НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ.
ЧАСТОТНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

К восьмидесятилетию со дня рождения В.А. Якубовича

Под редакцией
д.ф.-м.н. А.Х. Гелига, чл.-корр РАН Г.А. Леонова,
д.т.н. А.Л. Фрадкова

Это издание посвящается Владимиру Андреевичу Якубовичу
по случаю его 80-летия.
Авторы сборника и сотрудники издательства «ФИЗМАТЛИТ»
поздравляют Владимира Андреевича с юбилеем и желают
крепкого здоровья, долголетия и новых творческих успехов

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В. А. Якубович — один из тех, кто внес фундаментальный вклад в создание современной теории управления. Его статья 1962 г., содержащая частотную теорему, включена в специальный том «Control Theory: Twenty-Five Seminal Papers» (Wiley — IEEE Press, 2000), в котором представлены 25 статей, оказавших, по мнению международной комиссии, наибольшее влияние на развитие теории управления в XX в. Этот результат, дополненный в 1963 г. американским математиком Р. Калманом, известен как «лемма Якубовича–Калмана». Она устанавливает связь между частотными методами в теории управления и методами функций Ляпунова и применяется в разных областях, таких как устойчивость, адаптация, оптимальное управление, странные аттракторы. Использование этой леммы позволило получить разнообразные частотные критерии абсолютной устойчивости, которые придали «второе дыхание» методу функций Ляпунова. Более того, поскольку различные свойства систем управления естественно выражаются в терминах функций Ляпунова, эта лемма позволила получить частотные условия того или иного типа поведения решений, охватывающие все условия, которые могут быть получены путем использования функций Ляпунова из некоторых многопараметрических классов (таких как функции вида «квадратичная форма», «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» и т. д.).

В цикле статей В. А. Якубовича, опубликованных в 1963–1970 гг. в журнале «Автоматика и телемеханика», а также в других работах, был развит метод, названный им методом матричных неравенств, который позволяет найти частотные критерии для целого ряда разнообразных свойств нелинейных систем: устойчивости в целом и неустойчивости в целом, существования устойчивых в целом периодических и почти периодических режимов, автоколебательности. Он построил абстрактную теорию абсолютной устойчивости, обобщающую известные результаты и позволяющую распространить их на новые типы уравнений (интегральные уравнения, уравнения с запаздывающим аргументом, уравнения в гильбертовом пространстве и пр.). Работы В. А. Якубовича по методу матричных неравенств получили признание среди специалистов и нашли многочисленных последователей в России и за ее пределами, применялись к теории диссипативных систем, адаптивных систем и т. д. В книге «Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory» (S. Boyd et al., SIAM Studies in Applied Mathematics. Vol. 15. Philladelphia, 1994) В. А. Якубович назван «отцом» научного направления, связанного с исследованием линейных матричных неравенств (в почетной компании с А. М. Ляпуновым, названным там же «дедушкой» этого направления).

В сборнике представлены труды учеников и последователей В. А. Якубовича, посвященные обзору и истории развития вышеперечисленных направлений, а также изложению ряда новейших достижений в этой области. Журнальные версии статей, помещенных в сборник, вощли в специальные выпуски журналов «Автоматика и телемеханика», Вестник Санкт-Петербургского университета, International Journal of Robust and Nonlinear Control, посвященных 80-летию В. А. Якубовича, публикуемые в конце 2006 г. Уникальность сборника в том, что «под одной крышей» собраны работы ведущих отечественных и зарубежных специалистов, специально написанные к юбилейной дате.

Книга будет полезна всем, желающим ознакомится как с историей важного направления в теории управления, так и с новейшими достижениями в теории управления и теории нелинейных систем.

А. Х. Гелиг,[†] *Г. А. Леонов,*[†] *А. Л. Фрадков*[††]

Владимир Андреевич Якубович (к 80-летию со дня рождения)[*]

Владимир Андреевич Якубович родился 21 октября 1926 г. в Новосибирске. В 1949 г. он окончил механико-математический факультет МГУ. Еще на третьем курсе под руководством С. А. Гальперна началась его научная деятельность. Владимир Андреевич обобщил один результат Германа Вейля по асимптотическому поведению решений нелинейных дифференциальных уравнений, за что получил первую премию на конкурсе научных студенческих работ. Две другие его работы, выполненные в студенческие годы [1, 2], были представлены И. Г. Петровским и А. Н. Колмогоровым для публикации в Докладах АН СССР. Кафедры И. М. Гельфанда и В. В. Немыцкого рекомендовали В. А. Якубовича в аспирантуру. Однако судьба распорядилась иначе. В конце пятого курса Владимир Андреевич в частной беседе и затем на комсомольском собрании факультета высказался с осуждением явлений антисемитизма, имевших место на мехмате. Ему был вынесен строгий выговор «за распространение вредных слухов и извращенное толкование советской национальной политики». Решением партийного бюро факультета его кандидатура была вычеркнута из списка рекомендованных в аспирантуру. Попытки И. Г. Петровского и других трудоустроить В. А. Якубовича в МИАН и МФТИ не увенчались успехом. Тем не менее по инициативе декана факультета В. В. Голубева Владимир Андреевич получил неожиданно хорошее распределение в Ленинград, в НИИ судостроительной промышленности, с предоставлением комнаты в общежитии. В этом НИИ он проработал три года в должности инженера.

В 1953 г. Владимир Андреевич «без отрыва от производства» защитил кандидатскую диссертацию, в которой усилил результаты А. М. Ляпунова и Н. Е. Жуковского по критериям устойчивости решений уравнения Хилла. Педагогическую деятельность Владимир Андреевич начал в Горном институте, а в 1956 г. перешел на математико-механический факультет Ленинградского университета. В 1959 г. он защитил докторскую диссертацию по устойчивости решений линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами. Он возглавил группу сотрудников, которая вскоре была преобразована в лабораторию теории автоматического регулирования, впоследствии переименованную в лабораторию теоретической кибернетики. В 1970 г. на базе

[†]) Санкт-Петербургский Государственный Университет.

[††]) Санкт-Петербургский Государственный Университет. Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 10. — С. 4–20.

этой лаборатории была создана кафедра теоретической кибернетики, которой Владимир Андреевич руководит по сей день.

В. А. Якубович — ученый с весьма широким спектром научных интересов. Первым направлением его исследований явилось изучение линейных периодических гамильтоновых систем. Он получил ряд глубоких результатов: изучил структуру функционального пространства гамильтонианов, построил разнообразные критерии устойчивости и неустойчивости, предложил новый геометрический подход к теории колебательности линейных гамильтоновых систем. В теории параметрического резонанса В. А. Якубович получил ряд важных выводов. Он показал, что применяемый в практике инженерных расчетов метод построения границ областей динамической неустойчивости может приводить к «потере» ряда областей, и предложил метод, позволяющий выявлять все области динамической неустойчивости. С помощью развитой теории он провел анализ крушения Такомского моста (США, 1940 г.) и обосновал гипотезу о том, что в этой катастрофе существенную роль сыграло явление параметрического резонанса [31, 79]. Эти результаты вошли в монографии [108, 212]. Первая из них была переведена за рубежом в виде двухтомника [129].

В. А. Якубович — один из тех, кто внес фундаментальный вклад в создание современной теории управления. Его статья 1962 г. [38], содержащая частотную терему, включена в специальный том «Twenty Five Seminal Papers in Control» (Wiley—IEEE Press), в котором представлены 25 статей, оказавших, по мнению международной комиссии, наибольшее влияние на развитие теории управления в XX в. Этот результат, дополненный в 1963 г. американским математиком Р. Калманом, известен как «лемма Якубовича–Калмана». Она устанавливает связь между частотными методами в теории управления и методами функций Ляпунова и применяется в разных областях, таких как устойчивость, адаптация, оптимальное управление, странные аттракторы. Использование этой леммы позволило получить разнообразные частотные критерии абсолютной устойчивости, которые придали «второе дыхание» методу функций Ляпунова. Более того, поскольку различные свойства систем управления естественно выражаются в терминах функций Ляпунова, эта лемма позволила получить частотные условия того или иного типа поведения решений, охватывающие все условия, которые могут быть получены путем использования функций Ляпунова из некоторых многопараметрических классов (таких как функции вида «квадратичная форма», «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» и т. д.).

В цикле статей В. А. Якубовича [41, 43, 49, 50, 53, 54, 69, 70, 73, 103, 128], опубликованных в журнале «Автоматика и телемеханика», а также в работах [47, 51, 55, 57, 58, 61, 68, 90, 92, 258, 265, 267], был развит метод, названный им методом матричных неравенств, который позволяет найти частотные критерии для целого ряда разнообразных свойств нелинейных систем: устойчивости в целом и неустойчивости в целом, существования устойчивых в целом периодических и почти периодических режимов, автоколебательности. Им была построена абстрактная теория абсолютной устойчивости [181, 185, 186], обобщающая известные результаты и позволяющая распространить их на новые типы уравнений (интегральные уравнения, уравнении с запаздывающим аргументом, уравнения в гильбертовом пространстве и пр.). Работы В. А. Якубовича по методу матричных неравенств получили признание среди специалистов и нашли многочисленных последователей в России и за ее пределами. В книге «Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory» (S. Boyd et al., SIAM Studies in Applied Mathematics. V. 15. Philladelphia, 1994) В. А. Якубович назван «отцом» научного направления исследований линейных матричных неравенств (в почетной компании с А. М. Ляпуновым, названным там же «дедушкой» этого направления).

Еще одной областью научных интересов В. А. Якубовича является теория оптимального управления. Он построил вариант абстрактной теории оптимального управления [146, 159, 163, 165, 167, 171, 243, 275], который позволяет получать необходимые (а в ряде случаев и достаточные) условия оптимальности типа «принципа максимума» Понтрягина для разных классов уравнений. В исследованиях последних лет В. А. Якубович нашел новый подход к проблеме невыпуклой глобальной оптимизации [227, 228, 232, 250, 261, 278]. Эффективность этого подхода подтверждается решением конкретных задач стохастического и детерминированного оптимального управления. В работах по оптимальному гашению колебаний и оптимальному отслеживанию им разработана концепция «универсального регулятора», обеспечивающего оптимальность управления при заранее неизвестных помехах и отслеживаемых сигналах [240, 241, 244, 245, 251, 252, 254, 260, 279], а также инвариантность выхода системы относительно внешнего возмущения [273, 274, 276].

Для В. А. Якубовича характерно сочетание плодотворной работы в абстрактных областях математики с успешными исследованиями прикладных задач. Он обладает счастливой способностью ставить содержательные математические задачи на основе анализа запросов практики. В. А. Якубович является одним из создателей математической теории обучаемых распознающих систем. Предложенный им аппроксимационный подход [48, 56, 59, 64, 65, 67] позволил решить целый ряд задач по разработке алгоритмического обеспечения для изделий новой техники. За проведенные исследования по оборонной тематике В. А. Якубович трижды был отмечен благодарностью министра.

В теории адаптивных систем управления и обработки информации В. А. Якубовичу принадлежит получивший большую популярность метод рекуррентных конечно-сходящихся алгоритмов решения целевых неравенств, с помощью которого решен широкий круг задач [60, 74, 76, 95, 174]. Он является родоначальником Ленинградской (Санкт-Петербургской) школы по теории адаптивных систем.

В. А. Якубович был членом редколлегий «Сибирского математического журнала» и международных журналов «Systems and Control Letters» и «Dynamics and Control», организатором шести ленинградских симпозиумов по теории адаптивных систем.

Большое внимание уделяет В. А. Якубович педагогической деятельности. По его инициативе на математико-механическом факультете открыты три новых специализации кибернетического профиля, он разработал оригинальный цикл курсов лекций под общим названием «Теоретическая кибернетика», подготовил через аспирантуру более 40 кандидатов наук (более десяти из них стали докторами наук). Усилиями В. А. Якубовича создан коллектив кафедры и лаборатории теоретической кибернетики, который пользуется заслуженным авторитетом в научном мире. Научная продукция его сотрудников исчисляется многими сотнями публикаций, среди которых более четырех десятков книг. Воспитанники кафедры плодотворно работают во многих российских и зарубежных научно-педагогических учреждениях. Можно с уверенностью говорить о научной школе В. А. Якубовича, область интересов которой охватывает важнейшие разделы теоретической кибернетики.

Научная общественность высоко оценила научную и педагогическую деятельность В. А. Якубовича. Он удостоен премии Ленинградского университета за педагогическое мастерство в 1986 г., является лауреатом Международной премии им. Н. Винера 1993 г. за вклад в кибернетику, лауреатом премии Санкт-Петербургского университета 1996 г. за цикл работ по оптимальному управлению. В 1995 г. он получил премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию в издаваемых ею журналах, а в 1996 г. ему присуждена главная ежегодная премия по системам управления международного общества IEEE (IEEE Control Systems Award) и медаль «за пионерские и фундаментальные достижения в теории устойчивости и оптимального управления». В 1998 г. В. А. Якубовичу присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», в 2005 г. он награжден «Орденом Почета». В. А. Якубович является членом-корреспондентом РАН и академиком РАЕН.

Список основных научных трудов В. А. Якубовича

1948–1954

1. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1948. — Т. 63, № 4. — С. 363–366.
2. Некоторые критерии приводимости системы дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1949. — Т. 66, № 4. — С. 577–580.
3. Об асимптотическом поведении решений дифференциальных уравнений // УМН. — 1949. — Т. 4, вып. 3 (31). — С. 130.
4. Об ограниченности решений уравнения Хилла // ДАН СССР. — 1950. — Т. 74. № 5. — С. 901–903.

5. Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений // Матем. сб. — 1951. — Т. 28 (70), № 1. — С. 217–240.
6. Критерии устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. — 1951. — Т. 6, вып. 1 (41). — С. 166–168.
7. Критерии устойчивости системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1951. — Т. 78, № 2. — С. 221–224.
8. Оценка характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1952. — Т. 87, № 3. — С. 345–348.
9. Оценки характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. — 1954. — Т. 18, вып. 5. — С. 533–546.
10. Распространение метода Ляпунова определения ограниченности решений уравнений Хилла на случай знакопеременной функции $p(t)$ // Прикл. математика и механика. — 1954. — Т. 18, вып. 6. — С. 705–718.

1955–1960

11. Вопросы устойчивости решений системы двух линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами // Матем. сб. — 1955. — Т. 37 (79), вып. 1. — С. 21–68.
12. О системах дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами порядка больше двух // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103, № 6. — С. 981–984.
13. Структура областей неустойчивости, критерий устойчивости и неустойчивости системы дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами // УМН. — 1956. — Т. 10, вып. 4 (66). — С. 191–192.
14. Замечание к одной работе Барбути // Записки ЛГИ. — 1956. — Т. 33, вып. 3. — С. 198–204.
15. О зависимости собственных значений самопряженных краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений от краевых условий // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1957. — № 2, вып. 1. — С. 201–206.
16. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1957. — Т. 117, № 1. — С. 44–46.
17. Замечание к некоторым работам по системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. — 1957. — Т. 21, вып. 5. — С. 707–713.
18. Об устойчивости в целом невозмущенного движения систем непрямого автоматического регулирования // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1957. — № 19, вып. 4. — С. 172–176.
19. Распространение некоторых результатов Ляпунова на линейные канонические системы с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. — 1957. — Т. 21, вып. 4. — С. 491–502.

20. Критические частоты квазиканонических систем // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1958. — № 13, вып.3. — С. 313–352.
21. Об ограниченности и устойчивости в целом решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1958. — Т. 121, № 6. — С. 984–986.
22. О динамической устойчивости упругих систем // ДАН СССР. — 1958. — Т. 121, № 4. — С. 85–86.
23. О нелинейных дифференциальных уравнениях систем непрямого автоматического регулирования с одним регулирующим органом // УМН. — 1958. — Т. 13, вып. 6. — С. 229–231.
24. Строение группы симплектических матриц и структура множества неустойчивых канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Матем. сб. — 1958. — Т. 44, вып. 8. С. 313–352.
25. Метод малого параметра для линейных канонических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. — 1958. — Т. 23, № 1. — С. 15–34.
26. Осцилляционные свойства решений линейных канонических уравнений // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 3. — С. 533–536.
27. Распространение некоторых исследований А. М.Ляпунова дифференциального уравнения второго порядка на канонические системы с периодическими коэффициентами // Труды 3 Всес. матем. съезда. — 1959. — С.41–42.
28. Условия колебательности и неколебательности линейных канонических уравнений // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 5. — С. 994–997.
29. О нелинейных дифференциальных уравнениях системы непрямого автоматического регулирования с одним регулирующим органом // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1960. — № 7, вып. 2. — С. 120–153.
30. О радиусе сходимости рядов в методе малого параметра для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1960. — № 13, вып. 3. — С. 81–89.
31. Применение теории параметрического резонанса к объяснению крушения Такомского моста // УМН. — 1960. — Т. 15, № 6. — С. 183–184. (Совместно с Б. Г. Питтелем).
32. Условия устойчивости в целом некоторых нелинейных дифференциальных уравнений автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1960. — Т. 135, № 1. — С. 26–29.

