

Государственный комитет СССР по народному образованию

В. А. Иванов, М. А. Голованов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ
«ТЕОРИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»

Часть II

Издательство МГТУ

1991

Государственный комитет СССР по народному образованию

В.А.Иванов, М.А.Голованов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ
"ТЕОРИЯ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ"

Часть II

Утверждено редсоветом МГТУ
как учебное пособие

Издательство МГТУ
1991

ББК 32.965.6

И20

Рецензент Б.И.Шахтарин

И20 Иванов В.А., Голованов М.А. Конспект лекций по курсу "Теория цифровых систем автоматического управления". Ч.П. - М.: Изд-в МГТУ, 1991. - 44 с., ил.

ISBN 5-7038-0708-5

Рассмотрены вопросы исследования устойчивости дискретных систем. Изложены как алгебраические, так и частотные критерии устойчивости; способы определения уравнений состояния дискретных САУ; понятия управляемости и наблюдаемости; приведены критерии управляемости и наблюдаемости нестационарных и стационарных дискретных систем. Описан синтез модального управления, методы построения наблюдателей состояния полного порядка и редуцированного наблюдателя. Рассмотрен также метод синтеза цифровых систем на основе логарифмических частотных характеристик.

Для слушателей СФПК и студентов, специализирующихся в области цифровых автоматических систем и микропроцессорной техники.

Ил. 19. Библиогр. 4 назв.

ББК 32.965.6

Редакция заказной литературы

Виктор Александрович Иванов

Михаил Алексеевич Голованов

Конспект лекций по курсу "Теория цифровых систем автоматического управления"

Ч.П

Заведующая редакцией Е.С.Ивашкина

Редактор Ю.Н.Хлебинский

Корректор О.В.Калашникова

ISBN 5-7038-0708-5

© МГТУ им.Н.Э.Баумана, 1991.

Подписано в печать 29.05.91. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 2.

Печ.л. 2,75. Усл.печ.л. 2,56. Уч.-изд.л. 2,54.

тираж 3 экз. Изд. № 162. Заказ 779 Цена 10 коп.

Издательство МГТУ, типография МГТУ.

107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

1. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Теоремы об устойчивости

Пусть динамика линейной дискретной системы автоматического управления (САУ) описывается системой разностных уравнений

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n], \quad (1)$$

где $x[n]$ — k -мерный вектор состояния;

$u[n]$ — r -мерный вектор управления;

A — матрица системы размера $(k \times k)$;

B — матрица входа размера $(k \times r)$.

Однородную систему разностных уравнений, соответствующую системе (1), запишем в виде

$$x[n+1] = Ax[n]. \quad (2)$$

Линейная дискретная САУ называется устойчивой, если каждое решение системы уравнений (1) будет ограничено, и асимптотически устойчивой, если каждое решение $x_i[n]$ ($i = 1, 2, \dots, k$) этой системы удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i[n] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

В [1] показано, что из устойчивости однородной системы (2) следует устойчивость неоднородной системы (1) и из асимптотической устойчивости системы (2) следует асимптотическая устойчивость системы (1).

Таким образом, исследование устойчивости неоднородной системы (1), а следовательно, и линейной дискретной САУ, сводится к исследованию устойчивости однородной системы разностных уравнений (2).

Устойчивость однородной системы (2) определяется приведенными ниже теоремами.

Теорема 1. Для устойчивости однородной системы разностных уравнений (2) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения матрицы A удовлетворяли условиям:

$$1. |\lambda_j| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

2. Корням λ_j , имеющим значения $|\lambda_j| = 1$, должны соответствовать простые элементарные делители.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ - корни характеристического уравнения матрицы A , удовлетворяющие условию $|\lambda_j| < 1$, а ν_j, \dots, ν_ℓ - их кратности; $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_s$ - корни характеристического уравнения матрицы A , удовлетворяющие условию $|\lambda_j| = 1$ и соответствующие простым элементарным делителям.

Тогда общее решение системы уравнений (2) имеет вид

$$x_i[n] = \sum_{j=1}^{\ell} \rho_{ij}[n] \lambda_j^n + \sum_{j=\ell+1}^s \bar{\rho}_{ij} \lambda_j^n \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Здесь $\rho_{ij}[n]$ - многочлен степени не выше $\nu_j - 1$; $\bar{\rho}_{ij}$ - многочлен нулевой степени. При $n \rightarrow \infty$ первая сумма стремится к нулю: $\sum_{j=1}^{\ell} \rho_{ij}[n] \lambda_j^n \rightarrow 0$, а вторая сумма $\sum_{j=\ell+1}^s \bar{\rho}_{ij} \lambda_j^n$ будет ограниченной. Таким образом, любое решение системы (2) будет ограничено и дискретная система будет устойчивой.

Теорема 2. Для асимптотической устойчивости дискретной линейной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения матрицы A удовлетворяли условию $|\lambda_j| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, s$), т.е. располагались внутри единичного круга на плоскости λ .

Доказательство. теоремы следует из доказательства теоремы 1 для разностного уравнения

$$a_0 x[n+k] + \dots + a_k x[n] = b_0 g[n+m] + \dots + b_m g[n] \quad (4)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$z_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0. \quad (5)$$

Условие устойчивости для уравнения (4) следующее: кратные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ характеристического уравнения (5) должны удовлетворять неравенствам $|\lambda_j| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, \ell$), а простые корни $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_s$ - неравенствам $|\lambda_j| \leq 1$ ($j = \ell+1, \dots, s$). Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (5) удовлетворяли неравенствам $|\lambda_j| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, s$).

Таким образом, для устойчивости дискретной САУ, описываемой либо системой разностных уравнений (I), либо разностным урав-

нением k -го порядка (4), необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения удовлетворяли неравенствам $|\lambda_j| < 1$, причем равенство $|\lambda_j| = 1$ допускается только для тех характеристических чисел, для которых степени элементарных делителей равны единице. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $|\lambda_j| < 1$. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости можно выяснить с помощью различных критериев, как алгебраических, так и частотных. Рассмотрим вначале алгебраические критерии.

1.2. Критерий Шура - Кона

Пусть

$$\det(A - \lambda E) = a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = D(\lambda) -$$

характеристический многочлен дискретной системы. Составим последовательность определителей Δ_m порядка $2m$ ($m = 1, 2, \dots, k$):

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & a_k & a_{k-1} & \dots & a_{k-m+1} \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & a_k & \dots & a_{k-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_k \\ \bar{a}_k & 0 & \dots & 0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_{m-1} \\ \bar{a}_{k-1} & \bar{a}_k & \dots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \dots & \bar{a}_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{k-m+1} & \bar{a}_{k-m+2} & \dots & \bar{a}_k & 0 & 0 & \dots & \bar{a}_0 \end{vmatrix}.$$

Если все определители Δ_m ($m = 1, 2, \dots, k$) отличны от нуля, то многочлен $D(\lambda)$ не имеет нулей на единичной окружности и число нулей, расположенных вне единичного круга, равно числу перемен знака в последовательности $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$. Отсюда следует, что все нули многочлена $D(\lambda)$ лежат внутри единичного круга, если выполняются неравенства $\Delta_m > 0$ ($m = 1, 2, \dots, k$).

Если коэффициенты многочлена $D(\lambda)$ вещественны, то

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_{0m} & A_{km} \\ A_{km}^T & A_{0m}^T \end{vmatrix} = |A_{0m} A_{0m}^T - A_{km}^T A_{km}|,$$

где

$$A_{0m} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \quad A_{km} = \begin{bmatrix} a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_{k-m+1} \\ 0 & a_k & a_{k-1} & \dots & a_{k-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}.$$

Пример. Пусть $D(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$.

Вычислим определители Δ_m ($m = 1, 2$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_2^2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & a_2 \\ a_2 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & 0 & a_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} [a_0 & 0] & [a_0 & a_1] \\ [a_1 & a_0] & [0 & a_0] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [a_2 & 0] & [a_2 & a_1] \\ [a_1 & a_2] & [0 & a_2] \end{vmatrix} = (a_0 - a_2)^2 [(a_0 + a_2)^2 - a_1^2].$$

Условие асимптотической устойчивости

$$\Delta_1 > 0, \text{ откуда } a_0^2 > a_2^2 \quad \text{или } |a_0| > |a_2|;$$

$$\Delta_2 > 0, \text{ откуда } a_0 + a_2 - a_1 > 0 \quad \text{и } a_0 + a_2 + a_1 > 0.$$

1.3. Критерий Гурвица

Чтобы определить характер расположения нулей многочлена $D(\lambda)$ на комплексной плоскости, можно воспользоваться критерием Гурвица. Для этого отображим с помощью дробно-линейного преобразования

$$\omega = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad \text{или } \omega = \frac{2}{T} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad (6)$$

внутренность единичного круга плоскости λ на левую полуплоскость плоскости ω (рис. 1). Из формул (6) следует, что

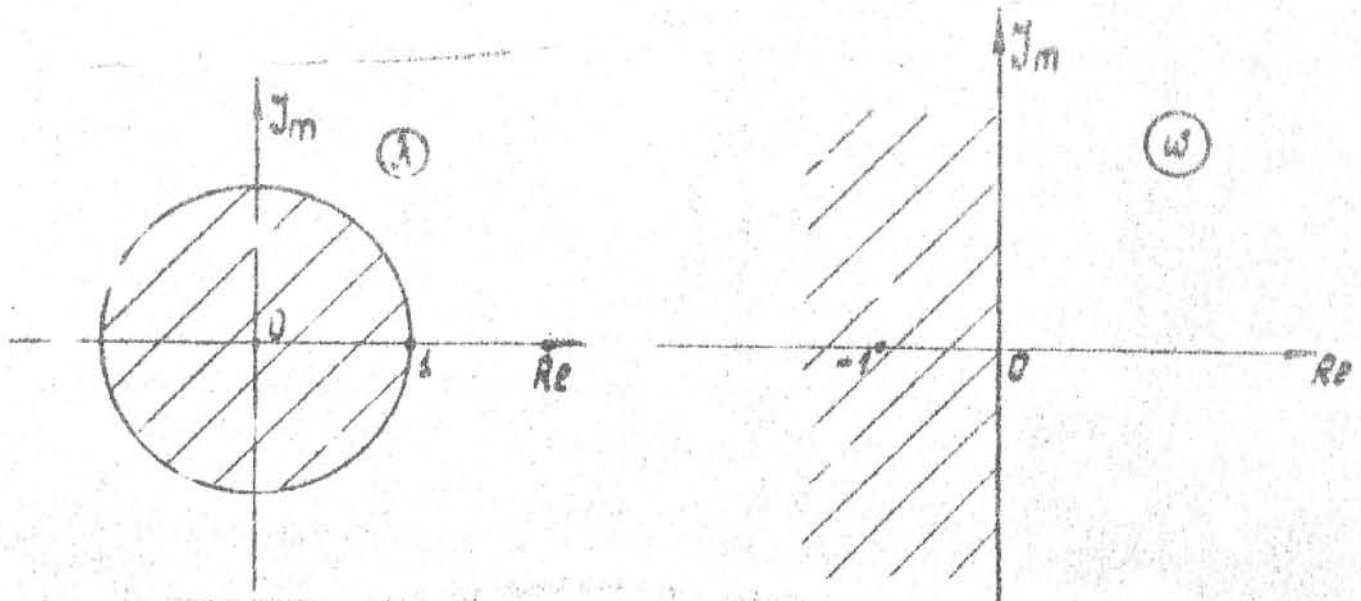
$$\lambda = \frac{\omega + 1}{1 - \omega}, \quad \text{или } \lambda = \frac{1 + \frac{T}{2} \omega}{1 - \frac{T}{2} \omega}.$$

Тогда

$$D_f(w) = D\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \frac{a_0(1+w)^k}{(1-w)^k} + a_1 \frac{(1+w)^{k-1}}{(1-w)^{k-1}} + \dots + a_k =$$

$$\frac{b_0 w^k + b_1 w^{k-1} + \dots + b_k}{(1-w)^k}, \quad \text{или} \quad D_f(w) = a_0 \frac{(1 + \frac{T}{2} w)^k}{(1 - \frac{T}{2} w)^{k-1}}$$

$$+ a_1 \frac{(1 + \frac{T}{2} w)^{k-1}}{(1 - \frac{T}{2} w)^{k-1}} + \dots + a_k = \frac{b'_0 w^k + b'_1 w^{k-1} + \dots + b'_k}{(1 - \frac{T}{2} w)^k}$$



ис. I

Характеристический многочлен $D(\lambda)$ имеет все нули внутри единичного круга, если нули многочлена $D_f(w)$ располагаются в левой полуплоскости. Для определения расположения нулей многочлена $D_f(w)$ воспользуемся критерием Гурвица: чтобы все нули многочлена $D_f(w)$ располагались в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица H были строго положительны. Матрица Гурвица

$$H = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_{k-1} & b_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_k \end{bmatrix}$$

т.е. должны выполняться неравенства

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0, \dots, \Delta_k > 0.$$

Пример: $D(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$;

$$D_j(\omega) = a_0(1+\omega)^2 + a_1(1+\omega)(1-\bar{\omega}) + a_2(1-\bar{\omega})^2 = \\ = (a_0 + a_1 + a_2)\omega^2 + (2a_0 - a_1)\omega + (a_0 + a_1 + a_2) = b_0 \omega^2 + b_1 \omega + b_2.$$

По критерию Гурвица: $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ или $a_0 - a_1 + a_2 > 0$, $a_0 > a_2$, $a_0 + a_1 + a_2 > 0$, что совпадает с результатами, полученными с помощью критерия Шура-Кона.

