имеется человеческий фактор.

Если устойчивость по своей сложности начинает превосходить сложные воздействия внешнего мира — это *предвидящие* системы: она может предвидеть дальнейший ход взаимодействия.

Превращающиеся — это воображаемые сложные системы на высшем уровне сложности, не связанные постоянством существующих носителей. Они могут менять вещественные носители, сохраняя свою индивидуальность. Науке примеры таких систем пока не известны.

Систему можно разделить на виды по признакам структуры их построения и значимости той роли, которую играют в них отдельные составные части в сравнение с ролями других частей.

В некоторых системах одной из частей может принадлежать доминирующая роль (ее значимость>> (символ отношения «значительного превосходства») значимость других частей). Такой компонент будет выступать как центральный, определяющий функционирование всей системы. Такие системы называют *централизованными*.

В других системах все составляющие их компоненты примерно одинаково значимы. Структурно они расположены не вокруг некоторого централизованного компонента, а взаимосвязаны последовательно или параллельно и имеют примерно одинаковые значения для функционирования системы. Это *децентрализованные* системы.

Системы можно классифицировать по назначению. Среди технических и организационных систем выделяют: *производящие, управляющие, обслуживающие.*

В *производящих системах* реализуются процессы получения некоторых продуктов или услуг. Они в свою очередь делятся на вещественно-энергетические, в которых осуществляется преобразование природной среды или сырья в конечный продукт вещественной или энергетической природы, либо транспортирование такого рода продуктов; и информационные — для сбора, передачи и преобразования информации, и предоставление информационных услуг.

Назначение *управляющих систем* — организация и управление вещественно-энергетическими и информационными процессами.

Обслуживающие системы занимаются поддержкой заданных пределов работоспособности производящих и управляющих систем.

Контрольные вопросы.

1. Закономерности взаимодействия части и целого.
2. Закономерности иерархической упорядоченности систем.
3. Закономерности осуществимости систем.
4. Закономерности развития систем.

1.4. Функциональное описание и моделирование систем

Изучение любой системы предполагает создание модели системы, позволяющей провести анализ и предсказать ее поведение в определенном диапазоне условий, решать задачи анализа и синтеза реальной системы. В зависимости от целей и задач моделирования оно может проводиться на различных уровнях абстракции[5].

Модель — описание системы, отражающее определенную группу ее свойств.

Описание системы целесообразно начинать с трех точек зрения: *функциональной, морфологической и информационной*.

Всякий объект характеризуется результатами своего существования, местом, которое он занимает среди других объектов, ролью, которую он играет в среде. Функциональное описание необходимо для того, чтобы осознать важность системы, определить ее место, оценить отношения с другими системами.

Функциональное описание (функциональная модель) должно создать правильную ориентацию в отношении внешних связей системы, ее контактов с окружающим миром, направлениях ее возможного изменения.

Функциональное описание исходит из того, что всякая система выполняет некоторые функции: просто пассивно существует, служит областью обитания других систем, обслуживает системы более высокого порядка, служит средством для создания более совершенных систем.

Как нам уже известно, система может быть однофункциональной и многофункциональной [6].

Во многом оценка функций системы (в абсолютном смысле) зависит от точки зрения того, кто ее оценивает (или системы, ее оценивающей).

Функционирование системы может описываться числовым функционалом, зависящем от функций, описывающих внутренние процессы системы, либо качественным функционалом (упорядочение в терминах «лучше», «хуже», «больше», «меньше» и т.д.)

Функционал, количественно или качественно описывающий деятельность системы называют *функционалом эффективности*.

Функциональная организация может быть описана:

- алгоритмически,
- аналитически,
- графически,
- таблично,
- посредством временных диаграмм функционирования,
- вербально (словесно).

Описание должно соответствовать концепции развития систем определенного класса и удовлетворять некоторым требованиям:

- должно быть открытым и допускать возможность расширения (сужения) спектра функций, реализуемых системой;
- предусматривать возможность перехода от одного уровня рассмотрения к другому, т.е. обеспечивать построение виртуальных моделей систем любого уровня.

При описании системы будем рассматривать ее как структуру, в которую в определенные моменты времени вводится нечто (вещество, энергия, информация), и из которой в определенные моменты времени нечто выводится.

В самом общем виде функциональное описание системы в любой динамической системе изображается семеркой:

$S_f = \{T, x, C, Q, y, \varphi, \eta\}$,

где T — множество моментов времени, x — множество мгновенных значений входных воздействий, $C = \{c: T \rightarrow x\}$ — множество допустимых входных воздействий; Q — множество состояний; y — множество значений выходных величин; $Y = \{u: T \rightarrow y\}$ — множество выходных величин; $\varphi = \{T \times T \times T \times c \rightarrow Q\}$ — переходная функция состояния; $\eta: T \times Q \rightarrow y$ — выходное отображение; c — отрезок входного воздействия; u — отрезок выходной величины [7].

Такое описание системы охватывает широкий диапазон свойств.

Недостаток данного описания — не конструктивность: трудность интерпретации и практического применения. Функциональное описание должно отражать такие характеристики сложных и слабо познанных систем как параметры, процессы, иерархию.

Примем, что система S выполняет N функций $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_s, ..., \psi_N$, зависящих от n процессов $F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n$.

Эффективность выполнения s-й функции

$Э_s = Э_s(\psi_s) = Э(F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n) = Э_s(\{F_i\}), i = 1...n, s = 1...N.$

Общая эффективность системы есть вектор-функционал $Э = \{Э_s\}$. Эффективность системы зависит от огромного количества внутренних и внешних факторов. Представить эту зависимость в явной форме чрезвычайно сложно, а практическая ценность такого представления незначительна из-за многомерности и многосвязности. Рациональный путь формирования функционального описания состоит в применении такой многоуровневой иерархии описаний, при которой описание более высокого уровня будет зависеть от обобщенных и факторизованных переменных низшего уровня.

Иерархия создается поуровневой факторизацией процессов $\{F_i\}$ при помощи обобщенных параметров $\{Q_i\}$, являющихся функционалами $\{F_i\}$. Предполагается, что число параметров значительно меньше числа переменных, от которых зависят процессы. Такой способ описания позволяет построить мост между свойствами взаимодействующих со средой элементов (подсистемами низшего уровня) и эффективностью системы.Процессы $\{F_i(1)\}$ можно обнаружить на выходе системы. Это процессы взаимодействия со средой. Будем называть их процессами первого уровня и полагать, что они определяются:

1. параметрами системы первого уровня — $Q_1(1), Q_2(1), ..., Q_j(1), ..., Q_m(1)$;
2. активными противодействующими параметрами среды, непосредственно направленными против системы для снижения ее эффективности — $b_1, b_2, ..., b_k, ..., b_K$;
3. нейтральными (случайными параметрами среды) $c_1, c_2, ..., c_l, ..., c_L$;
4. благоприятными параметрами среды $d_1, d_2, ..., d_p, ..., d_P$.

Среда имеет *непосредственный контакт с подсистемами низших уровней, воздействуя через них на подсистемы более высокого уровня иерархии, так что $F_i = F_i^*(\{b_k\}, \{c_l\}, \{d_p\})$. Путем построения иерархии (параметры β-го уровня — процессы (β-1)-го уровня — параметры (β-1)-го уровня) можно связать свойства среды с эффективностью системы.

Параметры системы $\{Q_j\}$ могут изменяться при изменении среды, они зависят от процессов в системе и записываются в виде функционалов состояния $Q_j^1(t)$.

Собственным функциональным пространством системы W называется пространство, точками которого являются все возможные состояния системы, определяемое множеством параметров до уровня b:

$$Q = \{Q(1), Q(2), ... Q(\beta)\}.$$

Состояние может сохраняться постоянным на некотором интервале времени T.

Процессы $\{F_i(2)\}$ не могут быть обнаружены на выходе системы. Это процессы второго уровня, которые зависят от параметров Q(2) подсистем системы (параметров второго уровня). И так далее.

Образуется следующая иерархия описания: эффективность (конечное множество функционалов) — процессы первого уровня (функции) — параметры первого уровня (функционалы) — процессы второго уровня (функции) — параметры второго уровня (функционалы) и т.д. На каком-то уровне наши знания о функциональных свойствах системы исчерпываются, и иерархия обрывается. Обрыв может произойти на разном уровне для разных параметров (процессов), причем как на процессе, так и на параметре [8-13].

Внешние характеристики системы определяются верхним уровнем иерархии, поэтому часто удается ограничиться описанием вида ($\{Э_i\}$,$\{\psi_S\}$, $\{F_i(1)\}$, $\{Q_j(1)\}$, $\{b_k\}$, $\{c_l\}$, $\{d_p\}$).

Число уровней иерархии зависит от требуемой точности представления входных процессов.

Контрольные вопросы.

1. Понятие модели системы.
2. Описание функционирования системы.
3. Эффективность системы.
4. Параметры системы.

2. Анализ систем автоматического управления с помощью теории графов

2.1. Системы с запаздыванием как частный случай систем с памятью

Важнейшим объектом изучения системы является ее движение во времени, переход из одного состояния в другое. Состояние динамической системы в момент для $t_0 < t < t_f$, адекватно определяет единственную выходную функцию при любом $t_f > t_0$.

Будем предполагать, что состояние системы может быть описано n – мерным вектором $\mathbb{X}$ [14]:

$$\mathbb{X}(t) = [\ x_1\ (t), x_2\ (t), \quad \dots\ , \ x_n\ (t)\ ], \qquad (2.1)$$

компоненты которого являются переменными состояния системы [15]. Систему, для описания которой требуется n переменных, будем называть системой n – го порядка. Для динамической системы знание настоящего состояния $\mathbb{X}\ (t_0)$ и будущего входного воздействия ($\mathbb{U}\ (t),\ t \geq\ t_0$) достаточно для того , чтобы найти настоящие и будущие значения выходной характерестики системы ($\mathbb{Y}\ (t),\ t \geq\ t_0$) . Следовательно, будущие значения выходной характеристики системы не зависят от способа, которым система достигает своего настоящего значения. Если данная система допускает представление при помощи пространства состояний и описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния можно привести к виду

$$\mathbb{X}\ (t) = \mathbb{F}\ (\mathbb{X}\ (t), \mathbb{U}\ (t)). \qquad (2.2)$$

$$\mathbb{Y}\ (t) = \mathbb{G}\ (\mathbb{X}\ (t), \mathbb{U}\ (t)). \qquad (2.3)\ ,$$

где n- мерная вектор- функция $\mathbb{F}$ и m – мерная вектор -функция $\mathbb{G}$ являются однозначными. Уравнения (2.2) и (2.3) известны как стандартная форма уравнений состояния.

Легко видеть, что не все системы могут быть описаны при помощи конечномерных уравнений состояния. Например, пусть состояние некоторой системы в момент времени t_0 определяется входным воздействием и реакцией состояния системы на отрезки времени $[t_0 - \tau,\ t_0]$.

Последнее условие означает, что состояние системы зависит от функции, определённой на отрезке $t_0 - \tau \le t \le t_0$, т.е. нельзя указать никакого конечномерного пространства, удовлетворяющего нашему определению. Непрерывные системы с запаздыванием относятся именно к классу систем, не имеющих конечномерного пространства состояний. Уравнения состояния системы с запаздыванием имеют вид [14]:

$$\mathbb{X}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbb{X}(t), \mathbb{U}, \mathbb{X}(t - \Theta)), \qquad (2.4)$$

$$\mathbb{Y}(t) = H(\mathbb{X}(t))$$

с начальный функцией $\varphi(t)$ для $t - \Theta \le t \le t_0$.

Уравнение (2.4) называется дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. В нем функция $\mathbb{X}(t)$ в общем случае будет n – мерным вещественным вектором, описывающим состояние системы в некоторый момент времени t , функция $\mathbb{U}(t)$ будет m – мерным вещественным вектором входных воздействий , функция $\Theta = \boldsymbol{\tau}(t)$ характеризует запаздывание , в общем случае различное для каждого из составляющих вектора $\mathbb{X}(t)$.Начальная функция $\varphi(t)$ задается в виде n – мерной непрерывной вещественной вектор – функции на отрезке времени $t - \Theta \le t \le t_0$.

Вектор - функция $\mathbb{X}(t)$, обладающая свойством

$$\mathbb{X}(t) = \varphi(t),\ t - \Theta \le t \le t_0$$

и удовлетворяющая уравнению (2.4) для $t \geq t_0$, называется решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом или просто с запаздыванием . В зависимости от вида функции Θ дифференциальные уравнения с запаздыванием делятся на несколько типов.

а) *Дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием*. Если величине Θ постоянной на всем интервале существования решения Θ=$\boldsymbol{\tau}$=const, уравнение (2.4) принимает вид

$$\mathbb{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbb{U}(t), \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t - \boldsymbol{\tau})), \qquad t \geq t_0 \qquad (2.5)$$

б) *Дифференциальные уравнения с переменным запаздыванием*. Пусть Θ будет кусочно – непрерывной функцией времени t - Θ = $\boldsymbol{\tau}$ (t), тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\mathbb{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbb{U}(t), \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t - \boldsymbol{\tau}(t))), t \geq t_0 \qquad (2.6)$$

в) *Дифференциальные уравнения с нелинейным запаздыванием*. Функция Θ может зависеть не только от времени, но и от искомой функции $\mathbb{X}$ (t) или от ее производной $\mathbb{X}$ (t), или той и другой одновременно:

$$\Theta = \boldsymbol{\tau}\,(t, \mathbb{X}(t))) \ , \qquad \Theta = \boldsymbol{\tau}\,(t \ , \mathbb{X}(t)) \ .$$

$$\Theta = \boldsymbol{\tau}\,(t, \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t)) \ .$$

Соответствующие дифференциальные уравнения с нелинейным запаздыванием примут вид:

$$\mathbb{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbb{U}(t), \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t - \boldsymbol{\tau}(t, (t))), \qquad (2.7)$$

$$\mathbb{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbb{U}(t), \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t - \boldsymbol{\tau}(t, (t))), \qquad (2.8)$$

$$\mathbb{X}(t) = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbb{U}(t), \mathbb{X}(t), \mathbb{X}(t - \boldsymbol{\tau}(t, (t), \mathbb{X}(t))) \qquad (2.9)$$

г) *Дифференциальные уравнения нейтрального типа*. К уравнениям этого класса относятся такие, у которых функция $\boldsymbol{\Phi}$(.) зависит как от искомой функции с запаздывающим аргументом, так и от ее производной. Дифференциальные уравнения нейтрального типа требуют задания не только начальной функции, но и ее производной. Системы, описываемые подобными уравнениями, на практике встречаются довольно редко.

Если система с переменным, постоянным запаздыванием линейна, то ее можно описать совокупностью дифференциальных уравнений следующего вида

$$\mathbb{X}(t) = \mathbb{A}\mathbb{X}(t) + \mathbb{B}\mathbb{X}(t - \Theta) + \mathbb{O}\mathbb{U}(t), \qquad (2.10)$$

где матрица $\mathbb{A}$ имеет размер $n * n$, размер матрицы $\mathbb{B}$ также $n * n$, размер матрицы Θ – $n * m$.

Выходные величины такой системы определяются соотношением

$$\mathbb{Y}(t) = H\mathbb{X}(t), \quad (2.11)$$

где H – матрица размера $p * n$.

Контрольные вопросы.

1. Понятие запаздывания.
2. Описание системы с запаздыванием.
3. Уравнение состояния системы с запаздыванием.
4. Типы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2.2. Описание линейной стационарной системы с запаздыванием переменными состояния. Граф переходных состояний.

Линейную стационарною систему n – го порядка с запаздыванием в цепи обратной связи (рис. 2.1) можно описать дифференциальным уравнением n-го порядка в виде [16]:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_0 y(t) + y(t-\tau) = u(t), \quad (2.12)$$

где $a_n \neq 0, a_k (k = 0,1, \dots, n)$,

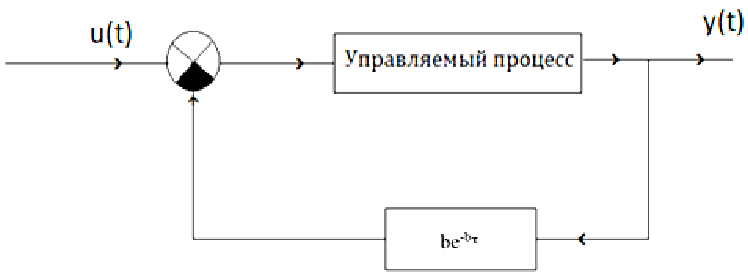


Рис.2.1. Линейная стационарная система n – го порядка с запаздыванием в цепи обратной связи

Поставим задачу отыскания выходного сигнала системы для всех моментов времени $t \geq t_0$. В момент времени t_0 на вход системы подается воздействие $u(t)$.

Если в этом уравнении б=0, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t) \quad (2.13)$$

Известно, что для системы, описываемой уравнением (2.13) можно задать n независимых начальных условий, которые единственным образом определяют выходную функцию для заданной входной функции. Эту совокупность переменных можно квалифицировать как состояние в момент t_0 .Отсюда выводится следующая простая зависимость переменных состояния от выходной функции:

$$x_1 = y,$$

$$x_2 = \dot{y} = x_1,$$

$$x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2,$$

. . . .

$$x^n = y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u$$

Из изложенного выше легко записать уравнения состояния в стандартной форме

$\mathbb{X}(t) = \mathbb{A}\mathbb{X}(t) + \mathbb{B}u(t)$ (2.14)

$\mathbb{Y}(t) = \mathrm{C}\ \mathrm{u}\mathbb{X}(t) + \mathbb{D}u(t)$ (2.15) ,

где $\mathbb{A}$ – матрица коэффициентов,

$\mathbb{B}$ - матрица управления,

C - матрица выхода,

$\mathbb{D}$ – матрица обхода системы.

Если $\mathbb{V}(t) = \begin{bmatrix} u & (t) \\ \mathbb{X} & (t) \end{bmatrix}$, (2.16)

то в этом случае линейная стационарная система может быть описана уравнением $\frac{d\mathbb{V}(t)}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{V}(t)$, (2.17)

где $\mathbb{A}$-матрица коэффициентов. $\mathbb{V}(t)$-вектор-столбец, включающий входную переменную и координаты x_k системы.

Применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (2.17) получим

$$\mathbb{V}(p)[p\mathbb{I}(i) - \mathbb{A}]^{-1}\ \mathbb{V}(O^+), \qquad (2.18)$$

где $\mathbb{I}(i)$ – единичная матрица.

Обозначая $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{t}) = \mathrm{L}^{-\mathbf{1}}\{[\boldsymbol{p}\mathbb{I} - \mathbb{A}]^{-1}\ ]\}$ **,** (2.19)

будем иметь

$$\mathbb{V}(t) = \Phi(t)\ \mathbb{V}(O^+) \qquad (2.20)$$

Матрица $\Phi(t)$ известна как расширенная матрица перехода системы.