1961–1965

33. Системы линейных дифференциальных уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами // УМН. — 1961. — Т. 16, № 1. — С. 223–234.
34. Строение функционального пространства комплексных канонических уравнений с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1961. — Т. 139, № 1. — С. 54–57.

35. Условия неограниченной устойчивости для некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. 1961, № 19, вып. 4. — С. 83–92.
36. Аргументы на группе симплектических матриц // Матем. сб. — 1961. — Т. 55 (97), вып. 3. — С. 255–280.
37. Осцилляторные свойства решений канонических уравнений // Матем. сб. — 1962. — Т. 56(98), № 1. С. 3–42.
38. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
39. О некоторых свойствах выпуклости области устойчивости для гамильтоновых уравнений с периодическими коэффициентами // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1962. — № 13, вып. 3. — С. 61–86.
40. Об одной ошибочной работе Н. И. Гаврилова // УМН. — 1962. — Т. 17, № 1. — С. 265–267. (Совместно с А. О. Гельфандом, Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым).
41. Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования в критических случаях. I // АиТ. — 1963. — Т. 24, № 3. — С. 293–302.
42. Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. I. — Киев,1963. — С. 277–305. (Совместно с М. Г. Крейном).
43. Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования в критических случаях. II // АиТ. — 1963. — Т. 24. № 6. — С. 717–731.
44. Двухсторонние оценки для решения однородного дифференциального уравнения второго порядка // Методы вычислений. — Л.: ВЦ ЛГУ. — 1963. — вып. 1. — С. 30–44.
45. Существование решений гамильтоновых уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // ДАН СССР. — 1963. — Т. 151. № 6. — С. 1264–1267. (Совместно с В. И. Дергузовым).
46. Действие удара на многомассовую систему // Сб. Методы вычислений. — Л.: ВЦ ЛГУ. — 1963. — вып. 2. — С. 75–90. (Совместно с Р. А. Артемовым и Б. Н. Козинцом).
47. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 2. — С. 288–291.
48. Машины, обучающиеся распознаванию образов // Сб. Методы вычислений, вып. 2. ВЦ ЛГУ. — 1963. — С. 95–131.
49. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // АиТ. — 1964. — Т. 25, № 7. — С. 1017–1029.
50. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. III // АиТ. — 1964. — Т. 25. № 5. — С. 601–612.
51. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования // ДАН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 278–281.

52. Параметрический резонанс систем со многими степенями свободы // Тр. Межвузов. конф. по прикладной теории устойчивости аналитической механики. Казань, — 1962. — Казань: Изд-во Казан. авиац. ин-та, — 1964. — С. 123–134. (Совместно с В. М. Старжинским).

1966–1970

53. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную // АиТ. — 1965. — Т. 26. № 4. — С. 577–590.
54. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // АиТ. — 1965. — Т. 26, № 5. — С.763–768.
55. Частотные условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем с одной дифференцируемой нелинейностью // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 2. — С. 298–301.
56. Некоторые общие теоретические принципы построения обучаемых опознающих систем. I. // Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, — 1965. — С. 3–71.
57. Частотные условия абсолютной устойчивости стационарных режимов и вынужденных колебаний нелинейных систем регулирования // Тр. Междунар. конф. по многомерным и дискретным системам автоматического управления. Прага, — 1965. — С. 119–124.
58. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем // Тр. II Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. — 1964. — М.: Наука, 1966. — С. 30–63. (Совместно с Ф. Р. Гантмахером).
59. Криминалистическая экспертиза близких почерков при помощи электронно-вычислительных машин // ДАН СССР. — 1966. — Т. 167, № 8. — С. 1008–1011. (Совместно с Б. Н. Козинцом и Р. М. Ланцманом).
60. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. — 1966. — Т. 166, № 6. — С. 1308–1312.
61. Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими нелинейностями // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 533–536.
62. Вычисление характеристических показателей линейных систем с периодическими коэффициентами // Методы вычислений. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. — вып. 3. — С. 76–104. (Совместно с В. Н. Фоминым).
63. Области динамической неустойчивости гамильтоновых систем // Методы вычислений. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. — вып. 3. — С. 51–69.
64. Опознание и дифференцирование почерков при помощи электронно-вычислительных машин // Самообучающиеся автоматические системы. — М.: Наука, 1966. — С. 21–28. (Совместно с Б. Н. Козинцом, Р. М. Ланцманом и Б. М. Соколовым).
65. О некоторых общих принципах построения обучающихся опознающих систем // Самообучающиеся автоматические системы. — М.: Наука, 1966. — С. 9-20.

66. Параметрический резонанс систем с бесконечным числом степеней свободы // Тез. кратких научн. сообщений Междунар. конгресса математиков, — 1966. — С. 57–58. (Совместно с В. Н. Фоминым и В. И. Дергузовым).
67. Об одном кибернетическом методе исследования в криминалистической экспертизе почерка // Сб. научн.-исслед. работ, № 2. Литовский НИИСЭ, Кибернетика и судебная экспертиза. — Вильнюс: Изд-во НИИСЭ, 1966. — С. 55–84.
68. Частотные условия существования абсолютно устойчивых и почти периодических предельных режимов системы автоматического регулирования со многими нестационарными нелинейностями // Тр. III Междунар. конгресса ИФАК. — Лондон, 1966.
69. Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — Т. 28, № 6. — С. 5–30.
70. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I // АиТ. — 1967. — Т. 28, № 9. — С. 59–72.
71. Частотные условия устойчивости нелинейных интегральных уравнений автоматическ го управления // Вестн. ЛГУ. — 1967. — № 7, вып. 2. — С. 103–125.
72. Три теоретические схемы обучаемых опознающих систем // В сб.: «Самонастраивающиеся системы». Распознавание образов. Конечные автоматы и релейные устройства. — М.: Наука. — 1967. — С. 183–191.
73. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // АиТ. — 1968. — № 2. — С. 81–101.
74. К теории адаптивных систем // ДАН СССР. — 1968. — № 3. — С. 518–522.
75. Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // ДАН СССР. — 1968. — Т. 180, № 2. — С. 283–294.
76. Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями // ДАН СССР. — 1968. — Т. 183, № 2. — С. 303–306.
77. Применение обучаемых опознающих систем для выделения сигнала из шума // Вычислительная техника и вопросы кибернетики, № 5. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1968, — С. 95–100. (Совместно с А. Х. Гелигом).
78. Об одной задаче самообучения целесообразному поведению // АиТ. — 1969. — № 8. — С. 119–139.
79. Математический анализ устойчивости висячих мостов на примере Такомского моста // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1969. — № 1. — С. 80–91. (Совместно с Б. Г. Питтелем).
80. Конечно-сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах синтеза адаптивных систем // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 3. — С. 495–498.
81. Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений, для которых вопросы об устойчивости в целом и о неустойчивости могут быть решены эффективно // ДАН СССР. — 1969. — Т. 186, № 5. — С. 1027–1030.

82. Существование решений линейных гамильтоновых уравнений с неограниченными коэффициентами // Проблемы математ. анализа, вып.2 (линейные операторы). Л.: Изд-во ЛГУ, — 1969. — С. 3–28. (Совместно с В. И. Дергузовым).
83. Замечание к теореме Флоке–Ляпунова // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1970. — № 1, вып. 1. — С. 88–92.
84. Частотные условия некоторых топологических типов поведения «в целом» решений нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. — 1970. — Т. 25, вып. 2. — С. 233–234.
85. Канонические периодические и нелинейные уравнения автоматического регулирования // Математика в Петербургском-Ленинградском университете. Л.: Изд-во ЛГУ, — 1970. — С. 155–172. (Совместно с В. Н. Фоминым).
86. Адаптивная модель человека–оператора в одной задаче преследующего слежения // Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 7, Биологические и медицинские вопросы кибернетики. Киев: Институт кибернетики, — 1970. — С. 56–58. (Совместно с А. В. Тимофеевым).
87. Решение одной алгебраической задачи, встречающейся в теории управления // ДАН СССР. — 1970. — Т. 193, № 1. — С. 57–60.
88. Факторизация симметричных матричных многочленов // ДАН СССР. — 1970. — Т. 194, № 8. — С. 532–536.
89. О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195. № 2. — С. 296–299.
90. Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I. Общие частотные критерии // АиТ. — 1970. — № 12. — С. 5–14.

1971–1975

91. S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. — 1971, № 1. — С. 62–77.
92. Абсолютная неустойчивость нелинейных регулируемых систем. II. Система с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // АиТ. — 1971. — № 6. — С. 25–33.
93. Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задачах минимизации квадратичных функционалов // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 2. — С. 258–261. (Совместно с В. А. Андреевым и Ю. Ф. Казариновым).
94. О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре на конечном интервале времени с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 3. — С. 548–551.
95. Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечной системы неравенств // Обучаемые опознающие системы. — М.: Наука, 1971. (Совместно с В. Н. Фоминым).
96. О книге Гаврилова Н. И. «Проблемы Римана о распределении корней дзэта-функции» // УМН. — 1971. — Т. 26, № 3 (159). — С. 238–247. (Совместно с А. Н. Андриановым, А. И. Виноградовым, Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым).

97. О некоторых задачах адаптивного управления // ДАН СССР. — 1971. — Т. 198, № 4. — С. 787–790. (Совместно с Г. Д. Пеневым).
98. Об одном классе самообучающихся систем, обладающих целесообразным поведением // Управление и информационный процесс в живой природе. — М.: Наука. — 1971. — С. 111–114. (Совместно с А. В. Тимофеевым).
99. Об одном методе построения адаптивного управления в условиях большой неопределенности // Тр. V Всесоюз. сов. по пробл. управления. — М., 1971. — С. 123–125.
100. Одна задача распознавания и описания изображений // Биологическая медицина и кибернетическая бионика. Киев: Изд-во Научного совета по кибернетике и Института кибернетики, 1971. (Совместно с А. В. Тимофеевым, В. В. Харичевым, А. А. Шмидтом).
101. Об одном классе адаптивных систем и о результатах моделирования на ЭВМ процесса их самообучения // Механизмы и принципы целенаправленного поведения. — М.: Наука, — 1972. — С. 50–79.
102. Критические частоты систем, инвариантных относительно обращения времени // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1972. — № 7. — С. 71–82. (Совместно с Р. И. Шепелевой).
103. Частотные условия автоколебаний в нелинейных регулируемых системах // АиТ. — 1972. — № 2. — С. 30–39. (Совместно с В. Г. Георгиевским и М. В. Левитом).
104. Алгебраические критерии стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум» // ПММ. — 1972. — Вып. 1. — С. 143–146. (Совместно с М. В. Левитом).
105. Об одном классе адаптивных (самообучающихся) систем // Оптимальные адаптивные системы. — М.: Наука, 1972.
106. О синтезе оптимальных управлений в задаче минимизации квадратичного функционала // Elektroninsche Informationsverarbeitung und Kybernetik (EIK). — 1972. — B. 8, H. 6/7. — S. 391–428. (Совместно с В. А. Андреевым и Ю. Ф. Казариновым).
107. On a method of adaptive control under conditions of great uncertainty // Preprints of the 5th World Congress IFAC (Paris). — 1972. — V. 37, № 3. — P. 1–6.
108. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. — М.: Наука, 1972. (Совместно с В. М. Старжинским).
109. Одна теорема об устойчивости линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами // Краевые задачи математической физики, вопросы теории функций. — Л.: Наука. 1972. — № 6. — С. 220–234.
110. Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия в квадратичном критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 5. — С. 1033–1042.
111. Частотная теорема в теории управления // Сиб. матем. журн. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 384–420.
112. S-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1973. — № 1. — С. 81–87. (Совместно с А. Л. Фрадковым).

113. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости при некоторых видах квадратичных ограничений // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 2. — С. 312–315.

114. Об одной новой задаче распознавания образов // АиТ. — 1973. — № 1. — С. 109–122. (Совместно с А. А. Шмидтом и В. В. Харичевым).

115. Обучаемые распознающие системы и рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения бесконечных систем неравенств. В кн.: Алгоритмы обучения распознаванию образов. — М.: Сов. радио, 1973. — С. 29–42. (Совместно с В. Н. Фоминым).

116. Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. матем. журн. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 1100–1129.

117. Об организации «мозга» адаптивных систем с одношаговым целевым условием // Проблемы бионики. — М.: Наука, 1973. — С. 355–360.

118. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости в классах систем с двумя интегральными квадратичными связями // ДАН СССР. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 798–901. (Совместно с А. Л. Фрадковым).

119. Об одном методе построения адаптивного управления линейным динамическим объектом в условиях большой неопределенности // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Изд-во Научного совета АН СССР по кибернетике, — 1974. — С. 46–61.

120. Адаптивное управление температурой процесса полимеризации в производстве синтетического каучука // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Изд-во Научного совета АН СССР по комплексным проблемам кибернетики, 1974. — С. 196–203. (Совместно с Г. С. Аксеновым, В. М. Брейтманом, А. В. Заком, Б. Д. Любачевским, Г. Д. Пеневым и Б. А. Перлиным).

121. Критические частоты параметрического резонанса в классе дробнопериодических уравнений, инвариантных относительно обращения времени // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1974. — № 13. — С. 64–73. (Совместно с Р. И. Шепелевой).

122. Априорная оценка убывания убывающих решений нелинейных систем // УМН. — 1974. — Т. 39, вып. 3. — С. 230–240.

123. Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами // АиТ. — 1974. — № 4. — С. 116–127. (Совместно с Б. Д. Любачевским).

124. Про один з класів адаптивних моделей людини-оператора в системі керування // Автоматика (журнал Ин-та кибернетики АН УССР). — 1974. — № 2. — С. 52–85. (Совместно с А. В. Тимофеевым).

125. Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления, I // Сиб. матем. журн. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 639–668.

126. Частотные условия существования двух почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 916–924. (Совместно с И. М. Буркиным).

127. Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления, II // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1081–1102.
128. Частотные условия колебаний в нелинейных регулируемых системах с одной однозначной или гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1975. — № 12. — С. 51–65.
129. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, Vols. I and II (Coauthor V. M. Starghinskii). — New York: John Wiley & Sons, 1975.
130. Методы теории абсолютной устойчивости / В кн.: Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А.Нелепина. — М.: Наука, 1975. — С. 74–174.
131. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояния и управления // Вес. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1975. — Вып. 1. — С. 22–31. (Совместно с В. Г. Антоновым и А. Л. Лихтарниковым).
132. Критические частоты канонических дробно-периодических уравнений // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 3. — С. 612–622. (Совместно с Р. И. Шепелевой).
133. О специальном представлении эрмитовых форм, встречающихся в теории игр // УМН. — 1975. — Т. 30, вып. 5. — С. 198–201. (Совместно с В. Г. Антоновым).
134. Частотные условия существования двух почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 916–924. (Совместно с И. М. Буркиным).
135. Об определении оптимальных стратегий в линейных дискретных играх с квадратичным функционалом платежа // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1975. — Т. 19. — С. 7–17. (Совместно с В. Г. Антоновым).
136. К задаче распознавания и описания сложных изображений // Тр. Междунар. симпозиума ИФАК по идентификации. — Тбилиси, 1975, — С. 8.207–8.213. (Совместно с В. В. Харичевым, А. М. Шведовым и А. А. Шмидтом).
137. Об одной иерархической системе управления интегральным роботом // Тр. VI междунар. объединенной конф. по искусственному интеллекту. — М., И-т проблем управления, — 1975. — С. 76–85. (Совместно с С. В. Гусевым и А. В. Тимофеевым).

1976–1980

138. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексным проблемам кибернетики, 1976. — С. 32–64.
139. Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.–Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексным проблемам кибернетики, 1976. — С. 170–174. (Совместно с А. В. Тимофеевым).
140. Адаптивная оптимизация нелинейного объекта в условиях помех // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.–Л.: Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексным проблемам кибернетики, 1976. — С. 123–128. (Совместно с Д. П. Деревицким и А. Л. Фрадковым).

141. Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии запаздывания в управлении // Кибернетика. — 1976. — № 1. — С. 26–43.