1.4. Частотные критерии устойчивости

Критерий Михайлова непосредственно следует из принципа приращения аргумента [1]. Пусть функция $f(z)$ однозначна в односвязной области \tilde{D} , ограниченной контуром $\tilde{\ell}$; аналитична в замкнутой области $\bar{\tilde{D}}$, ограниченной контуром $\tilde{\ell}$, за исключением конечного числа полюсов; не обращается в нуль на контуре $\tilde{\ell}$. Тогда приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе вектором z контура $\tilde{\ell}$ определяется равенством

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z) = N - P,$$

где N — число нулей, P — число полюсов функции $f(z)$ с учетом их кратности.

В рассматриваемом случае контур $\tilde{\ell}$ представляет собой единичную окружность, а число полюсов $P = 0$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \arg D(\lambda) \Big|_{\lambda = e^{j\omega}} = N$$

число нулей, расположенных внутри единичного круга; при этом

Имеем $D(e^{j\omega}) = a_0 e^{jk\omega} + a_1 e^{j(k-1)\omega} + \dots + a_k = X(\bar{\omega}) + jY(\bar{\omega})$,

где

$$X(\bar{\omega}) = a_0 \cos k\bar{\omega} + a_1 \cos(k-1)\bar{\omega} + \dots + a_k,$$

$$Y(\bar{\omega}) = a_0 \sin k\bar{\omega} + a_1 \sin(k-1)\bar{\omega} + \dots + a_{k-1} \sin \bar{\omega}.$$

Таким образом, $X(-\bar{\omega}) = X(\bar{\omega})$, $Y(-\bar{\omega}) = -Y(\bar{\omega})$, и годограф $D(j\omega)$ симметричен относительно вещественной оси.

Поэтому его можно строить при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π .

Критерий Михайлова формулируется следующим образом: чтобы многочлен $D(\lambda)$ имел все нули внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы годограф $D(e^{j\bar{\omega}})$ проходил последовательно 2 квадрантов при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π (рис. 2).

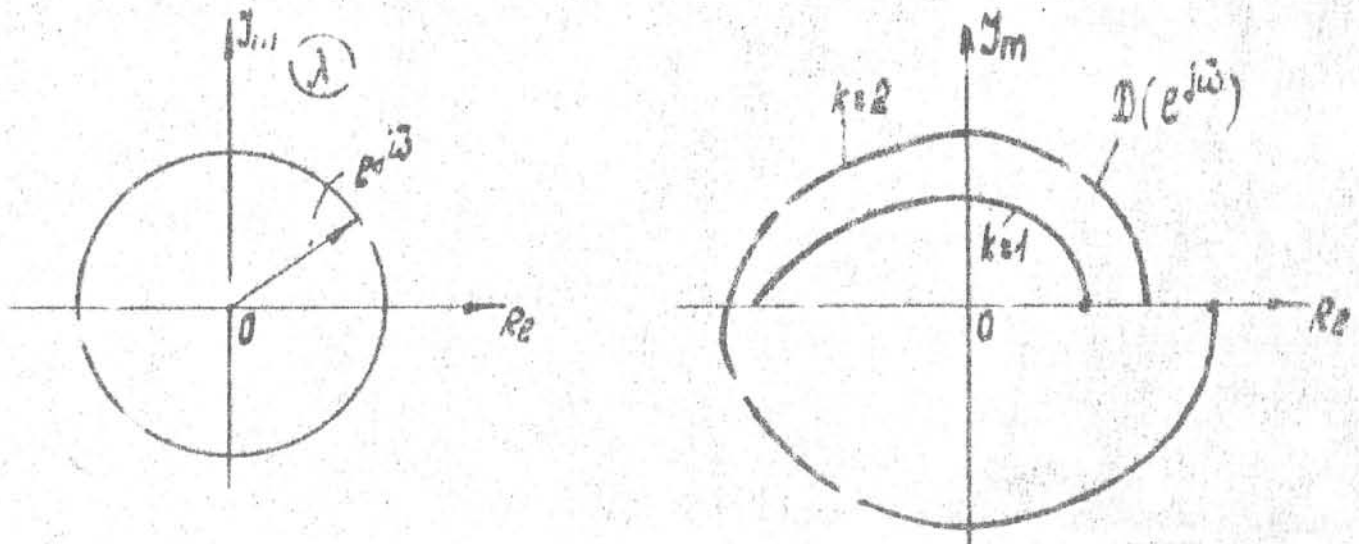


Рис. 2

Критерий Найквиста позволяет исследовать устойчивость замкнутой системы по поведению амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы.

Пусть $W_z^*(z) = \frac{P_1^*(z)}{Q_1^*(z)}$ - передаточная функция

разомкнутой дискретной системы. Здесь степень многочлена

$Q_1^*(z)$ равна k , степень многочлена $P_1^*(z)$ равна m , причем $k > m$. Тогда передаточная функция системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью, при $\varepsilon = 0$,

$$\varphi_z^*(z) = \frac{W_z^*(z)}{1 + W_z^*(z)} = \frac{P_1^*(z)}{Q_1^*(z) + P_1^*(z)}$$

Запишем

$$1 + W_z^*(z) = \frac{Q_1^*(z) + P_1^*(z)}{Q_1^*(z)}$$

Выражение $1 + W_z^*(z)$ представляет собой дробь, числитель ко-

торой есть характеристический многочлен замкнутой системы, а знаменатель — характеристический многочлен разомкнутой.

Имеем

$$\Delta \arg [1 + W_z^*(e^{j\bar{\omega}})] = \Delta \arg [Q_1^*(e^{j\bar{\omega}}) + P_1^*(e^{j\bar{\omega}})] - \Delta \arg Q_1^*(e^{j\bar{\omega}}) \quad (7)$$

$-\mathcal{F} < \bar{\omega} \leq \mathcal{F}$

Пусть многочлен $Q_1^*(z)$ содержит ρ нулей вне единичного круга. Тогда, согласно принципу приращения аргумента,

$$\Delta \arg Q_1^*(e^{j\bar{\omega}}) = 2\mathcal{F}(k - \rho) \quad (8)$$

$-\mathcal{F} < \bar{\omega} \leq \mathcal{F}$

Для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы все нули характеристического многочлена $Q_1^*(z) + P_1^*(z)$ лежали внутри единичного круга, т.е.

$$\Delta \arg [Q_1^*(e^{j\bar{\omega}}) + P_1^*(e^{j\bar{\omega}})] = 2\mathcal{F} \quad (9)$$

$-\mathcal{F} < \bar{\omega} \leq \mathcal{F}$

Из формул (7), (8) и (9) следует, что

$$\Delta \arg [1 + W_z^*(e^{j\bar{\omega}})] = 2\mathcal{F}\rho \quad (10)$$

$-\mathcal{F} < \bar{\omega} \leq \mathcal{F}$

Учитывая, что $U^*(-\bar{\omega}) = U^*(\bar{\omega})$, а

$V^*(\bar{\omega}) = -V^*(-\bar{\omega})$, где $U(\omega) = \operatorname{Re} W_z^*(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$,
 $V^*(\bar{\omega}) = \operatorname{Im} W_z^*(z) \Big|_{z=e^{j\bar{\omega}}}$, формулу (10) можно записать в виде

$$\Delta \arg [1 + W_z^*(e^{j\bar{\omega}})] = \mathcal{F}\rho \quad (11)$$

$0 \leq \bar{\omega} \leq \mathcal{F}$

Таким образом, для устойчивости замкнутой дискретной САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики $W^*(j\bar{\omega})$ охватывал точку $(-1, 0)$ $\rho/2$ раз при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до \mathcal{F} , где ρ — число полюсов передаточной функции $W_z^*(z)$, расположенных вне единичного круга. Если $\rho = 0$, то годограф $W^*(j\bar{\omega})$ не должен охватывать точку $(-1, 0)$.

Рассмотрим частный случай, когда передаточная функция $W_z^*(z)$ имеет полюс $z = 1$ кратности ν . Запишем $W_z^*(z)$ в виде $W_z^*(z) = \frac{W_0^*(z)}{(z-1)^\nu}$, где

$W_0^*(1) \neq 0$ и полагаем $\lambda = 1 + \gamma e^{j\varphi}$, здесь $\gamma > 0$ — малая величина, а $0 < \varphi \leq \pi/2$. Тогда $W_z^*(\lambda) = \frac{W_0^*(1 + \gamma e^{j\varphi})}{\gamma^{m-1} e^{j\varphi}}$ и при изменении φ от 0 до $\pi/2$ годограф $W_z^*(1 + \gamma e^{j\varphi})$ опишет дугу размера $\pi/2$ радиуса $1/\gamma^m$ в отрицательном направлении (рис. 3).

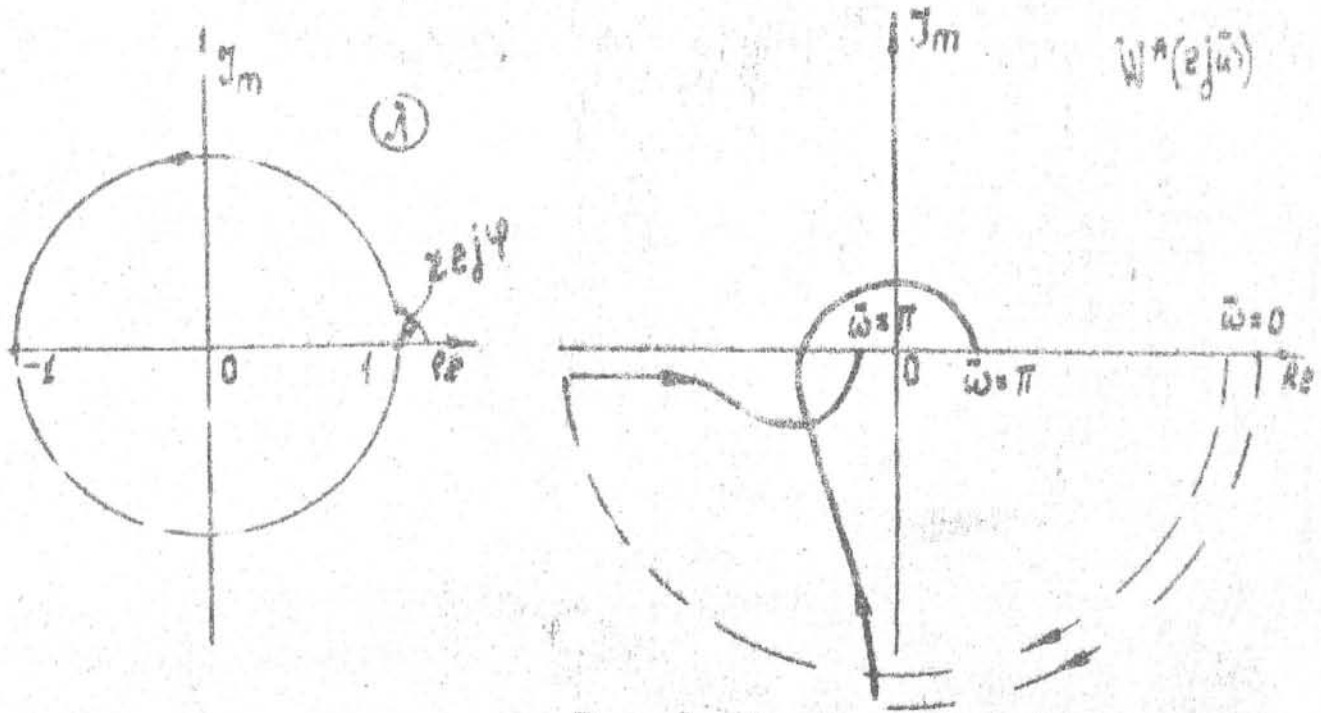


Рис. 3

2. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ В ТЕОРИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Совокупность переменных $x_i[n]$, полностью характеризующих состояние дискретной САУ и при заданном векторе входа $u[n] = \{u_1[n], \dots, u_r[n]\}$ однозначно описывающих ее поведение, называется вектором состояния $x[n] = \{x_1[n], x_2[n], \dots, x_n[n]\}$. В общем случае уравнения состояния имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= f(x[n], u[n]), \\ y[n] &= g(x[n], u[n]), \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где $y[n]$ — m -мерный вектор выхода; f и g — непрерывные однозначные функции своих аргументов.