Вернемся к рассмотрению уравнения (2.12) описывающего движение линейной стационарной системы n- го порядка с запаздыванием в цепи обратной связи. Это уравнение можно записать в следующей векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbb{X}(t)}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{X}(t) + \mathbb{B}\mathrm{u}(t) + \mathbb{O}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\tau}) \qquad (2.21)$$

Если заданы начальные условия и начальная функция $\varphi_0(t) = x_1(t-\boldsymbol{\tau})$, определенная на начальном множестве $[t_0-\tau, t_0]$, то, применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (2.21), на отрезки$[0, \tau]$ будем иметь:

$$p\mathbb{X}(p) - \mathbb{X}(0^+) = \mathbb{A}\mathbb{X}(p) + \mathbb{B}\mathrm{u}(p) + \mathbb{O}\varphi_0(p),$$
$$\mathbb{X}(p) = ((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{B}\mathrm{u}(p) + (p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{O}\varphi_0(p), +(p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{X}(0^+)). \quad (2.22)$$

Функция, $\mathrm{x}_1(t)$, которую можно получить из уравнения (2.22), является начальной функцией (точнее, изображением по Лапласу начальной функции)

$\varphi_1(p) = x_1(p)$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.22), получаем

$$\mathbb{X}(t) = L^{-1}\left((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}\mathrm{u}(p)\right) + \mathrm{L}^{\mathbf{-1}}\left((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{O}\varphi_0(p)\right) + \mathrm{L}^{\mathbf{-1}}\left(p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{X}(0^+)\right). \quad (2.23)$$

Уравнение (2.23) описывает поведение системы на отрезке времени $[0\ ,\ \tau]$ Используя это решение, для отрезка $[\tau,\ 2\tau]$ аналогично получим

$$\mathbb{X}(p) = \ ((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{B}\mathrm{u}(p) + (p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{O}\varphi_0(p) + \left(p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{X}(\boldsymbol{\tau})\right).$$

Откуда

$$\mathbb{X}(t) = L^{-1}\left((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{B}\mathrm{u}(p)\right) + \mathrm{L}^{\mathbf{-1}}\left((p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{O}\varphi_0(p)\right) + \mathrm{L}^{\mathbf{-1}}\left(p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{X}(\boldsymbol{\tau})\right). \quad (2.24)$$

Выполняя последовательно этот процесс, можно найти решение для любого интересующего нас интервала времени

$$\mathbb{X}(p) = (p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{B}\mathrm{u}(p) + (p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{O}\varphi_k(p) + (p\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}\ \mathbb{X}(k\boldsymbol{\tau}). \quad (2.25)$$

Откуда

$$\mathbb{X}(t) = L^{-1}\left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}\mathrm{u}(p)\right) + \mathrm{L}^{-\mathbf{1}}\left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{O}\varphi_k(p)\right) + \mathrm{L}^{-\mathbf{1}}\left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\,\mathbb{X}(k\boldsymbol{\tau})\right). \qquad (2.26)$$

где $k\boldsymbol{\tau} \le \boldsymbol{t} \le (\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{k} = 1, 2, \ldots\ldots$

Итак, уравнение состояния линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием может быть записано в векторной форме и решено с использованием преобразования Лапласа. Из этого следует, что решение мы можем получить и с использованием аппарата теории графов, являющегося мощным средством исследования различных классов структурно- сложных систем. Для рассматриваемого класса системы целесообразным является применение графов переходных состояний [17].

Определение: Графом переходного состояния назовем ориентированный взвешенный граф, полученный по схеме системы в переменных состояния, вершинами, являющимися компонентами вектора состояния $\mathbb{V}(0^+) = [u(0^+), \mathbb{X}(0^+)$ с передачами дуг, равными коэффициентам расширенной матрицы перехода $\phi(\boldsymbol{\lambda})$.

$$\phi(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11}(\lambda) & \mathrm{a}_{12}(\lambda) & \ldots & \mathrm{a}_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \ldots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \ldots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Аргумент $\boldsymbol{\lambda}$ в $\phi(\varphi)$ при анализе непрерывных систем равен t, а в случае дискретных систем $\boldsymbol{\lambda}$=t – nТ для $0 \le \boldsymbol{\lambda} \le \mathrm{T}$. Если заданы начальные условия и известна матрица $\phi(\boldsymbol{\lambda})$, то можно легко найти функции времени, описывающие изменение переменных состояния. Матрица перехода может быть определена из соотношений:

$$\phi(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{e}^{-\mathbb{A}\boldsymbol{\lambda}},$$

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{L}^{-\mathbf{1}}\{[\mathrm{p}\mathbb{I} - \mathbb{A}]^{-\mathbf{1}}$$

Но вычисление элементов матрицы $\phi(\boldsymbol{\lambda})$ можно проводить непосредственно по графам переходных состояний (ГПС). Вычисляя по графу передачи между соответствующими узлами, применяя обратное преобразование Лапласа, мы, тем самым, определяем элементы $a_{ij}(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $\phi(\boldsymbol{\lambda})$, минуя выполнение трудоемких вычислений .

Для начала рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t), \qquad u(t) = 1(t).$$

Требуется построить граф переходных состояний и определить матрицу перехода $\Phi(t)$.

1.Перейдем к системе уравнений 1-го порядка

$$\dot{u} = 0$$
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + u,$$

где x_1= y.

В матричной форме полученную систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ x(0) \\ x(0) \end{bmatrix}$$

2.Схема в переменных состояния и граф переходных состояний [17] даны соответственно на рис 2.2.а,б.

3.Определяем вектор $\mathbb{V}(t)$

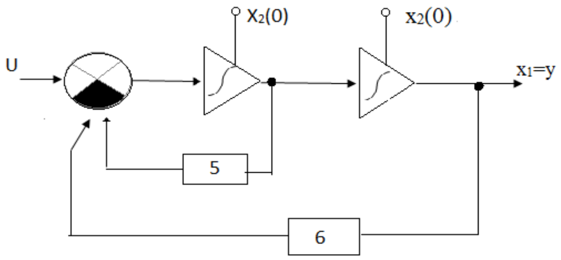
$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Элемент $a_{ij}(t)$ искомой матрицы перехода $\Phi(t)$ определяется следующим образом. По ГПС, пользуясь правилом Мезона, определяем $a_{ij}(p) \in \Phi(t)$ как передачу между узлами i,j, т.е. $a_{ij}(p) = x_i/x_j$. Матрицу $\Phi(t)$

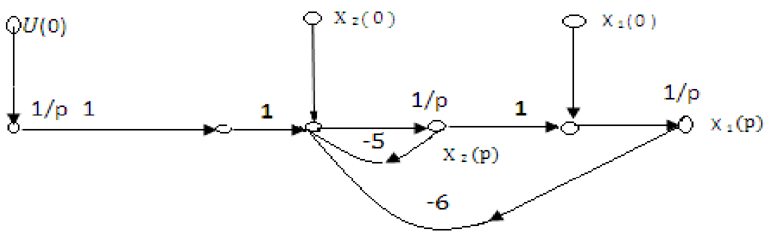
получим, если применим к каждому элементу $a_{ij}(p)$ обратное преобразование Лапласа. Из рассмотрения графа имеем [22]:

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+2)(p+3)}u(0) + \frac{p+5}{(p+2)(p+3)}x_1(0) + \frac{1}{(p+1)(p+2)}x_2(0);$$

$$x_2(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}u(0) + -\frac{-6}{(p+2)(p+3)}x_1(0) + \frac{p}{(p+1)(p+2)}x_2(0);$$



a)



b)

Рис.2.2. Структурная схема (a) и
граф переходных состояний системы (b)

Выполнив обратное преобразование Лапласа, будем иметь

$$x_1(t) = (-5.e^{-2t} + 0{,}3e^{-3t} + 0{,}16)u(0) + (3e^{-2t} - 2e^{-3t})x_1(0) + (e^{-2t} - e^{-3t})x_2(0);$$

$$x_2(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})\,u(0) + (-6e^{-2t} + 6e^{-3t})x_1(0) + (-2e^{-2t} + -3e^{-3t})\,x_2(0);$$

Контрольные вопросы.

1. Дифференциальное уравнение линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием.
2. Определение графа переходных состояний.
3. Описание линейной стационарной системы с запаздыванием переменными состояния.

2.3. Графовые модели и алгоритмы исследования динамики линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием

Одним из важнейших классов систем управления являются системы с запаздыванием. Явления запаздывания наблюдаются в технических, биологических, экономических и других системах. Запаздывание реакции управляющей системы на возникшее нарушение процесса приводит, как правило, к увеличению длительности переходного процесса, возникновению автоколебаний в замкнутой системе, а нередко - и к потере устойчивости системы. Будучи в общем случае постоянной, переменной или случайной величиной, запаздывание является одним из основных факторов, существенно снижающих динамические показатели систем управления. Поэтому возникает необходимость в совершенствовании известных и создании новых машинно-ориентированных методов исследования систем с запаздыванием [24].

Математические модели с запаздыванием описывают поведение динамических систем в различных прикладных областях науки и техники. Описание и методы исследования таких моделей можно найти в журнальных статьях и монографиях по теории дифференциальных уравнений и автоматическому управлению.

Для многих систем с запаздыванием представляет интерес теория систем, описываемых линейными дифференциально- разностными уравнениями. Математические основы теории таких систем заложены в работах Р. Беллмана, Г.А. Каменского. Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Л.С. Понтрягина, Л.Э. Эльсгольца.

Полученные в этой области фундаментальные результаты сформировали качественную теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Математические модели с запаздыванием описывают поведение динамических систем в различных прикладных областях науки и техники.

В данном разделе исследуются особенности топологического моделирования линейных непрерывных систем с постоянным запаздыванием на основе совокупного применения теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, аппарата динамических графов и рассмотрения систем с позиций динамичности структур и процессов. Рассматриваемый метод позволяет получить алгоритм расчёта процессов в системах данного класса, легко реализуемый на любом из современных языков программирования высокого уровня [17].

Системы с запаздыванием обладают рядом свойств, присущих только им. Эти свойства не совсем обычны с точки зрения привычных представлений о процессах, протекающих в динамических системах. Так, вид переходной функции состояния системы с памятью, к классу которых относятся системы с запаздыванием, зависит не только от начальных условий, но и от некоторой функции - начальной реакции состояния. Эта функция задается на отрезке времени, предшествующем началу выходного процесса. Эти условия, наряду с другими, вносят специфические особенности и в графовые модели этих систем.

Линейную систему n-го порядка с постоянным запаздыванием τ в цепи обратной связи (рис.2.1) можно описать дифференциально- разностным уравнением n-го порядка в виде

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_o y(t) + by(t-\tau) = u(t), \qquad (2.28)$$

где a_k $(k=0, 1, ..., n)$ и b постоянны.

Если допустить, что в уравнении (2.28) $b = 0$, то получим дифференциальное уравнение линейного стационарного объекта (процесса) без запаздывания

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_o y(t) = u(t) \qquad (2.29)$$

Для его графового моделирования можно использовать граф переходных состояний, полученный известным способом прямого программирования. Выходной сигнал $y(t)$, представляющий собой линейную комбинацию координат $\{ x_i(t) \}$, где $i=1, 2, \ldots, n$, и входного воздействия $u(t)$, легко определяется из графа. Вместе с тем представляет интерес графовая модель непрерывного запаздывающего сигнала $y(t-\tau)$. Определив графовую модель этого сигнала, мы можем найти графовую модель системы, описываемой дифференциальным уравнением (2.28).

Моделирование запаздывающего сигнала. Для определения движения системы с запаздыванием с некоторого момента t_o, помимо задания входного воздействия и начальных условий, необходимо еще и задавать *начальную функцию*. Для системы, описываемой уравнением (2.28), начальная функция есть отрезок функции «записанный» к моменту t_o в звене запаздывания. Этот отрезок времени определен на временном отрезке $[t_o - \tau, t_o]$, т.е. до начала развития определяемого выходного процесса. На отрезке времени $[t_o, t_o + \tau]$ звено запаздывания выдает сигнал, содержащий все значения величины $x_1(t)$, возникшие раннее момента времени t_o.

Замечание. Если в системе до момента приложения входного воздействия была запасена энергия, то необходимо задавать конкретный вид начальной функции, удовлетворяющей равенствам $\varphi(t) = x_1(t)$, $\varphi(t_0) = x_1(t_0)$, $t \in [t_o - \tau, t_o]$. В случае нулевых начальных условий имеем : $\varphi(t_0) = x_1(t_0)=0$, $t \in [t_o - \tau, t_o]$,

В прикладных задачах начальную функцию иногда находят экспериментально. Начальная функция может быть определена и из другого уравнения без отклонения аргумента, которое в некоторых задачах автоматического управления описывает процесс до момента начала действия обратной связи. Но чаще всего рассматривают движение предварительно невозбужденной системы и определяют вид выходного процесса, а затем отдельные его отрезки используют в качестве начальных функций.

С учетом физической картины явлений, происходящих в рассматриваемой системе, графовой моделью запаздывающего сигнала $y(t-\tau)$ будет *узел, взвешенный изображением по Лапласу непрерывной запаздывающей функции, или начальной функции.* Этот узел, согласно структуре системы, соединяем дугой (с передачей, равной -1), с вершиной, моделирующей вход системы. Исходя из свойства звена запаздывания, на сигнальном уровне имеет место неравенство: $z(t)\neq x_1(t)$, где $z(t)$- выходной сигнал звена запаздывания. Для выходного сигнала звена запаздывания верно соотношение $z(t)= x_1(t-\tau)$.

Отсюда следует, что вершины графа, характеризующие сигналы $z(t)$ и $x_1(t)$ различны, т.е., относительно протекающих в системе сигналов, контура, создаваемого цепью обратной связи через запаздывающее звено, не существует[22]. Графовая модель системы, описываемой дифференциальным уравнением (2.28), изображена на рис.2.3.1.

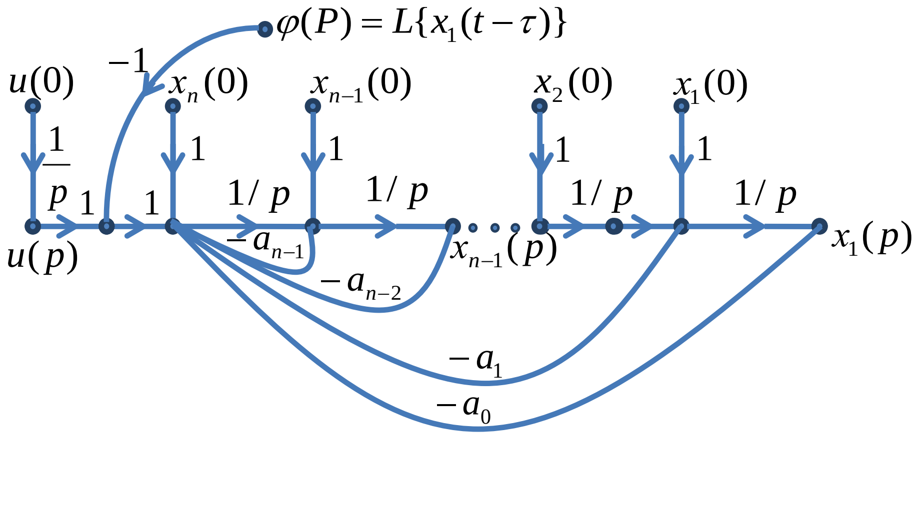


Рис. 2.3.1. Графовая модель системы, описываемой дифференциальным уравнением (2.28)

Следовательно, система является разомкнутой относительно протекающих в ней сигналов. Это важное следствие, так как для графов сложной конфигурации подсчёт и выделение путей и контуров может оказаться утомительной операцией. При построении графовых моделей всегда надо стремиться к получению графа с наименьшим возможным числом контуров.

Топологическая модель линейной стационарной системы с запаздыванием в цепи обратной связи определяется как объединение графовых моделей элементов системы

$G^C = G^f \cup G^O \cup G^{3C}$, где

G^f - модель входного сигнала (строится аналогично модели линейного процесса без запаздывания; G^O - модель линейного объекта (процесса) без запаздывания, G^{3C} - модель запаздывающего сигнала.

Топологическая модель, моделирующая поведение системы на отрезке времени $t \in [(k^{\tau}, (k+1)^{\tau}]$, $(k=1, 2, \ldots)$ изображена на рис.2.4 Здесь используется граф переходных состояний (ГПС), полученный способом прямого программирования. Структура графовой модели на отрезках $[(k^{\tau}, (k+1)^{\tau}]$ не меняется, изменяются лишь вес узла $\varphi(p)$ и начальные условия , что видно из общей топологической модели, для промежутка, на котором определяются процессы - $[t_0, T]$, $T= (k+1)^{\tau}$.

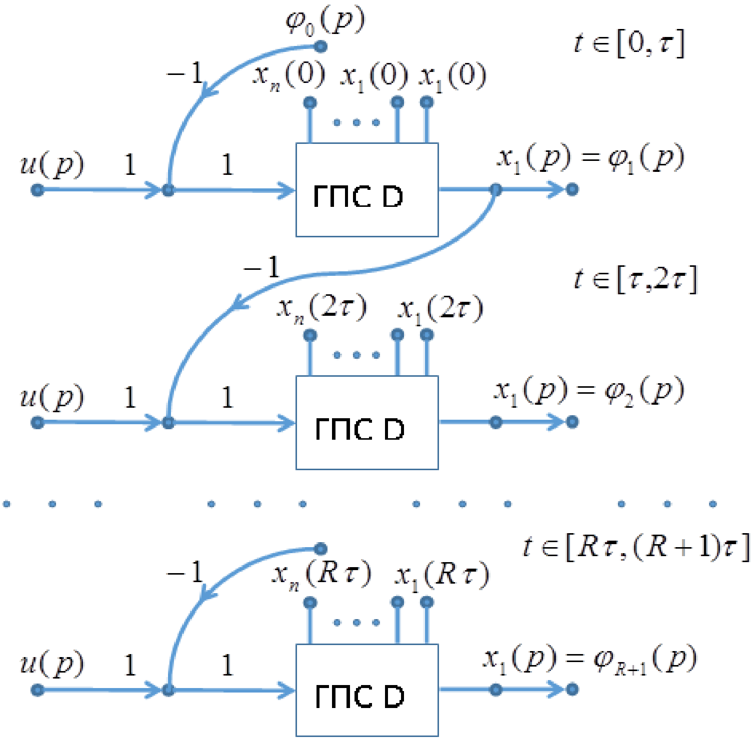


Рис.2.3.2. Топологическая модель, моделирующая поведение системы на отрезках времени времени $t\in [(k^{\tau}, (k+1)^{\tau}]$, $(k=1, 2, \dots)$

Из рассмотрения графовой модели получаем уравнения для переменных состояния на отрезке $t\in [0, \tau]$

$$X(p)=Q(p)X(0)+R(p)u(0)+S(p)\varphi_0(p), \qquad (2.30)$$

где матрицы коэффициентов имеют размерности $Q(p) \to n\times n$, $R(p) \to n\times m$, $S(p) \to n\times m$.

Введем обозначение: $\varphi_1(p)= x_1(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.30), будем иметь:

$$X(t)=Q(t)X(0)+R(t)u(0)+D_0(t), \qquad (2.31)$$

где $D_0(t) = L^{-1}[S(p)\varphi_0(p)]$.

Уравнение (2.31) описывает процессы в системе на отрезке времени $t\in [0, \tau]$. На конце отрезка, исходя из этого уравнения, значения переменных состояния

$$X(\tau)=Q(\tau)X(0)+R(\tau)u(0)+D_0(\tau). \qquad (2.32)$$

На следующем отрезке $t\in[\tau,2\tau]$ процессы в системе будут развиваться под действием 3-х факторов: входного воздействия $u(t)$, начальных (мгновенных) значений координат $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, … $x_n(\tau)$ и отрезка функции $x_1(t)$, записанного к моменту τ в звене запаздывания. Этой функцией является уже определенная нами на предыдущем отрезке $\varphi_1(t)$. Именно необходимость задания последней и определяет принципиальное отличие системы с запаздыванием от обычной динамической системы. Из рассмотрения графовой модели получим

$$X(p)=Q(p)X(\tau)+R(p)\,u(\tau)+S(p)\,\varphi_1(p) \qquad (2.33)$$

Обозначим $\varphi_2(p)=x_1(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.33), будем иметь:

$$X(t)=Q(t-\tau)X(\tau)+R(t-\tau)u(\tau+D_1(t-\tau), \qquad (2.34)$$

где $D_1(t-\tau)=L^{-1}[S(p)\,\varphi_1(p)]$.

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t\in[\tau,2\tau]$ *получим из соотношения*

$$X(2\tau)=Q(\tau)X(\tau)+R(\tau)u(\tau)+D_1(\tau) \qquad (2.35)$$

Полученные начальные условия $X(2\tau)$ *и начальная функция* $\varphi_2(t)$ необходимы для определения процессов на следующем отрезке времени $t\in[2\tau,3\tau]$. *Выполняя последовательно, шаг за шагом, определенную выше процедуру, для отрезка* $t\in[k\tau,(k+1)\tau]$ *будем иметь:*

$$X(p)=Q(p)X(k\tau)+R(p)\,u(k\tau)+S(p)\,\varphi_k(p), \qquad (2.36)$$

Откуда

$$X(t)=Q(t-k\tau)X(k\tau)+R(t-k\tau)u(k\tau)+D_k(t-k\tau), \quad (2.37)$$

где $D_k(t-k\tau)=L^{-1}[S(p)\ \varphi_k\ (p)$;

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t\in\ [k\tau,(k+1)\tau]$ *получим из соотношения*

$$X((k+1)\tau)=Q(\tau)X(k\tau)+R(\tau)u(k\tau)+D_k(k\tau) \quad (2.38)$$

Рассмотрим еще один случай, часто встречающийся на практике.