142. Адаптивное управление манипулятором с шаговыми приводами // Робототехника. — Л.: Изд-во ЛПИ, — 1976. — С. 66–74. (Совместно с А. М. Лачиновым, С. А. Самарским и А. В. Тимофеевым).

143. Некоторые варианты абстрактного принципа максимума // ДАН СССР. — 1976. — Т. 229, № 4. — С. 816–819.

144. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1976. — № 19. — С. 69–76. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым и В. И. Пономаренко).

145. Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1069–1085. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).

146. К абстрактной теории оптимального управления, I // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 685–707.

147. Адаптация в робототехнических системах с искусственным интеллектом // VII Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов. Минск. — 1977. — С. 279–282. (Совместно с С. В. Гусевым, А. В. Тимофеевым).

148. Метод рекуррентных целевых неравенств в задачах адаптивного субоптимального управления динамическими объектами // Адаптивные системы управления. — 1977. — С. 16–28. (Совместно с В. И. Пономаренко).

149. Частотная теорема для однопараметрических полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977, № 4. — С. 895–911. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).

150. К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1977. — № 13. — С. 100–113.

151. Адаптивное управление полимеризационным реактором // Приборы и системы управления. — 1977. — № 12. — С. 685–707. (Совместно с В. П. Дождевым, Б. Д. Любачевским, Б. А. Перлиным и Б. М. Соколовым).

152. Частотные методы качественного исследования нелинейных регулируемых систем // VII Int. Konf. über nichtlineare Schwingungen. B. 1. — Berlin: Akademie-Verlag, — 1977. — S. 365–387.

153. Алгоритмы адаптивного управления очувствленным транспортным роботом на местности с препятствиями // Робототехника. Системы управления и очувствления. Тез. I Всесоюз. межвуз. конф. — Каунас, 1977. — С. 248–253. (Совместно с С. В. Гусевым, В. И. Ружанским, А. В. Тимофеевым и Р. Б. Фроловым).

154. Квадратичный критерий условной абсолютной устойчивости и его применение // Динамика систем. — Горький, 1977. — Вып. 12. — С. 54–67. (Совместно с А. В. Жарковым).

155. Линейные гамильтоновы системы // Матем. энциклопедия. Т. 1. — М.: Сов. энциклопедия, 1977. — С. 861–865.

156. Третий Ленинградский симпозиум «Теория адаптивных систем» // АиТ. — 1977. — № 12. — С. 160–164. (Совместно с А. Л. Фрадковым).

157. Частотные условия колебаний в системе с одной дифференцируемой нелинейностью // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 264–269.

158. Частотная теорема и теорема о стабилизации для неограниченных операторов // УМН. — 1978. — Т. 33, вып. 2 (200). — С. 195–196. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).

159. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1109–1140. (Совместно с А. С. Матвеевым).

160. Частотные критерии инвариантности систем управления с одним нелинейным блоком // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240, № 2. — С. 283–286.

161. Адаптивная система управления автономным подвижным роботом // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1978. — № 6. — С. 52–63. (Совместно с Б. А. Беленковым, С. В. Гусевым, Ю. К. Зотовым, В. И. Ружанским, А. В. Тимофеевым и Р. Б. Фроловым).

162. Алгоритмы тематической фильтрации и их применение в задаче распознавания сложных изображений // АиТ. — 1978. — № 2. — С. 161–175. (Совместно с А. А. Шмидтом).

163. К абстрактной теории оптимального управления, II // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 2. — С. 436–460.

164. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. (Совместно с Г. А. Леоновым и А. Х. Гелигом).

165. К абстрактной теории оптимального управления, III // Сиб. матем. журн. — 1979. — Т. 20, № 4. — С. 385–410.

166. Инвариантные системы признаков в распознавании образов // АиТ. — 1979. — № 3. — С. 131–142. (Совместно с А. М. Шведовым и А. А. Шмидтом).

167. К абстрактной теории оптимального управления, IV // Сиб. матем. журн. — 1979. — Т. 20, № 5. — С. 1131–1159.

168. Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 5–11. (Совместно с Н. Е. Барабановым).

169. Квадратичный критерий диссипативности дискретных систем и его применение к задачам адаптивного управления // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. — М.: Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексным проблемам кибернетики, 1979. — С. 33–69. (Совместно с В. А. Бондарко).

170. Принцип максимума в задаче оптимизации регуляторов // Вес. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1980. — № 7. — С. 55–68.

171. О применении абстрактной теории оптимизации к решению задачи оптимального управления с распределенными параметрами // Дифференциальные уравнения с частными производными. — Новосибирск: Наука, 1980. — С. 186–188. (Совместно с А. С. Матвеевым).

172. Алгоритм адаптивного управления роботом-манипулятором // АиТ. — 1980. — № 9. — С. 101–111. (Совместно с С. В. Гусевым).

1981–1985

173. Условия полуограниченности квадратичного функционала на подпространстве гильбертова пространства // Вест. ЛГУ, Сер. 1. — 1981. — № 19. — С. 50–53.

174. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981. (Совместно с В. Н. Фоминым и А. Л. Фрадковым).

175. Задача оптимального управления движением для случая, когда управление — функция заданного выхода системы // Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. — М.: Наука, 1981. — С. 274–290.

176. Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем: результаты и проблемы // Вопросы кибернетики. Задачи и методы адаптивного управления. — М.: Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексным проблемам кибернетики, 1981. — С. 19–39. (Совместно с В. А. Бондарко).

177. 4-й Ленинградский симпозиум «Теория адаптивных систем» // АиТ. — 1981. — № 4. — С. 192–196. (Совместно с А. Л. Фрадковым).

178. Принцип максимума в задаче оптимизации регуляторов для случая векторного выхода системы // Кибернетика и вычислительная техника. — 1981. — Вып. 51. — С. 3–11. (Совместно с Д. Е. Гусевым).

179. Условия полуограниченности квадратичного функционала на подпространстве гильбертова пространства // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. — 1981. — № 19. — С. 50–53.

180. Линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Мат. энциклопедия. Т. 3. — М.: Сов. энциклопедия, 1982. — С. 312–317.

181. Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применение. I // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 4. — С. 103–121. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).

182. Синтез субоптимальной адаптивной системы с эталонной моделью для управления дискретным линейным динамическим объектом // Адаптация и обучение в системах управления и принятия решений. — Новосибирск: Наука, 1982. — С. 10–27. (Совместно с В. А. Бондарко).

183. Frequency methods of qualitative investigation of nonlinear systems // Advances in Theoretical and Applied Mechanics. Ed. A. Yu. Ishlinsky and F. L. Chernousko. — Moscow: MIR Publishers, 1982. — P. 102–126.

184. Условия полуограниченности квадратичных функционалов на пространствах Харди // Вес. ЛГУ, Сер. 1. — 1982. — № 1. — С. 11–18. (Совместно с Д. З. Аровым).

185. Абстрактные критерии абсолютной устойчивости по линейному выходу и их применение, II // Сиб. матем. журн. — 1983. — Т. 14, № 5. — С. 129–148 (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).

186. Абстрактная теория абсолютной устойчивости и ее применения // Кибернетика и вычислит. механика. — Киев, 1983. — Вып. 58. — С. 3–8.

187. Теорема о магистрали в задаче непрерывной оптимизации // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. — 1983. — № 2. — С. 20–27. (Совместно с Д. Е. Гусевым).

188. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. Дополнение к книге В. Резвана «Абсолютная устойчивость нелинейных систем с запаздыванием». — М.: Наука, 1983. — С. 287–355. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).
189. Задача оптимизации при фазовых ограничениях в разные моменты времени // АиТ. — 1983. — № 1. — С. 50–59. (Совместно с В. А. Поповым).
190. Графические критерии абсолютной устойчивости и неустойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1983. — Т. 271, № 2. — С. 307–310.
191. Algorithms of adaptive control of robot movement // Mechanism and Machine Theory (Great Britain), 983. — Vol. 18, № 4. — P. 279–281. (Совместно с С. В. Гусевым, А. В. Тимофеевым и Е. И. Юревичем).
192. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с распределенными параметрами. I // АиТ. — 1983. — № 6. — С. 53–61.
193. Turnpike theorem in the problem of continuous optimization with phase restrictions // Syst. Control Lett. — 1983. — № 3. — P. 221–226. (Co-author D. E. Gusev).
194. Принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений с детерминированным управлением // Кибернетика и вычислительная техника. — Киев: Наукова думка, — 1983. — № 5. — С. 72–78. (Совместно с Н. Г. Докучаевым).
195. Эквивалентные обратные связи в линейных стационарных системах управления // АиТ. — 1984. — № 2. — С. 54–65. (Совместно с Е. Д. Якубович).
196. Достаточные условия в задачах оптимального управления // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. — 1984. — № 2, вып. 1. — С. 53–58.
197. Синтез грубых реализуемых регуляторов в стохастических задачах управления линейными стационарными системами // Изв. Вузов. Приборостроение. — 1984. — Т. 27, № 9. (Совместно с А. Е. Барабановым).
198. Оптимальное программное управление стохастическим объектом в случае ограничения на состояние для каждого момента времени // АиТ. — 1984. — № 7. — С. 49–57. (Совместно с Н. Г. Докучаевым).
199. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // АиТ. — 1984. — № 8. — С. 5–44.
200. Сингулярная задача оптимального управления линейной стационарной системой с квадратичным функционалом // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 1. — С. 189–200.
201. Теория адаптивных систем (метод рекуррентных целевых неравенств) // УМН. — 1985. — Т. 40, вып. 2 (242). — С. 216–217.
202. Теоретические принципы построения самообучающихся роботов // Вопросы кибернетики. Проблемы теории и практики адаптивного управления. — М.: Изд-во Научного совета АН СССР по комплексным проблемам кибернетики, 1985. — С. 94–105.
203. Абсолютная устойчивость по заданному выходу нелинейных систем с частными производными // Устойчивость движения. Сиб. отделение АН СССР, Иркутский вычисл. центр. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 22–25.
204. Устойчивость абсолютная // Математическая энциклопедия. Т. 5. — М.: Сов. энциклопедия, 1985. — С. 562–566.

1986–1990

205. An optimal control for linear stochastic systems with periodic coefficients // Second IFAC Sympos. on Stochastic Control, Vilnius, — 1986. — Pt. 1. — Moscow, 1986. (Co-author Yu. F. Kasarinov).

206. Частотная теорема для периодических систем // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 1. — С. 70–73.

207. Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27, № 4. — С. 181–200.

208. Дихотомия, абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость нелинейных систем с периодически нестационарной линейной частью // УМН. — 1987. — Т. 42, вып. 4 (256). — С. 136.

209. Применение теории линейных периодических гамильтоновых систем к задачам абсолютной устойчивости нелинейных систем с периодически нестационарной линейной частью // Вест. ЛГУ, Сер. 1. — 1987. — № 15, вып. 3. — С. 55–60.

210. Абсолютная устойчивость нелинейных периодических систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. — М., 1987. — С. 88–101.

211. Частотная теорема и теория аналитического конструирования регуляторов для периодических систем // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. — Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1987. — С. 281–290.

212. Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. (Совместно с В. М. Старжинским).

213. Метод рекуррентных целевых неравенств в адаптивном управлении // Гл. 11 в книге «Справочник по теории автоматического управления». — М.: Наука, 1987. — С. 501–526.

214. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с периодически нестационарной линейной частью // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 299–303.

215. Адаптивная стабилизация непрерывных линейных объектов // АиТ. — 1988. — № 4. — С. 97–107.

216. Орбитальная устойчивость периодических лапласовых движений в задаче о трех телах. // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. — 1988. — № 15, вып. 3. — С. 106–108. (Совместно с И. А. Полуниным).

217. Dichotomy and absolute stability of nonlinear systems with periodically nonstationary linear part // Syst. Control Lett. — 1988. — V. 11. — P. 211–218.

218. Линейно-квадратичная сингулярная задача оптимального управления стационарной системой // Деп. в ВИНИТИ, 05.08.88, № 6287-В 88. (Совместно с А. В. Мегрецким).

219. Linear system of differential equations with periodic coefficients // Math. Encyclopedia. — Netherlands, 1989. — V. 3. — P. 312.

220. Hamiltonian linear system // Math. Encyclopedia. Netherlands, — 1989. — V. 3. — P. 801.

221. Условия автоколебаний в нелинейных системах // Сиб. матем. журн. — 1989. — Т. 30, № 4. — С. 180–195. (Совместно с Э. А. Томбергом).
222. Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем // Сиб. матем. журн. — 1990. — Т. 31, № 6. — С. 176–191.
223. Сингулярная неоднородная линейно-квадратичная задача оптимального управления // Тр. Ленинград. матем. общества. — 1990. — Т. 1. — С. 134–174. (Совместно с А. В. Мегрецким).
224. Методы теории абсолютной устойчивости в задачах инвариантности // Кибернетика и вычислительная техника. — Киев: Наук. думка, 1990. — Вып. 85. — С. 1–13.

1991–1995

225. Сингулярные линейно-квадратичные задачи оптимизации // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. — Новосибирск: Наука, 1991. — С. 170–175. (Совместно с А. В. Мегрецким).
226. Неосцилляторность линейных периодических гамильтоновых уравнений и смежные вопросы // Алгебра и анализ. — 1991. — Т. 3, вып. 5. — С. 229–253.
227. Stability of nonlinear systems with periodically nonstationary linear part // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1991. — Bd. 10, H. 3. — S. 345–355.
228. Nonconvex optimization problem: The infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints // Syst. Control Lett. — 1992. — V. 19. — P. 13–22.
229. Об одном методе решения специальных задач глобальной минимизации // Вест. СПбГУ, Сер. 1. — 1992. — Вып. 2, № 8. — С. 58–68.
230. Функциональная идентификация линейных бесконечномерных систем // Докл. РАН. — 1992. — Т. 327, № 4–6. — С. 455–459.
231. The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control and Signal Proc. — 1992. — V. 6. — P. 141–160. (Co-author V. A. Bondarko).
232. Стохастическая линейно-квадратичная задача оптимального управления для стационарных систем с квадратичными ограничениями // Техн. кибернетика. — 1992. — № 6. — С. 135–145. (Совместно с Н. Г. Докучаевым).
233. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, вып. 6. — С. 110–142. (Совместно с А. С. Матвеевым).
234. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний при неизвестном гармоническом внешнем воздействии // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 2. — С. 170–172.
235. Оптимальная стабилизация системы управления при наличии ограничений на выходную переменную // АиТ. — 1993. — № 9. — С. 79–88. (Совместно с Е. Д. Якубович).
236. Singular stationary nonhomogeneous linear quadratic optimal control // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 155 (2). — P. 129–167. (Co-author A. V. Megretskii).
237. Linear-quadratic optimization problems with quadratic constraints // Europ. Control Conf., Groningen. The Netherlands. — 1993. — V. 1. — P. 346–349.

238. Абсолютная устойчивость нелинейных систем с нестационарной линейной частью // Изв. Вузов. Математика. — 1993. — № 4. — С. 101–105. (Совместно с А. В. Савкиным).
239. О работах М. Г. Крейна по теории линейных периодических гамильтоновых систем // Укр. мат. журнал. — 1994. — Т. 46, № 1/2. — С. 128–144.
240. Работы Владимира Ивановича Смирнова в области аналитической теории дифференциальных уравнений // Владимир Иванович Смирнов. Под ред. О. А. Лодыженской. — СПб.: Наука, — 1994. — С. 122–136.
241. Absolute stability of nonlinear discrete systems // Revue Roumaine de Mathemat. Pures et Appl. — 1994. — T. 39, № 4. — P. 385–389.
242. Оптимальное гашение вынужденных колебаний по заданному выходу системы // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 3. — С. 323–327.
243. Задача об оптимальном отслеживании детерминированных гармонических сигналов с известным спектром // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 4. — С. 463–466.
244. Универсальный регулятор для оптимального гашения вынужденных стохастических колебаний в линейной системе // Докл. РАН. — 1994. — Т. 338, № 1. — С. 19–24.
245. Абстрактная теория оптимального управления. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994. (Совместно с А. С. Матвеевым).
246. Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // Докл. РАН. — 1995. — Т. 343, № 2. — С. 172–175.
247. Universal regulators in linear-quadratic optimization problem // Trends in Control. European Perspective. (Ed.) Alberto Isidori — 1995. — P. 53–67.
248. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. By S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan. (Book review) // SIAM Rev. — 1995. — V. 37, № 3. — P. 479–481.