Если дискретная система линейна и стационарна, то уравнения состояния записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где A - матрица системы размера $(k \times k)$;

B - матрица входа размера $(k \times r)$;

C - матрица выхода размера $(m \times k)$.

Структурная схема системы показана на рис. 4.

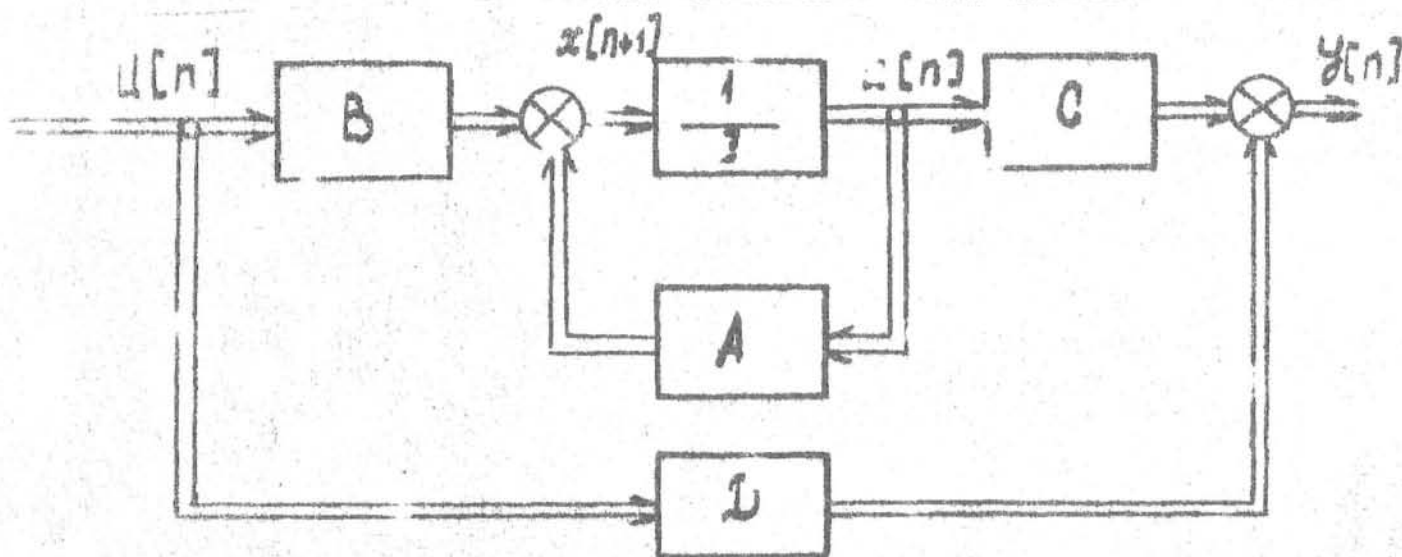


Рис. 4

Выбор переменных состояния может производиться различными способами.

2.1. Определение уравнений состояния с помощью схемы моделирования

Пусть дискретная СЛУ описывается разностным уравнением

$$x[n+k] + a_1 x[n+k-1] + \dots + a_k x[n] = b_0 u[n+\tau] + \dots + b_r u[n], \quad (3)$$

причем $\tau < k$.

Перейдем от уравнения (3) к системе разностных уравнений, обозначив

$$\begin{aligned} x[n+\ell] &= y_{\ell+1}^{(k)}[n] \quad (\ell = 0, 1, \dots, k-\tau-1), \\ x[n+\ell] &= y_{\ell+1}^{(k)}[n] + \sum_{m=0}^{\ell-(k-\tau)} \beta_{\ell-m} u[n+m] \\ &\quad (\ell = k-\tau, \dots, k-1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} y_{\ell} [n+1] &= y_{\ell+1} [n] \quad (\ell = 1, 2, \dots, k - \nu - 1), \\ y [n+1] &= y_{k-\nu} [n] + \beta_{\ell} u [n] \quad (\ell = k - \nu, \dots, k - 1). \end{aligned} \right\} (4)$$

Найдем $y_{\ell} [n+1]$. Имеем

$$x [n+k] = y_{\ell} [n+1] + \sum_{m=0}^{\nu-1} \beta_{k-m-1} u [n+1+m],$$

или, полагая $m+1 = \rho$

$$x [n+k] = y_{\ell} [n+1] + \sum_{\rho=1}^{\nu} \beta_{k-\rho} u [n+\rho], \quad (5)$$

из уравнения (3) получим

$$x [n+k] = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} x [n+\ell] + \sum_{m=0}^{\nu} b_{\nu-m} u [n+m].$$

Подставим $x [n+k]$ в равенство (5), тогда

$$y_{\ell} [n+1] - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} x [n+\ell] + \sum_{m=0}^{\nu} b_{\nu-m} u [n+m] - \sum_{m=1}^{\nu} \beta_{k-m} u [n+m]; \quad (6)$$

или, учитывая выражения для $x [n+\ell]$,

$$y_{\ell} [n+1] = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} y_{\ell+1} [n] - \sum_{\ell=k-\nu}^{k-1} a_{k-\ell} \sum_{m=0}^{\ell-k+\nu} \beta_{\ell-m} u [n+m] + \sum_{m=0}^{\nu} b_{\nu-m} u [n+m] - \sum_{\rho=1}^{\nu} \beta_{k-\rho} u [n+\rho]. \quad (7)$$

Выберем величины β_{k-m} ($m = 1, 2, \dots, \nu$) таким образом, чтобы в уравнении (7) коэффициенты при $u [n+1], \dots, u [n+\nu]$ обратились в нуль. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \beta_{k-\nu} &= b_0; \quad k-1; \\ \beta_{k-m} &= b_{\nu-m} - \sum_{\ell=k-\nu+m}^{k-1} a_{k-\ell} \beta_{\ell-m} \quad (m = 1, 2, \dots, \nu-1). \end{aligned} \right\} (8)$$

С учетом равенств (8) уравнение (7) принимает вид

$$y_{\ell} [n+1] = - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{k-\ell} y_{\ell+1} [n] + \beta_k u [n], \quad (9)$$

где
$$f_k = b_\tau - \sum_{l=k-\tau}^{k-1} c_{k-l} \beta_l \quad (10)$$

Систему уравнений (4), (9) можно записать в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} y[n+1] &= A y[n] + B u[n], \\ z[n] &= C y[n] + D u[n], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} c & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_{k-1} & \dots & a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ \beta_{k-\tau} \\ \beta_k \end{bmatrix};$$

$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$; $D = \beta_0 = b_0$, если $k = \tau$; $D = 0$, если $k > \tau$. Структурная схема моделирования приведена на рис. 5.

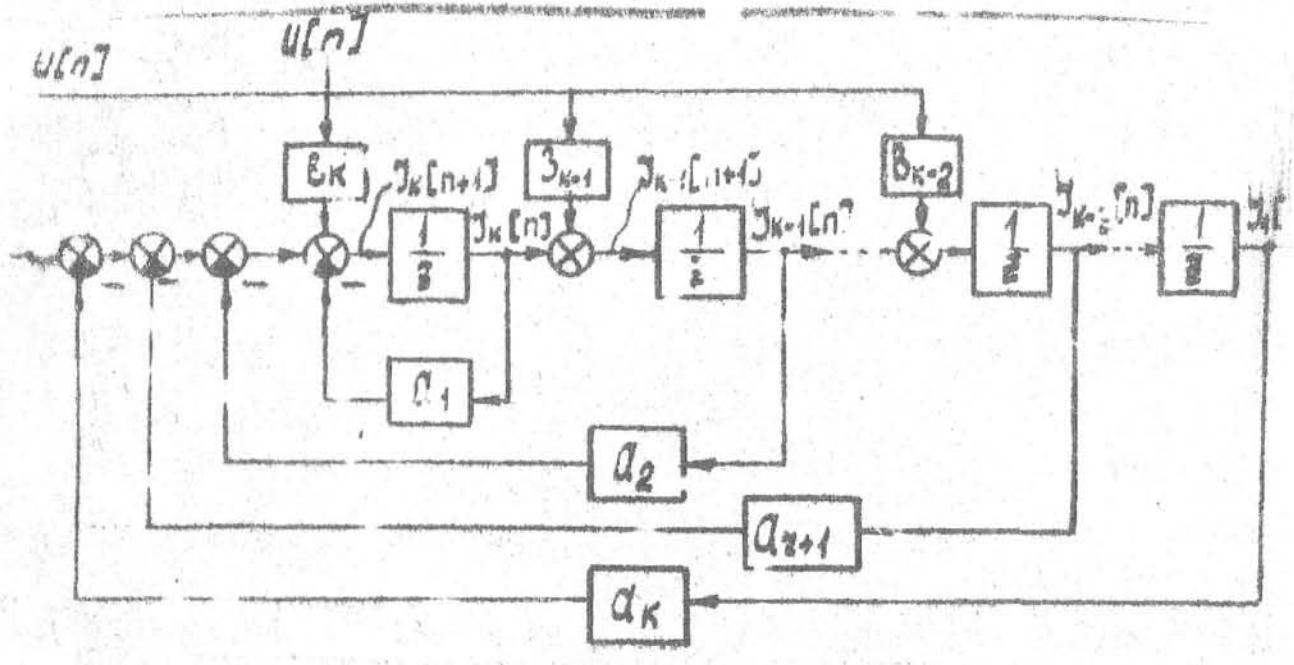


Рис. 5

2.2. Определение уравнений состояния по передаточной функции

Пусть передаточная функция дискретной системы имеет вид

$$W^*(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \text{причем степень } Q(z) \text{ равна } k, \text{ степень } P(z) \text{ равна } \tau \text{ и } k > \tau.$$

на k , степень $P(z)$ равна τ и $k > \tau$.

Рассмотрим вначале случай, когда корни z_i ($i = 1, 2, \dots, k$) характеристического уравнения $Q(z) = 0$ простые. Тогда

$$W^*(z) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{z - z_i}, \quad \text{где } c_i = \lim_{z \rightarrow z_i} W^*(z)(z - z_i)$$

($i = 1, 2, \dots, k$). Входное воздействие обозначим $u[n]$, выходную величину системы — $y[n]$, тогда

$$Y^*(z) = \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{z - z_i} U^*(z), \quad (12)$$

где $U^*(z) = Z\{u[n]\}$, $Y^*(z) = Z\{y[n]\}$.

Из формулы (12) следует, что $y[n] = \sum_{i=1}^k c_i x_i[n]$, где переменные $x_i[n]$ удовлетворяют системе разностных уравнений

$$x_i[n+1] = z_i x_i[n], \quad u[n] \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (13)$$

или в векторном виде

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_k \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

Если $k = \nu$, то $W^*(z) = k_0 + W_1^*(z)$, где $k_0 = b_0/a_0$ и уравнения (14) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $D = k_0 = b_0/a_0$.

Структурная схема показана на рис. 6. Если характеристическое уравнение $Q(z) = 0$ имеет корни z_1, \dots, z_r кратности ν_1, \dots, ν_r ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = k$), то уравнения состояния будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Jx[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n], \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \gamma_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \gamma_l \end{bmatrix} - \text{жорданова матрица,}$$

причем

$$y_l = \begin{bmatrix} z_l & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_l & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & z_l \end{bmatrix} - \text{размер } (\gamma_l \times \nu_l); \quad l = 1, 2, \dots, l;$$

$$C^T = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1\nu_1} \\ \vdots \\ c_{l\nu_l} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{\nu_1} z_1$$

- все элементы равны нулю, кроме $b_{\nu_1} = 1, b_{\nu_1 + \nu_2} = 1, \dots, b_k = 1;$

$$c_{lm} = \lim_{z \rightarrow z_l} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [W(z)(z-z_l)^m] \quad (l=1, 2, \dots, l; m=1, 2, \dots, \nu_l).$$

Структурная схема системы приведена на рис. 7.