Линейная стационарная система с запаздыванием по управлению.

Пусть задана система, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_o y(t)+y(t-\tau)=u(t-\tau), \quad (2.39)$$

Свернутая структурная схема системы изображена на рис. 2.4 а. В этой системе запаздывающим является сигнал ошибки, уравнение которого

$$\varepsilon(t) = u(t) \quad -x_1(t) \qquad (2.40)$$

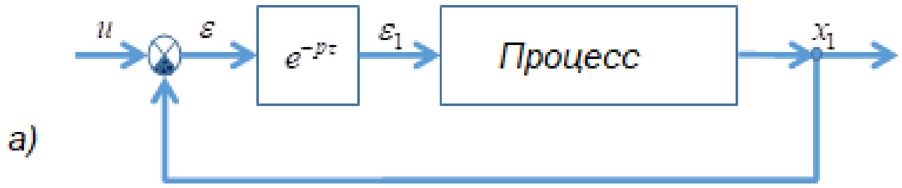
Для выходного сигнала звена запаздывания имеем

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon(t-\tau) = u(t-\tau) - x_1(t-\tau) \quad (2.41)$$

Графовая модель этой системы отличается от предыдущей тем, что вершина графа, характеризующая запаздывающий сигнал, взвешивается разностью двух функций, т.е. сигналом ошибки[24]. Граф системы, моделирующий ее состояние на отрезке $t\in\ [0,\ \tau]$ изображен на рис.3.2.3, b.

Граф системы, моделирующий ее состояние на отрезке $t\in\ [0,\ \tau]$

Общая топологическая модель системы, по которой можно определить процессы на промежутке $t\in\ [t_0, T]$, $T = t_0 + (k+1)\ \tau$, изображена на рис.3.2.5.



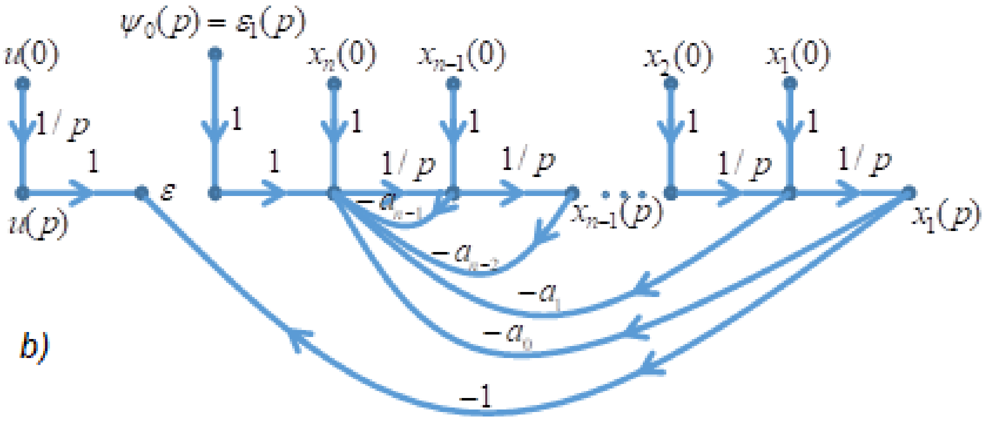


Рис.2.3.3. Структурная схема (a) и граф переходных состояний линейной стационарной системы с запаздыванием по управлению (b).

Из рассмотрения графовой модели получаем уравнения для переменных состояния на отрезке $t \in [0, \tau]$,

$$X(p)=Q(p)X(0)+S(p)\,\varphi_0(p), \qquad (2.42)$$

где матрицы коэффициентов имеют размерности $Q(p) \to n \times n$, $R(p) \to n \times m$, $S(p) \to n \times m$.

Приняв во внимание, что $\varphi_0(p)=0$, соотношение (2.42) можно записать в виде

$$X(p)=Q(p)X(0) \qquad (2.43)$$

Запишем уравнение сигнала ошибки

$$\varepsilon(p) = u(p) - x_1(p) \qquad (2.44)$$

Введем обозначение $\varphi_1(p)= \varepsilon(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.39), будем иметь:

$$X(t)=Q(t)X(0)+D_0(t), \qquad (2.45)$$

где $D_0(t) = L^{-1}[S(p)\,\varphi_0(p)]$.

Уравнение (2.45) описывает процессы в системе на отрезке времени $t\in[0,\tau]$. На конце отрезка, исходя из уравнения (2.45), значения переменных состояния

$$X(\tau)=Q(\tau)X(0)+D_0(\tau).$$

На следующем отрезке $t\in[\tau,2\tau]$ процессы в системе будут развиваться под действием следующих факторов: входного воздействия $u(t)$, начальных (мгновенных) значений координат $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, … $x_n(\tau)$ и отрезка функции $\varphi_1(t-\tau)$, записанного к моменту τ в звене запаздывания. Функция $\varphi_1(t-\tau)$, есть по сути запаздывающий сигнал ошибки, определенный нами на предыдущем отрезке. Из рассмотрения графовой модели получим для отрезка $t\in[\tau,2\tau]$:

$$X(p)=Q(p)X(\tau)+S(p)\,\varphi_1(p) \qquad (2.46)$$

Обозначим $\varphi_2(p)=u(p)-x_1(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (2.42), будем иметь:

$$X(t)=Q(t-\tau)X(\tau)+D_1(t-\tau), \quad (2.47)$$

где $D_1(t-\tau)=L^{-1}[S(p)\,\varphi_1(p)]$.

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t\in[\tau,2\tau]$ *получим из соотношения*

$$X(2\tau)=Q(\tau)X(\tau)+D_1(\tau).$$

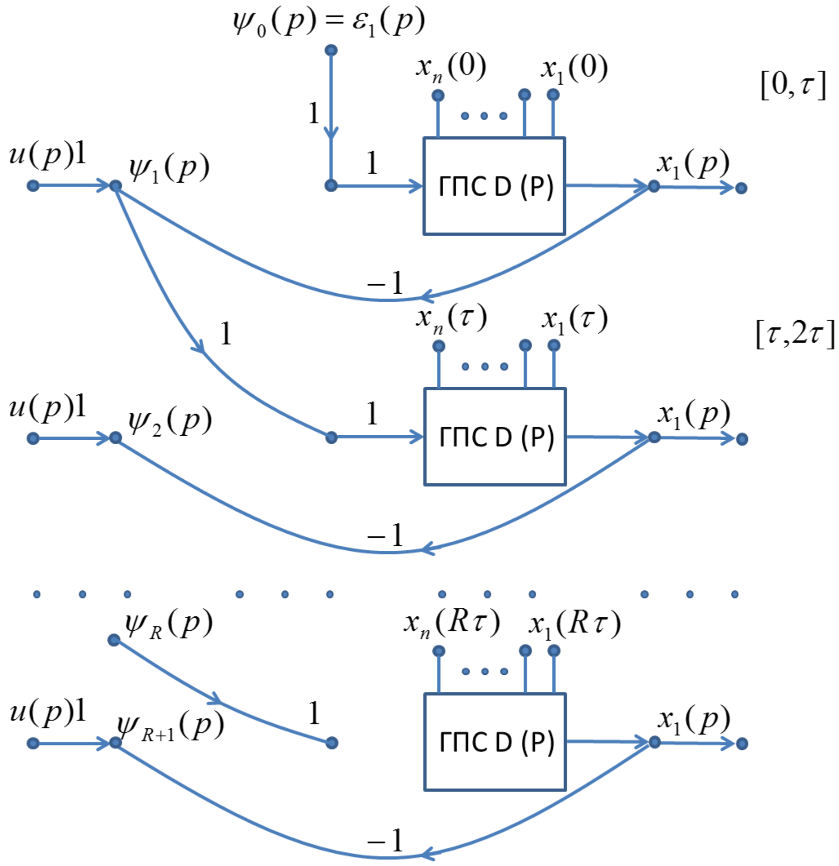


Рис.2.3.5. Граф переходных состояний линейной стационарной системы с запаздыванием по управлению, моделирующий ее поведение на отрезках времени $t\in [k\tau ,(k+1)\tau]$.

Полученные начальные условия *X(2τ) и начальная функция* $\varphi_2(t)$ необходимы для определения процессов на следующем отрезке времени $t\in [2\tau ,3\tau]$. *Выполняя последовательно, шаг за шагом, определенную выше процедуру, для отрезка* $t\in [k\tau ,(k+1)\tau]$ *будем иметь:*

$$X(p)=Q(p)X(k\tau)+ S(p)\ \varphi_k(p), \quad (2.48)$$

Откуда

$$X(t)=Q(t - k\tau)X (k\tau) + D_k(t- k\tau), \quad (2.49)$$

где $D_k(t-\tau)= L^{-1} [S(p)\ \varphi_k (p)$;

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t\in [k\tau ,(k+1)\tau]$ *получим из соотношения*

$$X((k+1)\tau)=Q(\tau)X (k\tau) +R(\tau)u (k\tau) + D_k(k\tau) \quad (2.50)$$

Сформулируем алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с постоянным запаздыванием. Данный алгоритм приемлем для расчета процессов как в системе с запаздыванием по состоянию, так и в системе с запаздыванием по управлению.

Алгоритм 1.

1. Строится графовая модель системы как объединение графовых моделей ее элементов.
2. Для отрезка времени $t \in [(k\tau, (k+1)\tau]$, $k=1, 2, \ldots$ на основании графовой модели составляются соотношения для расчета процессов в системе:

$$X(p)=Q(p)X(k\tau)+[R(p) \cup R1(p)]\,u(k\tau)+c\,S(p)\,\varphi_k(p), \quad (2.51)$$

где $R1(p)$ – нулевая матрица, $c = -1 \cup 1$

3. Определяется изображение по Лапласу начальной функции

$$\varphi_{k+1}(p) = x_1(p) \cup [u(p) - x_1(p)] \quad (2.52)$$

Выполняется обратное преобразование Лапласа для соотношения :

$$X(t)=Q(t-k\tau)X(k\tau) + [R(t-k\tau) \cup R1(t-k\tau)]\,u(k\tau)+cD_k(t-k\tau), \quad (2.53)$$

где $D_k(t-k\tau)=L^{-1}\{\varphi_k(p)S(p)\} \cup L^{-1}\{[u(p)-\varphi_k(p)]\,S(p)\}$

4. Определяются значения переменных состояния в момент $t=(k+1)\tau$ из соотношения :

$$X[(k+1)\tau]=Q(\tau)X(k\tau)+[R(\tau) \cup R1(\tau)]\,u(k\tau)+cD_k(\tau) \quad (2.54)$$

5. Осуществляется возврат к п.2 алгоритма.

Проведенное исследование показало, что наличие в структуре системы звена запаздывания принципиальным образом изменяет ее свойства – для определения движения системы с момента t_0, кроме знания начального состояния $X(t_0)$, как это имеет место в обычных динамических системах, необходимо задавать и начальную функцию. С учетом этой специфической особенности мы построили графовую модель системы с запаздыванием.

Основной проблемой, возникающей на этапе построения модели являлось моделирование непрерывного запаздывающего сигнала. Эта задача была разрешена тем, что вершина графа, характеризующая этот непрерывный сигнал, была взвешена изображением по Лапласу запаздывающей функции. Кроме этого из топологической модели, представленной на рис.2.2, видно, что линейная стационарная система с постоянным запаздыванием может рассматриваться как система с динамической структурой. Запаздывающий сигнал является причиной изменяемости структуры системы во времени. Вместо исходной замкнутой системы мы имеем дело с системой, представленной конечным множеством структурных состояний

$$S_t = \{S_1, S_2, \ldots S_n\}.$$

В каждом из этих состояний система является разомкнутой.

Время пребывания в каждом структурном состоянии определяется интервалом $[t_k,\ t_{k+1}]$. В то же время видно, что связи между отдельными состояниями не совсем обычны. Они указывают на то, что мы имеем дело с системой с памятью, так как состояние в каждой подсистеме зависит от протекания процесса на предыдущем интервале времени, что хорошо видно из топологической модели.

Использование графовой модели позволило исключить непосредственное интегрирование дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, что делает предложенный метод более эффективным, чем метод шагов. Найденный алгоритм является идеальной формой с точки зрения программирования на компьютере.

В данном разделе рассмотрена задача моделирования и расчета процессов в линейных непрерывных системах с запаздыванием на основе графовых моделей. Графовое моделирование линейных систем с запаздыванием на основе совокупного применения теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, аппарата динамических графов и рассмотрения систем с позиций динамичности структур и процессов позволяет получить алгоритм расчёта процессов в системах данного класса, легко реализуемый на любом из современных языков программирования высокого уровня

Контрольные вопросы.

1. Моделирование запаздывающего сигнала.
2. Графовая модель системы с запаздыванием.
3. Уравнения расчета процессов в линейной непрерывной системе с постоянным запаздыванием.
4. Алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с постоянным запаздыванием.

2.4. Графовые модели и алгоритм исследования динамики линейной стационарной системы с переменным запаздыванием

При исследовании систем с переменным запаздыванием вводится понятие звена переменного запаздывания. Это звено отличается от звена постоянного запаздывания рядом свойств. Математическая зависимость между входным сигналом *x(t)* и выходным сигналом *y(t)* звена постоянного запаздывания известна:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-\tau), \tau \geq 0, & t \geq t_0 + \tau \\ 0, \qquad\qquad , & t \leq t_0 + \tau \end{cases}$$

Выходной сигнал полностью воспроизводит входной сигнал по истечении времени $t_0 + \tau$ (рис. 1.1 а).

Пусть величина запаздывания является функцией независимой переменной *t:*

$$\tau = \tau(t).$$

По причине переменности величины τ выходной сигнал звена переменного запаздывания будет деформирован на оси времени. Функция *y(t)*, являющаяся выходным сигналом звена, будет либо «сжата» на оси времени по отношению ко входной функции *x(t)*, либо «растянута» (рис 1.1 б).

Но каким бы образом не менялась величина запаздывания $\tau(t)$, начальное и конечное значения функции *x(t)* измениться не могут. Более того, хотя звено переменного запаздывания и деформирует на оси времени входной сигнал функцию *x(t)*, выходной сигнал – функция *y(t)* будет воспроизводить все мгновенные значения функции *x(t)* как при «сжатии», так и при «растяжении».

Приведем условия физической реализуемости звена переменного запаздывания. Одно из них таково, что скорость роста запаздывания не должно превышать скорости естественного хода времени, иначе входной сигнал никогда не будет воспроизводиться на выходе звена. Так как скорость естественного хода времени равна единице *(dt/dt=1)*, то функция переменного запаздывания должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} \leq 1 \text{ для } t > 0.$$

Опережение выходного сигнала по отношению ко входному сигналу реализуемо физически, поэтому следующе условие физической реализуемости звена переменного запаздывания:

$$\tau(t) \geq 0.$$

Кроме этих условий накладываются ограничения на отрицательные значения производной $\frac{d\tau}{dt}$: длительность отрицательных значений $\frac{d\tau}{dt}$ (отрезок $[t_1, t_2]$ на рис. 1,1

в должна быть такова, чтобы значение $\tau(t)$ в момент $t = t_2$ не было отрицательным. Математически это записывается так:

$$\tau(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau(t)}{dt} dt \geq 0.$$

Дадим строгое определение звена переменного запаздывания.

Определение. Звеном переменного запаздывания называется элемент системы, свойства которого определяются следующими условиями:

1. Заданы некоторая функция $\tau(t)$, называемая функцией переменного запаздывания, множество входных *X* и выходных *Y* функция с элементами *x(t)* и *y(t)*;

2. Задано множество моментов времени *T* со значениями: t_0 – момент начала наблюдения выходной функции *y(t)*, t_b – момент конца наблюдения выходной функции *y(t)*, и отрезками:

$\tau(t_0)$ – запаздывание начального значения входной функции *x(t)*,

$\tau(t_0)$ – запаздывание конечного значения входной функции *x(t)*, *заданной на отрезке* $[t_0 - \tau(t_0),\ t_0]$.

3. Функция переменного запаздывания удовлетворяет следующим соотношениям:

a) $\tau(t) \geq 0,$ для всех $t < T$

(2.55) 1

b) $\frac{d\tau(t)}{dt} \leq t$ для $t > t_0$

(2.56) 2

c) $\tau(t_2) + \int^{t_2} \frac{d\tau(t)}{dt}\, dt \geq 0,$ для $t_1 \leq t \leq t_2$

(2.57)

где $[t_1, t_2]$ отрезок времени, на котором $\frac{d\tau(t)}{dt} < 0$.

4. Входная и выходная функции удовлетворяют равенству

$$y(t) = x[t - \tau(t)] \qquad (2.58)$$

и при *t=t* $x(t) = y(t),$

(2.59)

$$t_b - \tau(t_b) = t_0 \qquad (2.60)$$

Функция запаздывания, удовлетворяющая всем требованиям определения 1, может быть как линейной, так и нелинейной функцией времени. Ряд практических задач позволяет представить функцию $\tau(t)$, как линейно изменяющейся по времени функцию

$$\tau(t) = \tau + kt \quad , \qquad (2.61)$$

где $\tau_0 \geq 0, k = const.$

Для выражения (2.61) условие физической реализуемости звена переменного запаздывания можно записать в виде $k \leq 1$. При $k=0$ функция $\tau(t) = \tau_0 = const.$ Мы получим выражение для звена постоянного запаздывания. При $k < 0$ функция $\tau(t)$ является линейной убывающей функцией. В этом случае для значений времени $t \leq \tau_0/k$ надо считать запаздывание равным нулю (рис 1, 1 г), либо некоторой постоянной величине τ_{min} для всех значений времени $t \geq (\tau_0 - \tau_{min})/k$ (рис 1, 1 д).

При $k > 0$ запаздывание является линейно-возрастающей функцией. Система с линейно-возрастающим запаздыванием всегда неустойчива в силу непрерывного роста запаздывания. Если существует некоторое максимальное значение запаздывания τ_{max}, то устойчивость системы будет зависеть от величины этого максимума (рис 1, 1 е).

В случае звена с нелинейным запаздыванием функция запаздывания зависит не только от времени t, но и от входной или выходной функции, или от обеих вместе,

$$\tau = \tau[t, \eta(t)] \qquad (2.62)$$

где функция $\eta(t)$ может принимать значения

$$\eta(t) = x(t), \qquad \eta(t) = y(t),$$

$$\eta(t) = \eta[x(t), y(t)].$$

Теперь перейдем к рассмотрению линейной системы с переменным запаздыванием в цепи обратной связи.

Дифференциальное уравнение системы имеет виl:

$$\frac{dx_1(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dx_1(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 x_1(t) + x_1(t - \tau(t))) = u(t). \qquad (2.63)$$

Здесь физическая картина процессов несколько иная, чем в системе с постоянным запаздыванием. По причине переменности величины запаздывания выходной сигнал $x_1(t)$, проходя через звено запаздывания, деформируется на оси времени (происходит либо «сжатие», либо «растяжение» сигнала, хотя все мгновенные значения сохраняются). Длительность выходного сигнала звена переменного запаздывания *y(t)* отлична от длительности «записанного» сигнала $x_1(t-\tau(t))$. Эта длительность будет определяться моментом появления величины $x_1(t_0)$ на выходе звена переменного запаздывания. По определению звена переменного запаздывания

$$x_1(t_0) = y(t_1) \qquad (2.64)$$

$$t_1 - \tau(t_1) = t_0 \qquad (9).\ (2.65)$$

Определяя момент появления на выходе звена запаздывания мгновенного значения сигнала $x_1(t_0)$ из уравнения (2.64), можно найти выходной процесс системы на отрезке времени $[t_0, t_1]$.