1996–2000

249. Dissipativity of T-periodic linear systems // Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, Dec. 11–13. — 1996. — P. 3953–3957. (Co-authors A. L. Fradkov and D. Hill).
250. Optimal damping of forced stochastic oscillations in linear systems in the case of unknown spectral density of external disturbances // Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, Dec.11–13. — 1996. — P. 3200–3203.
251. Универсальный регулятор для оптимального гашения вынужденных колебаний в линейных системах с запаздыванием // Докл. РАН. — 1996. — Т. 346, № 3. — С. 319–323.
252. Универсальные регуляторы в линейно-квадратичной задаче оптимального отслеживания // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 313–317.
253. Nonconvex problems of global optimization: linear-quadratic control problems with quadratic constraints // Dynamics and Control. — 1997. — V. 7, № 2. — P. 99–134. (Co-author A. S. Matveev).
254. Универсальные регуляторы для оптимального гашения вынужденных колебаний в линейных дискретных системах // Докл. РАН. — 1997. — Т. 352, № 3. — С. 314–317. (Совместно с А. Линдквистом).

255. Универсальные регуляторы в стохастических задачах оптимального управления линейными стационарными объектами // АиТ. — 1997. — № 6. — С. 170–182.
256. Дихотомия и абсолютная устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, вып. 6. — С. 132–155. (Совместно с А. Л. Лихтарниковым).
257. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems // IEEE Trans. Automatic Control. — 1997. — V. 42, № 6. — P. 786–802. (Co-author A. Lindquist).
258. Оптимальное отслеживание гармонических сигналов в линейных системах при наличии помех в измерениях // Докл. РАН. — 1997. — Т. 353, № 1. (Совместно с А. С. Ширяевым).
259. Nonconvex optimal control problems // Proc. of 2nd IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems. Smolenice, Slovak Republic, Sept. 7–10, 1997.
260. Universal regulators for optimal damping and tracking in discrete-time systems with harmonic external disturbances // Proc. 1st Int. Conf. «Control of Oscillations and Chaos». St. Petersburg, Russia, Aug. 27–29. — 1997. — V. 1. — P. 1–3. (Co-author A. Lindquist).
261. Квадратичный критерий абсолютной устойчивости // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361, № 5. — С. 608–611.
262. Adaptive motion control of nonholonomic vehicle // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Belgium, May 16–20. — 1998. — P. 3285–3290. (Co-authors S. V. Gusev, I. K. Paromtchik, I. A. Makarov).
263. Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания сигналов в линейных дискретных системах // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361, № 2. — С. 177–180. (Совместно с А. Линдквистом).
264. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации в теории управления // Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНИТИ, 1998. — Т. 60. — С. 128–175. (Совместно с А. С. Матвеевым).
265. Universal regulators for optimal tracking in discrete-time systems affected by harmonic disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, № 9. — P. 1688–1704. (Co-author A. Lindquist).
266. Adaptive stabilization of a mechanical system with nonholonomic constraints // 6th St.-Petersburg Sympos. on Adaptive Systems Theory. — Saint-Petersburg, Sept. 1999. — P. 101–104. (Co-authors S. V. Gusev, I. K. Paromtchik, I. A. Makarov).
267. Tracking domains for unstable plants with saturating-like actuators // Asian J. Control. — 1999. — V. 1, № 4. — P. 229–244. (Co-authors K. Furuta and S. Nakaura).
268. Частотные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем // Нелинейные науки на рубеже веков. / Под ред. В. М. Матросова. — М.: Наука, 2000. — С. 10–21.
269. Об одной задаче Смейла // Сиб. матем. журн. — 2000. — Т. 41, № 4. — С. 926–928. (Совместно с Э. А. Томбергом).
270. Necessity of quadratic criterion for absolute stability // Int. J. Robust and Nonlinear Control. — 2000. — V. 10. — P. 889–904.

271. Необходимость в квадратичном критерии абсолютной устойчивости систем с периодически нестационарной линейной частью // АиТ. — 2000. — № 12. — С. 62–74.

2001–2006

272. Синтез стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих независимость выходной переменной системы управления от внешнего воздействия // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 27–30.
273. Trajectory tracking problem for automatic steering and related topics // Trans. of French-Russian A. M. Liapunov Institute for Applied and Computer Science. Moscow, — 2001. — V. 2. — P. 5–19. (Co-authors I. A. Makarov, I. E. Zuber).
274. Popov's method and its subsequent development // Eur. J. Control. — 2002. — V. 2, № 3. — P. 200–208.
275. Nonconvex global optimization problems: constrained infinite horizon linear-quadratic control problems for discrete systems // Directions Math. Syst. Theory and Optimization. A. Rantzer, C. I. Byrnes (Eds). LNCIS. — 2003. — V. 286. — P. 359–382.
276. Задача об инвариантности системы управления // Докл. РАН. — 2003. — Т. 389, № 6. — С.742–746. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
277. Приближенное решение задачи об инвариантности системы управления // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 6. — С.750–754. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
278. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. (Совместно с А. С. Матвеевым).
279. Задача об абсолютной инвариантности для систем управления с запаздыванием // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 5. — С. 610–614. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
280. Частотные критерии дихотомии и абсолютной устойчивости для интегральных уравнений с квадратичными связями, содержащими запаздывание // Докл. РАН. — 2004. — Т. 399, № 6. — С. 747–752. (Совместно с Д. Альтшуллером и А. В. Проскурниковым).
281. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities Singapore: World Scientific, 2004. (Co-authors G. A. Leonov and A. Kh. Gelig).
282. Синтез стабилизирующего регулятора в задаче отслеживания // Докл. РАН. — 2005. — Т. 404, № 3. — С. 321–325. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
283. Задача об инвариантности системы управления по части выходных переменных // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 1. — С.30–34. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
284. Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания полигармонических сигналов в системах с запаздыванием // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 2. — С.109–174. (Совместно с А. В. Проскурниковым).
285. Универсальный регулятор для отслеживания стохастических сигналов с неизвестной спектральной плотностью // Докл. РАН. — 2006. — Т. 409, № 4. — С.461–466. (Совместно с А. В. Проскурниковым).

Р. У. Брокетт[†]

Диапазон влияния работ В. А. Якубовича[*]

Летом 1960 г. в Москве проводился первый конгресс Международной Федерации Автоматического Управления (IFAC — International Federation of Automatic Control). Для многих присутствующих этот конгресс стал актом интернационализации теории и практики управления. Несмотря на то, что результаты, изложенные в статьях трудов конгресса несколько предшествовали по времени наиболее законченным результатам в области унификации идей пространства состояний и частотной области, они определенно стали начальным шагом на пути к важным научным работам Якубовича, Калмана, Попова, Айзермана, Цыпкина и их последователей. Год 1960 стал для меня также годом поступления в аспирантуру. Мой руководитель, Михайло Месарович (Mihajlo Mesarovic), и большинство его коллег в группе управления принимали участие в московской конференции и те аспиранты, что учились у них, получили большой заряд энергии от того импульса, который был сгенерирован этим событием. Мои первые научные исследования, касающиеся проблемы спектральной факторизации матриц, получили свое продолжение в работах, посвященных задачам управления многомерными системами, и заключались в построении представления обратных систем в виде дифференциальных уравнений. В 1963 г., когда стали появляться посвященные устойчивости в частотной области работы Якубовича и других авторов, многие были вовлечены в этот круг идей. В течении последующих шести лет постепенного превращения из студента в новообращенного преподавателя доминирующим аспектом в моей преподавательской и научной деятельности была взаимосвязь между методологиями пространства состояний и частотными методами. В сотрудничестве со студентами и коллегами мы присоединились к исследованиям вопросов устойчивости нелинейных, зависящих от времени, многомерных и неустойчивых систем, проблем существования в таких системах колебаний и других задач. Как и большинство американцев того поколения, я не изучал русский язык, но широко представленные в библиотеках переводные журналы «Автоматика и телемеханика» и «Прикладная математика и механика» обеспечивали поток научной информации из Москвы, Санкт-Петербурга, Бухареста и других городов. В течении этого периода были разработаны

[†]) Division of Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, USA.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала Int. J. of Robust & Nonlinear Control: The wider influence of the work of V. A. Yakubovich. — 2007. — Vol. 17, Issue 5–6. — P. 363–368. Перев. с англ. — И. А. Макаров.

различные методологии рассмотрения взаимосвязей между передаточными функциями и дифференциальными уравнениями, но лемма, впервые предложенная Якубовичем, была доминирующим результатом в этой области.

В начале 1930-х годов инженер из Южной Африки Отто Брюн ввел в своей работе, посвященной задаче синтеза пассивных линейных электрических цепей, понятие положительной вещественной функции. В совершенно другой области, но приблизительно в то же время, специалист в области функционального анализа Соломон Бохнер ввел несколько более общую концепцию «положительно определенных функций», представляющих собой преобразование Фурье соответствующих положительных вещественных функций Брюна. К началу 1950-х годов теория синтеза линейных пассивных электрических цепей была одним из наиболее полно разработанных вопросов электротехники — по крайней мере, с математической точки зрения. Рациональные положительные вещественные функции играют центральную роль при синтезе электрических цепей, поскольку полное сопротивление (импеданс) является положительной вещественной функцией и каждая рациональная положительная вещественная функция может быть реализована как импеданс некоторой пассивной сети. Несмотря на все вышесказанное, ко времени разработки KYP-леммы слова о положительной вещественности не были распространены среди исследователей в области теории управления.

Представленное в этой работе описание исследований будет сгруппировано вокруг нескольких тем: оптимальное управление, устойчивость, неустойчивость и автономные колебания. К этому списку я добавил привлекающий меньшее внимание вопрос о устойчивости периодических гамильтоновых систем, поскольку эта тема была исследована в ранних работах профессора Якубовича, а также потому, что в этой области возможны дальнейшие исследования.

KYP-лемма и линейно квадратичные задачи оптимального управления. В разработанной в 1940-х годах теории фильтрации и оценивания исследуется энергетический спектр стационарного стохастического процесса и используются методы спектральной факторизации для нахождения оптимального причинного прогноза (causal predictor). В 1950-х годах некоторые аспекты этой методологии были использованы при исследовании линейно квадратичных задач управления, но полученные результаты были быстро забыты, так как в области оптимального управления стали доминировать более общие теории. В целях введения необходимых в дальнейшем изложении обозначений, а также ознакомления читателя с некоторыми основными фактами, связанными с KYP-леммой, рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + bu$ и квадратичные показатели качества (quadratic performance measures) вида

$$\eta = \int\limits_0^\infty \left(x^T Qx + 2x^T Tu + u^T Ru\right) dt.$$

Прибавим и вычтем из η квадратичный член $x^T K(t)x$. В результате этого получаем эквивалентное представление

$$\eta = -x^T Kx\Big|_0^\infty + \\ + \int\limits_0^\infty \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot K + A^T K + KA + Q & Kb + T \\ b^T K + T^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt.$$

Ключевым моментом является то, что если существует матрица K, удовлетворяющая равенству

$$\dot K = -A^T K - KA - (Kb + T)R^{-1}(b^T K + T^T) + Q,$$

то выражение для η может быть переписано в терминах подынтегральной функции, являющейся полным квадратом:

$$\eta = -x^T Kx\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \left\| \sqrt{R}^{\,-1}(b^T K + T^T)x + \sqrt{R}\,u \right\|^2 dt.$$

Очевидно, что если такое представление существует, то для решения вариационной задачи необходимо $u = R^{-1}(b^T K + T^T)x$. Разумеется, не следует ожидать, что для приведенного квадратичного дифференциального уравнения решение K существует всегда — для этого на параметры должны быть наложены определенные ограничения. Далее, если существует состояние равновесия исходной задачи, вышеуказанных решений может быть несколько и среди них необходимо выделить то, которое определяет соответствующие свойства устойчивости. Для достижения этой цели решающее значение имеют идеи, связанные с теоремой Парсеваля.

В частном случае, когда η определяется равенством

$$\eta = \int\limits_0^\infty \Big((1+\beta)u^2 - (\beta cx - u)^2\Big)\, dt,$$

условие существования минимума может быть удобно представлено в терминах передаточной функции $g(s) = c(Is - A)^{-1}b$ и имеет следующий вид:

$$1 + \beta - |\beta g(i\omega) - 1|^2 \geqslant 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

Этот результат является следствием теоремы Парсеваля, и из него следует, что для дифференциального уравнения

$$\dot K = -A^T K - KA + \beta^{-1}(Kb - c)(Kb - c)^T - \beta^2 cc^T$$

существует состояние равновесия. Из частотного условия имеем

$$1 + \beta - |\beta g(i\omega) - 1|^2 = \beta\left(\beta|g(i\omega)|^2 + g(i\omega) + g(-i\omega)\right).$$

Если $g(s)$ положительно вещественна и ограничена на мнимой оси и если β положительна, то это неравенство будет выплнено при достаточно малой β. Пусть $K(\beta)$ — решение уравнения

$$-A^TK - KA + \beta^{-1}(Kb - c)(Kb - c)^T - \beta^2 cc^T = 0.$$

При стремлении β к нулю получаем $K(\beta)b \to c^T$ и $A^TK + KA < 0$. В этом случае $\eta = x^T(0)K(0)x(0)$. Искомым является решение со свойством, заключающимся в том, что собственные значения $A - bb^TK$ имеют отрицательные вещественные части. Таким образом, приведенный выше анализ приводит непосредственно к KYP-лемме. [1]

KYP-лемма, спектральная факторизация и квадратичная формула. KYP-лемму можно рассматривать также и в связи с одной из основных идей алгебры — решением квадратных уравнений. Даже до того, как в математике были введены комплексные числа, было известно (в определенном смысле), что для каждого положительного числа может быть вычислен его квадратный корень и что если дискриминант $b^2 - 4ac$ неотрицателен, то

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При обобщении этой идеи с поля вещественных чисел на поле рациональных функций мы приходим к спектральной факторизации. В случае, когда неизвестной величиной является симметричная матрица, мы должны определить понятие квадратного корня матрицы. Наконец, в случае матриц, элементами которых являются рациональные функции и обладающих свойством $\Phi(s) = \Phi^T(-s)$, соответствующим средством исследования становится матричная спектральная факторизация. В каждом из этих случаев существенную роль играет какая-либо операция инволюции: $x \mapsto \overline{x}, x(s) \mapsto x(-s), X \mapsto X^T$ или $X(s) \mapsto X^T(-s)$.

Одной из версий леммы для случая скалярных рациональных функций может служить следующее утверждение. Если мы имеем для $x(s)$ уравнение вида

$$x(s)x(-s) + x(s)b(s) + x(-s)b(-s) + c(s)c(-s) = 0,$$

где b и c — рациональные функции, и если для всех вещественных ω мы имеем $b(i\omega)b(-i\omega) - c(i\omega)c(-i\omega) \geqslant 0$, то существует решение

$$x(s) = -b(s) \pm \left(b(s)b(-s) - c(s)c(-s)\right)_+,$$

где обозначение $(\cdot)_+$ (возможно, лучшей записью было бы $+\sqrt{(\cdot)}$) соответствует разложению четной рациональной функции на множители $r(s)r(-s)$, где $r(s)$ — рациональная функция от s. В этом случае

$$b(i\omega)b(-i\omega) - c(i\omega)c(-i\omega) \geqslant 0$$

[1] См. [38] из списка трудов В. А. Якубовича; с. 16–34 в настоящем сборнике. — Прим. ред.-составителя.

играет роль дискриминанта и можно выбрать единственное решение при дополнительных условиях, определяющих, например, положение его нулей и полюсов; при этом $x(s)$ и обратная к ней будут аналитическими функциями в правой полуплоскости.

С учетом того, что симметричные положительно полуопределенные матрицы имеют вещественные симметричные квадратные корни, квадратичная формула может быть обобщена по-другому. Наиболее очевидная формулировка квадратичной формулы в терминах симметричных матриц включает в себя решение уравнения $XX + BX + XB + C = 0$ методом дополнения до полного квадрата

$$XX + BX + XB + C = (X + B)(X + B) - B^2 + C,$$

который приводит к решению вида

$$X = -B \pm 2\sqrt{B^2 - C}\,.$$

Легко видеть, что мы имеем условие положительности дискриминанта $B^2 - C \geqslant 0$, сходное с приведенным выше для квадратного уравнения. Однако, этот случай является не самым интересным направлением исследований, по крайней мере в контексте наших целей. Как мы видели выше, «коэффициент» при квадратичном члене может оказаться вырожденным и/или линейный член может включать несимметричные матрицы, например, как в случае

$$KBB^TK + A^TK + KA + Q = 0.$$

Оказывается, что для существования вещественных симметричных решений этого уравнения необходима и достаточна положительность «частотного дискриминанта»

$$I - B^T(Ii\omega - A^{-1})Q(Ii\omega - A)^{-1}B > 0$$

и этот факт имеет интересные следствия. В общем случае существует несколько решений этих матричных квадратных уравнений. Часто бывает удобно описывать их в терминах собственных чисел матрицы $A - BB^TK$, а не сигнатуры самой матрицы K.