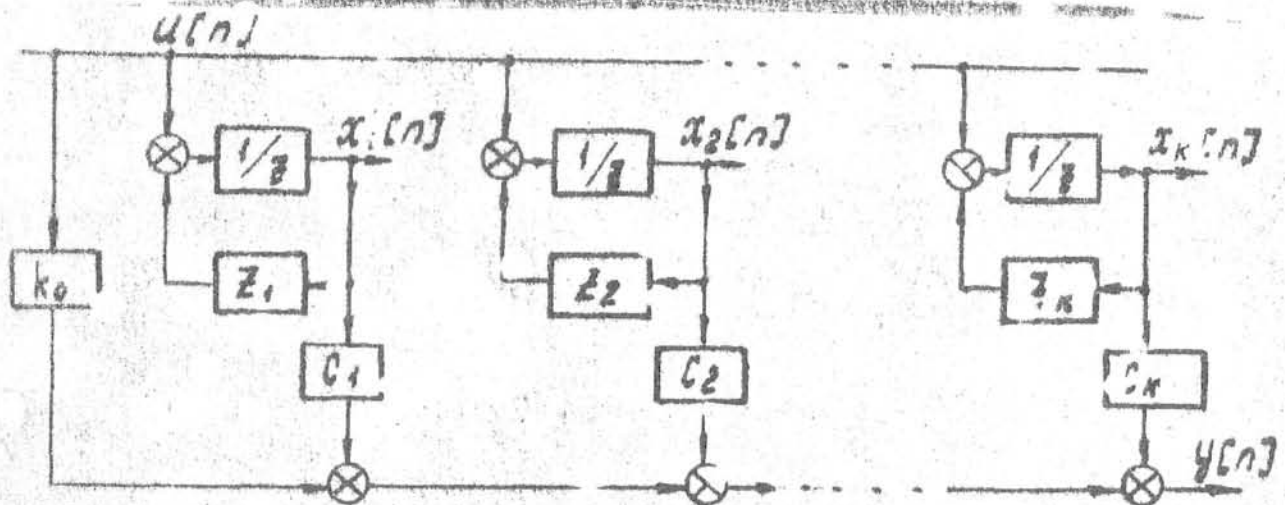


Рис. 6.

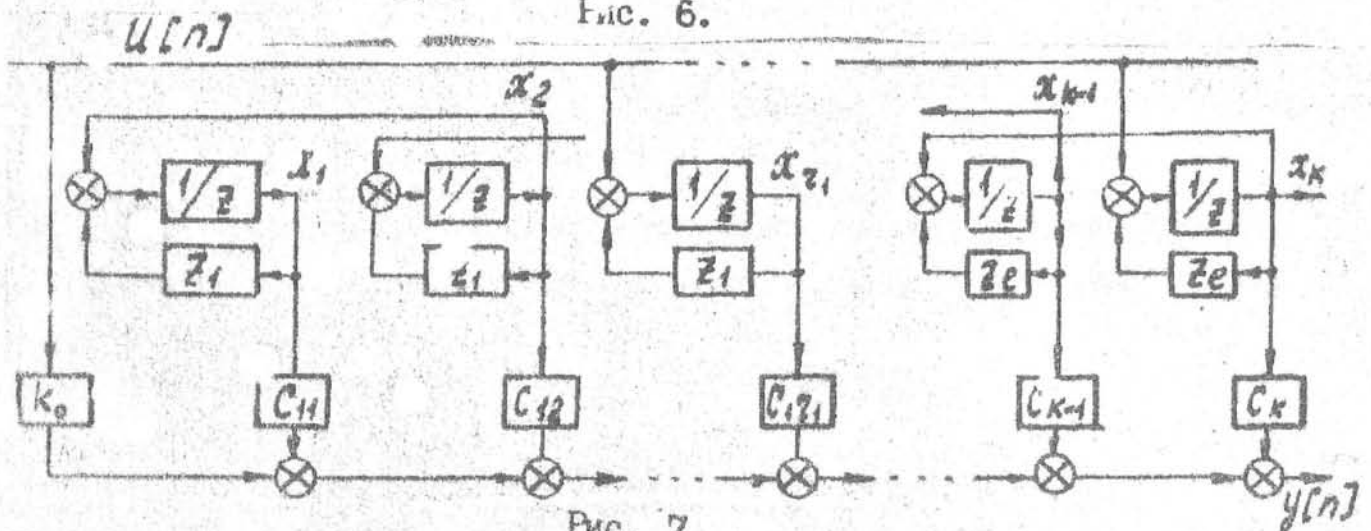


Рис. 7.

2.3. Определение уравнений состояния по матричной передаточной функции

Пусть матричная передаточная функция дискретной системы имеет вид

$$W^*(z) = \begin{bmatrix} W_{11}^*(z) & \dots & W_{1r}^*(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ W_{m1}^*(z) & \dots & W_{mr}^*(z) \end{bmatrix} = \frac{Y^*(z)}{U^*(z)}$$

Тогда $Y^*(z) = W^*(z) \cdot U^*(z)$, или

$$Y_c^*(z) = \sum_{j=1}^r W_{cj}^*(z) U_j^*(z). \quad (17)$$

По отношению к равенству (17) применяется вышележащая последовательность действий, т.е. $W_{cj}^*(z)$ представляется в виде суммы элементарных слагаемых, записывается $Y_c^*(z)$ в виде (12) и т.д.

2.4. Управляемость и наблюдаемость дискретных систем

Объект, описываемый уравнением

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n], \quad (18)$$

называется полностью управляемым, если произвольное начальное состояние $x[0]$ может быть переведено в начало координат за конечное время.

Нестационарный объект, описываемый уравнением

$$x[n+1] = A[n]x[n] + B[n]u[n], \quad (19)$$

называется полностью управляемым, если для произвольного n_0 существует последовательность управлений $u[n]$ $n = n_0, \dots, N-1$, которая переводит начальное состояние $x[n_0]$ в заданное $x[N]$; число $N \geq n_0$ конечно.

Теорема 3. Дискретная система, описываемая уравнением (19), будет полностью управляемой, если

$$\text{rang } Q = \text{rang } [Q_{n_0} \ Q_{n_0+1} \ \dots \ Q_{N-1}] = k,$$

где $Q_m = X[N, m+1] B[m]$ ($m = n_0, n_0+1, \dots, N-1$).

Доказательство. По формуле Коши имеем

$$x[n] = X[n, n_0] x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} X[n, m+1] B[m] u[m].$$

Тогда

$$x[N] = X[N, n_0] x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{N-1} X[N, m+1] B[m] u[m],$$

или

$$x[N] - X[N, n_0] x[n_0] = \sum_{m=n_0}^{N-1} X[N, m+1] B[m] u[m]. \quad (20)$$

Здесь $X[r, n_0]$ — фундаментальная матрица однородной системы

$$x[n+1] = A[n] x[n],$$

$$X[r, n_0] = \prod_{i=0}^{r-n_0-1} A[i+n_0], \text{ причем } X[n_0, n_0] = E.$$

Задав $x[N]$ и $x[n_0]$, из (20) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $u[n_0], \dots, u[N-1]$.

$$\tilde{X}[N, n_0] u[n_0] + \dots + Q_{N-1} u[N-1] = \tilde{X}[N, n_0] x[n_0] - X[N, n_0] x[N]. \quad (21)$$

Система (21) должна иметь решение при любой левой части

$$\tilde{X}[N, n_0] x[n_0] - X[N, n_0] x[N].$$

Для этого требуется, чтобы ранг основной матрицы системы — матрицы Q — равнялся k . Размер расширенной матрицы будет $(k \times (N - n_0 + 1))$, и в ней имеется минор k -го порядка, отличный от нуля. Поэтому ее ранг совпадает с рангом матрицы Q и система (21) имеет единственное решение.

Теорема 4. Чтобы дискретная система (18) была полностью управляемой необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang } Q = \text{rang } [C | AB | \dots | A^{k-1} B] = k,$$

где Q — матрица управляемости объекта.

Доказательство. Для стационарных систем

$$Q_m = A^{N-m+1} B \quad (m = n_0, \dots, N-1).$$

Тогда из теоремы 3 следует следующее необходимое и достаточное условие полной управляемости:

$$\text{rang } [B | AB | \dots | A^{N-n_0-1} B] = k.$$

Но в силу теоремы Кэли - Гамильтона

$$\text{rang} [B \ AB \ \dots \ A^{N-n_0-1} B] = \text{rang} [B \ AB \ \dots \ A^{k-1} B],$$

что и доказывает теорему. Если матрица A приводится к диагональному виду, то выполнив невырожденное преобразование

$$x = T \xi, \quad (21)$$

получим

$$\xi [n+1] = T^{-1} A T \xi [n] + T^{-1} B [n], \quad (22)$$

где

$$T^{-1} A T = \text{diag} \bar{A}.$$

Необходимое и достаточное условие полной управляемости: матрица $T^{-1} B$ не имеет нулевых строк. В общем случае, если \bar{A} - жорданова форма матрицы A , то в матрице $T^{-1} B$ не должны быть нулевыми строки с номерами $\chi_1, \chi_1 + \chi_2, \dots, k$, где χ_1, χ_2, \dots - степени элементарных делителей $(\lambda - \lambda_1), \dots, (\lambda - \lambda_s)$ матрицы $A - \lambda E$.

Система

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= A[n]x[n] + B[n]u[n], \\ y[n] &= C[n]x[n] + D[n]u[n] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

называется полностью наблюдаемой, если для некоторого n_0 состояние $x[n_0]$ может быть определено по известным выходной $y[n]$ и входной $u[n]$ переменным для $n_0 \leq n \leq N$, где N - конечное время.

Теорема 5. Для того чтобы система (24) была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$L [n_0, N-1] = [R_{n_0} \ R_{n_0+1} \ \dots \ R_{N-1}]$$

имела ранг k .

Здесь $R_m = X^T [m, n_0] C^T [m]$ ($m = n_0, \dots, N-1$).

Доказательство. По формуле Коши

$$x[n] = X [n, n_0] x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} X [n, m+1] B [m] u [m].$$

Тогда

$$y[n] = C [n] X [n, n_0] x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} C [n] X [n, m+1] B [m] u [m] + D [n] u [n]. \quad (25)$$

Запишем равенство (25) при $n = n_0, n_0+1, \dots, N-1$. Будем иметь:

$$y[n_0] = C[n_0]x[n_0] + D[n_0]u[n_0], \quad (26)$$

$$y[n_0+1] = C[n_0+1]X[n_0+1, n_0]x[n_0] + C[n_0+1]B[n_0]u[n_0] + D[n_0+1]u[n_0+1],$$

$$y[N-1] = C[N-1]X[N-1, n_0]x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{N-2} C[N-1]X[N-1, m+1]B[m]u[m] + D[N-1]u[N-1].$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно $x[n_0]$. Матрица системы

$$\begin{bmatrix} C[n_0] \\ C[n_0+1]X[n_0+1, n_0] \\ \vdots \\ C[N-1]X[N-1, n_0] \end{bmatrix} = L^T.$$

Эта матрица должна иметь ранг k для того, чтобы система (26) имела единственное решение при любом выборе переменных $y[i]$ и $u[i]$. Тогда матрица

$$L = \left\{ C^T[n_0], X^T[n_0+1, n_0]C^T[n_0+1], \dots, X^T[N-1, n_0]C^T[N-1] \right\}$$

также должна иметь ранг k .

Здесь $X[m, n_0] = A[n_0] \dots A[m],$
 $X^T[m, n_0] = A^T[n_0] \dots A^T[m-1].$

Условия полной наблюдаемости стационарной системы

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

определяет следующая теорема.

теорема 6. Для того чтобы система (27) была полностью наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rang } L_N = \text{rang} \left[C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{k-1} C^T \right] = k.$$

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $L = \left\{ C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{N-1} C^T \right\}$. Но в силу теоремы Кэли - Гамильтона

$$\text{rang } L = \text{rang} \left\{ C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{k-1} C^T \right\} = \text{rang } L_N,$$

что и доказывает теорему.

Пусть матрица A приводится к диагональному виду с помощью преобразования $x = T\xi$, и системе (27) пригимаем вид

$$\left. \begin{aligned} \xi[n+1] &= T^{-1}AT\xi[n] + T^{-1}Bu[n], \\ y[n] &= C^T\xi[n] + Du[n], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где $T^{-1}AT = \text{diag } A$: система (28) будет полностью наблюдаемой, если матрица CT не содержит нулевых столбцов.

Если матрица A приведена к жордановой форме, то условие полной наблюдаемости формулируется следующим образом:

- 1) каждая клетка Жордана соответствует различным собственным значениям матрицы A ;
- 2) все столбцы матрицы CT , которые соответствуют первым столбцам каждой клетки Жордана, ненулевые.