Дифференциальное уравнение (2.63) заменим соответствующей системой дифференциальных уравнений 1-го порядка. Эта система уравнений может быть записана в векторной форме:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{B}\,u(t) + \bar{C}x_1(t-\tau(t)) \qquad (2.66)$$

с начальной функцией $\varphi_0(t) = x_1(t)$ для $t_0 - \tau(t_0) \leq t \leq t_0$.

Для решения уравнения (2.66) используем преобразование Лапласа:

$$p\bar{X}(p) = \bar{A}\bar{X}(p) + \bar{B}\,u(p) + \bar{C}\varphi_0(p) + \bar{X}(0^+). \qquad (2.67)$$

где $\varphi_0(p) = L\{\varphi_0(t)\}, \varphi_0(t)$ – заданная начальная функция, определенная на начальном множестве $[t_0 - 0, t_0]$.

Совершая элементарные преобразования, находим

$$X(p) - G(p)Bu(p) + G(p)G\varphi_0(p) + G(p)X(0^+). \qquad (2.68)$$

где $G(p) = (p-A)^{-1}$.

применив обратное преобразование Лапласа к выражению (2.68) ,получим:

$$X(t) = L\,\{G(p)Bu(p)\} + L\{G(p)C\varphi_0(p)\} + L^{-1}\{G(p)\}X(0^+).$$

где $G(p) = L^{-1}\{(p-A)^{-1}).$

Выражение (2.67) описывает процессы в системе на отрезке времени (t_0,

t_1). Поскольку в правой части уравнения (2.67) функция $\varphi_0(p)$ является известной, то оно превращается в обыкновенное алгебраическое уравнений . Для отыскания значения конечной точки t_1 воспользуемся соотношением $t_1 - \tau(t_1) = t_0$. Решая это функциональное уравнение относительно t_1, мы и находим искомую точку.

Возьмем теперь в качестве нового начального момента точку t это позволяет перейти к следующему шагу решения уравнения (2.66). Для отрезка времени [t1, t2] предыдущее решение будет играть роль начальной функции. Подставляя $\varphi_1(p) = x_1(p)$ в уравнение (2.68), получим:

$$X(p) = G(p)Bu(p) + G(p)C\varphi_1(p) + G(p)X(t_1).$$

откуда

$$X(t) = L^{-1}\{G(p)Bu(p)\} + L^{-1}\{G(p)C\varphi_1(p)\} + G(t)X(t) \tag{2.69}$$

Выражение (2.69) является решением уравнения (2.66) на промежутке [t_1, t_2], где конечная точка t_2 определяется из функционального уравнения.

$$t_2 - \tau(t_2) = t_1 \tag{2.70}$$

Таким образом можно определить процессы для любого интересующего нас интервала времени.

Итак, линейная система с переменным запаздыванием поддаётся исследованию с помощью матричных уравнений и преобразования Лапласа. Но соотношение (2.68) можно получить и с помощью графов переходных состояний, позволяющих обойти трудоёмкие вычисления, исключить операции, связанные с неплотностью матриц. Графовая модель системы с переменным запаздыванием строится аналогично графовой модели системы с постоянным запаздыванием (рис 1-2). Технологическая модель системы для промежутка [t_0, T] (T=t_{k+1})) изображена на рис 1-2,б.

Учитывая изложенное и основываясь на общности определенных этапов формирования моделей одномерных систем с постоянным и переменным запаздыванием можно сформулировать алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с переменным запаздыванием. Данный алгоритм приемлем и для расчета процессов в системе с переменным запаздыванием в прямой цепи.

Алгоритм 1.2

1. Строится графовая модель системы как объединение графовых моделей её элементов

$$G_k^0 = G_k^0 U G_k^0.$$

2. Определяется конечная точка отрезка времени [t_k, t_{k+1}], k=0,1, …, N из уравнения

$$t_{k+1} - \tau(t_{k+1}) = t_k.$$

3. Для отрезка [t_k, t_{k+1}], k=0,1, …, N по полученному графу составляются соотношения для расчёта процессов в системе:

$$X(p) = Q(p)X(t_k) + [R(p)\nabla R_1(p)]u(t_k) + c\big[\varphi_k(p)\nabla\big(u(p) - \varphi_k(p)\big)\big]S(p) \qquad (2.71)$$

где $R_1(p)$ – нулевая матрица, $\text{c} = 1\ \nabla - 1$.

4. Определяется изображение по Лапласу функции $\varphi(p)$

$$\varphi_{k+1} = x_1(p).$$

5. Выполняется обратное преобразование Лапласа для соотношения (2.71):

$$X(t) = D(t - t_k)X(t_k) + [R(t - t_k)\nabla R_1(t - t_k)]u(t_k) + cD_k(t - t_k). \qquad (2.72)$$

где $D_k(t - t_k) = L^{-1}\{\varphi_k(p)S(p)\}\nabla L^{-1}\{[u(p) - \varphi_k(p)]S(p)\}$.

6. Определяются значения переменных состояния в момент $t = t_{k+1}$ из соотношения (2.72)

$$X(t_{k+1}) = Q(t_{k+1} - t_k)X(t_k) + [R(t_{k+1} - t_k)\nabla R_1(t_{k+1} - t_k)u(t_k) + cD_k(t_{k+1} - t_k). \qquad (2.73)$$

7. Переход к пункту 3. Алгоритма

Пример 2.4.1.

Требуется определить выходной сигнал системы (рис.2.4.1), если в момент времени t=0 на вход системы подается воздействие $u(t)$=1(t), параметры звеньев равны k=1, a=0, b=2, τ=0.5с. Начальные условия – нулевые, начальная функция, заданная на начальном множестве равна $\phi_0(t) = 0$.

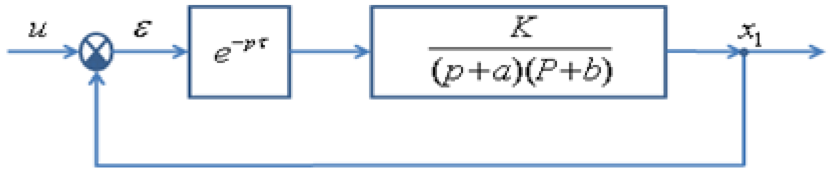


Рис 2.4.1.Двумерная система с запаздыванием по управлению

Используя структурную схему системы и учитывая, что звено запаздывания задерживает сигнал ошибки на время τ, построим граф систем для отрезка времени $[0, \tau]$ (рис. 2.4.2).

Из рассмотрения графа находим $x_1(p) = x_2(p) = 0$,

ε(p)=u(p) - $x_1(p) = 1/p$ ϕ_1(p)=ε(p)=1/p;

$x_1(t) = x_2(t) = 0, x_1(\tau) = x_2(\tau) = 0.$

Для отрезка времени $[\tau, 2\tau]$ структура графа будет прежней, (смотрите топологическую модель системы рис.2.4.3).

При переходе от одного временного отрезка к другому только меняется значение сигнала ε(p). Тогда из рассмотрения графа легко записать, что

$$x_1(p) = \frac{1}{p(p+2)} \quad \phi_1(p) = \frac{1}{p^2(p+2)},$$

$$x_2(p) = \frac{1}{p+2} \quad \phi_1 = \frac{1}{p(p+2)},$$

$$\varepsilon(p) = 1/p - \frac{1}{p^2(p+2)}; \ \phi_2(p) = \varepsilon(p)$$

Перехода к оригиналам, будем иметь:

$x_1(t) = 0.25e^{-2(t-0.5)} - 0.25 + 0.5(t - 0.5);$

$x_2(t) = 0.5\left(1 - e^{-2(t-0.5)}\right)$.

На конце отрезка $[\tau, 2\tau]$ значения переменных состояния будут равны $x_2(2\tau) = x_1(1) = 0.092$; $x_2(2\tau) = x_2(1) = 0.316$.

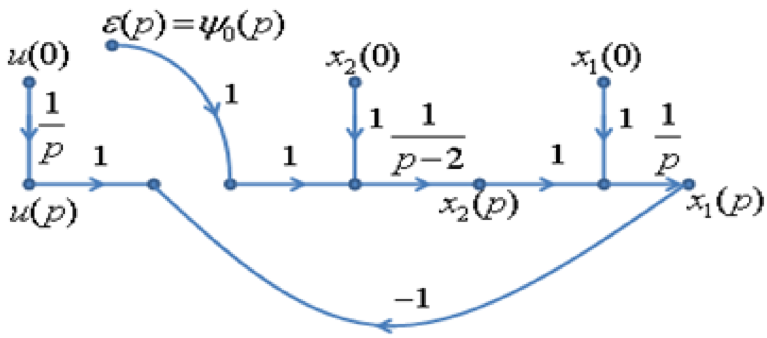


Рис 2.4.2. Графовая модель системы 2- го порядка с запаздыванием по управлению

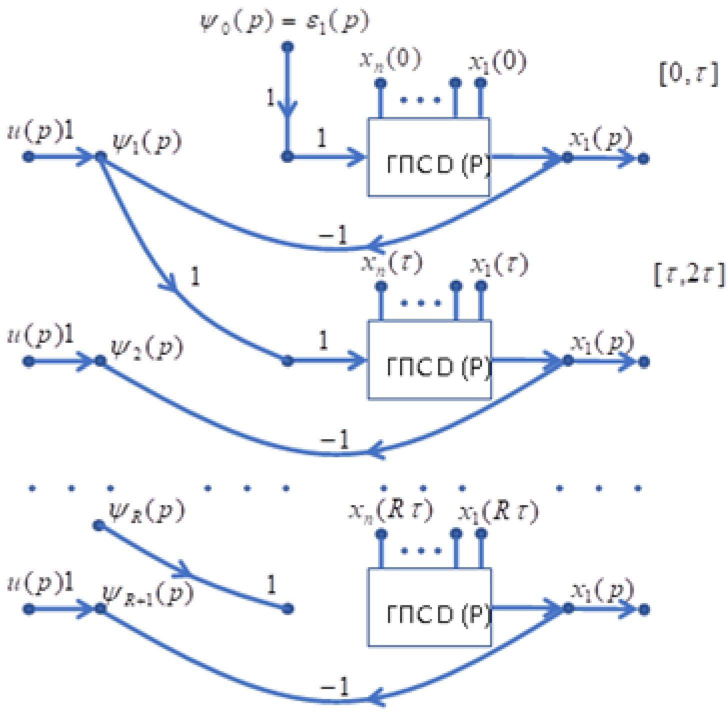


Рис 2.4.3. Динамическая графовая модель двумерной системы с запаздыванием по управлению.

Контрольные вопросы.

1. Звено переменного запаздывания.
2.Условия физической реализуемости звена переменного запаздывания.
3. Нелинейное запаздывание.
4. Линейная система с переменным запаздыванием в цепи обратной связи.
5. Алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с переменным запаздыванием

2.5. Моделирование многомерных линейных непрерывных систем с запаздыванием

Уравнение состояния многомерной линейной непрерывной системы с переменным запаздыванием имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t) + CX\big(t - \tau(t)\big). \qquad (2.74)$$

$$Y(t) = HX(t). \qquad (2.75)$$

где X(t) – вектор состояния системы, U(t) – вектор входных воздействий, Y(t) – вектор выходных величин.

Обобщение уравнения (2.74) на случай, когда имеется k векторов с различными запаздыванием, может быть сделано следующим образом. Введем вектор

$$X(t) - \tau_l(t)) = \begin{bmatrix} x_1\big(t - \tau_t(t)\big) \\ x_2\big(t - \tau_t(t)\big) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n\big(t - \tau_t(t)\big) \end{bmatrix}.$$

где $\tau_t(t)$ – переменное запаздыванием, различное для каждого из векторов и матрицы

$$x_t = \begin{bmatrix} c_{11}^t \; c_{12}^t \dots \; c_{1n}^t \\ c_{21}^t \;\; c_{22}^t \dots \; c_{2n}^t \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{n1}^t \; c_{n2}^t \dots \; c_{nn}^t \end{bmatrix},$$

где индекс над буквой c указывает на принадлежность этого элемента данной матрице. Тогда уравнение (2.74) можно записать в следующим виде:

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t) + \sum_{i=1}^{k} C_i x(t - \tau_i(t)) \qquad (2.77)$$

Для отыскания решения уравнения (2.74) необходима задать n начальных функций $\varphi_i(t)$, которые удобно записать в виде матрицы столбца

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$$

На основании свойств начальной функции должны иметь место равенства

$$\Phi(t_0) = X(t_0),$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi(t), t \in E_0 \\ 0, \ \ t \geq t_0 \end{cases}.$$

Многомерная система сохраняет все основные черты простых структур, поэтому протекающие в них процессы принципиально остаются теми же, что были в упомянутых параграфах. Но задача исследования многомерных систем усложняется тем, что к влиянию запаздываний добавляются взаимосвязи по входам и выходам. В этом отношении целесообразным является использование графовых моделей, являющихся наиболее удобным способом представления всех взаимосвязей по многочисленным каналам управления.

Для большей наглядности рассмотрение начнем с двумерной системы с запаздыванием по состоянию, а затем сделаем обобщение на n-мерный случай. В соответствии со свойствами системы с запаздыванием в момент времени t_0 на входе системы начнут действовать два сигнала – входное воздействие $W(t) = \{u_1(t).\ u_2(t)\}$ и начальная функция $\Phi(t) = \{\varphi_1(t).\ \varphi_2(t)\}$. Для каждого сепаратного канала действие начальной функции завершается в некоторые моменты времени t_b^1 и t_b^1: действие входного сигнала W(t) продолжается на всем промежутке с учетом этих физических особенностей. Модель двумерного объекта управления получается объединением моделей двух сепаратных и двух перекрестных каналов передач:

$$G_t = G_t^{rr} U\, G_t^{rk} \qquad (2.78)$$

$$r = 1.2; k = 1.2; r \neq k.$$

где $G_t^{rr} = (X^{rr}(t_0)\, X^{rr}(p)\, V^{rr})$ (2.79)

модели сепаратных каналов передачи сигналов;

здесь: $X^{rr}(t_0) = \{\, x_t^{rr}(t_0)\}$.

$X^{rr}(p) = \{x_t^{rr}(p)\}$:

$$V^{rr} = \{x_t^{rr}(t_0)\ x_m^{rr}(p)\ a_{ml}^{rr}(p)\}$$

r=1.2; m=1.2 …. n.

t=1.2. …. n: l=1.2, …. n.

Графовые модели перекрестных каналов.

$$G_t^{rk} = (X^{rr}(t_0).X^{kr}(p).V^{rk}). \qquad (2.80)$$

Здесь

$$X^{rk}(t_0) = \{x_i^{rk}(t_0)\}:$$

$$X^{rk}(p) = \{x_i^{rk}(p)\};$$

$$V^{rk} = \{x^{rk}(t), x^{rk}(p), a^{rk}(p)\}.$$

где $r = 1.2; k = 1.2; r \neq k; m = 1.2. \dots . n$

t=1.2. …. n: l=1.2, …. n.

С учетом этих обозначений

$$G_t = (X((t_0), X(p), V)$$

$$X(t_0) = X^{rr}(t_0)\ U\ X^{rk}(t_0);$$

$$X(p) = X^{rr}(p) U\ X^{rk}(p);$$

$$V = V^{rr}\ U\ V^{rk}.$$

Графовые модели запаздывания сигналов определим в виде

$$G^{\varphi} = (\varphi^r(p), e^r, V^{\varphi}),$$

где $\varphi^r(p)$ – узел (вершина), моделирующий запаздывающий сигнал, взвешенный изображением по Лапласу запаздывающего сигнала, представляющий отрезок непрерывной функции.

e^r – изображение по Лапласу сигнала ошибки в r-м канале передачи; $V^{\varphi} = \{\varphi^r(p), e^r(p), -1\}$.

Модели входных сигналов строятся аналогично моделям непрерывного объекта управления.

Если в системе имеет место запаздывание управляюших сигналов, то в этом случае графовые модели запаздывающих сигналов определяются в виде

$$G_{\Phi}^{rr} = \{\Phi^{rr}(p), \gamma^{rr}(p), V_{\Phi}^{rr}\}.$$

$$G_{\Phi}^{rk} = \{\Phi^{rk}(p), \gamma^{rk}(p), V_{\Phi}^{rk}\};$$

где

$$\Phi^{rr}(p) = u^{r}(p) = \Phi^{rr}(p),$$

$$\Phi^{rk}(p) = u^{r}(p) = \Phi^{rk}(p),$$

$$y^{rr}(p) = (\Phi^{rr}(p), \gamma^{rr}(p). 1).$$

$$V^{rr}(p) = (\Phi^{rk}(p), \gamma^{rk}(p). 1)$$

С учетом изложенного можно сформулировать следующий алгоритм построения графовой модели и исследования динамики рассмотреных многомерных случаев процессов с запаздываниями.

Алгоритм 1.3.

1. Величины запаздываний упорядочиваются в порядке возрастания их значений:

$$\tau^{*} = \tau_{1}^{*}, \tau_{2}^{*}, \dots \dots . \tau_{N}^{*}.$$

2. Строятся графовые модели отдельных элементов системы: модели входных сигналов, модели запаздывающих сигналов, модель непрерывного объекта управления.

3. Полученные графы объединяются в общую топологическую модель системы с учетом интервала наблюдения системы на оси τ^{*}.

a) $G_{t}^{c} - G_{t}^{f}\ U\ G_{t}^{3c}\ U\ G_{t}$ –

при запаздывании по состоянию.

b) $G_{t}^{c} - G_{t}^{f}\ U\ G_{t}^{3c}\ U\ G_{t}$ – при запаздывании по управлению.

4. В соответствии с моментами времени $\tau_{t}^{*} \epsilon \tau^{*}$ по полученному графу составляются соотношения для определения переменных состояния и координат выхода системы

$$X^{rr}(p) - u^{rr}(p) X^{rr}(\tau) + [R^{rr}(p) U R1^{rr}(p)] * u^{r}(\tau) + c\varphi^{r}(p) S^{rr}(p). \quad (2.81)$$

$$X^{rk}(p) - Q^{rk}(p) X^{rk}(\tau) + [R^{rk}(p) U R1^{rk}(p)]$$

Контрольные вопросы.

1. Уравнение состояния многомерной линейной непрерывной системы с переменным запаздыванием.
2. Двумерная система с запаздыванием по состоянию.
3. Алгоритм расчета процессов в двумерной системе с запаздыванием по состоянию.
4. Графовая модель двумерной системы с запаздыванием по управлению.

3. Примеры расчета динамических процессов в системах управления

3.1. Графовое моделирование и управление сложными ирригационными системами

Проблема оптимального водораспределения в условиях, ограниченных и зависящих от природных факторов запасов воды, что характерно для стран Центральной Азии, представляет существенный экономический интерес. Успешное ее решение может быть достигнуто в рамках создаваемых в настоящее время интегрированных автоматизированных систем управления технологическими процессами в ирригационных системах.

Проблема дефицита водных ресурсов характерна для всех стран Центральной Азии. Как никогда сегодня актуальной является проблема использования передовых решений и научных достижений на службе водного хозяйства.

Успешное ее решение может быть достигнуто в рамках создаваемых в настоящее время интегрированных автоматизированных систем управления технологическими процессами в ирригационных системах.

При проектировании и создании сложных автоматизированных систем управления технологическими процессами в ирригационных системах (АСУТП ИС) возникают многочисленные задачи, требующие знания количественных и качественных закономерностей, присущих ирригационным системам [18].

Особенно большое значение имеют общесистемные вопросы, относящиеся к общей структуре автоматизированных систем управления технологическими процессами в ирригационных системах, организации взаимосвязей между отдельными подсистемами, взаимодействию элементов системы с внешней средой, централизованному управлению работой крупных гидротехнических сооружений, водохранилищ, станций машинного водоподъема и др.

Процесс функционирования ирригационной системы как сложной системы складывается из двух частей – собственно технологического процесса водораспределения и процесса планирования и управления ирригационной системой.

Вся совокупность задач планирования и управления сложными ирригационными системами, которая должна решаться в рамках АСУТП ИС с учетом возможности их последующей гармонической увязки с проблемами создания интегрированных АСУ ИС, представима в виде многоуровневой структуры, изображенной на рис.3.1.1. На рисунке дана классификация задач с точки зрения временных интервалов их решения.