KYP-лемма и теорема Найквиста. Одним из наиболее исследованных случаев применения KYP-леммы является проблема устойчивости линейных систем с зависящей от времени обратной связью

$$\dot{x} = Ax + k(t)bcx.$$

Для анализа случая, когда k является константой, существует критерий Найквиста, который связывает число неустойчивых собственных значений матрицы A с числом неустойчивых собственных значений матрицы $A - kbc$ на основании информации о местоположении $\{u + iv | u + iv = g(i\omega); -\infty < \omega < \infty\}$. Разумеется, если k зависит от времени, необходим какой-то другой критерий и теория Ляпунова в совокупности с KYP-леммой позволили получить элегантный результат, который известен как круговой критерий. В случае использования этого критерия для установления свойства неустойчивости необходимо рассмотреть ситуации, в которых частотное условие выполнено, но условия на собственные значения ослаблены. Пусть $K = K^T$ — вещественная симметричная матрица и $\sigma(K)$ — ее сигнатура (число положительных собственных чисел минус число отрицательных собственных чисел). Введем для произвольной вещественной квадратной матрицы A обозначение $\nu(A)$ — число собственных чисел A с отрицательными вещественными частями минус число собственных чисел этой матрицы с положительными вещественными частями. Заметим, что если $K = K^T$ представляет собой решение уравнения $KA + A^T K = -Q$ для положительно определенной матрицы Q, то $\sigma(K) = \nu(A)$. Для того чтобы убедиться в справедливости этого факта, можно, например, представить K в следующем виде:

$$K = -\int\limits_{-\infty}^{0} \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]_+ dt + \int\limits_{0}^{\infty} \left[e^{A^T t} Q e^{At}\right]_- dt,$$

где $[\cdot]_+$ и $[\cdot]_-$ обозначают аддитивную декомпозицию на члены, соответствующие собственным значениям соответственно с положительными и отрицательными вещественными частями. Применение этой декомпозиции позволяет получить следующий результат.

Лемма 1. *Рассмотрим управляемую и наблюдаемую систему*

$$\dot{x} = Ax + bu; \quad y = cx.$$

Если

$$c(Ii\omega - A)^{-1}b + b^T(-Ii\omega - A^T)^{-1}c^T \geqslant 0,$$

то существует симметричная матрица K и вектор d такие, что

$$A^T K + KA = -dd^T; \quad Kb = c^T$$

и $\sigma(K) = \nu(A)$.

Результаты подобного рода позволяют получить обобщение теоремы Найквиста при наличии неустойчивой части.

Автономные колебания в замкнутых системах. Отправным пунктом при исследовании этой проблемы является представление уравнения второго порядка $\ddot{x} + f(\dot{x}) + x = 0$ в векторной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -f(x_2) \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что производная по времени функции $\theta = \tan^{-1}(x_2/x_1)$ имеет вид $\dot{x_2}x_1 - \dot{x}_1 x_2)/(x_1^2 + x_2^2)$, можно показать, что

$$\dot{\theta} = -1 - \frac{x_1 f(x_2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

и, следовательно, если наложить определенные ограничения на f, решение в фазовом пространстве системы будет вращаться монотонно. Обозначим через $F(m,n)$ множество функций со следующими свойствами: это нечетные функции, отображающие числовую прямую на себя, они дифференцируемы, их производные в $x=0$ равны m, они монотонно возрастают на $[0,\infty)$ и стремятся к n в $+\infty$. Если $f\in$ $\in F(n,m)$ при $m<0,\ n>0$ и $|f(x)|<1$, то, используя теорему Брауера о неподвижной точке можно показать, что система $\ddot{x}+f(\dot{x})+x=0$ допускает наличие периодических решений.

Проблема обобщения результатов о колебаниях на случай систем большей размерности обычно непростá, но для случая систем с обратной связью ее решение возможно. Рассмотрим систему размерности n:

$$\dot{x}=Ax+bf(cx);\quad f\in F(n,m).$$

Предположим, что $c(Is-A)^{-1}b$ — положительно вещественная матрица, $\nu(A+mbc)=n-4$ и $\nu(A+nbc)=n$. Подобная ситуация соответствует описанной выше двухмерной системе, для которой в общем случае точно два собственных числа матрицы $A-kbc$ переходят из правой полуплоскости в левую при увеличении k от m до n. Если g^Tx и h^Tx — линейные функционалы, то для $\theta=\tan^{-1}(g^Tx/h^Tx)$ имеем

$$\dot{\theta}=\frac{g^T(Ax+bf(cx))h^Tx-h^(Ax+bf(cx))g^Tx}{(g^Tx)^2+(h^Tx)^2}.$$

Это выражение может быть переписано в следующей форме:

$$\dot{\theta}=\frac{x^T(A^Tgh^T-gh^TA)x}{(g^Tx)^2+(h^Tx)^2}+\frac{h^Tbf(cx)-g^Tbf(cx)}{(g^Tx)^2+(h^Tx)^2}.$$

Интуитивно ясно, что для того, чтобы получить результат, аналогичный теореме о колебаниях, следует выбрать g и h из инвариантного подпространства, соответствующего неустойчивым собственным числам матрицы $A+mbc$. Этот результат при достаточно слабых дополнительных ограничениях приводит к ситуации, в которой для доказательства существования автономных колебаний может быть применена теорема Брауера. [1)]

Периодические гамильтоновы системы. В серии статей, начиная с 1951-го года, [2)] Якубович исследовал устойчивость гамильтоновых

[1)] Подобные результаты можно найти, например, в книге *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. Т.1,2. — СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1992. (Пер. на англ.: *G.A. Leonov, I.M. Burkin and A.I. Shepelyavyi*. Frequency Methods in Oscillation Theory. — Kluwer, Dordrecht, 1992.) — Прим. ред.-составителя.

[2)] См. [7, 9–12, 24, 26, 37, 39] из списка трудов В. А. Якубовича; с. 16–34 в настоящем сборнике. — Прим. ред.-составителя.

систем, которые могут быть записаны в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{x}(t) + Q(t)x(t) = 0,$$

или в терминах матрицы:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

и $Q = Q^T$ в форме $\dot{x} = JQx$. Разумеется, эта форма записи включает частный случай

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}.$$

В классических работах Ляпунова, Борга и других исследователей показано, что нулевые решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ нейтрально устойчивы, если величина $q(t) = q(t+T)$ достаточно мала по сравнению с T и в некотором смысле положительна. Например, одно из достаточных условий для случая $q(t) > 0$ было получено Ляпуновым:

$$\int\limits_0^T q(t)dt \leqslant 4/T.$$

Крейн и Гельфанд–Лидский обобщили некоторые результаты этой теории на векторный случай в условия предположения, что матрица $Q(t) = Q^T(t) = Q(t+T)$ является положительно определенной в каждый момент времени. Существует версия этого результата, при доказательстве которой используются идеи из частотной теории и которая приводится ниже.

Теорема 1. *Пусть векторное уравнение $\dot{x} = (A - k(t)B)x$ размерности $2n$ представлено в явном виде:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q - k(t)bb^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

где $Q + Q^T$ — постоянная матрица и $k(t) = k(t+T) > 0$. Пусть $q(s)/p(s) = b^T(Is - Q)^{-1}b$. Тогда корни $p(s) + kq(s)$ — вещественные, отрицательные и нулевое решение дифференциального уравнения устойчиво, если средняя величина наибольшего корня многочлена $p(s) + kq(s)$ меньше $4/T$.

Эпилог. В этой короткой статье я предпринял попытку показать то, как идеи Владимира Андреевича Якубовича вплелись в современную теорию управления. Я с особым удовольствием воспользовался шансом заново собрать их в единой статье и в очередной раз показать насколько сильна может быть взаимосвязь между технологическими, математическими и научными идеями.

Глава 1

ЧАСТОТНАЯ ТЕОРЕМА И S-ПРОЦЕДУРА В ТЕОРИИ СИСТЕМ

Я. К. Виллемс[†] *и К. Такаба*[††]

Диссипативность и устойчивость взаимосвязанных систем[*]

Аннотация: в статье предложено новое определение диссипативности. Оно дано исключительно в терминах скорости изменения энергии динамической системы. Доказано, что свойство диссипативности эквивалентно существованию неотрицательной функции запаса. Рассматриваются несколько результатов, касающихся диссипативности систем, определяемых квадратичной дифференциальной формой, а также формулируются некоторые нерешенные проблемы. Предложенные идеи применяются при решении проблемы устойчивости взаимосвязанных систем.

Ключевые слова: диссипативность, устойчивость, взаимосвязанные системы, квадратичная дифференциальная форма, динамическое поведение.

[†]) ESAT-SISTA, K.U. Leuven, Kasteelpark Arenberg 10, B-3001 Leuven, Belgium. E-mail: Jan.Willems@esat.kuleuven.be.

[††]) Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto 606–8501, Japan. E-mail: takaba@amp.i.kyoto-u.ac.jp.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала Int. J. of Robust & Nonlinear Control: Dissipativity and stability of interconnections. — 2007. — Vol. 17, Issue 5–6. — P. 563–586. Перев. с англ. — И. А. Макаров.

1. Введение

С большим удовольствием мы представляем эту статью в специальный выпуск журнала, посвященный восьмидесятилетию профессора В. А. Якубовича, и, пользуясь случаем, поздравляем его с этой датой и желаем многих лет пребывать в добром здравии. В этой статье рассматриваются, кроме всего прочего, некоторые результаты, связанные с частотными неравенствами, играющими важную роль в разделе теории управления, основанном В. А. Якубовичем, и оказавшими огромное влияние на исследования в области систем и управления.

Функции Ляпунова проникли во многие области прикладной математики и, особенно, в теорию систем и в теорию управления. Эта техника стала основным средством доказательства устойчивости. Однако несмотря на то, что теория систем фокусируется на изучении «открытых» и «связанных» систем, являющихся средством для исследования динамики *замкнутых* систем, ни один из этих аспектов не присутствует в явном виде в понятии функции Ляпунова. Математическим понятием, обобщающим функции Ляпунова на случай открытых систем, является понятие «диссипативной системы». Цель этой статьи заключается в том, чтобы представить современное видение этой концепции и применить полученные в этой области результаты к исследованию устойчивости взаимосвязанных систем.

Понятие диссипативной системы, введенное в работе [17], относится к моделям «вход–состояние–выход» вида

$$\dot{\mathrm{x}} = f\left(\mathrm{x}, \mathrm{u}\right), \quad \mathrm{y} = h\left(\mathrm{x}, \mathrm{u}\right).$$

В определении используются:

(i) функция без памяти, зависящая от переменных входа и выхода, $s\left(\mathrm{u}, \mathrm{y}\right)$, называемая *функцией расхода*;

(ii) неотрицательная функция без памяти $V(\mathrm{x})$, зависящая от переменных состояния, называемая *функцией запаса*, и

(iii) неравенство, связывающее траектории решений системы, функции расхода и запаса, называемое *неравенством диссипации*. Это неравенство показывает, что на некотором интервале времени увеличение запаса не может превышать значения интеграла от функции расхода:

$$V\big(x\left(t_1\right)\big) - V\big(x\left(t_0\right)\big) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} s\big(u\left(t\right), y\left(t\right)\big)\, dt,$$

для всех $t_0 \leqslant t_1$ и всех траекторий $\big(u\left(\cdot\right), y\left(\cdot\right), x\left(\cdot\right)\big)$, которые удовлетворяют динамическим уравнениям, т. е. таким, что $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)), y(t) = h(x(t), u(t))$.

В случае отсутствия входных переменных и $s = 0$ неравенство диссипации сводится к условию Ляпунова $\frac{d}{dt}V\big(x\left(\cdot\right)\big) \leqslant 0$. Таким образом, понятие диссипативности обобщает функцию Ляпунова на случай «открытых» (незамкнутых) систем. Этот подход нашел множество приложений в различных областях теории систем.

В отношении вышеприведенного определения имеются вопросы. Один из этих вопросов заключается в том, действительно ли нам следует стремиться к неотрицательности функции запаса (или, эквивалентно, к ее ограниченности снизу). Действительно, существует много приложений (запасенная энергия в механике, негэнтропия в термодинамике), в которых это предположение не является желательным. С другой стороны, в контексте проблем устойчивости часто необходимо предполагать, что функция запаса неотрицательна. Поэтому мы будем уделять особое внимание тем случаям, в которых функция запаса неотрицательна. Другим вопросом, касающимся этого определения, является то, что это определение сформулировано в предположении о разделении на вход и выход переменных, от которых зависит функция расхода, а также в контексте представления динамической модели в виде уравнения состояния. Кроме того, это определение предполагает с самого начала, что функция запаса является функцией от переменных состояния. Как мы ранее отмечали в других работах и еще раз упомянем это ниже, разделение переменных входа и выхода не является естественным предположением в случае физических систем и достоверное знание переменных пространства состояния часто бывает надуманным требованием, например, при исследовании моделей из первых принципов (first principles model), или в случае применения к неопределенным системам. Наконец, желательно знать заранее, является ли функция запаса функцией состояния и если является, то какой смысл заложен в этом факте. Другим словами, желательно не предполагать, что функция запаса является функцией состояния, а формулировать это как утверждение, требующее доказательства.

Введем некоторые используемые в дальнейшем математические обозначения. Мы используем стандартные символы $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}^{\mathtt{n}}$, $\mathbf{R}^{\mathtt{n}\times\mathtt{m}}$ и т. д. для обозначения соответствующих пространств и надчеркивание будет обозначать комплексное сопряжение. Если число строк или столбцов не имеет значения, мы используем $\mathbf{R}^{\bullet}$, $\mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{n}}$ и т. д., $\mathbf{R}\,[\xi]$ обозначает множество полиномов с вещественными коэффициентами, зависящих от неизвестной ξ, и $\mathbf{R}\,(\xi)$ обозначает множество вещественных рациональных функций от неизвестной ξ. $\mathbf{R}[\zeta,\eta]$ обозначает множество матриц с полиномиальными элементами от двух переменных ζ и η. $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{n}})$ обозначает множество бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}^{\mathtt{n}}$. $\mathcal{D}^{\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{n}})$ обозначает подмножество $\mathcal{C}^{\infty}\,(\mathbf{R}\,,\mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, состоящее из функций с компактным носителем. Мы используем обозначение $|\cdot|$ для нормы в конечномерном пространстве и $\|\cdot\|$ для нормы в функциональном пространстве.

При использовании поведенческого подхода (behavioral) динамическая система характеризуется своим поведением (behavior). Поведение представляет собой множество траекторий, удовлетворяющих динамическим законам системы. Более формально, динамическая система Σ определяется как тройка $\Sigma = (\mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathcal{B})$, где $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{R}$ — промежуток времени, $\mathbf{W}$ — пространство сигналов и $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{W}^{\mathbf{T}}$ — *поведение*. [1]) Мотивация и детали этой формулировки могут быть найдены в работах [16, 18]. Для моделей непрерывного времени поведение динамической системы обычно определяется множеством решений системы, представленной в виде дифференциальных (дифференциально-алгебраических) уравнений.

Понятие динамической системы со скрытыми переменными является усовершенствованием стандартного понятия динамической системы, в котором поведение представлено посредством введения дополнительных переменных, называемых *скрытыми переменными* (*latent variables*). Более формально, *динамическая система со скрытыми переменными* определяется четверкой $\Sigma_L = (\mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathbf{L}, \mathcal{B}_{\text{full}})$, где $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{R}$ — промежуток времени, $\mathbf{W}$ — пространство сигналов, $\mathbf{L}$ — пространство скрытых переменных и $\mathcal{B}_{\text{full}} \subseteq (\mathbf{W} \times \mathbf{L})^{\mathbf{T}}$ — *полное поведение* (*full behavior*). $\mathcal{B}_{\text{full}}$ состоит из траекторий $(w, \ell) : \mathbf{T} \to \mathbf{W} \times \mathbf{L}$, совместимых с законами системы. В их состав входят явные переменные (manifest variables) w и скрытые переменные ℓ. Σ_L индуцирует динамическую систему $\Sigma = (\mathbf{T}, \mathbf{W}, \mathcal{B})$ с *явным поведением*

$$\mathcal{B} = \left\{ w : \mathbf{T} \to \mathbf{W} \;\middle|\; \exists\, \ell : \mathbf{T} \to \mathbf{L} \text{ такое что } (w, \ell) \in \mathcal{B}_{\text{full}} \right\}.$$

Мотивацией для подобного представления служит тот факт, что для моделей из первых принципов поведенческие уравнения всегда содержат дополнительные («скрытые») переменные (переменные состояния для наиболее известных примеров и переменные взаимосвязи — для наиболее распространенных), которые дополняют множество явных переменных, описывающих модель. Мы вскоре увидим, что представление диссипативных систем с использованием скрытых переменных позволяет весьма эффективно отличить «внешнюю» функцию расхода от «внутренней» функции запаса.