Примеры. I. Исследовать управляемость системы

$$\left. \begin{aligned} x_1[n+1] &= ax_1[n] + b_1u[n], \\ x_2[n+1] &= ax_2[n] + b_2u[n]. \end{aligned} \right\}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$AC = \begin{bmatrix} a & b_1 \\ a & b_2 \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\text{rang } C = \text{rang } [BAB] = \text{rang } \begin{bmatrix} b_1 & ab_1 \\ b_2 & ab_2 \end{bmatrix} = 1.$$

Система не является полностью управляемой.

2. Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$y[n+2] + 2y[n+1] + y[n] = u[n+1] + u[n]. \quad (29)$$

Перейдем к уравнениям состояния, полагая

$$y[\cdot] = x_1[n], \quad y[n+1] = x_2[n] + \beta_1u[n].$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1[n+1] &= x_2[n] + \beta_1u[n], \\ x_2[n+1] &= -x_1[n] - 2x_2[n] + \beta_2u[n] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Здесь $\beta_1 = I$, $\beta_2 = -I$.

Тогда $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \ 0]$;

$$\text{rang}[BAB] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1; \quad A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{rang}[C^T A^* C^T] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

Система (30) будет л.б. одамой, но не полностью управляемой. Запишем в другом уравнения состояния. Имеем

$$A(z)Y = B(z)U; \quad A(z) = z^2 + 2z + 1; \quad B(z) = z + 1$$

или $\frac{Y}{B(z)} = \frac{U}{A(z)} = X$. Тогда

$$A(z) \cdot X = U; \quad E(z) \cdot X = Y.$$

$$\left. \begin{aligned} x_1[n+1] &= x_2[n] \\ x_2[n+1] &= x_1[n] - 2x_2[n] + u[n], \\ x_1[n] + x_2[n] &= y[n] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 1]$;

$$\text{rang}[BAB] = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2; \quad \text{rang}[C^T A^T C^T] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1.$$

Система (31) управляемая, но ненаблюдаема.

Дуальность управляемости и наблюдаемости. Рассмотрим дискретную систему

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] + Du[n], \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где $u[n]$ - r -мерный вход; $y[n]$ - m -мерный выход, а также систему

$$\left. \begin{aligned} \xi[n+1] &= A^* \xi[n] + C^T V[n], \\ \eta[n] &= B^T \xi[n] + D^T V[n], \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где

$V[n]$ - n -мерный вход; $\eta[n]$ - r -мерный выход.

Условие полной управляемости системы (32)

$$\text{rang}[B \mid AB \mid \dots \mid A^{k-1} B] = k;$$

условие полной наблюдаемости системы (33)

$$\text{rang}[B^T \mid A^{*T} B^T \mid \dots \mid (A^{*T})^{k-1} B^T] = k.$$

Если $A^* = A^T$, то полная управляемость системы (32) соответствует полной наблюдаемости системы (33).

Аналогично условию полной наблюдаемости системы (32)

$$\text{rang} [C^T A^T C^T \dots (A^T)^{k-1} C^T] = k;$$

условие полной управляемости систем (33)

$$\text{rang} [C^* A^* C^* \dots (A^*)^{k-1} C^*] = k.$$

Если $A^* = A^T$, то полная наблюдаемость системы (32) соответствует полной управляемости системы (33).

Понятие об идентификации. Идентификацией состояния называется определение состояния $x[n]$ по известным значениям управления $u[m]$ и выхода $y[m]$ для $n_0 \leq m \leq n$.

Условие идентифицируемости состояния совпадает с условием наблюдаемости, так как определив $x[n_0]$, можно определить $x[n]$:

$$x[n] = X[n, n_0] x[n_0] + \sum_{m=n_0}^{n-1} X[n, m] B[m] u[m].$$

2.5. Синтез дискретных систем

Г. заданному расположению характеристических чисел

Система уравнений

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n]$$

называется приведенной к каноническому виду, если матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь числа a_1, a_2, \dots, a_k представляют собой коэффициенты характеристического многочлена

$$\det [\lambda E - A] = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k.$$

Теорема 7. Пусть система

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n],$$

где $u[n]$ - скалярная величина, полностью управляема. Тогда

существует невырожденное преобразование переменных

$$x[n] = Ty[n],$$

и система

$$y[n+1] = T^{-1}ATy[n] + T^{-1}Bu[n]$$

имеет канонический вид, т.е.

$$T^{-1}AT = A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ \vdots \\ d \end{bmatrix}$$

Доказательство. образуем матрицу

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1 A \\ \vdots \\ T_1 A^{k-1} \end{bmatrix}, \quad \text{где } T_1 = \begin{bmatrix} 1 \times k & & & & \\ & k \times k & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A^{k-1} B \end{bmatrix}^{-1}$$

По условию $\det [B, AB, \dots, A^{k-1}B] = \det G \neq 0$,

и матрица T_1 существует.

Имеем:

$$y_1[n] = T_1 x[n], \quad y_2[n] = T_1 A x[n], \dots, \quad y_k[n] = T_1 A^{k-1} x[n].$$

$$y_1[n+1] = T_1 A x[n] + T_1 B u[n] = y_2[n] + T_1 B u[n];$$

$$y_2[n+1] = T_1 A^2 x[n] + T_1 A B u[n] = y_3[n] + T_1 A B u[n],$$

$$\dots$$

$$y_{k-1}[n+1] = T_1 A^{k-2} x[n+1] = T_1 A^{k-1} x[n] + T_1 A^{k-2} B u[n] = y_k[n] + T_1 A^{k-2} B u[n]$$

$$y_k[n+1] = T_1 A^{k-1} x[n+1] = T_1 A^k x[n] + T_1 A^{k-1} B u[n].$$

Но матрица A удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$A^k = -a_1 A^{k-1} - a_2 A^{k-2} - \dots - a_k E \quad \text{и}$$

$$T_1 A^k = -a_1 T_1 A^{k-1} - a_2 T_1 A^{k-2} - \dots - a_k T_1.$$

Тогда $T_1 A^k x[n] = -a_1 T_1 A^{k-1} x[n] - a_2 T_1 A^{k-2} x[n] - \dots - a_k T_1 x[n] =$

$$= -a_1 y_k[n] - \dots - a_k y_1[n].$$

Отсюда

$$y[n+1] = A_1 y[n] + \begin{bmatrix} T_1 B \\ T_2 AB \\ \vdots \\ T_k A^{k-1} B \end{bmatrix} u[n], \quad \text{где } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Но

$$\begin{bmatrix} T_1 B \\ T_2 AB \\ \vdots \\ T_k A^{k-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T T_1^T \\ (AB)^T T_2^T \\ \vdots \\ (A^{k-1} B)^T T_k^T \end{bmatrix} = S^T T_1^T = S^T (S^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Окончательно

$$y[n+1] = A_1 y[n] + B_1 u[n], \quad \text{где } B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Поставим задачу выбора такого вектора K , чтобы с помощью обратной связи по состоянию $u[n] = -Kx[n]$ можно было получить заранее заданный характеристический многочлен замкнутой системы

$$D_3(\lambda) = \lambda^k + \alpha_1 \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_k$$

Пусть изменение состояния в канонической форме имеет вид

$$x[n+1] = A_1 x[n] + B_1 u[n]$$

Составим характеристический многочлен замкнутой системы

$$x[n+1] = A_1 x[n] - B_1 K x[n] = (A_1 - B_1 K) x[n]$$

Имеем

$$\det(\lambda I - A_1 + B_1 K) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ \alpha_k + k_1 & \alpha_{k-1} + k_2 & \alpha_{k-2} + k_3 & \dots & \alpha_2 + k_{k-1} & \lambda + \alpha_1 + k_k \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^k + (\alpha_1 + k_k) \lambda^{k-1} + \dots + (\alpha_{k-1} + k_2) \lambda + \alpha_k + k_1 = D_3(\lambda)$$

Откуда $\alpha_1 + k_k = \alpha_1, \dots, \alpha_k + k_1 = \alpha_k$.

Из этих соотношений определяются коэффициенты обратных связей:

$$k_1 = \alpha_k - a_k, \quad k_2 = \alpha_{k-1} - a_{k-1}, \dots, \quad k_k = \alpha_1 - a_1$$

2.6. Синтез наблюдающего устройства состояния полного порядка

Уравнение дискретного объекта

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Вектор $\hat{x}[n]$ будет оценкой вектора $x[n]$, если ошибка оценивания $e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.
 Уравнение ошибки

$$e[n+1] = (A - LC)e[n],$$

причем можно выбрать матрицу L таким образом, чтобы характеристические числа матрицы $A - LC$ совпадали с заранее выбранными.

Уравнение наблюдения эля имеет вид

$$\hat{x}[n+1] = A\hat{x}[n] + L(y[n] - C\hat{x}[n]) + B u[n]. \quad (35)$$

Если замкнуть систему (34), (35) отрицательной обратной связью

$$u = -K\hat{x},$$

то уравнение замкнутой системы с наблюдающим устройством будет таким:

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] + Bu[n], \\ y[n] &= Cx[n], \\ u[n] &= -K\hat{x}[n], \\ \hat{x}[n+1] &= A\hat{x}[n] + L(y[n] - C\hat{x}[n]) + B u[n] \end{aligned} \right\} (36)$$

Структурная схема замкнутой системы с наблюдающим устройством показана на рис. 8.

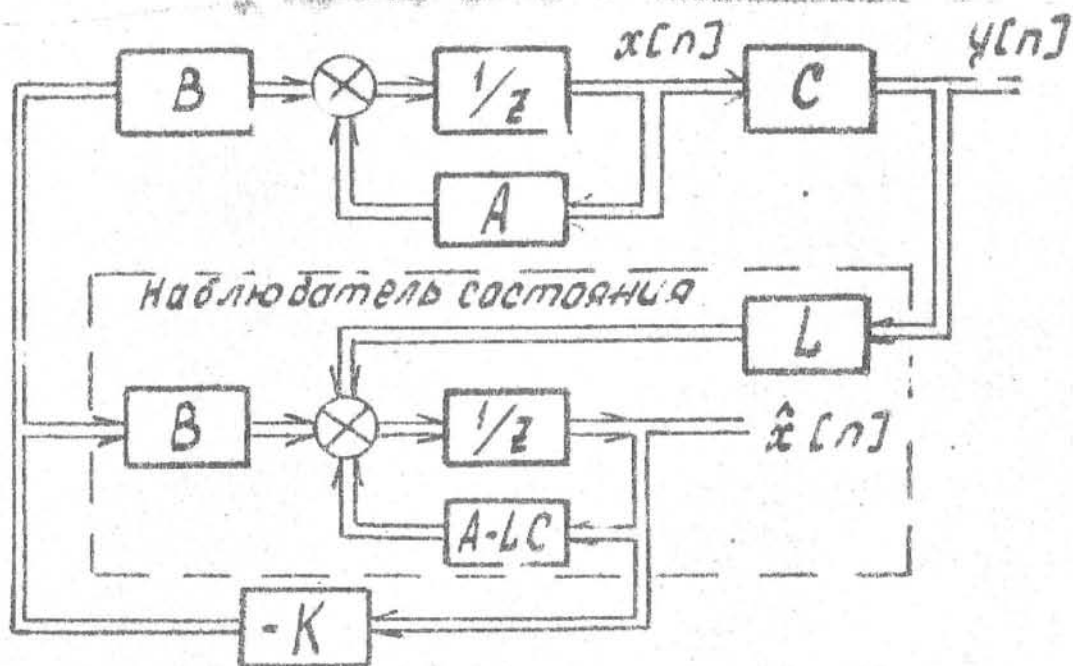


Рис. 8

Найдем характеристический многочлен системы уравнений (36). Исключив переменные $x[n]$ и $y[n]$ из системы (36), получим

$$\left. \begin{aligned} x[n+1] &= Ax[n] - BK\hat{x}[n], \\ \hat{x}[n+1] &= LCx[n] + (A - LC - BK)\hat{x}[n]. \end{aligned} \right\} (37)$$

Матрица системы уравнений (37)

$$M = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - M) &= \det \begin{bmatrix} \lambda E - A & BK \\ -LC & \lambda E - A + LC + BK \end{bmatrix} = \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda E - A & \lambda E - A + BK \\ -LC & \lambda E - A + BK \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda E - A + LC & 0 \\ -LC & \lambda E - A + BK \end{bmatrix} = \\ &= \det[\lambda E - A + LC] \cdot \det[\lambda E - A + BK]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен матрицы M системы (37) равен приведению характеристических многочленов матрицы $A - LC$ уравнения ошибки и матрицы $A - BK$ замкнутой системы.