Основой для решения задач планирования водораспределения являются:

- потребности в воде, выявленные для соответствующих водовыделов;
- прогноз стока источника орошения;
- водный баланс состояния системы.

В свою очередь осуществляется три вида прогноза стока источника орошения:

- долгосрочный прогноз гидрографа стока к началу вегетационного периода, охватывающий весь указанный период;
- непрерывный долгосрочный прогноз в течение вегетационного периода в виде ежедекадной корректировки гидрографа стока на оставшуюся часть вегетационного периода;
- краткосрочный прогноз на ближайшую декаду.

Водный баланс состояния системы составляется ежедекадно по величине наполнения водохранилищ. Потребности в оросительной воде представляются в виде планов водопользования, составленных по заявкам хозяйств. С учетом этих моментов осуществляется решение задач планирования на первых уровнях иерархии (рис.3.1.1). В качестве критериев оптимальности на этих уровнях используются экономические критерии, в качестве метода оптимизации- различные методы математического программирования, сетевые методы, метод имитационного моделирования.

Два последующих уровня охватывают задачи оперативного управления и оптимальной стабилизации. Результатом решения задачи оперативного управления является выработка последовательности оптимальных управлений, переводящих сложную ирригационную систему из одного установившегося состояния в другое в соответствии с принятым критерием оптимальности. Одним из предпочтительных критериев для ирригационных систем является, например, критерий оптимальности по быстродействию. Объясняется это тем, что различные растения имеют отличный от других оптимальный режим орошения, который можно обеспечить лишь своевременной подачей в необходимых количествах оросительной воды.

Задачи оптимальной стабилизации возникают в связи с необходимостью погашения за минимальное время возмущающих воздействий, вызванных различными факторами случайного характера, и поддержания на строго заданном уровне требуемых расходов (уровней) воды в соответствующих створах.

В математическом отношении две последние задачи могут быть сведены к решению задач синтеза управлений в многомерных системах. Алгоритмы оптимизации этого класса задач базируются на динамических графовых моделях.

Анализ частично внедренных и вновь проектируемых АСУТП ИС показывает, что их функциональная структура может быть охарактеризована в основном двумя функциональными подсистемами управления:

- подсистемой управления отдельными технологическими процессами [регулирование расходов воды в водохранилищах и каналах, стабилизация уровней (расходов) воды в нижних и верхних бьефах узлов гидротехнических сооружений (ГТС)];

- подсистемой оперативного управления комплексами взаимосвязанных технологических объектов управления (ТОУ), или иначе всей ирригационной системой [задачи централизованного контроля и учета работы ИС, календарного планирования, оперативного (текущего) управления].

Важнейшими проблемами, требующими разрешения при создании автоматизированных систем управления ирригационными системами, являются разработка методов построения динамической модели иерархической системы, создание в памяти компьютера структуры системы и алгоритмов синтеза управлений на этой структуре.

Учитывая сложность рассматриваемых систем, можно прийти к заключению о возможности решения этих задач на путях имитационного моделирования и необходимости наличия в составе АСУТП ИС еще одной подсистемы- подсистемы имитационного моделирования.

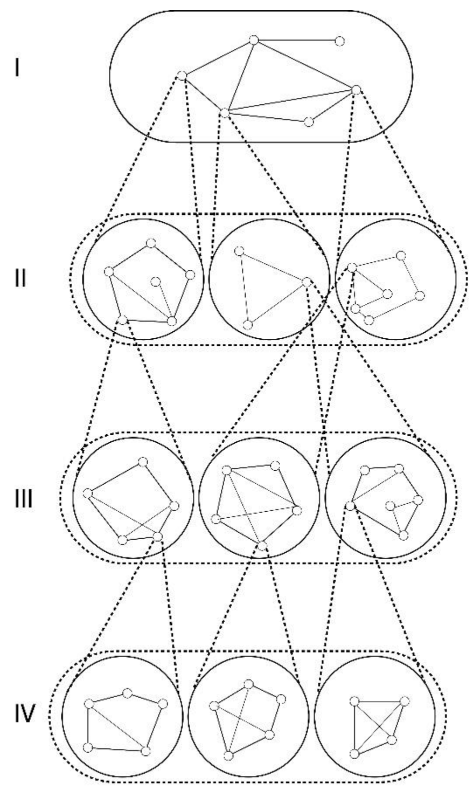


Рис.3.1.1. Задачи и уровни планирования и управления водораспределением.

I- Краткосрочное планирование (венсь вегетационный период с распределением по месяцам);

II- Календарное планирование (планирование по декадам, суткам, сменам);

III- Оперативное управление процессом перевода ирригационной системы из одного состояния в другое (часы, минуты, ситуации);

IV- Оптимальная стабилизация уровней (расходов) воды в гидротехническом сооружении (минуты, десятки секунд).

Задачи и структура имитационной модели ирригационной системы.

Важное значение вопросы разработки имитационных систем приобретают в связи с тем, что они могут быть использованы для решения следующих задач:

- для оценки вариантов структур АСУТП ИС с целью синтеза оптимальной конфигурации системы;
- для определения эффективности принимаемых диспетчерами систем решений по управлению рассредоточенными сетями гидротехнических сооружений;
- для использования в режиме тренажера для обучения персонала правилам принятия оперативных решений по осуществлению перевода ирригационной системы из одного установившегося режима на другой;
- проведения целенаправленных оптимизационных экспериментов с имитационными моделями сложных ирригационных систем и других целей.

Иначе говоря, имитационная система по отношению к АСУТП ИС должна выступать в роли органичного концентратора всевозможных частных моделей и алгоритмов, эффективного инструмента принятия решений на этапах проектирования, внедрения, эксплуатации и возможных изменений структуры и состава задач уже действующей автоматизированной системы.

Приведем результаты исследований по созданию имитационной системы для ирригационных комплексов (ИМОС) общего характера, имеющих в своем составе крупные водохранилища, участки рек, магистральные каналы, многопролетные гидротехнические сооружения.

Назначение ИМИС:

- моделирование с учетом динамики функционирования всей ирригационной системы;
- оценка вариантов структур и параметров многомерных регуляторов гидротехнических сооружений;
- организация имитационных экспериментов с целью синтеза оптимальной последовательности решений по управлению исполнительными механизмами гидротехнических сооружений (водохранилищ) и с целью изучения влияния интересующих факторов на режимы функционирования оросительной системы;
- использование для разработки методик для диспетчерских служб для принятия ими решений по управлению ирригационной системой в рамках ситуаций, охваченных имитационными экспериментами;
- использование в режиме тренажера для обучения персонала управлений эксплуатации ирригационных систем, включение в состав АСУТП ИС в качестве подсистемы имитационного моделирования.

Укрупненная функциональная структура ИМИС включает в себя блоки: построения моделей участков каналов и узлов ГТС по данным результатов пассивного эксперимента; структурного анализа элементов; имитации, оптимизации и оценки результатов эксперимента (рис.3.1.2).

Рис.3.1.2. Функциональная структура имитационной модели ирригационной системы

Ключевым моментом в организации имитационных экспериментов является универсальная математическая модель. В отличие от других работ при построении ИМИС в качестве универсальной модели использованы топологические имитационные модели как наиболее адекватные задачам структурного анализа и синтеза ирригационных систем с иерархической структурой. В соответствии с этим разработаны универсальные динамические графовые модели для водохранилищ, участков рек и каналов, узлов ГТС. Универсальность в данном случае заключается в способности моделей настраиваться на другие объекты из перечисленного множестве элементов. Многопролетные гидротехнические сооружения интерпретированы асинхронными конечными автоматами, что дает возможность использовать для их описания графовые модели (графы переходов). С учетом этого ирригационная система в целом формально задается с помощью логико-динамического графа и на этой основе реализуется моделирующий алгоритм для воспроизведения динамики функционирования (имитации) системы. Оптимизационный блок на основе использования методов нелинейного программирования, сетевых (графовых) методов, двухуровневой схемы принятия решений в рамках задач оперативного управления ирригационной системой и оптимальной стабилизации решает задачи по переводу системы из одного установившегося состояния в другое и синтеза оптимальных управлений для регуляторов ГТС. В блоке оценки результатов эксперимента в соответствии с моделями критериев оптимальности вычисляются значения функционалов и определяется последующая стратегия продолжения экспериментов в соответствии с принятой схемой их планирования.

Пример. Разработка графовой модели элементов сложной ирригационной системы

При определенных предположениях первичные модели каналов и участков рек могут быть отнесены к классу стационарных систем с запаздыванием.

Рассмотрим построение графовой модели и расчет выходной координаты на примере одномерной нелинейной системы с частотно-импульсной модуляцией с запаздыванием, представленной на рисунке 3.1.3. На рисунке 3.1.4 представлена эквивалентная схема заданной системы.

Исходные данные:

$$W(p) = \frac{0{,}5}{p(p+1)}; \quad T_n = \frac{2}{0{,}1 + |e_n|}; \quad z_n = sign\, e_n;\ \theta = 0{,}25\text{sec.};\ \tau = 1\text{sec.}$$

$$T_n = t_{n+1} - t_n$$

Как известно, передаточная функция замкнутой системы с запаздыванием по управлению отличается от соответствующей системы без запаздывания только множителем $e^{-p\tau}$. Следовательно, граф переходных состояний такой системы должен содержать ветвь с передачей $e^{-p\tau}$.

Уравнения, описывающие состояние системы с учетом величины запаздывания, которое проявляется в действии управляющих сигналов, в любой момент переключения импульсного элемента t_j *(j=1, 2, ..., n)* и в смещенные моменты времени $t_j + \theta$ *(j=1, 2, ..., n)*, могут быть определены из динамической графовой модели системы (рис. 3.1.5).

График выходной функции представлен на рисунке 3.1.6. Из графика видно, что по окончании переходного процесса в системе устанавливаются автоколебания. Этот происходит от того, что частотно- импульсная система вблизи начала координат ведет себя подобно релейно- импульсной системе и поэтому при отсутствии зоны нечувствительности не имеет в начале координат равновесной точки.

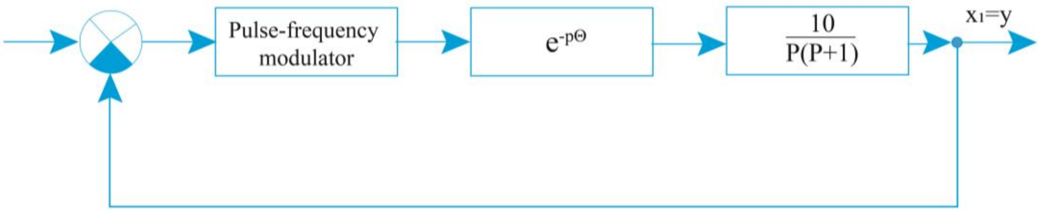


Рис.3.1.3. Структурная схема одномерной нелинейной системы с частотно-импульсным модулятором с запаздыванием.

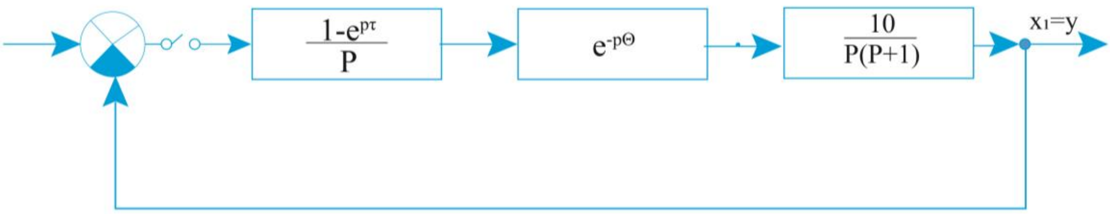


Рис.3.1.4. Эквивалентная схема одномерной нелинейной системы с частотно-импульсным модулятором с запаздыванием.

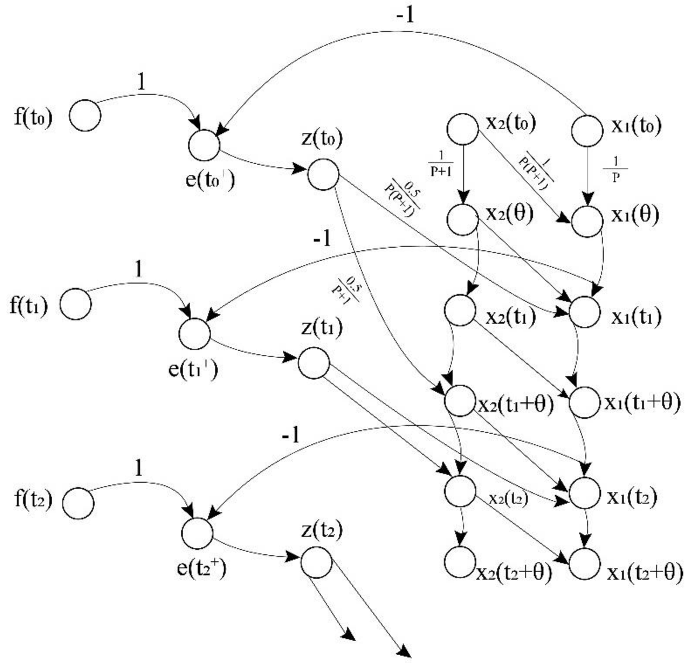


Рис.3.1.5. Динамическая графовая одномерной нелинейной системы с частотно- импульсным модулятором с запаздыванием.

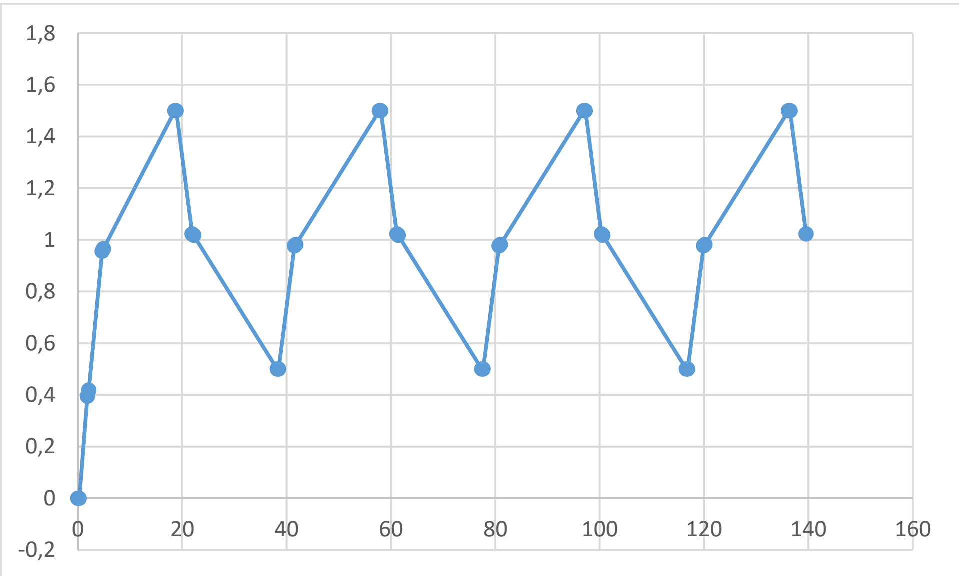


Рис.3.1.6. График переходных процессов одномерной нелинейной системы с частотно- импульсным модулятором с запаздыванием.

Структурная и функциональная сложность современных ирригационных систем порождает при решении задач формального описания, анализа и синтеза принципиальные трудности методологического и вычислительного характера, которые в значительной степени могут быть исключены при использовании топологических методов и моделей исследования.

Разработка методов и моделей, охватывающих широкий класс систем, приводит к необходимости учитывать в числе важнейших такие факторы сложности как структурная сложность управляемых объектов, сочетание логических и динамических переменных, наличие запаздывания, нелинейность, многомерность, сложные режимы функционирования систем нижнего уровня иерархии АСУТП ИС и другие.

Управление динамическими системами в различных отраслях техники и промышленности, в том числе в сельском и водном хозяйствах, в настоящее время выполняется исключительно с помощью цифровых технических средств. В таких системах измерения и управление осуществляются в дискретные моменты времени, поэтому исследование дискретных математических моделей динамических систем на сегодняшний день является актуальной задачей.

Системы с частотно-импульсной модуляцией (ЧИМ), которые входят в нижний уровень АСУТП ИС, относятся к существенно нелинейным системам. Топологические методы на базе динамических графовых моделей позволяют разрешить принципиальные трудности при исследовании частотно-импульсных- систем (ЧИС), дают возможность получить эффективные алгоритмы анализа систем данного класса. В работе выполнен расчет одномерной нелинейной частотно- импульсной системы с запаздыванием на основе динамической графовой модели.

Дальнейшие исследования связаны с анализом многомерных систем данного класса с запаздыванием в отдельных каналах на основе графового моделирования.

3.2. Исследование динамики одномерных систем с частотно- импульсной модуляцией.

Пример 1. Требуется рассчитать переходный процесс в частотно- импульсной системе [19], представленной на рисунке 3.2.1.

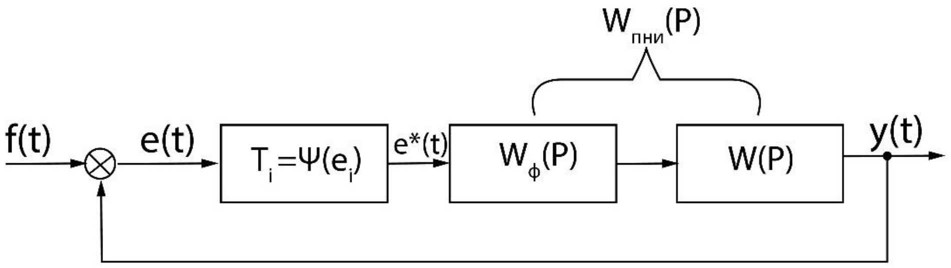


Рис. 3.2.1. Частотно- импульсная система 1- го порядка

Параметры системы следующие:

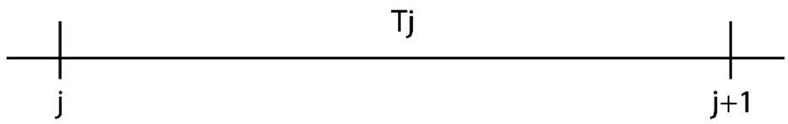
$W(p)=\dfrac{2}{p+1}$; $\tau=0.1;$ |входное воздействие $f(t)=4;$ передаточная функции формирующею звено $W_{\phi}(p)=\dfrac{1-e^{-p\tau}}{p};$

Передаточная функция приведений непрерывной части равно

$$W_{пнч}(p)=\frac{1-e^{-p\tau}}{p}*\frac{2}{p+1};$$

Введем обозначения

Tj – длительность j – го интервала времени или иначе сдвиг между j – м и ($j+1$-м выходными импульсами модулятора



$Tj=\psi=[e_j^*(tj)],$ tj - момент появления j-го импульса.

$$t_n=\sum_{j=0}^{n-1}Tj,$$

$e_j=f_j-y_j-$ сигнал ошибки,

$e_j^*=b*sign(e_i)$ где b- постоянная величина. В данной задаче $b=1$, поэтому при расчетах будет использовать ошибку e_i. Для определенности положим

$$T_j = \psi[e_j(t_j)] = \frac{2}{\left|e(t_j)\right| + 0.1};$$

Расчеты будут осуществляться во временной области. Поэтому от изображения $W_{пнч}$ перейдем к ее оригиналу, тем самым будет определена импульсная переходная функция или иначе функция веса W $_{пнч}$(t).

$$W_{пни}(t) = L^{-1}\{W_{пнч}(p)\} = 2(1-e^{-t}) - 2(1-e^{-(t-\tau)}) = 2e^{-t}(e^{+\tau} - 1).$$

Начальное значение импульсной переходной функции $W_{пни}(t)$ рассчитывается по данному выражений данному при t=0, τ =0 . То есть коэффициенты веса $a_{ii} = 0$ для всех i.

Последующие коэффициенты $a_{ii}\big/_{i>j}$ рассчитываются по выражению $W_{пнч}(t) = 0.21e^{-t}$, которое получено с учетом $\tau = 0{,}1$.