2. Диссипативные системы

В этом разделе мы дадим новое, «невычурное» определение понятия диссипативности. Оно будет сформулировано на языке поведений и абсолютно непосредственным образом. Основная идея заключается в следующем (см. рис. 1). Предположим, что мы имеем динамическую систему, осуществляющую обмен ресурсом (энергией, массой или чем-либо другим в зависимости от рассматриваемой ситуации) со своим окружением. Этот обмен представлен (вещественной) функцией

[1]) Через $\mathbf{W}^{\mathbf{T}}$ обозначается множество всевозможных функций $w : \mathbf{T} \to \mathbf{W}$. — Прим. ред.-составителя.

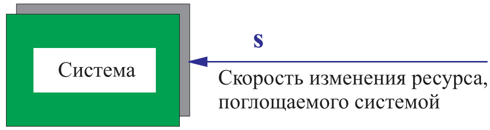

Рис. 1. Система и функция расхода.

расхода, которая принимает положительные значения в случае, когда ресурс поступает в систему. Свойство диссипативности соответствует тому, что максимальная величина ресурса, поступающего вдоль определенной траектории системы, ограничена. Более точно, для любой траектории, начинающейся в определенный момент времени, суммарное количество расходуемого ресурса, исходящего из системы, не может быть произвольно большим. Другими словами, ресурс не может быть превращен системой в бесконечное количество ресурса. Весь ресурс, который может быть извлечен из системы свыше того объема, что был ею поглощен, должен в каком-то смысле быть запасенным в системе в начальный момент времени.

Определение 1. Пусть $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathfrak{B})$ — некоторая динамическая система. Пусть траектория $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s \in \mathfrak{B}$, моделирует скорость изменения ресурса, поступившего в систему. Система Σ называется *диссипативной*, если (i) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ и (ii)

$$\forall s \in \mathfrak{B} \text{ и } \forall t_0 \in \mathbf{R},\ \exists K \in \mathbf{R} \text{ такая, что } -\int\limits_{t_0}^{T} s(t)\, dt \leqslant K \quad \text{для } T \geqslant t_0.$$

В частном случае диссипативность возникает, когда $[\![s \in \mathfrak{B}]\!] \Rightarrow$ $\Rightarrow [\![\int_{-\infty}^{t} s(t')\, dt' \geqslant 0\ \forall t \in \mathbf{R}]\!]$. Эта ситуация характерна для случаев, когда все траектории $s \in \mathfrak{B}$ имеют лево-компактный носитель (т. е. когда система рассматривается как стартующая «из состояния покоя»), или, в более общей формулировке, когда все $s \in \mathfrak{B}$ интегрируемы на любой левой полуоси. Вообще говоря, система обладает свойством диссипативности, если для всех $s \in \mathfrak{B}$ существует $s' \in \mathfrak{B}$ такая, что $s(t) = s'(t)$ при $t \geqslant 0$ и $\int_{-\infty}^{t} s'(t')\, dt' \geqslant 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$.

Ниже мы докажем утверждение, заключающееся в том, что это определение эквивалентно существованию неотрицательной функции запаса. Понятие функции запаса будет сформулировано на языке представления динамических систем с использованием скрытых переменных.

Определение 2. Пусть $\Sigma_L = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathfrak{B}_{\mathrm{full}})$ — динамическая система со скрытыми переменными. Пусть компонент $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ траектории $(s, V) \in \mathfrak{B}_{\mathrm{full}}$ моделирует скорость изменения ресурса, поступившего в систему, а компонент $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ моделирует запасенный ресурс. Функция V называется *функцией запаса*, если $\forall\, (s, V) \in \mathfrak{B}_{\mathrm{full}}$ и $\forall t_0, t_1 \in$

$\in \mathbf{R}, t_0 \leqslant t_1$, выполнено *неравенство диссипации*

$$V(t_1) - V(t_0) \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} s(t)\, dt. \tag{1}$$

Докажем, что диссипативность эквивалентна существованию неотрицательной функции запаса.

Утверждение 3. *Для того чтобы динамическая система* $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B})$ *являлась диссипативной, необходимо и достаточно, чтобы существовало представление динамической системы в скрытых переменных* $\Sigma_L = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathrm{full}})$ *с явным поведением* $\mathcal{B}$ *таким, что скрытый компонент пары* $(s, V) \in \mathcal{B}_{\mathrm{full}}$ *является неотрицательной функцией запаса.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\Sigma_L = (\mathbf{R}, \mathbf{R}_+, \mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathrm{full}})$ удовлетворяет (1), имеет явное поведение $\mathcal{B}$ и $V \geqslant 0$. Пусть $s \in \mathcal{B}$. Тогда $\exists\, V$ такая, что $(s, V) \in \mathcal{B}_{\mathrm{full}}$ и, следовательно,

$$\forall\, t_0 \in \mathbf{R} \quad -\int\limits_{t_0}^{T} s(t)\, dt \leqslant V(t_0) - V(T) \leqslant V(t_0) \quad \text{для } T \geqslant t_0.$$

Это неравенство показывает, что система $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B})$ диссипативна (положите $K = V(t_0)$ в определении 1).

Достаточность. Обратно, предположим, что $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B})$ диссипативна. Определим для каждой траектории $s \in \mathcal{B}$ ассоциированную траекторию $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$V(t) = \sup\Big\{ -\int\limits_{t}^{T} s(t)\, dt \;\Big|\; T \geqslant t \Big\}.$$

Очевидно, что $V \geqslant 0$ (положите в супремуме $T = t$). Тогда система $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B})$ диссипативна, $V(t) < \infty$ (на самом деле $V(t_0) \leqslant K$, где K такое же, как в определении 1). Следовательно, при определенной таким образом паре (s, V) мы получаем представление динамической системы в скрытых переменных $\Sigma_L = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathrm{full}})$ с явным поведением $\mathcal{B}$. Для $w \in \mathcal{B}$ и $t_0 \leqslant t_1$ выполнено неравенство

$$V(t_0) = \sup\Big\{ -\int\limits_{t_0}^{T} s(t)\, dt \;\Big|\; T \geqslant t_0 \Big\} \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{t_0}^{t_1} s(t)\, dt + \sup\Big\{ -\int\limits_{t_1}^{T} s(t)\, dt \;\Big|\; T \geqslant t_1 \Big\} = -\int\limits_{t_0}^{t_1} s(t)\, dt + V(t_1),$$

из которого следует неравенство диссипативности. $\square$

Заметим, что $V \geqslant 0$ по построению в приведенном доказательстве. Более того, если система стационарна, т. е. если $\sigma^t \mathcal{B} = \mathcal{B}$ для всех $t \in \mathbf{R}$ (σ^t обозначает обратный сдвиг по времени на t: $(\sigma^t f)(t') := f(t' + t)$), то полученное полное поведение для пары (s, V) также инвариантно по времени. Нам не известно простое условие для существования *любой* функции запаса (не обязательно неотрицательной, или, что эквивалентно, не обязательно ограниченной снизу). Мы формулируем этот вопрос как нерешенную задачу.

Задача 1. При каких условиях на поведение стационарной динамической системы $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B})$ существует инвариантное по времени представление динамической системы в скрытых переменных $\Sigma_L = (\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B}_{\text{full}})$ с явным поведением $\mathcal{B}$, такое, что скрытый компонент пары $(s, V) \in \mathcal{B}_{\text{full}}$ представляет собой функцию запаса, т. е. такое, что справедливо неравенство диссипации?

3. Квадратичные дифференциальные формы в качестве функций расхода

Определение 1 является понятным и четким определением диссипативности. В нем говорится только о скорости расхода ресурса, поступающего в систему или извлекаемого из нее, что естественно приводит к предложенной формулировке определения диссипативности. В связи с этим возникают следующие вопросы: *Не является ли это определение слишком общим*? Совместимо ли оно с леммой Калмана–Якубовича–Попова (KYP-леммой) и понятиями положительной вещественности и ограниченной вещественности? Как оно выглядит в линейно-квадратичном случае? Эффективно ли оно при исследовании проблем устойчивости?

В этом разделе мы рассмотрим ситуацию, когда функция расхода определяется квадратичной формой от векторнозначных траекторий и их производных. Начать, однако, удобно с того, чтобы напомнить некоторые основные понятия и обозначения, связанные с линейными стационарными дифференциальными системами. *Линейной стационарной (time-invariant) дифференциальной системой* называется динамическая система $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathcal{B})$, где $\mathbf{W} = \mathbf{R}^{\mathtt{w}}$ — конечномерное (вещественное) векторное пространство, поведение которой состоит из решений системы дифференциальных уравнений вида

$$R_0 w + R_1 \frac{d}{dt} w + \ldots + R_{\mathtt{n}} \frac{d^{\mathtt{n}}}{dt^{\mathtt{n}}} w = 0,$$

где $R_0, R_1, \ldots, R_{\mathtt{n}}$ — матрицы соответствующей размерности, определяющие параметры системы, и $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — вектор траекторий системы. Вышеприведенную систему дифференциальных уравнений удобно представить с использованием полиномиальной матрицы $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$, где $R(\xi) = R_0 + R_1 \xi + \ldots + R_{\mathtt{n}} \xi^{\mathtt{n}} \in \mathbf{R}^{\bullet \times \mathtt{w}}[\xi]$ — вещественная полиномиальная матрица с $\mathtt{w}$ столбцами. Поведение системы определяется как множество решений этой системы дифференциальных уравнений, т. е.

$$\mathcal{B} = \left\{ w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{w}} \,\middle|\, R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0 \right\}.$$

Вопрос о точном определении всех этих понятий для случая, когда $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{w}}$ должно быть решением $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$, имеет второстепенное значение. Для целей этой статьи удобно рассматривать решения в $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$. Это требует большей гладкости, чем необходимо, но это позволит избежать преодоления трудностей, которые не имеют непосредственного отношения к вопросам, затрагиваемым в этой статье. Поскольку $\mathcal{B}$ представляет собой ядро дифференциального оператора $R(\frac{d}{dt})$, мы часто будем писать $\mathcal{B} = \ker\left(R\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$ и называть отношение $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$ *ядерным представлением* соответствующей линейной стационарной дифференциальной системы. Обозначим это множество дифференциальных систем или их поведений символом $\mathcal{L}^{\bullet}$ или символом $\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$, когда число переменных равно $\mathtt{w}$.

Существует множество результатов, касающихся линейных стационарных дифференциальных систем. В работах [16, 18] даны основные определения, доказательства и другая детальная информация. Для целей этой статьи важными являются следующие факты.

1. *Справедлива теорема об исключении*, в которой утверждается, что явное поведение $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = M\left(\frac{d}{dt}\right) \ell$, где $R, M \in \mathbf{R}^{\bullet \times \bullet}[\xi]$, само является элементом $\mathcal{L}^{\bullet}$.

2. Система из $\mathcal{L}^{\bullet}$ является управляемой (в смысле соответствующего определения, предложенного в рамках поведенческого подхода), если и только если она допускает *образное представление* (image representation) $w = M\left(\frac{d}{dt}\right) \ell$, т. е. ее поведение определяется отношением [1]) $\mathcal{B} = \operatorname{im}\left(M\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$ для некоторого $M \in \mathbf{R}^{\bullet \times \bullet}[\xi]$.

3. Каждая система из $\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$ допускает покомпонентное *разделение вход–выход*, конечномерное *представление в пространстве состояний*, и *представление вход–состояние–выход*.

Определение 4. *Квадратичная дифференциальная форма* (*КДФ*) — это конечная сумма квадратичных выражений от векторных функций $w \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ и их производных:

$$\Sigma_{\mathtt{r},\mathtt{k}} \left(\frac{d^{\mathtt{r}}}{dt^{\mathtt{r}}} w\right)^{\top} \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}} \left(\frac{d^{\mathtt{k}}}{dt^{\mathtt{k}}} w\right),$$

где $\Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}} \in \mathbf{R}^{\mathtt{w} \times \mathtt{w}}$. Заметим, что это выражение определяет отображение, действующее из $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ в $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

[1]) Через $\operatorname{im}(A)$ обозначен образ линейного оператора A, т. е. множество векторов $\{y : y = Ax,\ x \in X\}$, где X — область определения A. — Прим. ред.-составителя.

Использование полиномиальных матриц, зависящих от двух переменных, позволяет применить компактные обозначения и удобные методы вычислений, принятые в теории КДФ. Введем полиномиальную матрицу от двух переменных Φ, определяемую равенством

$$\Phi(\zeta,\eta) = \Sigma_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\ \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\zeta^{\mathtt{r}}\eta^{\mathtt{k}},$$

и обозначим выражение в определении 4 через $\mathsf{Q}_\Phi(w)$. Тогда

$$\mathsf{Q}_\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{w}}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}),$$
$$w \mapsto \mathsf{Q}_\Phi(w) := \Sigma_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\ \left(\frac{d^{\mathtt{r}}}{dt^{\mathtt{r}}}w\right)^\top \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\left(\frac{d^{\mathtt{k}}}{dt^{\mathtt{k}}}w\right).$$

Символом $\Phi^\star$ обозначим определяемую равенством $\Phi^\star(\zeta,\eta) := \Phi^\top(\eta,\zeta)$ *дуальную* к Φ матрицу; $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ называется *симметричной*, если $\Phi = \Phi^\star$. Очевидно, $\mathsf{Q}_\Phi(w) = \mathsf{Q}_{\Phi^\star}(w) = \mathsf{Q}_{\frac{1}{2}(\Phi+\Phi^\star)}(w)$ и, следовательно, мы можем без потери общности предположить, что Φ симметрична. КДФ Q_Φ называется *неотрицательной* (далее будет использоваться обозначение $\mathsf{Q}_\Phi \geqslant 0$), если $\mathsf{Q}_\Phi(w)(0) \geqslant 0$ для всех $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{w}})$. Квадратичные дифференциальные формы были детально исследованы в работе [20].

Введем для матрицы $\Phi = \Phi^\star \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$, $\Phi(\zeta,\eta) = \Sigma_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\ \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}}\zeta^{\mathtt{r}}\eta^{\mathtt{k}}$, матрицу

$$\widetilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{0,0} & \Phi_{0,1} & \cdots & \Phi_{0,\mathtt{k}} & \cdots \\ \Phi_{1,0} & \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,\mathtt{k}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \\ \Phi_{\mathtt{r},0} & \Phi_{\mathtt{r},1} & \cdots & \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{bmatrix}.$$

Бесконечномерная матрица $\widetilde{\Phi}$ является симметричной, и лишь конечное число ее элементов не равны нулю. Рассмотрим числа ее положительных и отрицательных собственных значений и ее ранг. Поскольку эти величины однозначно определяются матрицей Φ, введем для них соответствующие обозначения $\pi(\Phi)$, $\nu(\Phi)$ и $\operatorname{rank}(\Phi) = \pi(\Phi) + \nu(\Phi)$. Матрица $\widetilde{\Phi}$ может быть представлена в виде следующего разложения: $\widetilde{\Phi} = \widetilde{F}_+{}^\top\widetilde{F}_+ - \widetilde{F}_-{}^\top\widetilde{F}_-$, где $\widetilde{F}_+$ и $\widetilde{F}_-$ — матрицы с бесконечным числом столбцов, но конечным числом строк. Число строк в этих матрицах равно $\widetilde{F}_+$ и $\widetilde{F}_-$ и в качестве значений этих чисел могут быть приняты соответственно $\pi(\Phi)$ и $\nu(\Phi)$: $\operatorname{rowdim}(\widetilde{F}_+) = \pi(\Phi)$ и $\operatorname{rowdim}(\widetilde{F}_-) = \nu(\Phi)$, если и только если строки матрицы $\widetilde{F} = \begin{bmatrix}\widetilde{F}_+ \\ \widetilde{F}_-\end{bmatrix}$ линейно независимы над $\mathbf{R}$. Определим $F_+(\xi) = \widetilde{F}_+\left[I_{\mathtt{w}}\ I_{\mathtt{w}}\xi\ I_{\mathtt{w}}\xi^2\ \cdots\right]^\top$, $F_-(\xi) = \widetilde{F}_-\left[I_{\mathtt{w}}\ I_{\mathtt{w}}\xi\ I_{\mathtt{w}}\xi^2\ \cdots\right]^\top$. Тогда можно получить разложение $\Phi(\zeta,\eta) =$

$= F_+{}^\top(\zeta) F_+(\eta) - F_-{}^\top(\zeta) F_-(\eta)$, где $F_+ \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi], F_- \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi]$ и, следовательно, справедливо разложение КДФ:

$$\mathsf{Q}_\Phi(w) = \left|F_+\left(\frac{d}{dt}\right)w\right|^2 - \left|F_-\left(\frac{d}{dt}\right)w\right|^2.$$

Линейная (управляемая) стационарная дифференциальная система с образным представлением

$$\begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_+\left(\frac{d}{dt}\right) \\ F_-\left(\frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix} w$$

будет играть важную роль в последующем изложении. С внесением в рассуждения необходимых изменений вышеприведенный результат может быть обобщен и на случай несимметричной $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ путем замены Φ на ее симметричную часть $\frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)$. Далее в симметричном и несимметричном случаях мы будем использовать одинаковые обозначения: $\pi(\Phi) = \pi\left(\frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)\right)$ и $\nu(\Phi) = \nu\left(\frac{1}{2}(\Phi + \Phi^*)\right)$.