2.7. Синтез редуцированного наблюдающего устройства состояния

Допустим, что в уравнениях состояния (34) можно представить вектор состояния $x[n] = \begin{bmatrix} \xi[n] \\ \eta[n] \end{bmatrix}$, причем вектор $\xi[n]$ измеряется. Тогда уравнение (34) можно записать в виде

$$\xi[n+1] = A_{11}\xi[n] + A_{12}\eta[n] + B_1u[n],$$

$$\eta[n+1] = A_{21}\xi[n] + A_{22}\eta[n] + B_2u[n].$$

Рассмотрим задачу синтеза наблюдающего устройства для оценки вектора $\eta[n]$. Пусть вектор $\hat{\eta}[n]$ является оценкой вектора $\eta[n]$.

Уравнение для оценки $\hat{\eta}[n]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\eta}[n+1] &= (A_{22} - LA_{12})\hat{\eta}[n] + L(\xi[n+1] - A_{11}\xi[n] - \\ &\quad - B_1u[n]) + A_{21}\xi[n] + B_2u[n]. \end{aligned}$$

Если выбрать вектор состояния $z[n]$ наблюдающего устройства :

$$z[n] = \hat{z}[n] - L \hat{\xi}[n],$$

то уравнение наблюдающего устройства примет вид

$$z[n+1] = (A_{22} - LA_{12})z[n] + (A_{22} - LA_{12})L \hat{\xi}[n] + (A_{21} - LA_{11})\hat{\xi}[n] + (B_2 - LB_1)u[n].$$

Напишем уравнения для ошибки $e[n] = \hat{z}[n] - z[n]$. Имеем

$$e[n+1] = (A_{22} - LA_{12})e[n].$$

За счет выбора матрицы L можно обеспечить требуемую сходимость $e[n]$ к нулю. Структурная схема наблюдающего устройства приведена на рис. 9.

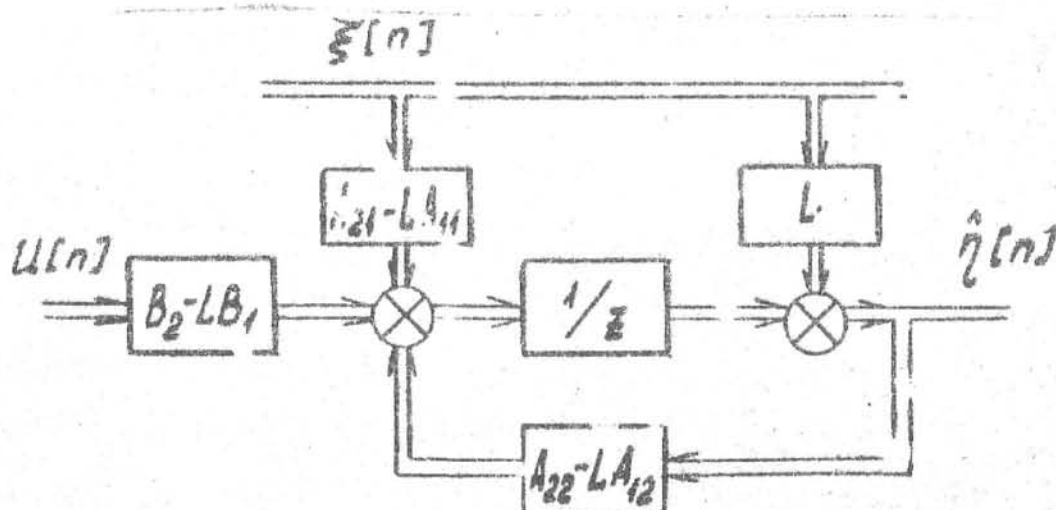


Рис. 9

3. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ САУ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

3.1. Требования, предъявляемые к логарифмическим частотным характеристикам

При синтезе САУ обычно задаются изменяемая часть системы и общая структурная схема, а также указываются технические возможности введения в те или иные участки системы корректирующих устройств и связей. Синтез дискретной САУ состоит в пост-

рени системы, удовлетворяя и заданным требованиям.

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе, строятся желаемые логарифмические частотные характеристики (ЛЧ.). Задача синтеза сводится к приближенной реализации этих характеристик путем подбором коррек ирующих устройств и связей. Рассмотрим коротко требования, предъявляемые к дискретным системам.

Для нормального функционирования замкнутая дискретная САУ должна быть устойчивой и обладать определенными запасами устойчивости по фазе и амплитуде. Запасы устойчивости дискретных систем определяются так же, как и непрерывных систем.

Значение $\text{Lm } W_{\omega}^*(j\omega^*)$, соответствующее значению фазовой характеристики $\varphi^*(\omega^*) = -\pi$, называется запасом устойчивости по амплитуде. Величина $\Delta\varphi^* = \varphi^*(\omega_c^*) + \pi$, вычисленная для значения ω_c^* , при котором $\text{Lm } W_{\omega}^*(j\omega_c^*) = 0$, называется запасом устойчивости по фазе. Как правило, система должна обладать запасами устойчивости по амплитуде и фазе не менее 10 дБ и 30° соответственно.

В качестве типовых воздействий при синтезе САУ методом ЛЧХ рассматривается гармоническое воздействие

$$g(\bar{t}) = a \sin \bar{\omega}_p \cdot \bar{t},$$

где a - заданная амплитуда гармонического воздействия.

Пусть φ_{ε}^* - передаточная функция импульсной системы по ошибке. Тогда ошибка $\varepsilon[n]$ в системе по окончании переходного процесса определяется выражением

$$\varepsilon[n] = |\varphi_{\varepsilon}^*(j\bar{\omega}_p)| \cdot a \sin(\bar{\omega}_p n + \psi(\bar{\omega}_p)),$$

где $\psi(\bar{\omega}_p) = \arg \varphi_{\varepsilon}^*(j\bar{\omega}_p)$.

Следовательно

$$|\varepsilon[n]| \leq a \cdot |\varphi_{\varepsilon}^*(j\bar{\omega}_p)|.$$

Если задана допустимая ошибка системы δ , т.е. $|\varepsilon[n]| < \delta$, то необходимо, чтобы соблюдалось неравенство

$$|\varphi_{\varepsilon}^*(j\bar{\omega}_p)| < \delta/a.$$

Так как рабочая частота $\bar{\omega}_p$ выбирается в низко-частотной области, где справедливо приближенное равенство

$$\varphi_{\varepsilon}(j\bar{\omega}_p) \approx \frac{1}{W^*(j\bar{\omega}_p)} \quad (1)$$

то окончательно можно получить следующее условие для амплитудно-частотной характеристики разомкнутой дискретной системы:

$$|W^*(j\bar{\omega}_p)| > a/\delta;$$

или для логарифмической амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ)

$$\lim_{\omega} W_{\omega}^*(j\omega_p^*) = 20 \lg \frac{a}{\delta} \quad (2)$$

где

$$\omega_p^* = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}_p}{2}$$

Неравенство (2) представляет собой ограничение, налагаемое на низ-частотную часть ЛЧХ импульсной САУ, т.е. ЛАЧХ разомкнутой дискретной системы должна проходить выше точки с координатами

$$\omega_p^* = \omega_p^*, \quad \lim_{\omega} W_{\omega}^*(j\omega_p^*) = 20 \lg \frac{a}{\delta}$$

Если на рабочей частоте ЛАЧХ разомкнутой дискретной системы совпадает с ЛАЧХ приведенной непрерывной части этой системы, то условие (1) должно также выполняться и для ЛАЧХ приведенной непрерывной части. Однако очень часто при определении требований к проектируемой импульсной системе задаются максимальные скорости \dot{q}_{\max} и ускорения \ddot{q}_{\max} входного воздействия, которое должно обрабатываться системой с допустимой ошибкой δ .

В этом случае рассматривается "эквивалентное" гармоническое воздействие $q_2(\bar{t})$, обладающее заданными характеристиками. Если $q_2(\bar{t}) = a_2 \sin \bar{\omega}_2 \bar{t}$, то

$$\dot{q}_2(\bar{t}) = a_2 \bar{\omega}_2 \cos \bar{\omega}_2 \bar{t}; \quad \ddot{q}_2(\bar{t}) = -a_2 \bar{\omega}_2^2 \sin \bar{\omega}_2 \bar{t}$$

Следовательно, необходимо выбрать параметры a_2 , $\bar{\omega}_2$ из условия

Заметим, что система, обладающая заданным показателем колебательности, является устойчивой.

3.2. Построение желаемой ЛЧХ

При построении желаемой ЛЧХ учитываются все требования, предъявляемые к дискретной системе, а также возможности реализации желаемой ЛЧХ в заданной неизменяемой части импульсной системы. Подробные рекомендации по выбору желаемых ЛЧХ для дискретных систем приведены в [3].

Наклон первой низкочастотной асимптоты соответствует требуемому порядку астатизма системы. Как правило, порядок астатизма дискретной системы в процессе синтеза не изменяют и наклон первой низкочастотной асимптоты для желаемой ЛЧХ совпадает с наклоном первой низкочастотной асимптоты для приведенной непрерывной части.

Если частота квантования сигнала, которая обычно задается при синтезе, велика, то низкочастотная часть желаемой ЛЧХ импульсной системы (высот до частоты среза) может быть построена как низкочастотная часть желаемой ЛЧХ непрерывной части системы $\lim_{T \rightarrow 0} W_H(j\omega)$. После этого необходимо проверить, принадлежит ли частота среза ω_{cp} той области частот $0 \leq \omega_{cp} \leq \omega_n$, в которой ЛЧХ импульсной системы и ее приведенной непрерывной части приближенно совпадают.

Если это условие выполняется, то, применяя \mathcal{D}_ω - преобразование к передаточной функции приведенной непрерывной части, получим желаемую ЛЧХ импульсной системы. Соответствующая ЛАЧХ показана на рис. 12.

Рассмотрим порядок построения желаемой ЛАЧХ для системы первого порядка астатизма. Считаем, что заданы максимальная скорость входного сигнала \dot{g}_{max} , максимальное ускорение входного сигнала \ddot{g}_{max} , максимальная динамическая ошибка δ и показатель колебательности M . Заданы также тип импульсного элемента (с экстраполятором нулевого порядка) и период квантования сигнала T .

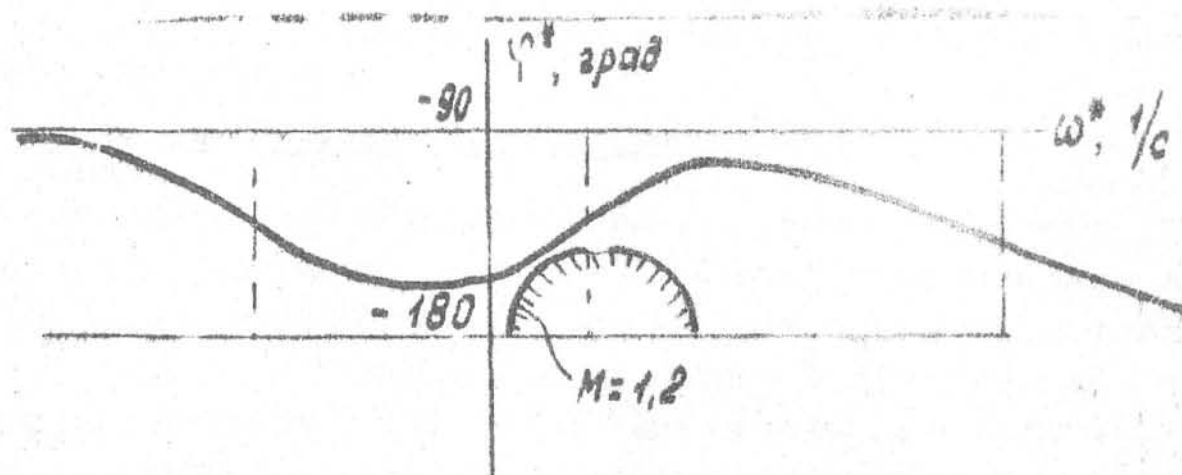
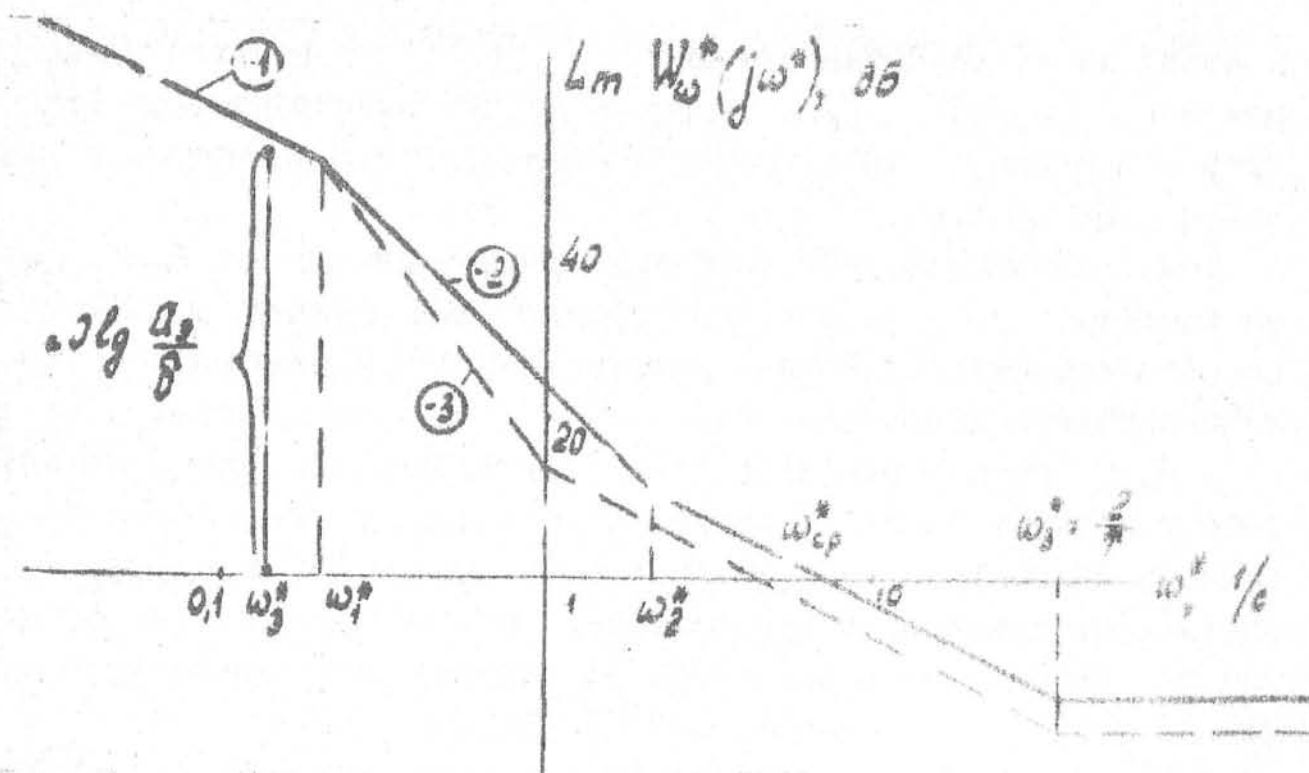