Расчет процессов. Для формализованного представления структуры процессов и получения рекуррентного выражения строим импульсный потоковый граф для нескольких первых периодов повторения T_j импульсов на выходе ЧИМ.

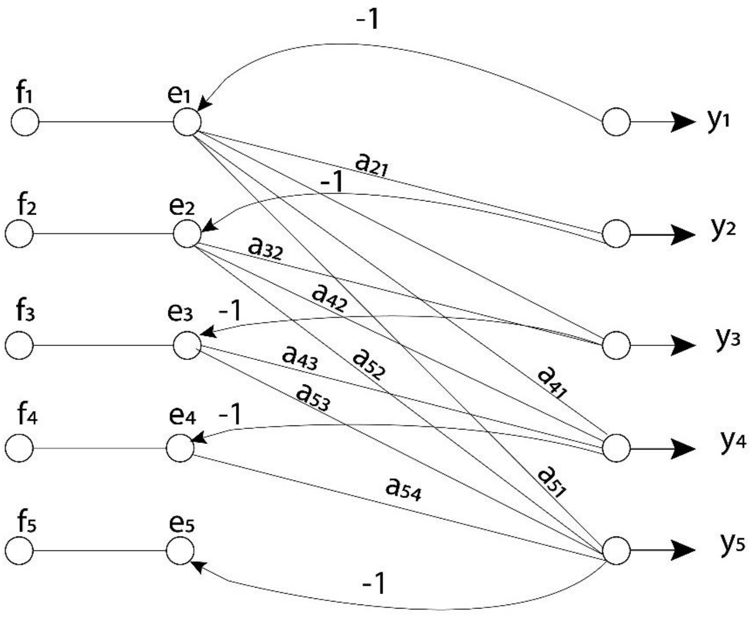


Рис. 3.2.2. Импульсный потоковый граф одномерной ЧИС

Первый шаг. Пользуясь графой моделью процессов, получим:

$y_1=0,\ e_1=f_1-y_1=4-0=4;$

$$T_1 = \frac{2}{|e_1| + 0.1} = \frac{2}{4.1} = 0.488,$$

t_1=0; t_2=T_1=0.488.

Второй шаг

$$y_2 = e_1 * a_{21}; \qquad a_{21} = W_{пнч}(t_2)$$

(далее индекс «пнч» будет опускать)

$$a_{21} = 0.21e^{-t_2} = 0.21e^{-0.488} = 0.21 * 0.618 = 0.13$$
$$y_2 = e_1 * a_{21} = 4 * 0.13 = 0.52$$
$$e_2 = f_2 - y_2 = 4 - 0.52 = 3.48;$$
$$T_2 = \frac{2}{|e_2| + 0.1} = \frac{2}{3.58} = 0.56;$$
$$t_3 = T_1 + T_2 = 0.488 + 0.56 = 1.046$$

Третий шаг

$$y_3 = a_{31} * e_1 + a_{32} * e_2 = 0.073 * 4 + 0.12 * 3.48 = 0.71$$
$$a_{31} = W(t_3) = 0.21 * e^{-t_3} = 0.21 * 0.35 = 0.073;$$
$$a_{32} = W(T_2) = 0.21 * e^{-T_2} = 0.21e^{-(t_3 - T_1)} = 0.21 * e^{-0.56} = 0.21 * 0.571 = 0.12;$$
$$e_3 = f_3 - y_3 = 4 - 0.71 = 3.29;$$
$$T_3 = \frac{2}{|3.29| + 0.1} = \frac{2}{3.39} = 0.589;$$
$$t_4 = T_1 + T_2 + T_3 = 0.488 + 0.56 + 0.589 = 1.637$$

Четвертый шаг

$$y_u = e_1 * a_{u1} + e_2 * a_{u2} + e_3 * a_{u3}$$
$$a_{u1} = 0.21e^{-(\sum_{i=1}^{3} T_i)} = 0.21 * e^{-1.637} = 0.21 * 0.194 = 0.04;$$
$$a_{u2} = 0.21e^{-\sum_{i=2}^{3} T_i} = 0.21 * e^{-(T_2 + T_3)} = 0.21 * e^{-1.149} = 0.21 * 0.316 = 0.066;$$
$$a_{u3} = 0.21e^{-\sum_{i=3}^{3} T_i} = 0.21 * e^{-T_3} = 0.21 * e^{-0.589} = 0.21 * 0.555 = 0.116;$$
$$y_u = 4 * 0.04 + 3.48 * 0.066 + 3.29 * 0.116 = 0.77;$$
$$e_u = f_u - y_u = 4 - 0.77 = 3.23;$$
$$T_u = \frac{2}{|e_u| + 0.1} = \frac{2}{3.33} = 0.6;$$
$$t_5 = \sum_{i=1}^{4} T_i = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0.488 + 0.56 + 0.589 + 0.6 = 2.237;$$

Пятый шаг

$$y_5 = e_1 * a_{51} + e_2 * a_{52} + e_3 * a_{53} + e_4 * a_{54}$$

$$a_{51} = 0.21 * e^{-\sum_{i=1}^{4} T_i} = 0.21 * e^{-2.237} = 0.21 * 0.107 = 0.022;$$

$$a_{52} = 0.21 * e^{-\sum_{i=2}^{4} T_i} = 0.21 * e^{-1.749} = 0.21 * 0.174 = 0.0365;$$

$$a_{53} = 0.21 * e^{-\sum_{i=3}^{4} T_i} = 0.21 * e^{-1.189} = 0.21 * 0.304 = 0.064;$$

$$a_{54} = 0.21 * e^{-T_u} = 0.21 * 0.548 = 0.115;$$

$$y_5 = 4 * 0.022 + 3.48 * 0.0365 + 3.29 * 0.064 + 3.23 * 0.115 = 0.796;$$

$$e_5 = f_5 - y_5 = 4 - 0.796 = 3.2;$$

$$T_5 = \frac{2}{|e_5| + 0.1} = \frac{2}{3.3} = 0.6;$$

$$t_6 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 0.488 + 0.56 + 0.589 + 0.6 + 0.6 = 2.837;$$

Шестой шаг

$$y_6 = a_{61} * e_1 + a_{62} * e_2 + a_{63} * e_3 + a_{64} * e_4 + a_{65} * e_5$$

$$a_{61} = W(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5) = 0.21 * e^{-2.837} = 0.21 * 0.059 = 0.012;$$

$$a_{62} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5) = 0.21 * e^{-2.339} = 0.21 * 0.096 = 0.02;$$

$$a_{63} = W(T_3 + T_4 + T_5) = 0.21 * e^{-1.779} = 0.21 * 0.168 = 0.035;$$

$$a_{64} = W(T_4 + T_5) = 0.21 * e^{-1.19} = 0.21 * 0.304 = 0.064;$$

$$a_{65} = W(T_5) = 0.21 * e^{-0.6} = 0.21 * 0.554 = 0.116;$$

$$y_6 = 0.012 * 4 + 0.02 * 3.48 + 0.035 * 3.29 + 0.064 * 3.23 + 0.46 * 3.2 = 0.8098 \approx 0.81;$$

$$e_6 = f_6 - y_6 = 4 - 0.81 = 3.19;$$

$$T_6 = \frac{2}{|e_6| + 0.1} = \frac{2}{3.29} = 0.61;$$

$$t_7 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 0.488 + 0.56 + 0.589 + 0.6 + 0.6 + 0.61 = 3.437;$$

Седьмой шаг

$$y_7 = a_{71} * e_1 + a_{72} * e_2 + a_{73} * 76 e_3 + a_{74} * e_4 + a_{75} * e_5 + a_{76} * e_6$$

$$a_{71} = W(t_7) = 2 * e^{-3.437} * 0.105 = 2 * 0.032 * 0.105 = 0.007$$

$$a_{72} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6) = 2 * e^{-(\sum_{i=2}^{6} T_i)} * 0.105 = 2 * e^{-2.949} * 0.105 = 2 * 0.052 * 0.105 = 0.011;$$

$$a_{73} = W(T_3 + T_4 + T_5 + T_6) = 2 * e^{-2.989} * 0.105 = 2 * 0.091 * 0.105 = 0.019;$$

$$a_{74} = W(T_4 + T_5 + T_6) = 2 * e^{-1.807} * 0.105 = 2 * 0.165 * 0.105 = 0.034;$$

$$a_{75} = W(T_5 + T_6) = 2 * e^{-1.2} * 0.105 = 2 * 0.301 * 0.105 = 0.063;$$

$$a_{76} = W(T_6) = 2 * e^{-0.61} * 0.105 = 2 * 0.543 * 0.105 = 0.114$$

$$y_7 = 0.007 * 4 + 0.011 * 3.48 + 0.019 * 3.29 + 0.034 * 3.23 + 0.063 * 3.2 + 0.114 * 3.19 =$$

$$y_7 = 0.028 + 0.038 + 0.062 + 0.11 + 0.2 + 0.363 = 0.801$$

$$e_7 = f_7 - y_7 = 4 - 0.801 = 3.198;$$

$$T_7 = \frac{2}{|e_7| + 0.1} = \frac{2}{3.298} = 0.606$$

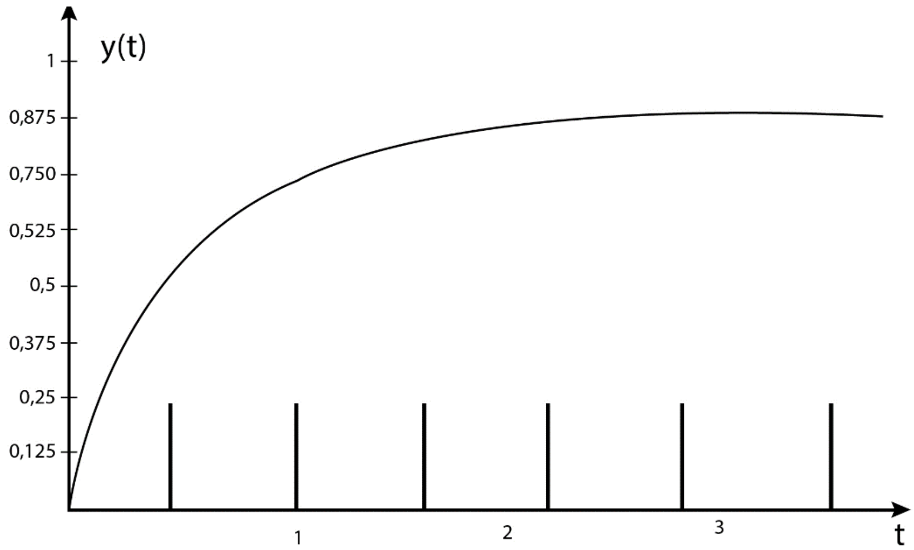


Рис.3.2.3. Кривая переходного процесса и последовательность импульсов на выходе ЧИМ.

Пример 2.

Исследование динамических процессов в частотно-импульсной системе второго порядка [20], представленной на рисунке 3.2.4.

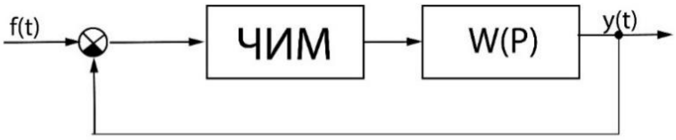


Рис.3.2.4. Структурная схема частотно-импульсной системы 2-го порядка

Характеристики системы 2-го порядка:

1) ЧИМ генерирует импульсы длительностью $\tau = 0{,}1$
2) $W(p) = \dfrac{1}{p(p+0.5)}$;
3) ЧИМ заменяем фиксатором $W_{\phi}(p) = \dfrac{1-e^{-p\tau}}{p}$;
4) Передаточная функция приведенной непрерывной части равна
$$W_{пнч}(p) = \frac{1-e^{-p\tau}}{p} * \frac{5}{p(p+0{,}5)} = \frac{5}{p^2(p+0{,}5)} - \frac{5}{p^2(p+0{,}5)} * e^{-p\tau};$$
5) $T = \dfrac{2}{|e(t)|+0.1}$
6) $f(t) = 4$
7) $W_{пнч}(t) = [\{W_{пни}(p)\} = \left[\left\{\dfrac{5}{p^2(p+0.5)}\right\} - \left[\left\{\dfrac{5}{p^2(p+0.5)} * e^{-p\tau}\right\}\right.\right.$

$$W_{пнч}(t) = 10(t-2+e^{-\frac{t}{2}}) - 10\left[(t-\tau)-2+2e^{-\frac{t-\tau}{2}}\right] =$$

$$= 10t - 20 + 20e^{-\frac{t}{2}} - 10t + 10\tau + 20 - 20e^{-\frac{t-\tau}{2}} =$$

$$= 20e^{-\frac{t}{2}}(1-e^{+\frac{t}{2}}) + 10\tau = 20e^{-\frac{t}{2}}(1-e^{+\frac{0.1}{2}}) + 10\tau =$$

$$20e^{-\frac{t}{2}}(1-1.0513) + 10*0.1;$$

$$W_{пнч} = (1-1.026e^{-\frac{t}{2}})$$

В дальнейшем изложении индекс «пнч» будет опускать.

Требуется для ЧИС с приведенными выше параметрами рассчитать переходные процессы.

Решение. Строим для нескольких моментов времени импульсный потоковый граф системы (рисунок 3.2.5.).

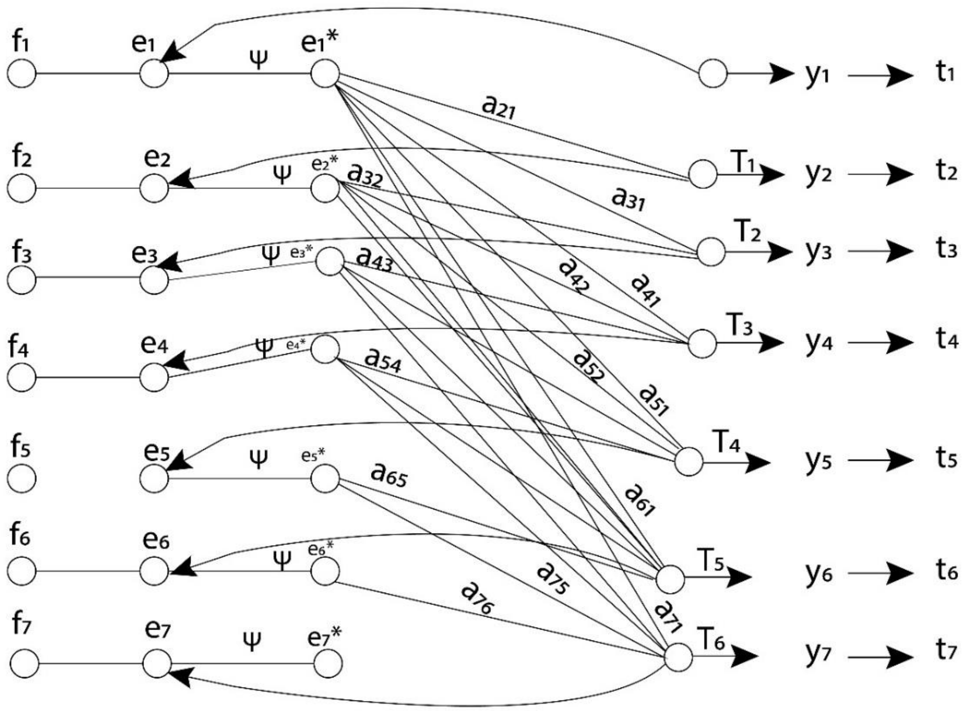


Рис.3.2.5. Импульсный потоковый граф частотно- импульсной системы 2- го порядка

Пользуясь данный графовой моделью, вычислим дискретные значения переходного процесса *y(t)*.

Первый шаг 2

$y_1=0$; $e_1=f_1-y_1=4$; $T_1 = \frac{2}{|e_1|+0.1} = \frac{2}{4.1} = 0.488$; $t_1=0$; $t_2=T1=0.488$.

Второй шаг

$y_2 = a_{21} * e_1; e$

$a_{21} = W(t_2) = W(T_1) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_1}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-0.244} = 0.194;$

$y_2 = 0.194 * 4 = 0.776;$

$e_2 = f_2 - y_2 = 4 - 0.776 = 3.224;$

$T_2 = \frac{2}{|e_2|+0.1} = \frac{2}{3.324} = 0.602;$

$t_3 = T_1 + T_2 = 0.488 + 0.602 = 1.09;$

Третий шаг

$$y_3 = a_{21} * e_1 + a_{32} * e_2$$

$$a_{21} = W(t_3) = W(T_1 + T_2) = 1 - 1.026e^{-1.09} = 0.405;$$

$$a_{32} = W(T_2) = 1 - 1.026e^{-\frac{T_2}{2}} = 1 - 1.026e^{-\frac{0.602}{2}} = 0.24;$$

$$y_3 = 0.405 * 4 + 0.24 * 3.224 = 2.394;$$

$$e_3 = f_3 - y_3 = 4 - 2.394 = 1.646;$$

$$T_3 = \frac{2}{|e_3| + 0.1} = \frac{2}{1.706} = 1.172$$

$$t_4 = T_1 + T_2 + T_3 = 0.488 + 0.602 + 1.172 = 2.262$$

Четвертый шаг

$$y_u = a_{u1} * e_1 + a_{u2} * e_2 + a_{u3} * e_3$$

$$a_{u1} = W(t_u) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{t_u}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{2.262}{2}} = 0.67;$$

$$a_{u2} = W(T_2 + T_3) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_2 + T_3}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(0.602 + 1.172)}{2}} = 0.576;$$

$$a_{u3} = W(T_3) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.172}{2}} = 0.43;$$

$$y_u = 0.67 * 4 + 0.576 * 3.224 + 0.43 * 1.606 = 5.227;$$

$$e_u = f_u - y_u = 4 - 5.227 = -1.227;$$

$$T_u = \frac{2}{|e_u| + 0.1} = \frac{2}{1.227 + 0.1} = 1.507;$$

$$t_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0.488 + 0.602 + 1.172 + 1.507 = 3.769.$$

Пятый шаг

$$y_5 = a_{51} * e_1 + a_{52} * e_2 + a_{53} * e_3 + a_{54} * e_4$$

$$a_{51} = W(t_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.769}{2}} = 0.844;$$

$$a_{52} = W(T_2 + T_3 + T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2 + T_3 + T_4)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.281}{2}} = 0.801;$$

$$a_{53} = W(T_3 + T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3 + T_4}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.34}{2}} = 0.732;$$

$$a_{54} = W(T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.507}{2}} = 0.515;$$

$$y_5 = 0.844 * 4 + 0.801 * 3.224 + 0.732 * 1.606 + 0.515 * (-1.227) = 6.5;$$

$$e_5 = f_5 - y_5 = 4 - 6.5 = -2.5$$

$$T_5 = \frac{2}{|e_5| + 0.1} = \frac{2}{2.5 + 0.1} = 0.769;$$

$$t_6 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 4.54;$$

Шестой шаг

$$y_6 = a_{61} * e_1 + a_{62} * e_2 + a_{63} * e_3 + a_{64} * e_4 + a_{65} * e_5$$

$$a_{61} = W(t_6) = 1 - 1.026 * e^{\frac{4.54}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-2.27} = 0.894;$$

$$a_{62} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2+T_3+T_4+T_5)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.052}{2}} = 0.865;$$

$$a_{63} = W(T_3 + T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_3+T_4+T_5)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.448}{2}} = 0.817;$$

$$a_{64} = W(T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_4+T_5}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-1.138} = 0.67;$$

$$a_{65} = W(T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.769}{2}} = 0.3;$$

$$y_6 = 0.894 * 4 + 0.865 * 3.224 + 0.817 * 1.606 + 0.67(-1.227) + 0.3(-2.5) = 6.104;$$

$$e_6 = f_6 - y_6 = 4 - 6.104 = -2.104;$$

$$T_6 = \frac{2}{|e_6| + 0.1} = \frac{2}{2.204} = 0.907;$$

$$t_7 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 0.488 + 0.602 + 1.172 + 1.507 + 0.769 + 0.907 = 5.445;$$

Седьмой шаг

$$y_7 = a_{71} * e_1 + a_{72} * e_2 + a_{73} * e_3 + a_{74} * e_4 + a_{75} * e_5 + a_{76} * e_6$$

$$a_{71} = W(t_7) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{5.445}{2}} = 0.932;$$

$$a_{72} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.957}{2}} = 0.915;$$

$$a_{73} = W(T_3 + T_4 + T_5 + 2T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3+T_4+T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.335}{2}} = 0.884;$$

$$a_{74} = W(T_4 + T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_4+T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.183}{2}} = 0.79;$$

$$a_{75} = W(T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.769+0.907}{2}} = 0.557;$$

$$a_{76} = W(T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.907}{2}} = 0.346;$$

$$y_{76} = 0.932 * 4 + 0.915 * 3.224 + 0.884 * 1.606 +$$
$$+ 0.79(-1.227) + 0.557(-2.5) + 0.346(-2.104) = 5;$$

$$e_7 = f_7 - y_7 = 4 - 5 = -1;$$

$$T_7 = \frac{2}{|e_7| + 0.1} = \frac{2}{1.1} = 1.82;$$

$$t_8 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 = 0.488 + 0.602 + 1.172 +$$
$$+ 1.507 + 0.769 + 0.907 + 1.82 = 7.265 \cong 7.3$$

Пример 3. Требуется исследовать характер переходных процессов частотно-импульсной системе второго порядка на базе графа переходных состояний. Структурная схема системы представлена на рисунке 3.2.6. Характеристики системы, следующие:

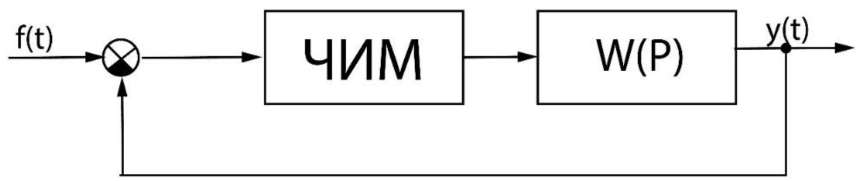


Рис.3.2.6. Структурная схема частотно-импульсный системы.