В линейно-квадратичном случае диссипативность влечет представление функции расхода в виде КДФ. Рассмотрим динамическую систему с поведением $\mathcal{B}$, определяемым полиномиальной матрицей от двух переменных $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$:

$$\mathcal{B} = \left\{s : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \;\middle|\; \exists\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}),\ \text{такая что } s = \mathsf{Q}_\Phi(w)\right\}.$$

Поскольку это поведение представляет собой образ отображения Q_Φ, мы обозначим его через $\operatorname{im}(\mathsf{Q}_\Phi)$. Полученная таким образом система $\Sigma_\Phi := \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \operatorname{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\right)$ стационарна, но очевидно является нелинейной. Нам не известно более непосредственно способа определения системы с поведением, определяемым КДФ. Мы формулируем соответствующую задачу как открытую проблему.

Задача 2. При наложении каких условий на $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ существует полиномиальная матрица $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ такая, что $\mathcal{B} = \operatorname{im}(\mathsf{Q}_\Phi)$?

Далее мы рассмотрим задачу, в которой необходимо определить требования к полиномиальной матрице Φ, такие что система $\Sigma_\Phi = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \operatorname{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\right)$ является диссипативной. В статье [20] детально рассматривается этот вопрос. Полученные нами результаты основаны на традиционном подходе, изложенном в работах В. А. Якубовича [21], [22], В. М. Попова [8] и Р. Калмана [4]. В первую очередь мы докажем следующее необходимое условие диссипативности.

Утверждение 5.

$$\begin{aligned} &[\![\, \Sigma_\Phi = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \operatorname{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\right) \textit{ диссипативна} \,]\!] \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow [\![\, \Phi\left(\lambda, \overline{\lambda}\right) + \Phi^\top\left(\overline{\lambda}, \lambda\right) \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0 \,]\!] \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow [\![\, \Phi(i\omega, -i\omega) + \Phi^\top(-i\omega, i\omega) \geqslant 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbf{R} \,]\!]. \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим, что $\Phi = \Phi^{\star}$. Обозначим символом * операцию транспонирования и комплексного сопряжения. Рассмотрим для КДФ комплексное расширение Q_Φ:

$$\mathsf{Q}_\Phi^{\mathbf{C}} : w \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbf{R}, \mathbf{C}^{\mathtt{w}}\right) \quad \mapsto \quad \Sigma_{\mathtt{r},\mathtt{k}} \left(\frac{d^{\mathtt{r}}}{dt^{\mathtt{r}}} w\right)^* \Phi_{\mathtt{r},\mathtt{k}} \left(\frac{d^{\mathtt{k}}}{dt^{\mathtt{k}}} w\right) \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}\right).$$

Заметим, что для $w_1, w_2 \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}\right)$, $\mathsf{Q}_\Phi^{\mathbf{C}}\left(w_1 + i w_2\right) = \mathsf{Q}_\Phi\left(w_1\right) + \mathsf{Q}_\Phi\left(w_2\right)$. Тогда $\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_\Phi\right)\right)$ диссипативна, если и только если этим свойством обладает $\left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_\Phi^{\mathbf{C}}\right)\right)$. Таким образом, при доказательстве этого утверждения мы можем рассматривать также и комплексные w.

Пусть $a \in \mathbf{C}^{\mathtt{w}}$, $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ и $w_0 : t \in \mathbf{R} \mapsto e^{\lambda_0 t} a \in \mathbf{C}^{\mathtt{w}}$. Тогда $\mathsf{Q}_\Phi^{\mathbf{C}}\left(w_0\right)(t) = a^* \Phi\left(\overline{\lambda_0}, \lambda_0\right) a\, e^{\left(\lambda_0 + \overline{\lambda}_0\right)t} \in \mathbf{R}$. Если $\Sigma_\Phi = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_\Phi\right)\right)$ диссипативна, то из $\lambda_0 + \overline{\lambda}_0 \geqslant 0$ должно следовать $a^* \Phi\left(\overline{\lambda}_0, \lambda_0\right) a \geqslant 0$, что и доказывает утверждение. $\square$

Ранее мы убедились в том, что любая КДФ может быть представлена в виде разложения

$$\mathsf{Q}_\Phi(w) = \left|F_+\left(\frac{d}{dt}\right) w\right|^2 - \left|F_-\left(\frac{d}{dt}\right) w\right|^2.$$

Определим $F = \begin{bmatrix} F_+ \\ F_- \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{\bullet \times \mathtt{w}}[\xi]$. Легко видеть, что для системы $\Sigma_\Phi = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_\Phi\right)\right)$ с $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta, \eta]$ мы всегда можем предположить, что $\mathrm{rank}\,(F) = \mathtt{w}$ в том смысле, что существует $\Phi' \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}'\times\mathtt{w}'}[\zeta, \eta]$ такая, что $\mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_{\Phi'}\right) = \mathrm{im}\left(\mathsf{Q}_\Phi\right)$ и $\mathrm{rank}\,(F') = \mathtt{w}'$, где $F' = \begin{bmatrix} F'_+ \\ F'_- \end{bmatrix}$ соответствует разложению $\mathsf{Q}_{\Phi'}\left(w'\right) = |F'_+\left(\frac{d}{dt}\right) w'|^2 - |F'_-\left(\frac{d}{dt}\right) w'|^2$. Предположим, что $\mathrm{rank}(\Phi) = \mathtt{w}$. Тогда с использованием утверждения 5 можно показать, что при диссипативности системы мы всегда можем предполагать $\pi(\Phi) \geqslant \mathtt{w}$. Особый интерес вызывает ситуация, когда имеется минимальное количество положительных собственных значений: $\pi(\Phi) = \mathtt{w}$. В этом случае F_+ — квадратная матрица, $\det\left(F_+\right) \neq 0$ и мы можем получить полную характеристику диссипативности для КДФ.

Напомним определение $\mathcal{L}_\infty$- и $\mathcal{H}_\infty$-норм для $G \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\bullet}$:

$$\|G\|_{\mathcal{L}_\infty} := \sup\left\{|G(i\omega)| \;\middle|\; \omega \in \mathbf{R}\right\},$$

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} := \sup\left\{|G(s)| \;\middle|\; s \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\,(s) \geqslant 0\right\},$$

где $|\cdot|$ — матричная норма, порожденная евклидовой нормой. Заметим, что $\|G\|_{\mathcal{L}_\infty} < \infty$, если и только если G является собственной функцией и не имеет полюсов на мнимой оси; кроме того, $\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} < \infty$, если и только если G является собственной функцией и не имеет полюсов на замкнутой правой половине комплексной плоскости.

Теорема 6. *Рассмотрим* $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$. *Предположим, что* $\frac{1}{2}(\Phi+\Phi^\star)$ *определяется в терминах* $F_+, F_- \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi]$ *в виде* $F_+{}^\top(\zeta)F_+(\eta) - F_-{}^\top(\zeta)F_-(\eta)$, *где* $F_+ \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$, $F_- \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi]$ *и* $\det(F_+) \neq 0$. *Определим* $G \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ *через* $G = F_-F_+{}^{-1}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $\Sigma_\Phi = \big(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\big)$ *диссипативна.*

(ii) *Существует* $\Psi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta], \mathsf{Q}_\Psi \geqslant 0$ *такая, что* $\frac{d}{dt}\mathsf{Q}_\Psi(w) \leqslant \mathsf{Q}_\Phi(w)\ \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$.

(iii) $\int_{-\infty}^0 \mathsf{Q}_\Phi(w)\,dt \geqslant 0\ \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ *с компактным носителем.*

(iv) $\Phi\big(\lambda, \overline{\lambda}\big) + \Phi^\top\big(\overline{\lambda}, \lambda\big) \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$

(v) $\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} \leqslant 1$.

Доказательство. Эквивалентность (ii), (iii), (iv) и (v) доказана в работе [20, теорема 6.4].

(ii) $\Rightarrow$ (i). Рассмотрим систему со скрытыми переменными $(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathrm{full}})$, где

$$\mathcal{B}_{\mathrm{full}} = \Big\{(s,V) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\times\mathbf{R} \ \Big|\ \exists w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}) \text{ такое что } (s,V) = \big(\mathsf{Q}_\Phi(w), \mathsf{Q}_\Psi(w)\big)\Big\}.$$

В качестве явного поведения этой системы со скрытыми переменными фигурирует $\mathrm{im}(\mathsf{Q}_\Phi)$. Более того, из (ii) следует, что функция V является неотрицательной функцией запаса. Тогда импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) непосредственно следует из утверждения 2.

(i) $\Rightarrow$ (v). Для упрощения записи предположим, что $\Phi = \Phi^\star$. С учетом утверждения 5,

$$\Phi\big(\lambda, \overline{\lambda}\big) = F_+{}^\top(\lambda)F_+\big(\overline{\lambda}\big) - F_-{}^\top(\lambda)F_-\big(\overline{\lambda}\big) \geqslant 0 \qquad \forall\, \lambda \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$$

Тогда $G^\top(\lambda)G\big(\overline{\lambda}\big) \leqslant I \quad \forall \lambda \in \mathbf{C},\ \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$, что эквивалентно $\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} \leqslant 1$. □

Теорема 6 применима во всех ситуациях, когда положительная сигнатура матрицы Φ равна ее размерности $\mathtt{w}$. В следующей теореме рассматривается другая ситуация.

Теорема 7. *Предположим, что* $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ *задается равенством* $\Phi(\zeta,\eta) = F_1^\top(\zeta)F_2(\eta)$ *с* $F_1, F_2 \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\xi]$ *и* $\det(F_1) \neq 0$. *Определим* $G \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$ *как* $G = F_2F_1^{-1}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) $\Sigma_\Phi = \big(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\big)$ *диссипативна.*

(ii) *Существует* $\Psi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$, $\mathsf{Q}_\Psi \geqslant 0$ *такая, что* $\frac{d}{dt}\mathsf{Q}_\Psi(w) \leqslant \mathsf{Q}_\Phi(w)\ \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$.

(iii) $\int_{-\infty}^0 \mathsf{Q}_\Phi(w)\,dt \geqslant 0\ \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ *с компактным носителем.*

(iv) G *положительно вещественна, т. е.* $G(\lambda) + G^\top(\overline{\lambda}) \geqslant 0$ *для* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6, поэтому мы опустим его детали. Разумеется, ситуации, рассматриваемые в теоремах 6 и 7, очень близки, и в этом можно убедиться, раасмотрев соотношение

$$\begin{aligned}&\big(F_1^\top(\zeta)F_2(\eta)+F_2^\top(\zeta)F_1(\eta)\big)=\\&=\tfrac{1}{2}\left(F_1(\zeta)+F_2(\zeta)\right)^\top\left(F_1(\eta)+F_2(\eta)\right)-\left(F_1(\zeta)-F_2(\zeta)\right)^\top\left(F_1(\eta)-F_2(\eta)\right),\end{aligned}$$

из которого следует, что теорема 6 является более общим случаем.

4. Функция запаса как функция состояния

Для установления связи между понятием диссипативности и KYP-леммой следует использовать результаты, позволяющие установить связь между функциями запаса и состояния. Предположим, что поведение $\mathcal{B}\in\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$ определяется в терминах скрытых переменных x соотношением

$$Bw+Ax+E\frac{d}{dt}x=0,$$

где $A,B,E\in\mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}$ — постоянные матрицы. Переменные x называются *переменными состояния*. Обычно представление в переменных состояния *определяется* не так, как это было сделано выше, а с использованием свойства «расщепления» (splitting property). Однако можно показать, что адекватное определение переменных состояния [18] эквивалентно существованию представления с использованием соответствующего дифференциального уравнения, порядок которого по переменным x равен единице, а по переменным w — нулевой.

Разложение Q_Φ в виде $Q_\Phi(w)=|F_+(\frac{d}{dt})w|^2-|F_-(\frac{d}{dt})w|^2$ позволяет получить представление КДФ в переменных состояния следующим образом. Пусть $Bf+Ax+E\frac{d}{dt}x=0$ — представление в переменных состояния системы, изначально имеющей образное представление

$$f=\begin{bmatrix}f_+\\f_-\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_+(\frac{d}{dt})\\F_-(\frac{d}{dt})\end{bmatrix}w.$$

Тогда соотношения

$$B\begin{bmatrix}f_+\\f_-\end{bmatrix}+Ax+E\frac{d}{dt}x=0,\qquad s=|f_+|^2-|f_-|^2$$

дают представление Q_Φ в переменных состояния.[1] В действительности, путем дальнейшего покомпонентного разделения переменных f_+ и f_- на переменные входа и выхода, мы можем получить в конце

[1] См. определение 1, с. 47. — Прим. ред.-составителя.

концов следующее представление КДФ в переменных входа–состояния–выхода:

$$\tfrac{d}{dt}x = Ax + B\begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = Cx + D\begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix},$$

$$s = |u_+|^2 + |y_+|^2 - |u_-|^2 - |y_-|^2.$$

В работе [13] понятие состояния было связано с понятием функции запаса. Предположим, что Q_Ψ удовлетворяет неравенству диссипации

$$\frac{d}{dt}\mathsf{Q}_\Psi(w) \leqslant \mathsf{Q}_\Phi(w) \qquad \forall\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}).$$

Тогда можно показать, что Q_Ψ в действительности представляет собой функцию состояния без памяти, т. е. существует матрица $K \in \mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}$ такая, что

$$\left[\!\left[\left(\begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix}, x \right) \text{ удовлетворяет } B\begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} + Ax + E\tfrac{d}{dt}x = 0 \right.\right.$$
$$\left.\left. \text{и } \begin{bmatrix} f_+ \\ f_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_+(\frac{d}{dt}) \\ F_-(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} w \right]\!\right] \Rightarrow [\![\, \mathsf{Q}_\Psi(w) = x^\top K x \,]\!] .$$

Более того, если $\mathsf{Q}_\Psi \geqslant 0$, то K может быть приведена к симметричной и неотрицательно определенной форме представления: $K = K^\top \geqslant 0$.

Суммируя все вышеизложенные результаты, сформулируем семь утверждений, касающихся системы $\Sigma_\Phi = \big(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}\,(\mathsf{Q}_\Phi)\big)$, определенной КДФ.

(i) Σ_Φ диссипативна.

(ii) Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с неотрицательной функцией запаса.

(iii) Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с неотрицательной КДФ в качестве функции запаса.

(iv) Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с неотрицательной функцией состояния без памяти в качестве функции запаса.

(v) Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с неотрицательной квадратичной функцией состояния без памяти в качестве функции запаса.

(vi) $\int_{-\infty}^{0} \mathsf{Q}_\Phi(w)\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ с компактным носителем.

(vii) Для Φ выполнены частотное условие и матричное условие Пика (Pick matrix condition), приведенные в работе [20, условие 3 теоремы 9.3].

Можно показать, что выполнены следующие импликации: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) $\Leftrightarrow$ (vi) ‘$\Leftrightarrow$’ (vii) (‘$\Leftrightarrow$’), поскольку имеются дополнительные предположения для (vii)). В связи с этим возникает вопрос: если (ii) $\Rightarrow$ (iii), т. е. если функция расхода представлена в виде КДФ, то существование неотрицательной функции запаса эквивалентно существованию неотрицательной функции запаса, имеющей представление в виде КДФ. Мы высказываем предположение, что это утверждение справедливо. Формулируя его в терминах квадратичных дифференциальных форм, мы получаем следующую.