Рис. 12

1. Построим контрольную точку $20 \lg \frac{a_2}{\delta}$, для чего определим частоту $\bar{\omega}_3$ и амплитуду a_2 эквивалентного гармонического воздействия в соответствии с соотношением (40).

2. Проведем низкочастотную асимптоту, выбирая первую сопрягающую частоту ω_1^* желаемой ЛАЧХ вблизи точки $\omega_3^* \approx \bar{\omega}_3$, что обеспечит ее реализацию с наименьшим коэффициентом усиления.

3. Вторую сопрягающую частоту ω_2^* выберем исходя из того, чтобы частота среза ω_{cp}^* была меньше, чем частота $2/T$.

и чтобы запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi^*$ составлял не менее $\arcsin(1/M)$ [2]. Проведем вторую низкочастотную асимптоту с наклоном -40 дБ/дек и среднечастотную асимптоту с наклоном 20 дБ/дек.

4. В качестве третьей сглаживающей частоты ω_3 выберем частоту $2/T$, так как передаточная функция импульсной системы с экстраполятором нулевого порядка обязательно имеет в числителе сомножитель $1 - (sT/2)$.

5. С помощью графиков (рис. II) необходимо построить запретную область по колебательности системы, соответствующую заданному показателю M , и проверить чтобы фазовая характеристика не заходила в эту область. Если это условие не выполняется, необходимо попробовать обеспечить это, варьируя частоты ω_1^* , ω_2^* и коэффициент усиления.

Если частоту среза не удастся выбрать достаточно удаленной от ω_3^* , чтобы обеспечить условие заданной колебательности, следует провести вторую низкочастотную асимптоту с наклоном -60 дБ/дек (штриховая линия на рис. I2).

3.3. Синтез корректирующих устройств

Задача, решаемая на этапе коррекции, состоит в определении корректирующих устройств и корректирующих связей, обеспечивающих достаточно хорошее приближение частотных характеристик спроектированной системы к желаемым.

В отличие от непрерывных систем регулирования в импульсных системах применяют два способа коррекции - непрерывный и импульсный. Первый - введение в систему непрерывных корректирующих устройств, второй - введение в систему импульсных и цифровых устройств коррекции.

Непрерывное корректирующее устройство $\tilde{W}_k(s)$ может быть введено последовательно или параллельно с элементами части $\tilde{W}_H(s)$, а также в местной или в главной обратной связи. Выбор того или иного способа включения корректирующего устройства определяется возможностями технической реализации.

Пусть задана желаемая ЛЧХ разомкнутой импульсной системы $W_{\text{жс}}^*(j\omega^*)$. Она определяет желаемую передаточную функцию $W_{\text{жс}}^*(\omega)$. Выполняя обратное \bar{D}_W -преобразование, получим

желаемую передаточную функцию приведенной непрерывной части

$$W'_{н.з.с}(q) = \frac{W_{з.с}(q)}{W_{\varphi}(q)}$$

Задача синтеза свелась, таким образом, к реализации желаемой передаточной функции непрерывной части.

Формально могут быть определены и передаточные функции корректирующих устройств $\tilde{W}_k(q)$. Так, при последовательной коррекции (рис. 13) получим

$$\tilde{W}_{н.з.с}(q) = \tilde{W}_H(q) \cdot \tilde{W}_k(q),$$

$$\tilde{W}_k(q) = \tilde{W}_{н.з.с}(q) / (\tilde{W}_H(q)).$$

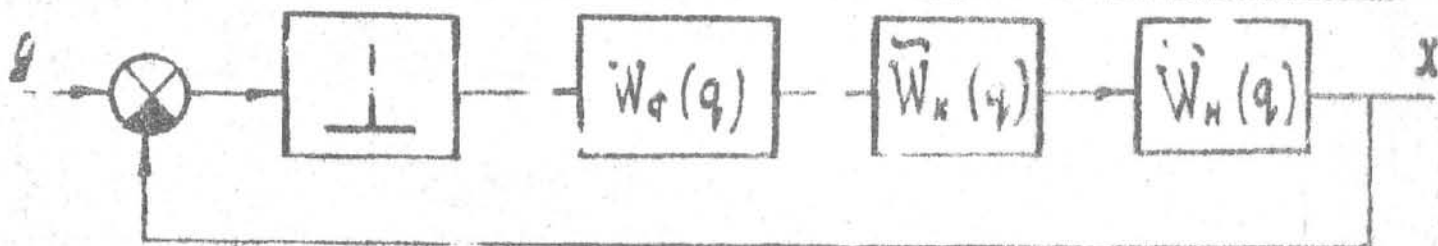


Рис. 13

При параллельной коррекции (рис. 14)

$$\tilde{W}_{н.з.с}(q) = \tilde{W}_1(q) [\tilde{W}_2(q) + \tilde{W}_k(q)],$$

откуда

$$\tilde{W}_k(q) = \frac{\tilde{W}_{н.з.с}(q) - \tilde{W}_1(q) \cdot \tilde{W}_2(q)}{\tilde{W}_1(q)}$$

При коррекции с помощью местной обратной связи (рис. 15)

$$\tilde{W}_{н.з.с}(q) = \frac{\tilde{W}_1(q) \cdot \tilde{W}_2(q)}{1 + \tilde{W}_2(q) \cdot \tilde{W}_k(q)},$$

откуда следует

$$\tilde{W}_k(q) = \frac{\tilde{W}_1(q) \cdot \tilde{W}_2(q) - \tilde{W}_{н.з.с}(q)}{\tilde{W}_2(q) \cdot \tilde{W}_{н.з.с}(q)}$$

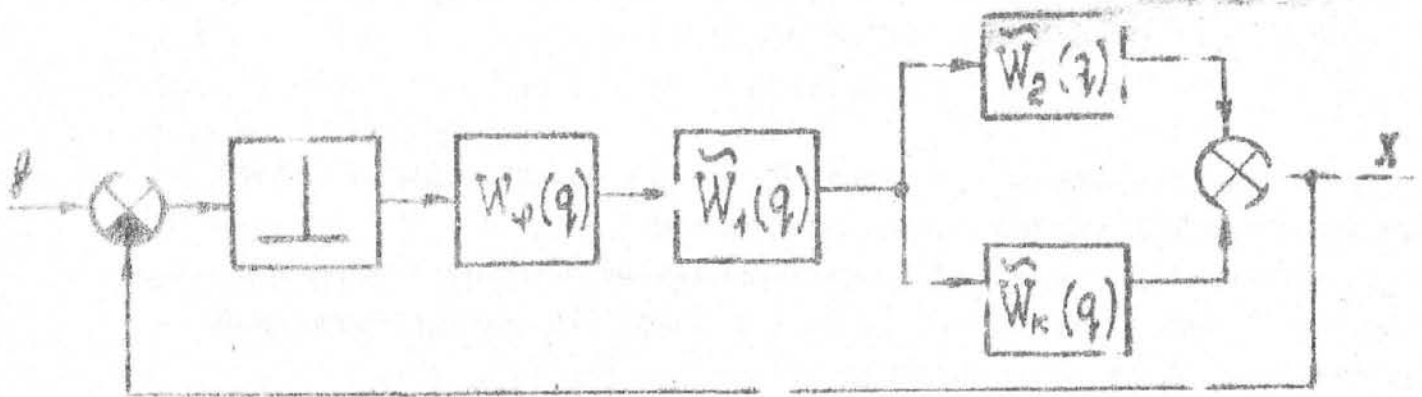


Рис. 14

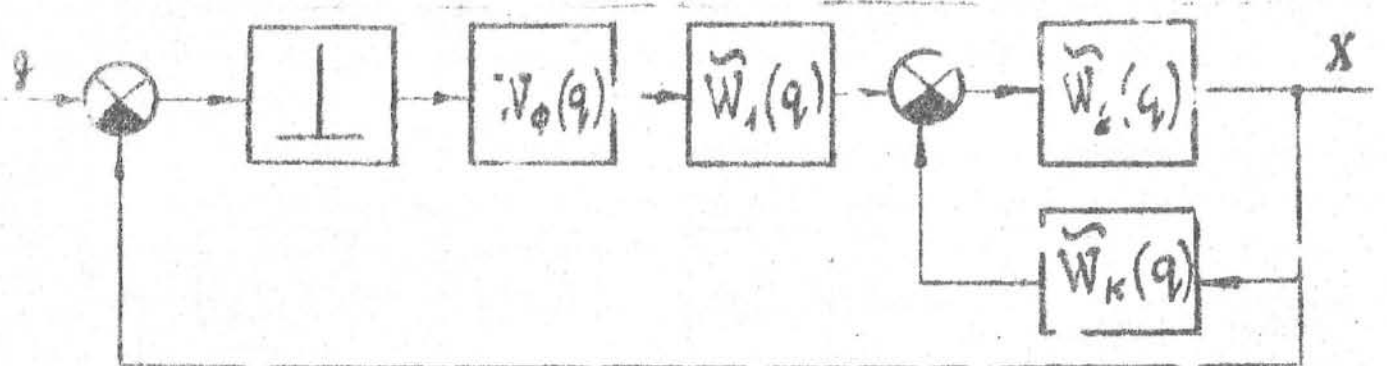


Рис. 15

Однако полученные соотношения обычно не позволяют непосредственно определить передаточную функцию корректирующего устройства, так как либо нарушается условие физической реализуемости, т.е. порядок числителя $\tilde{W}_k(q)$ оказывается выше порядка знаменателя, либо передаточная функция $W_k(q)$ оказывается слишком сложной.

Поскольку определены желаемые частотные характеристики непрерывной части $\tilde{W}_{н,жк}(j\omega)$, то для приближенного определения корректирующих устройств можно использовать методы синтеза с помощью ЛЧХ, известные из теории непрерывных автоматических систем [4]. Эти методы позволяют определить физически реализуемые и достаточно простые корректирующие устройства. Однако необходимо иметь в виду, что приближенная реализация корректирующих устройств может привести к существенному изменению вида передаточной функции:

$$W_{\omega}^*(\omega) = \bar{D} \left\{ W_{\phi}(s) W_H(s) \right\},$$

где $W_H(s)$ - передаточная функция непрерывной части с приближенно выбранными корректирующими звеньями. При этом и частотная характеристика $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W_{\omega}^*(j\omega^*)$ будет сильно отличаться от желаемой.