- входная воздействие $f(t)=4$;
- выходная координата $x_1(t)$;
- сигнал ошибки $e(t)=f(t)-x_1(t)$;
- передаточная функция системы $W(p)=\dfrac{5}{p(p+0{,}5)}$;
- ЧИМ генерирует импульсы $\tau=0{,}1$;
- Период повторения импульсов является нелинейный функцией сигнала ошибки и определяется из соотношения $T=\dfrac{2}{|e(t)|+0{,}1}$;
- момент появления импульса в n-ный момент времени определяется следующим образом:

$$t_n=\sum_{j=1}^{n-1}T_j;\;\; T_j=\psi\left[e_j(t_j)\right].$$

Решение: Исходя из заданных характеристик частотно-импульсный системы, строим её развернутый граф переходных состояний (рис.3.2.7) и определяет передачи графа.

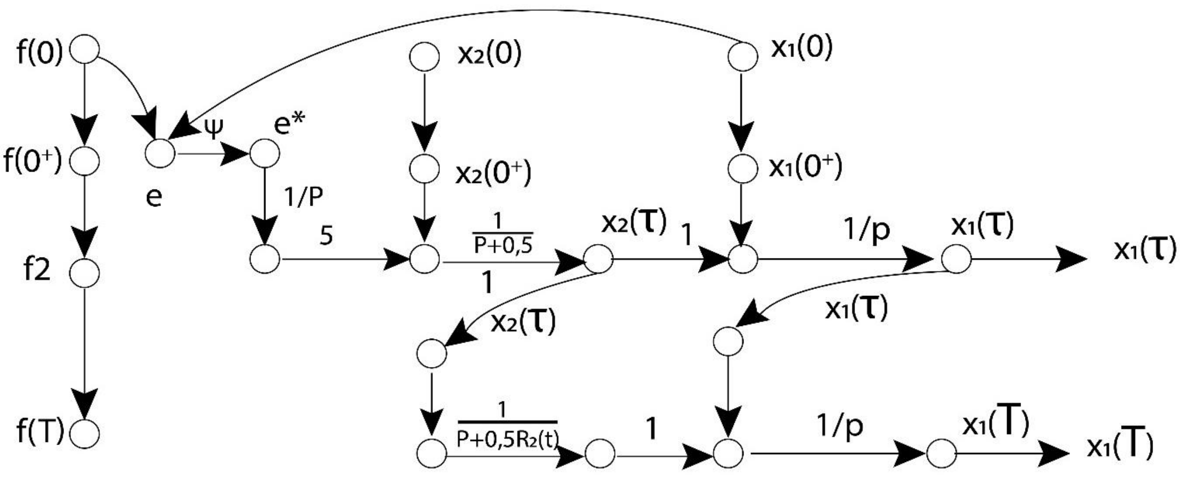


Рис.3.2.7 Граф переходных состояний частотно-импульсной системе второго порядка

$$\frac{x_i(\tau)}{x_i(0)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1$$

$$\frac{x_1(\tau)}{x_2(0)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+0{,}5)}\right\} = 2(1-e^{-\frac{\tau}{2}}) = 2(1-e^{-\frac{0{,}1}{2}}) = 0{,}098;$$

$$\frac{x_1(\tau)}{e(0)} = L^{-1}\left\{\frac{5}{p^2(p+0{,}5)}\right\} = 5\bullet 2(\tau-2+2e^{-\frac{\tau}{2}}) = 5\bullet 2(0{,}1-2+2\bullet 0{,}951) = 0{,}02;$$

$$\frac{x_1(\tau)}{x_2(0)} = L^{-1}\left\{\frac{5}{p(p+0{,}5)}\right\} = 5\bullet 2(1-e^{-\frac{\tau}{2}}) = 0{,}49;$$

$$\frac{x_2(\tau)}{x_2(0)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+0{,}5}\right\} = e^{-\frac{\tau}{2}} = 0{,}951;$$

$$\frac{x_1(T)}{x_1(\tau)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1;$$

$$\frac{x_1(T)}{x_1(\tau)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+0{,}5)}\right\} = 2(1-e^{-\frac{\tau}{2}});$$

$$\frac{x_2(T)}{x_1(\tau)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+0{,}5}\right\} = e^{-\frac{(T-\tau)}{2}}.$$

После определения передач дуг графа можно построит двудольный граф переходных состояний (рис. 3.2.8).

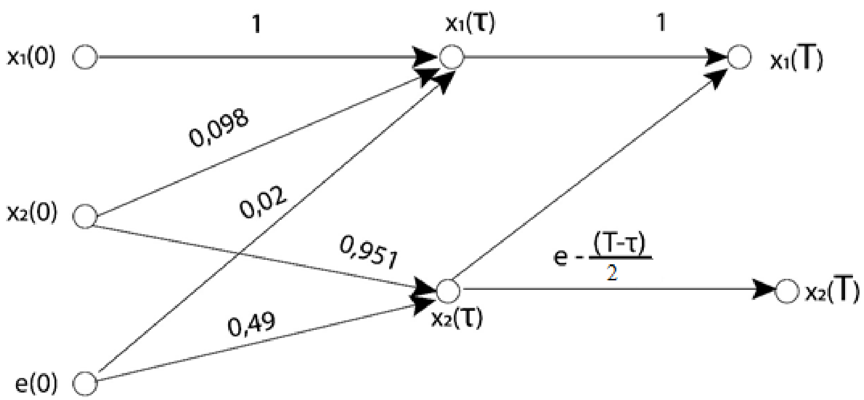


Рис.3.2.8 Двудольный граф переходных состояний частотно-импульсной системе второго порядка

Пользуясь данным графом, осуществим расчёт процессов частотно-импульсной системы.

Первый шаг

$x_1(0) = 0;\ \ x_2 = 0;\ \ e(0) = f(0) - x_i(0) = 4;$

$$T_0 = \frac{2}{|e(0)| + 0{,}1} = \frac{2}{4{,}1} = 0{,}488;$$

$t_1 = T_0 = 0{,}488;$

Второй шаг

$x_1(\tau) = 0{,}02 \bullet e(0) = 0{,}02 \bullet 4 = 0{,}08;$

$x_2(\tau) = 0{,}49 \bullet e(0) = 0{,}9 \bullet 4 = 1{,}96;$

$x_1(t_1) = 1 \bullet x_1(\tau) + 2(1 - e^{-\frac{T_0-\tau}{2}}) \bullet x_2(\tau) =; 0{,}08 + 2(1 - e^{-\frac{(0{,}488-0{,}1)}{2}}) \bullet 1{,}96 = 0{,}766;$

$x_2(t_1) = e^{-\frac{(T_0-\tau)}{2}} \bullet x_2(\tau) =; 0{,}825 \bullet 1{,}96 = 1{,}62$

$e(t_1) = 4 - 0{,}766 = 3{,}234;$

$T_1 = \dfrac{2}{|e(T_1)| + 0{,}1} = \dfrac{2}{3{,}341} = 0{,}6;$

$t_2 = T_0 + T_1 = 0{,}488 + 0{,}6 = 1{,}088;$

Третий шаг

$x_1(t_1 + \tau) = x_1(t_1) \bullet 1 + x_2(t_1) \bullet 0{,}098 + e(t_1) \bullet 0{,}02 = 0{,}766 + 1{,}62 \bullet 0{,}098 + 3{,}234 \bullet 0{,}02 = 0{,}988;$

$x_2(t_1 + \tau) = x_2(t_1) \bullet 0{,}351 + e(t_1) \bullet 0{,}49 = 1{,}62 \bullet 0{,}951 + 3{,}224 \bullet 0{,}49 = 3{,}12;$

$x_1(t_2) = 1 \bullet x_1(t_1 + \tau) + 2(1 - e^{-\frac{T_1-\tau}{2}}) \bullet x_2(t_1 + \tau) = 0{,}988 + 2(1 - e^{-\frac{(0{,}6-0{,}1)}{2}}) \bullet 3{,}12 = 2{,}37;$

$x_2(t_2) = x_2(t_1 + \tau) \bullet e^{-\frac{T_1-\tau}{2}} = 3{,}12 \bullet 0{,}778 = 2{,}427;$

$e(t_2) = f(t_2) - x_1(t_2) = 4 - 2{,}37 = 1{,}63;$

$T_2 = \dfrac{2}{|e(t_2)| + 0{,}1} = \dfrac{2}{1{,}63 + 0{,}1} = 1{,}156;$

$\mathrm{t}_3 = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 = 0{,}488 + 0{,}6 + 1{,}156 = 2{,}244;$

Четвёртый шаг

$x_1(t_2 + \tau) = x_1(t_2) \bullet 1 + x_2(t_1) \bullet 0{,}098 + e(t_2) \bullet 0{,}02 = 2{,}37 + 2{,}427 \bullet 0{,}096 + 1{,}63 \bullet 0{,}02 = 2{,}64;$

$x_2(t_2 + \tau) = x_2(t_2) \bullet 0{,}951 + e(t_2) \bullet 0{,}49 = 2{,}427 \bullet 0{,}951 + 1{,}63 \bullet 0{,}49 = 3{,}106;$

$x_1(t_3) = x_1(t_2 + \tau) \bullet 1 + x_2(t_2 + \tau) \bullet 2(1 - e^{-\frac{(T_2-\tau)}{2}}) = 2{,}64 + 3{,}106 \bullet 2(1 - e^{-\frac{(1{,}156-0{,}1)}{2}}) = 5{,}19;$

$x_2(t_3) = x_2(t_2 + \tau) \bullet e^{-\frac{(T_2-\tau)}{2}} = 3{,}106 \bullet 0{,}59 = 1{,}832;$

$e(t_3) = f(t_3) - x_1(t_3) = 4 - 5.19 = 1.19;$

$T_3 = \dfrac{2}{|e(t_3)| + 0{,}1} = \dfrac{2}{2{,}19} = 1{,}55;$

$\mathrm{t}_4 = \mathrm{T}_0 + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 = 3{,}794;$

Пятый шаг

$x_1(t_3 + \tau) = x_1(t_3) \bullet 1 + x_2(t_3) \bullet 0{,}098 + e(t_3) \bullet 0{,}02 = 5{,}19 + 1{,}832 + 0{,}098 - 1{,}19 \bullet 0{,}02 = 5{,}3457;$

$x_2(t_3 + \tau) = x_2(t_3) \bullet 0{,}951 + e(t_3) \bullet 0{,}49 = 1{,}742 + (-0{,}583) = 1{,}159;$

$x_1(t_4) = x_1(t_3 + \tau) \bullet 1 + x_2(t_3 + \tau) \bullet 2(1 - e^{-\frac{(T_3-\tau)}{2}}) = 5{,}3457 + 1{,}159 \bullet 2(1 - e^{-\frac{(1{,}55-0{,}1)}{2}}) = 6{,}536;$

$e(t_4) = f(t_4) - x_1(t_4) = 4 - 6{,}536 = -2{,}536;$

$$T_4 = \frac{2}{|e(t_4)| + 0{,}1} = \frac{2}{2{,}536 + 0{,}1} = 0{,}758;$$

$$t_5 = \sum_{j=0}^{4} T_j = 4{,}55;$$

$$x_2(t_4) = x_2(t_3 + \tau) \bullet e^{-\frac{(T_3 - \tau)}{2}} = 1{,}159 \bullet e^{-\frac{(1{,}55 - 0{,}1)}{2}} = 0{,}563;$$

Шестой шаг

$$x_1(t_4 + \tau) = x_1(t_4) * 1 + x_2(t_4) * 0{,}098 + e(t_4) * 0{,}02 = 6{,}536 + 0{,}563 * 0{,}098 - 2{,}536 * 0{,}02 = 6{,}541;$$

$$x_2(t_4 + \tau) = x_2(t_4) * 0{,}951 + e(t_4) * 0{,}49 = 0{,}707;$$

$$x_1(t_5) = 1 * x_1(t_4 + \tau) * 1 + x_2(t_4 + \tau) * 2(1 - e^{-\frac{(T_4 - \tau)}{2}}) = 6{,}541 + (-0{,}707) * 2(1 - e^{-\frac{(0{,}758 - 0{,}1)}{2}}) = 6{,}121;$$

$$e(t_5) = f(t_5) - x_1(t_5) = 4 - 6{,}121 = -2{,}121;$$

$$T_5 = \frac{2}{|e(t_5)| + 0{,}1} = \frac{2}{2{,}121 + 0{,}1} = 0{,}9;$$

$$t_6 = \sum_{j=0}^{5} T_j = 5{,}45;$$

$$x_2(t_5) = x_2(t_4 + \tau) \bullet e^{-\frac{(T_4 - \tau)}{2}} = 0{,}707 \bullet e^{-\frac{(0{,}758 - 0{,}1)}{2}} = 0{,}512;$$

Седьмой шаг

$$x_1(t_5 + \tau) = x_1(t_5) \bullet 1 + x_2(t_5) \bullet 0{,}098 + e(t_5) \bullet 0{,}02 = 6{,}121 - 0{,}098 \bullet 0{,}512 - 2{,}121 \bullet 0{,}02 = 6{,}03;$$

$$x_2(t_5 + \tau) = x_2(t_5) \bullet 0{,}951 + (-e(t_5)) \bullet 0{,}49 = -0{,}512 \bullet 0{,}95 - 2{,}121 \bullet 0{,}49 = -1{,}526;$$

$$x_1(t_6) = x_1(t_5 + \tau) \bullet 1 + 2(1 - e^{-\frac{(T_5 - \tau)}{2}}) \bullet x_2(t_5 + \tau) = 6{,}03 + 2(1 - e^{-\frac{(0{,}9 - 0{,}1)}{2}}) \bullet (-1{,}526) = 5{,}023;$$

$$e(t_6) = f(t_6) - x_1(t_6) = 4 - 5{,}023 = -1{,}023;$$

$$t_7 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 7{,}23;$$

$$T_5 = \frac{2}{|e(t_6)| + 0{,}1} = \frac{2}{1{,}023 + 0{,}1} = 1{,}78;$$

$$x_2(t_6) = x_2(t_5 + \tau) \bullet e^{-\frac{(T_5 - \tau)}{2}} = -1{,}526 \bullet 0{,}67 = -1{,}022;$$

Пример А.

Исследование динамических процессов в частотно-импульсной системе второго порядка, представленной на рисунке 3.2.8.

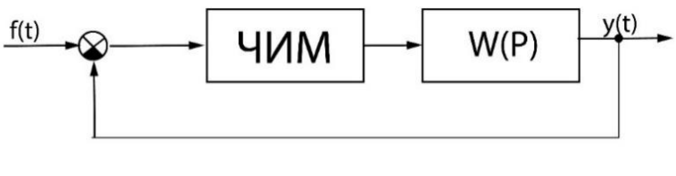


Рис.3.2.8. Структурная схема частотно-импульсной системы 2-го порядка

Характеристики системы 2-го порядка:

1) ЧИМ генерирует импульсы длительностью $\tau = 0{,}1$

2) $W(p) = \dfrac{1}{p(p+0.5)}$;

3) ЧИМ заменяем фиксатором $W_{\phi}(p) = \dfrac{1-e^{-p\tau}}{p}$;

4) Передаточная функция приведенной непрерывной части равна

$$W_{пнч}(p) = \frac{1-e^{-p\tau}}{p} * \frac{5}{p(p+0{,}5)} = \frac{5}{p^2(p+0{,}5)} - \frac{5}{p^2(p+0{,}5)} * e^{-p\tau};$$

5) $T = \dfrac{2}{|e(t)| + 0.1}$

6) $f(t) = 4$

7) $W_{пнч}(t) = [\{W_{пни}(p)\} = \left[\left\{\dfrac{5}{p^2(p+0.5)}\right\} - \left[\left\{\dfrac{5}{p^2(p+0.5)} * e^{-p\tau}\right\}\right.\right.$

$$W_{пнч}(t) = 10(t - 2 + e^{-\frac{t}{2}}) - 10\left[(t-\tau) - 2 + 2e^{-\frac{t-\tau}{2}}\right] =$$

$$= 10t - 20 + 20e^{-\frac{t}{2}} - 10t + 10\tau + 20 - 20e^{-\frac{t-\tau}{2}} =$$

$$= 20e^{-\frac{t}{2}}(1 - e^{+\frac{t}{2}}) + 10\tau = 20e^{-\frac{t}{2}}(1 - e^{+\frac{0.1}{2}}) + 10\tau =$$

$$20e^{-\frac{t}{2}}(1 - 1.0513) + 10*0.1;$$

$$W_{пнч} = (1 - 1.026e^{-\frac{t}{2}})$$

В дальнейшем изложении индекс «пнч» будет опускать.

Требуется для ЧИС с приведенными выше параметрами рассчитать переходные процессы.

Решение. Строим для нескольких моментов времени импульсный потоковый граф системы (рисунок 3.2.9.).

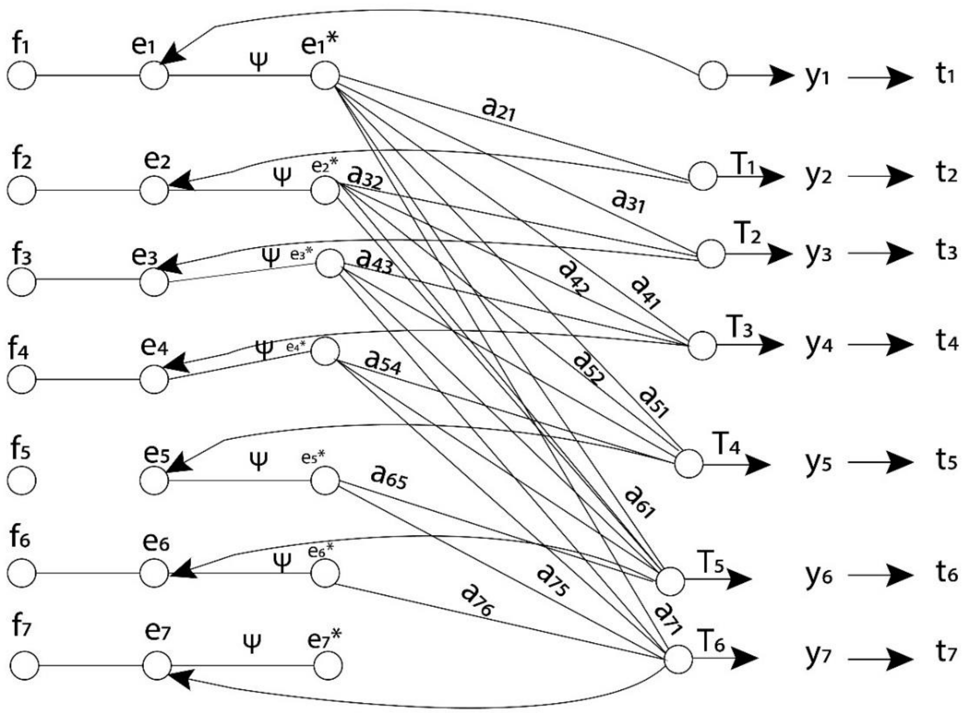


Рис.3.2.9. Импульсный потоковый граф частотно- импульсной системы 2- го порядка

Пользуясь данный графовой моделью, вычислим дискретные значения переходного процесса *y(t)*.