Таким образом, при изменении параметров и структуры корректирующих устройств невозможно непосредственно определить, к каким отклонениям от желаемой ЛЧХ эти изменения приведут. В каждом случае для этого следует вычислить соответствующее \bar{D}_W -преобразование. Поэтому синтез с помощью непрерывных корректирующих устройств обычно сводится к перебору различных вариантов коррекции и выбору наилучшего из них. Применение импульсной коррекции не имеет этого недостатка.

Импульсная коррекция состоит во введении в импульсную систему импульсного фильтра, который преобразует дискретные значения входного сигнала в последовательность импульсов, поэтому его можно условно представить в виде схемы, показанной на рис. 16.

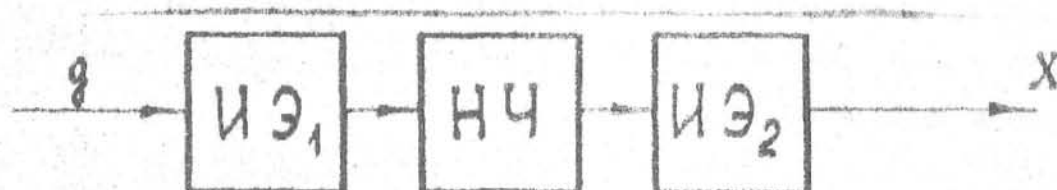


Рис. 16

Амплитуда импульсов $x[n]$ на выходе связана с дискретными значениями $g[n]$ на входе соотношением

$$x[n] = \sum_{m=0}^{\infty} k[n-m] g[m],$$

где $k[n]$ - импульсная характеристика приведенной непрерывной части импульсного фильтра. В частности, при $k[0] = k_{\omega}$, $k[n] = 0$ импульсный фильтр осуществляет обычную амплитудно-импульсную модуляцию.

Применяя D -преобразование к последнему уравнению, получим уравнение импульсного фильтра в области изображения:

$$X^*(q) = W^*(q) G^*(q),$$

где $W^*(q) = D \{ k[n] \}$ - передаточная функция импульсного фильтра.

Вводя условно передаточную функцию приведенной непрерывной части импульсного фильтра как $W(q) = W_{\Phi_1}(q) \cdot \tilde{W}_H(q)$, можно представить последний в виде схемы, показанной на рис. 17.

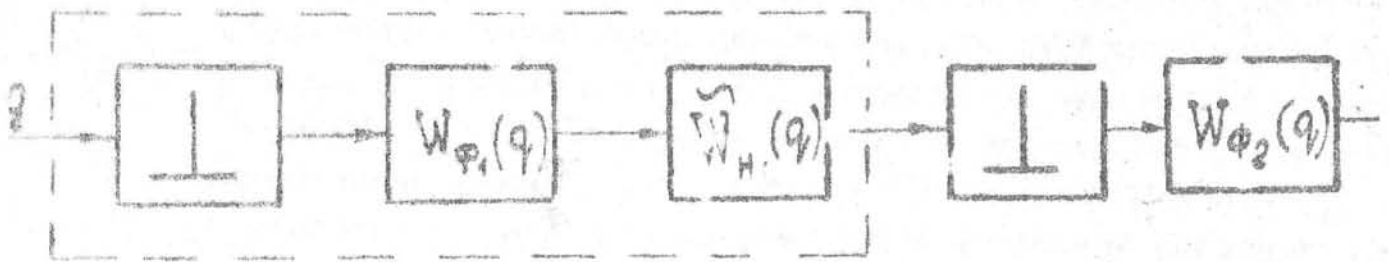


Рис. 17

Здесь $W_{\Phi_1}(q)$ — передаточная функция формирующего элемента, характеризующая форму импульсов на входе импульсного элемента; $W_{\Phi_2}(q)$ — передаточная функция другого формирующего элемента, который введен для характеристики формы импульсов на выходе фильтра. Поскольку часть схемы, обведенная штриховой линией, представляет собой разомкнутую импульсную систему с передаточной функцией $W_k^*(q)$, можно несколько видоизменить последнюю схему (рис. 18).

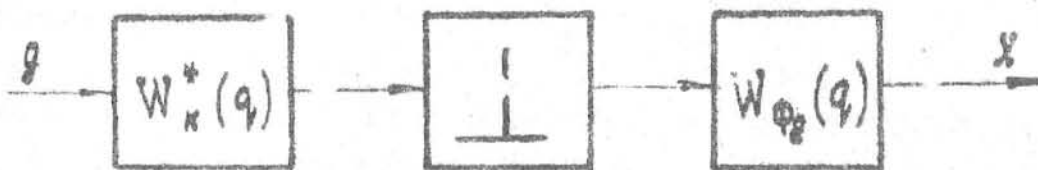


Рис. 18

При синтезе импульсных систем регулирования импульсный фильтр обычно задается своей передаточной функцией

$$W_k^*(q) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i e^{q(m-i)}}{\sum_{r=0}^k a_r e^{q(k-r)}}, \quad k \geq m$$

или, что эквивалентно, своим разностным уравнением

$$\sum_{r=0}^k a_r x[n+r] = \sum_{i=0}^m b_i g[n+i].$$

Непосредственная реализация фильтра с помощью выбора соответствующей непрерывной части связана в общем случае с необходимостью определить передаточную функцию $W(q) = \bar{D}^{-1} \{W_k^*(q)\}$, которая может оказаться слишком сложной. Поэтому используются специальные способы реализации импульсного фильтра с помощью непрерывных элементов. Рассмотрим один из таких способов, который состоит в построении системы, состоящей из элементов задержки, сумматоров и усилителей.

Составим систему, реализующую импульсный фильтр с передаточной функцией

$$W_k^*(q) = \frac{b_0 e^{q^m} + b_1 e^{q^{(m-1)}} + \dots + b_m}{a_0 e^{q^k} + a_1 e^{q^{(k-1)}} + \dots + a_k}, \quad k \geq m.$$

Представим $W_k^*(q)$ в зависимости от степеней e^{-q} :

$$W_k^*(q) = \frac{b_0 e^{-q(k-m)} + b_1 e^{-q(k-m+1)} + \dots + b_m e^{-qk}}{a_0 + a_1 e^{-q} + \dots + a_k e^{-qk}}.$$

Если $X^*(q)$ — изображение выходной величины, а $G^*(q)$ — входной, то

$$X^*(q) = [b_0 e^{-q(k-m)} + b_1 e^{-q(k-m+1)} + \dots + b_m e^{-qk}] Z^*(q),$$

где

$$Z^*(q) = \frac{G^*(q)}{a_0 + a_1 e^{-q} + \dots + a_k e^{-qk}}.$$

Переходя к оригиналам, получим

$$x[l] = b_0 z[n-l] + b_1 z[n-l+1] + \dots + b_m z[n-k] \quad (l = k-m);$$

$$a_0 z[n] = y[n] - a_1 z[n-1] - \dots - a_k z[n-k].$$

Последнее уравнение более удобно записать следующим образом:

$$z[n] = y[n] - (a_0 - 1)z[n] - a_1 z[n-1] - \dots - a_k z[n-k].$$

Полученные разностные соотношения можно реализовать с помощью схемы, изображенной на рис. 19, в которой используются элементы задержки на $\bar{z} = 1$ в относительном времени. На схеме через $g[n]$ и $x[n]$ обозначены амплитуды последовательности импульсов на входе и выходе импульсного фильтра.

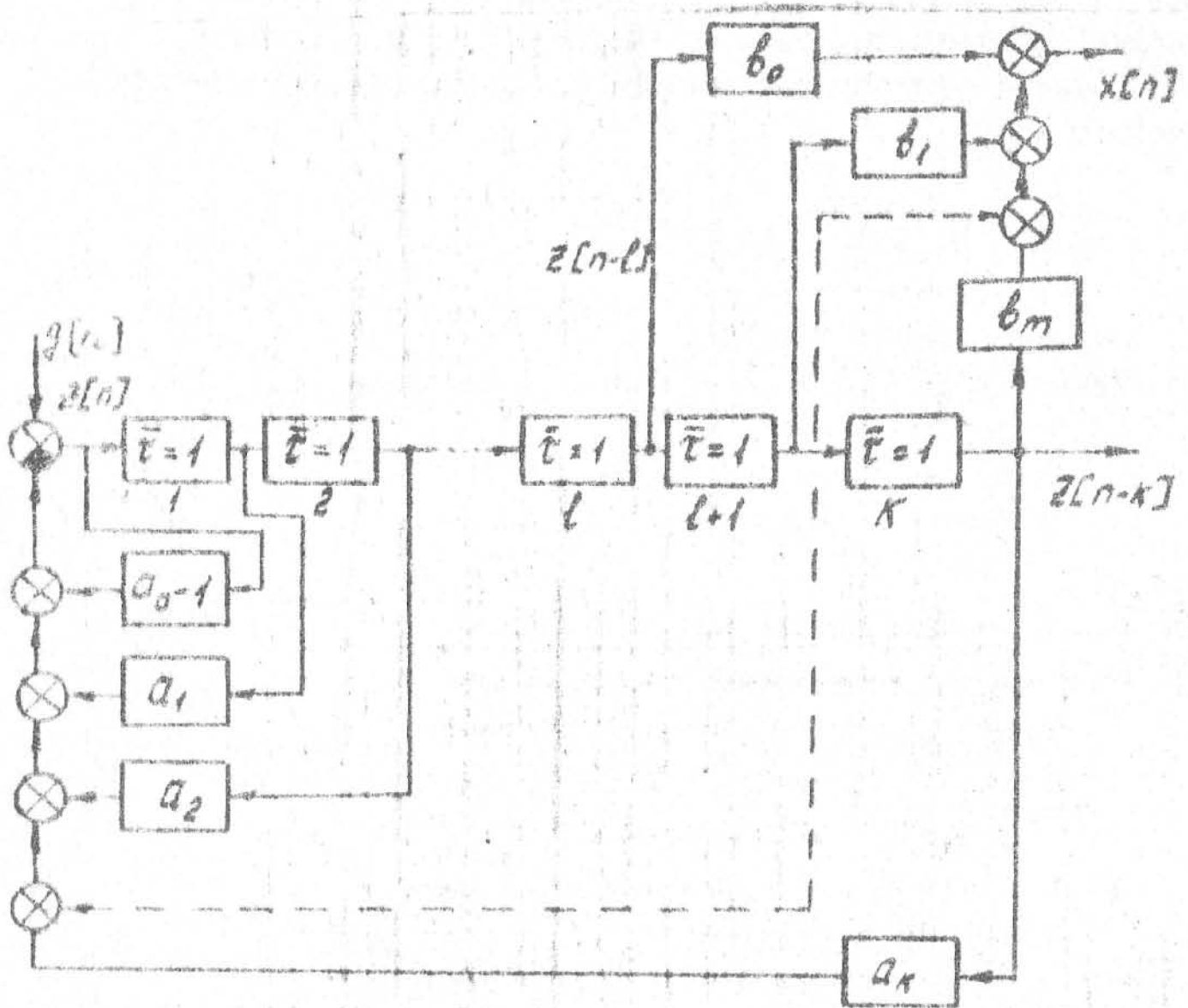


Рис. 19

Л и т е р а т у р а

1. Математические основы теории автоматического регулирования. Т. I, 2/Под ред. Б.Н.Чемоданова. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1977.

2. Иванов В.А., Юценко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука, 1983.

3. Динамика цифровых следящих систем / Николаев Ю.А., Пехов В.П., Феклисов Г.И., Чемоданов Б.К. - М.: Энергия, 1970.

4. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1978.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Устойчивость линейных дискретных систем автоматического управления.....	3
1.1. Теоремы об устойчивости.....	3
1.2. Критерий Шура – Кона.....	5
1.3. Критерий Гурвица.....	6
1.4. Частотные критерии устойчивости.....	8
2. Метод пространства состояний в теории дискретных систем.....	11
2.1. Определение уравнений состояния с помощью схемы моделирования.....	12
2.2. Определение уравнений состояния по передаточной функции.....	14
2.3. Определение уравнений состояния по матричной передаточной функции.....	17
2.4. Управляемость и наблюдаемость дискретных систем....	17
2.5. Синтез дискретных систем по заданному расположению характеристических чисел.....	23
2.6. Синтез наблюдающего устройства состояния полного порядка.....	25
2.7. Синтез редуцированного наблюдающего устройства состояния.....	27
3. Синтез дискретных САУ методом логарифмических частотных характеристик.....	28
3.1. Требования, предъявляемые к логарифмическим частотным характеристикам.....	28
3.2. Построение желаемой ЛЧХ.....	34
3.3. Синтез корректирующих устройств.....	36
Литература.....	43