Первый шаг 2

$y_1=0$; $e_1=f_1-y_1=4$; $T_1 = \dfrac{2}{|e_1|+0.1} = \dfrac{2}{4.1} = 0.488$; $t_1=0$; $t_2=T1=0.488$.

Второй шаг

$y_2 = a_{21} * e_1; e$

$$a_{21} = W(t_2) = W(T_1) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_1}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-0.244} = 0.194;$$

$$y_2 = 0.194 * 4 = 0.776;$$

$$e_2 = f_2 - y_2 = 4 - 0.776 = 3.224;$$

$$T_2 = \frac{2}{|e_2|+0.1} = \frac{2}{3.324} = 0.602;$$

$$t_3 = T_1 + T_2 = 0.488 + 0.602 = 1.09;$$

Третий шаг

$$y_3 = a_{21} * e_1 + a_{32} * e_2$$

$$a_{21} = W(t_3) = W(T_1 + T_2) = 1 - 1.026e^{-1.09} = 0.405;$$

$$a_{32} = W(T_2) = 1 - 1.026e^{-\frac{T_2}{2}} = 1 - 1.026e^{-\frac{0.602}{2}} = 0.24;$$

$$y_3 = 0.405 * 4 + 0.24 * 3.224 = 2.394;$$

$$e_3 = f_3 - y_3 = 4 - 2.394 = 1.646;$$

$$T_3 = \frac{2}{|e_3| + 0.1} = \frac{2}{1.706} = 1.172$$

$$t_4 = T_1 + T_2 + T_3 = 0.488 + 0.602 + 1.172 = 2.262$$

Четвертый шаг

$$y_u = a_{u1} * e_1 + a_{u2} * e_2 + a_{u3} * e_3$$

$$a_{u1} = W(t_u) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{t_u}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{2.262}{2}} = 0.67;$$

$$a_{u2} = W(T_2 + T_3) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_2 + T_3}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(0.602+1.172)}{2}} = 0.576;$$

$$a_{u3} = W(T_3) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.172}{2}} = 0.43;$$

$$y_u = 0.67 * 4 + 0.576 * 3.224 + 0.43 * 1.606 = 5.227;$$

$$e_u = f_u - y_u = 4 - 5.227 = -1.227;$$

$$T_u = \frac{2}{|e_u| + 0.1} = \frac{2}{1.227 + 0.1} = 1.507;$$

$$t_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 0.488 + 0.602 + 1.172 + 1.507 = 3.769.$$

Пятый шаг

$$y_5 = a_{51} * e_1 + a_{52} * e_2 + a_{53} * e_3 + a_{54} * e_4$$

$$a_{51} = W(t_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.769}{2}} = 0.844;$$

$$a_{52} = W(T_2 + T_3 + T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2 + T_3 + T_4)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.281}{2}} = 0.801;$$

$$a_{53} = W(T_3 + T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3 + T_4}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.34}{2}} = 0.732;$$

$$a_{54} = W(T_4) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{1.507}{2}} = 0.515;$$

$$y_5 = 0.844 * 4 + 0.801 * 3.224 + 0.732 * 1.606 + 0.515 * (-1.227) = 6.5;$$

$$e_5 = f_5 - y_5 = 4 - 6.5 = -2.5$$

$$T_5 = \frac{2}{|e_5| + 0.1} = \frac{2}{2.5 + 0.1} = 0.769;$$

$$t_6 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 4.54;$$

Шестой шаг

$$y_6 = a_{61} * e_1 + a_{62} * e_2 + a_{63} * e_3 + a_{64} * e_4 + a_{65} * e_5$$

$$a_{61} = W(t_6) = 1 - 1.026 * e^{\frac{4.54}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-2.27} = 0.894;$$

$$a_{62} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2+T_3+T_4+T_5)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.052}{2}} = 0.865;$$

$$a_{63} = W(T_3 + T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_3+T_4+T_5)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.448}{2}} = 0.817;$$

$$a_{64} = W(T_4 + T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_4+T_5}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-1.138} = 0.67;$$

$$a_{65} = W(T_5) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.769}{2}} = 0.3;$$

$$y_6 = 0.894 * 4 + 0.865 * 3.224 + 0.817 * 1.606 + 0.67(-1.227) + 0.3(-2.5) = 6.104;$$

$$e_6 = f_6 - y_6 = 4 - 6.104 = -2.104;$$

$$T_6 = \frac{2}{|e_6| + 0.1} = \frac{2}{2.204} = 0.907;$$

$$t_7 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 = 0.488 + 0.602 + 1.172 + 1.507 + 0.769 + 0.907 = 5.445;$$

Седьмой шаг

$$y_7 = a_{71} * e_1 + a_{72} * e_2 + a_{73} * e_3 + a_{74} * e_4 + a_{75} * e_5 + a_{76} * e_6$$

$$a_{71} = W(t_7) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{5.445}{2}} = 0.932;$$

$$a_{72} = W(T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{(T_2+T_3+T_4+T_5+T_6)}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.957}{2}} = 0.915;$$

$$a_{73} = W(T_3 + T_4 + T_5 + 2T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_3+T_4+T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{4.335}{2}} = 0.884;$$

$$a_{74} = W(T_4 + T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_4+T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{3.183}{2}} = 0.79;$$

$$a_{75} = W(T_5 + T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{T_5+T_6}{2}} = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.769+0.907}{2}} = 0.557;$$

$$a_{76} = W(T_6) = 1 - 1.026 * e^{-\frac{0.907}{2}} = 0.346;$$

$$y_{76} = 0.932 * 4 + 0.915 * 3.224 + 0.884 * 1.606 +$$
$$+ 0.79(-1.227) + 0.557(-2.5) + 0.346(-2.104) = 5;$$

$$e_7 = f_7 - y_7 = 4 - 5 = -1;$$

$$T_7 = \frac{2}{|e_7| + 0.1} = \frac{2}{1.1} = 1.82;$$

$$t_8 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 = 0.488 + 0.602 + 1.172 +$$
$$+ 1.507 + 0.769 + 0.907 + 1.82 = 7.265 \cong 7.3$$

3.3. Исследование переходного процесса одномерной частотно-импульсной системы с использованием графа переходных состояний

Пример. Исследование переходного процесса одномерной частотно-импульсной системы с использованием графа переходных состояний.

Структурная схема системы дана на рис.3.3.1

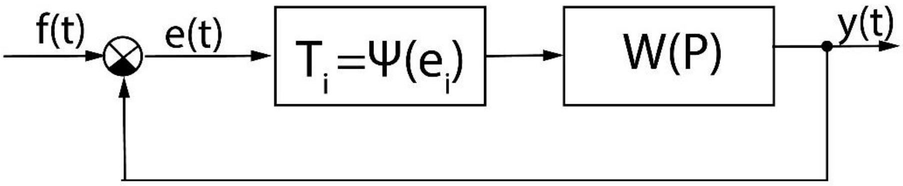


Рис.3.3.1 Структурная схема одномерной частотно-импульсной системы

Характеристики системы следующие:

f - входное воздействие, $f=4$;

τ - длительность импульсов на выходе модулятора, $\tau = 0{,}1$;

y - выходная координата;

$e_j = (f_j - y_j)$ - сигнал ошибки в j-ый момент времени

T_j - длительность j-го интервала времени, является нелинейный функцией сигнала ошибки. В данной задаче

$$T_j = \frac{2}{|e_j| + 0{,}1},$$

t_j - момент появления j-го импульса на выходе модулятора, $t_n = \sum_{j=0}^{n-1} T_j$.

Передаточная функция объекта управления $W(p) = \frac{2}{p+1}$

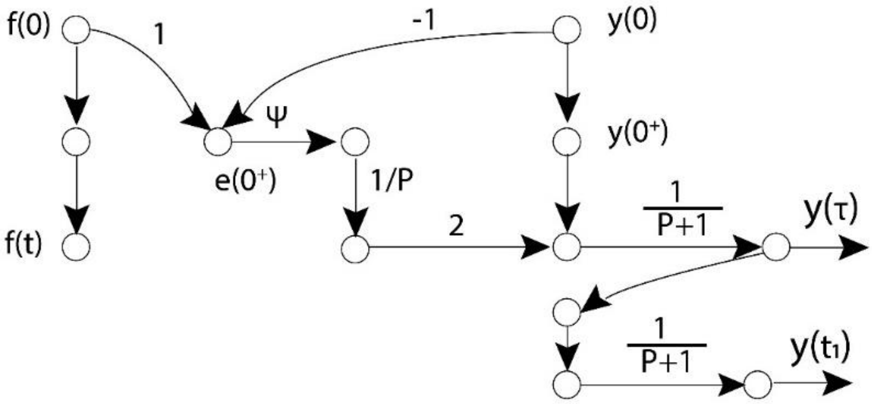
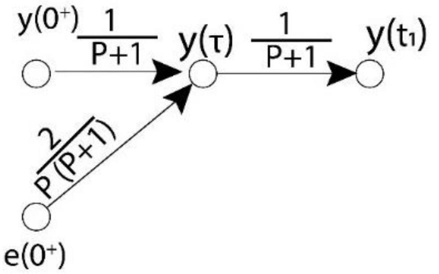
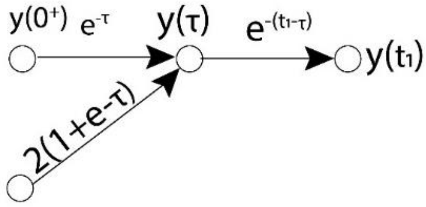


Рис.3.3.2. Развернутая графовая модель одномерной частотно-импульсной системы



а.



б.

Рис.3.3.3. Двудольный граф системы с передачами в виде изображений (а),

Двудольный граф системы с передачами в виде оригиналов (б).

Развернутая графовая модель системы имеет вид, представленный на рис. 3.5. На рис.3.6, а и 3.6, б представлены двудольные графы, полученные из развернутой графовой модели при вычислении коэффициентов передач дуг графа.

$$\frac{y(\tau)}{y(0^t)} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = e^{-\ \tau}\Big|_{\tau=0,1} = 0,904;$$

$$\frac{y(\tau)}{e*(0^t)} = L^{-1}\left\{\frac{2}{p(p+1)}\right\} = 211 - e^{-\ \tau}\Big|_{\tau=0,1} = 0,192;$$

$$\frac{y(t_1)}{y(\tau)} = L^{-1}\left\{\frac{2}{p+1}\right\} = e^{-(t_1-\tau)}.$$

Расчет процессов.

Первый шаг

$$f(0)=4;\ \ e*(0) = f(0) - y(0);$$

$$y(0)=0;\ \ t_1 = T_0;$$

$$T_0 = \frac{2}{|e(1)| + 0,1} = 0,488;$$

Второй шаг

$$y(\tau) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} y(1) + L^{-1}\left\{\frac{2}{p(p+1)}\right\} \bullet e*(1)$$

$$y(\tau) = 0,192 \bullet 4 = 0,768;$$

$$y(t_1) = e^{-(t_1-\tau)} \bullet y(\tau) \text{ или}$$

$$y(t_1) = e^{-(t_1-\tau)} \bullet y(\tau) = e^{-(0,488-0,1)} y(\tau) = 0,678 \bullet 0,768 = 0,52;$$

$$e(t_1) = f(t_1) - y(t_1) = 4 - 0,52 = 3,48$$

$$T_1 = \frac{2}{|e(t_2)| + 0,1} = \frac{2}{3,58} = 0,558;$$

$$t_2 = T_0 + T_2 = 0,488 + 0,558 = 1,046;$$

Третий шаг

$$y(t_1+\tau) = y(t_2)e^{-\tau} + 2(1-e^{-\tau}) \bullet e*(t_2) = 0,904 \bullet 0,52 + 0,192 \bullet 3,48 = 1,138;\ ;$$

$$y(t_2) = e^{-(T_2-\tau)} \bullet y(t_2+\tau) = e^{-(1{,}558-0{,}1)} \bullet 1{,}138 = 0{,}63 \bullet 1{,}138 = 0{,}717;$$
$$e^*(t_2) = f(t_2) - y(t_2) = 4 - 0{,}717 = 3{,}283;$$
$$T_2 = \frac{2}{|e^*(t_3)| + 0{,}1} = \frac{2}{3{,}383} = 0{,}591;$$
$$t_3 = T_0 + T_1 + T_2 = 0{,}48 + 0{,}558 + 0{,}591 = 1{,}637;$$

Четвёртый шаг

$$y(t_2+\tau) = e^{-\tau} \bullet y(t_2) + 2(1 - e^{-\tau})e^*(t_2) = 0{,}904 \bullet 0{,}717 + 0{,}192 \bullet 3{,}283 = 0{,}648 + 0{,}63 = 1{,}278;$$
$$y(t_3) = e^{-(T_2-\tau)} \bullet y(t_2+\tau) = e^{-(0{,}591-0{,}1)} \bullet 1{,}278 = 0{,}61 \bullet 1{,}278 = 0{,}779;$$
$$e^*(t_3) = f(t_3) - y(t_3) = 4 - 0{,}779 = 3{,}221;$$
$$T_3 = \frac{2}{|e^*(t_4)| + 0{,}1} = \frac{2}{3{,}321} = 0{,}602;$$
$$t_4 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = 1{,}637 + 0{,}602 = 2{,}239;$$

Пятый шаг

$$y(t_3+\tau) = e^{-\tau} \bullet y(t_3) + 2(1 - e^{-\tau})e^*(t_3) = 0{,}904 \bullet 0{,}779 + 0{,}192 \bullet 3{,}22 = 1{,}32;$$
$$y(t_4) = e^{-(T_3-\tau)} \bullet y(t_3+\tau) = e^{-(0{,}6-0{,}1)} \bullet 1{,}32 = 0{,}606 \bullet 1{,}32 = 0{,}799;$$
$$e^*(t_4) = f(t_4) - y(t_4) = 4 - 0{,}799 = 3{,}201;$$
$$T_4 = \frac{2}{|e^*(t_5)| + 0{,}1} = \frac{2}{3{,}301} = 0{,}606;$$
$$t_5 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2{,}842;$$

Шестой шаг

$$y(t_4+\tau) = e^{-\tau} \bullet y(t_4) + 2(1 - e^{-\tau})e^*(t_4) = 0{,}904 \bullet 0{,}799 + 0{,}192 \bullet 3{,}201 = 1{,}336;$$
$$y(t_5) = e^{-(T_4-\tau)} \bullet 1{,}336 = 0{,}606 \bullet 1{,}336 = 0{,}81;$$
$$e^*(t_5) = f(t_5) - y(t_5) = 4 - 0{,}81 = 3{,}19;$$
$$T_5 = \frac{2}{|e^*(t_6)| + 0{,}1} = \frac{2}{3{,}29} = 0{,}61;$$
$$t_6 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 3{,}452;$$

Седьмой шаг

$$y(t_5+\tau) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} \bullet y(t_0) + L^{-1}\left\{\frac{2}{p(p+1)}\right\} \bullet e^*(t_6) = e^{-\tau} \bullet 0{,}81 + 0{,}192 \bullet 3{,}19 = 1{,}344;$$
$$y(t_6) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} \bullet y(t_5+\tau) + == e^{-(T_6-0{,}1)} \bullet y(t_5+\tau) = e^{-0{,}51} \bullet y(t_5+\tau) = 0{,}6 \bullet 1{,}344 = 0{,}806;$$
$$e^*(t_6) = f(t_6) - y(t_6) = 4 - 0{,}.806 = 3{,}194;$$
$$T_6 = \frac{2}{|e^*(t_7)| + 0{,}1} = \frac{2}{3{,}294} = 0{,}607;$$
$$\mathrm{t}_7 = \sum_{j=0}^{7-1} \mathrm{T}_j = 4{,}059;$$

Результатов расчёта процесса с точностью до сотых долей полностью совпадают с результатами, полученными на базе импульсных потоковых графов.

Список литературы

1. Корнилов Г.И. «Основы теории систем и системного анализа». Учебное пособие для вузов. 2012. – 107 с.
2. Вдовин В.М. Теория систем и системный анализ: Учебник для бакалавров / В.М. Вдовин, Л.Е. Суркова, В.А. Валентинов. - М.: Дашков и К, 20ХХ. - 644 с.
3. Волкова, В.Н. Теория систем и системный анализ: Учебник для бакалавров / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. - М.: Юрайт, 2010. - 616 с.
4. Горохов, А. В. Основы системного анализа : учебное пособие для вузов / А. В. Горохов. — Москва : Издательство Юрайт, 2010. — 140 с.
5. Дрогобыцкий, И.Н. Системный анализ в экономике: Учебник для студентов вузов / И.Н. Дрогобыцкий. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. - 423 с.
6. Иванчина Э. Д. Системный анализ процессов и аппаратов химической технологии : учебное пособие для вузов / Э. Д. Иванчина, Е. С. Чернякова, Н. С. Белинская, Е. Н. Ивашкина. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 20ХХ; Томск : Изд-во Томского политехнического университета. — 114 с.
7. Кузнецов В. В. Системный анализ : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. В. Кузнецов [и др.] ; под общей редакцией В. В. Кузнецова. — Москва: Издательство Юрайт, 20ХХ. — 270 с.
8. Качала, В.В. Теория систем и системный анализ: Учебник для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования / В.В. Качала. - М.: ИЦ Академия, 20ХХ. - 272 с.
9. Кириллов, В.И. Квалиметрия и системный анализ: Учебное пособие / В.И. Кириллов. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 20ХХ. - 440 с.
10. Тимченко, Т.Н. Системный анализ в управлении: Учебное пособие / Т.Н. Тимченко. - М.: ИД РИОР, 20ХХ. - 161 с.
12. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования, издание третье, исправленное. Москва, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 2007
13. Гайдук, А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. 3-е изд., - СПб.: Лань, 2016

14. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. Москва, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 2007.
15. Громов Ю.Ю. и др. Системы автоматического управления с запаздыванием. Учеб. пособие – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007
16. Ерофеев, А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов - СПб.: Политехника, 2008
17. Кадыров А.А. Топологический расчет систем автоматического управления: учебное пособие. Ташкент, 2003
18. Кадыров А.А. Машинные методы моделирования и исследования структурно- сложных систем. Ташкент, 2005
19. Кадыров А.А. // Теория разнотемповых дискретных систем управления. Ташкент: Янги аср авлоди, 2013. – 125с.
20. Убайдуллаева Ш.Р. Использование метода динамических графовых моделей для расчета линейных систем с запаздыванием. Научно-технический журнал “Современные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
21. Убайдуллаева Ш.Р. Графовое моделирование двумерной линейной стационарной системы автоматического управления с постоянным запаздыванием. Научно-технический журнал “Современные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
22. Убайдуллаева Ш.Р. Графовое моделирование двумерной линейной стационарной системы автоматического управления с постоянным запаздыванием. Журнал “ВестСовременные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
23. Убайдуллаева Ш.Р Сравнительный анализ решения линейного дифференциального уравнения 1- го порядка с запаздыванием методом шагов и методом графовых моделей. Научный журнал «Вестник Бухарского государственного университета», №4, декабрь 2018 г.

24. Убайдуллаева Ш.Р. Моделирование линейных непрерывных систем с постоянным запаздыванием на базе динамических графов. Международный научный журнал «Путь науки», №12