Гипотеза. *Следущие два утверждения для* $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta,\eta]$ *эквивалентны.*

1. $\int_{-\infty}^{0} \mathsf{Q}_\Phi(w)\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ *с компактным носителем.*
2. $\forall\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}) \quad \exists\, K \in \mathbf{R}$ *такая, что* $-\int_0^T \mathsf{Q}_\Phi(w)\, dt \leqslant K \quad \forall T \geqslant 0$.

Из первого утверждения следует второе. Действительно, пусть $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ и выберем $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ с лево-компактным носителем (left compact support), такую что $v(t) = w(t)$ для $t \geqslant 0$. Если первое утверждение верно, то

$$\int_{-\infty}^{T} \mathsf{Q}_\Phi(v)\, dt \geqslant 0 \qquad \forall T \geqslant 0.$$

Тогда для $T \geqslant 0$

$$-\int_0^T \mathsf{Q}_\Phi(w)\, dt = \int_0^T \mathsf{Q}_\Phi(v)\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{0} \mathsf{Q}_\Phi(v)\, dt.$$

Это доказывает второе утверждение. Осталось доказать справедливость обратной импликации. $\square$

Если условие теоремы 6 на сигнатуру $\pi(\Phi) = \dim(\Phi)$ выполнено, можно легко показать, что эти два утверждения эквивалентны, так как в действительности частотное условие (vii) более строгое, нежели условие на $\mathcal{H}_\infty$-норму.

Полезно сравнить рассматриваемый случай с ситуацией, когда неотрицательность функции запаса не требуется. Эта проблема рассмотрена В. А. Якубовичем в работе [21]. Рассмотрим шесть утверждений, касающихся системы $\Sigma_\Phi = \big(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathrm{im}(\mathsf{Q}_\Phi)\big)$, определяемой КДФ.

(ii)′ Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с функцией запаса.

(iii)′ Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с КДФ в качестве функции запаса.

(iv)′ Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с функцией состояния без памяти в качестве функции запаса.

(v)′ Σ_Φ допускает представление в скрытых переменных с квадратичной функцией состояния без памяти в качестве функции запаса.

(vi)′ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{Q}_\Phi(w)\, dt \geqslant 0 \quad \forall\, w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ с компактным носителем.

(vii)′ $\Phi(i\omega, -i\omega) + \Phi^\top(-i\omega, i\omega) \geqslant 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbf{R}$.

Можно показать, что выполнены следующие импликации: (ii)' $\Leftarrow$ $\Leftarrow$ (iii)' $\Leftrightarrow$ (iv)' $\Leftrightarrow$ (v)' $\Leftrightarrow$ (vi)' $\Leftrightarrow$ (vii)'. В связи с этим возникает вопрос: если (ii)' $\Rightarrow$ (iii)', т. е. если функция расхода представлена в виде КДФ, то существование функции запаса эквивалентно существованию функции запаса, имеющей представление в виде КДФ. Мы высказываем предположение, что это утверждение также справедливо, однако неясно, как можно его «не-экзистенциально» сформулировать в терминах квадратичных дифференциальных форм.

5. Линейные системы и квадратичные функции расхода

Теория, представленная в предыдущих двух разделах, применима не только к функциям запаса, представленным КДФ, действующей на свободный сигнал $w \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, т. е. к функциям расхода вида $s = Q_{\Phi}(w)$. В действительности эта теория может быть использована и для анализа всех ситуаций, когда имеется КДФ, действующая на переменные, эволюция которых определяется линейной управляемой стационарной дифференциальной системой, и когда функции расхода, действующие на эти переменные, представлены в виде квадратичных выражений, включающих полиномы или рациональные функции.

Поясним вышесказанное. Рассмотрим случай переменных, поведение которых во времени определяется линейной системой с поведением $\mathcal{B} \in \mathcal{L}^{\mathtt{w}}$. Существует множество моделей подобного типа, и одной из самых известных является модель, в которой эволюция переменных определяется линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами: $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$, где $R \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi]$. Другая часто встречающаяся модель может быть сведена к модели, в которой w зависит от дополнительных переменных (например от переменных состояния, как в широко используемых моделях пространства состояний): $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = M\left(\frac{d}{dt}\right) \ell$, где $R, M \in \mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}[\xi]$.

Заметим, что при соответствующей интерпретации понятия решения этих систем мы можем также рассмотреть уравнения, включающие рациональные функции. Действительно, пусть $R \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ и рассмотрим «дифференциальное уравнение» $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$. *Что может быть интерпретировано как его поведение*, *т. е. что может быть интерпретировано как его множество решений*? Поскольку R является матрицей рациональных функций, определение понятия решений такого уравнения не представляется очевидной проблемой. Это может быть сделано в терминах разложений на ко-простые множители следующим образом. R может быть представлена виде разложения $R = P^{-1}Q$, где $P \in \mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}[\xi]$ — квадратная матрица, $\det(P) \neq 0, Q \in \mathbf{R}^{\bullet\times\mathtt{w}}[\xi]$ и (P, Q) — левая ко-простая пара. *Определим* поведение $R\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$ как поведение $Q\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$, т. е. как $\ker\left(Q\left(\frac{d}{dt}\right)\right)$. Легко видеть, что это поведение не зависит от вышеприведенного разложения. Можно действовать иначе: запишем $R = P + G$, где P — полиномиальная матрица и G — строго собственная матрица, получить управляемое/наблюдаемое представление передаточной матрицы $G(s) = C(Is - A)^{-1}B$ и рассмотреть поведение, определяемое $\frac{d}{dt}x = Ax + Bw,\ 0 = Cx + P(\frac{d}{dt})w$. Тогда $R\left(\frac{d}{dt}\right)w = 0$, где $R \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times \mathtt{w}}$ — матрица рациональных функций, представляет собой вполне определенное поведение в $\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$. Очевидно, что имея этот результат, мы можем использовать теорему об исключении и доказать, что явное поведение системы со скрытыми переменными $R\left(\frac{d}{dt}\right)w = M\left(\frac{d}{dt}\right)\ell$, где $R, M \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\bullet}$, также принадлежит $\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$.

Из всего вышесказанного следует, что поведение классических моделей линейных систем

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu,\ y = Cx + Du,\ w = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

где A, B, C, D — матрицы и

$$y = Gu, \quad w = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix},$$

где G — передаточная матрица рациональных функций, принадлежит $\mathcal{L}^{\mathtt{w}}$. Эти две ситуации являются частными случаями модели более общего вида, в представлении которой используются скрытые переменные и рациональные функции

$$R\left(\frac{d}{dt}\right)w = M\left(\frac{d}{dt}\right)\ell,$$

где $R, M \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\bullet}$ — матрицы рациональных функций (не обязательно собственные).

Следует отметить, что система, определенная передаточной функцией $y = G(\frac{d}{dt})u,\ \ w = (u, y)$ автоматически является управляемой. Передаточные функции не подходят для исследования неуправляемых систем. Основное отличие случая, когда в $y = G(\frac{d}{dt})u$ матрица G является полиномиальной, от случая, когда элементами этой матрицы являются рациональные функции, заключается в том, что в первом случае существует *единственный* выход y, соответствующий каждому входу $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, а во втором случае подобного однозначного соответствия не существует (несмотря на многочисленные ссылки в литературе, в которых говорится о том, что передаточная функция определяет отображение множества входов в множество выходов). Наконец, поведение w, определяемое равенством $w = M(\frac{d}{dt})\ell$, где $M \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\bullet}$, всегда управляемое.

Далее, предположим, что функция расхода представлена в виде квадратичного выражения, например, $s = |w_1|^2 - |w_2|^2$ или $s = w_1^\top w_2$, где w_1 и w_2 связаны с переменными рассматриваемой системы w таким образом, что совокупное поведение (w, w_1, w_2) является элементом $\mathcal{L}^\bullet$.

Соотношение между этими переменными может быть задано линейными дифференциальными уравнениями, рациональными передаточными функциями, дополнительными переменными и т. п. Мы можем получить соответствующую КДФ, если надлежащим образом определим w_1 и w_2, например:

$$w_1 = \left(w, \frac{d}{dt}w, \frac{d^2}{dt^2}w, \ldots\right),$$
$$w_2 = \left(\Sigma_{\mathrm{k}}\ \Phi_{0,\mathrm{k}}\frac{d^{\mathrm{k}}}{dt^{\mathrm{k}}}w, \Sigma_{\mathrm{k}}\ \Phi_{1,\mathrm{k}}\frac{d^{\mathrm{k}}}{dt^{\mathrm{k}}}w, \Sigma_{\mathrm{k}}\ \Phi_{2,\mathrm{k}}\frac{d^{\mathrm{k}}}{dt^{\mathrm{k}}}w, \ldots\right),$$

и положим $s = w_1^\top w_2$. С другой стороны, w_1 и w_2 могли бы быть определены также равенствами $w_1 = G_1(\frac{d}{dt})w, w_2 = G_2(\frac{d}{dt})w$, где $G_1, G_2 \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ и $w \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}^{\mathtt{w}}$, или, иначе, равенствами $F_1(\frac{d}{dt})w_1 = G_1(\frac{d}{dt})w$, $F_2(\frac{d}{dt})w_2 = G_2(\frac{d}{dt})w$, где $F_1, G_1, F_2, G_2 \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\bullet}$ (не обязательно собственные).

Предположим, что совокупное поведение переменных (w_1, w_2) (все остальные переменные исключены) при $s = |w_1|^2 - |w_2|^2$ или $s = w_1^\top w_2$ управляемо. Тогда существует образное представление

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1\left(\frac{d}{dt}\right) \\ M_2\left(\frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix} w,$$

приводящее к тому, что $s = \left|\left(M_1\left(\frac{d}{dt}\right)w\right)\right|^2 - \left|\left(M_2\left(\frac{d}{dt}\right)w\right)\right|^2$ или $s = \left(M_1\left(\frac{d}{dt}\right)w\right)^\top \left(M_2\left(\frac{d}{dt}\right)w\right)$, $\quad w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$. Следовательно, эти функции расхода также являются КДФ.

Из всего вышесказанного следует, что рассматриваемая ситуация действительно носит общий характер и характеризуется тем, что имеются линейные дифференциальные соотношения, квадратичные функции расхода и предположение об управляемости. Однако приходится признать, что задача переформулировки условий, например, теорем 6 и 7, таким образом, чтобы функция расхода в этих условиях не была непосредственно представлена в виде «чистой» КДФ, является непростой.

В литературе, касающейся линейно-квадратичной задачи, рассматривается представление системы в пространстве состояний

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad s = u^\top Ru + u^\top Lx + x^\top Qx.$$

Однако исследовать соответствующую КДФ можно также и путем анализа (симметричных) полиномиальных матриц $\Phi \in \mathbf{R}^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}[\zeta, \eta]$, зависящих от двух параметров.

В заключении этого раздела мы упомянем два очевидных результата, касающихся функции расхода, определяемой рациональными передаточными функциями.

Теорема 8. *Рассмотрим функцию расхода* s, *заданную равенством* $s = |f_+|^2 - |f_-|^2$, *где* f_+, f_- *определяются передаточными функциями* $f_+ = F_+(\frac{d}{dt})w$, $f_- = F_-(\frac{d}{dt})w$, $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, *где* $F_+ \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$, $F_- \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ *и* $\det(F_+) \neq 0$. *Определим* $G \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ *равенством* $G = F_- {F_+}^{-1}$. *Тогда полученная система диссипативна, если и только если* $\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} \leqslant 1$.

Теорема 9. *Рассмотрим функцию расхода* s, *заданную равенством* $s = f_1^\top f_2$, *где* f_1, f_2 *определяются передаточными функциями* $f_1 = F_1(\frac{d}{dt})w$, $f_2 = F_2(\frac{d}{dt})w$, $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, *где* $F_1, F_2 \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$ *и* $\det(F_1) \neq 0$. *Определим* $G \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$ *равенством* $G = F_2 F_1^{-1}$. *Тогда полученная система диссипативна, если и только если* G *положительно вещественная.*

Эти теоремы являются непосредственными следствиями теорем 6 и 7.

Наряду с КДФ существуют и другие квадратичные формы на $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$ и $\mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, которые играют важную роль в линейно-квадратичной теории. Для полноты изложения мы приведем здесь один пример.

Определение 10. *Квадратичная интегральная форма* (*КИФ*) определяется матрицей рациональных функций $\Pi \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$, не имеющих полюсов на мнимой оси, как отображение

$$\mathcal{J}_\Pi : w \in \mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{w}(-i\omega)^\top \Pi(i\omega) \widehat{w}(i\omega)\, d\omega \in \mathbf{R},$$

где $\widehat{w}$ обозначает преобразование Фурье для w.

$\mathcal{J}_\Pi$ — инвариантная относительно сдвига квадратичная форма на $\mathcal{D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$. Квадратичные дифференциальные и интегральные формы (и их версии, заданные на полуоси) тесно связаны друг с другом. Эта связь является одной из основных тем, рассматриваемых в работе [20] в случае, когда Π — чисто полиномиальная. В настоящей статье эта связь рассматриваться не будет.

6. Устойчивость систем

Проблема устойчивости является одной из основных в прикладной математике. Она имеет особенно важное значение в теории управления, одна из центральных задач которой заключается в построении регулируемой системы с соблюдением требования ее устойчивости при наличии возмущений. Проблема робастной устойчивости будет рассмотрена в оставшейся части этой статьи.

Как математический вопрос в теории управления проблема устойчивости впервые возникла при исследовании линейных скалярных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и была рассмотрена в работе Максвелла [5]. Система, описываемая уравнением $p\left(\frac{d}{dt}\right) w = 0$, где $p \in \mathbf{R}[\xi]$, называется устойчивой, если все ее траектории сходятся к 0 при $t \to \infty$. Максвелл связал устойчивость с отрицательностью вещественных частей корней полинома p. Позднее Раус [9] и Гурвиц [3] получили условия, которые характеризуют отрицательность этих вещественных частей конечным множеством алгебраических неравенств, включающих коэффициенты полинома p. См. также [2, раздел 3.4].

Сходимость при $t \to \infty$ решения к 0 (или, в более общей постановке, к номинальной траектории) является также основной идеей, лежащей в основе *устойчивости по Ляпунову*. В теории устойчивости Ляпунова основное внимание уделяется анализу систем, описываемых потоком $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t)$, и поведения траекторий системы $x : \mathbf{R} \to \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — пространство состояний, являющееся многообразием, на котором определен поток системы. Если доказана сходимость состояний системы, автоматически получается сходимость разумной функции от переменных состояния.

Другая точка зрения на задачу устойчивости связана с представлением системы как отображения ее входов в ее выходы, которое должно быть ограниченным. Рассмотрим, например, линейную стационарную систему, заданную сверткой $y(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t - t')\, u(t')\, dt'$, которая сопоставляет входу $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{m}}$ соответствующий выход $y : \mathbf{R} \to$ $\to \mathbf{R}^{\mathtt{p}}$. Если $H \in \mathfrak{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{m}})$, то эта свертка является вполне определенным отображением, отображающим входы $u \in \mathfrak{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$ с лево-компактным носителем в выходы $y \in \mathfrak{L}^{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ (также с лево-компактным носителем). Мы можем определить *устойчивость «вход–выход»* (*input/output stability*) в терминах ограниченности этого отображения, например сказав, что если вход $u \in \mathfrak{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, то выход должен удовлетворять условию $y \in \mathfrak{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$. Легко видеть, что эта импликация справедлива, если $H \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{\mathtt{p}\times\mathtt{m}})$. Это понятие устойчивости в терминах «вход–выход» распространено на более общий случай нелинейных стационарных систем. В этих терминах «вход–выход» устойчивость обычно ассоциируют с отображением из $\mathfrak{L}_2$ в $\mathfrak{L}_2$ или с *конечным коэффициентом усиления*.

Одной из наиболее важных проблем устойчивости, исследуемых в теории управления, является задача *робастной устойчивости*. При решении этой задачи систему обычно рассматривают как совокупность двух взаимосвязанных частей — *номинальной системы* (*plant*) и связанной с нею *неопределенной системой*. При решении задачи робастной устойчивости требуется доказать, что вся совокупная система остается устойчивой, если неизвестные возмущения принадлежат к определенному классу. Свойство робастной устойчивости соответствует существу понятия хорошего регулирования.

Однако получение математической формулировки задачи робастной устойчивости не представляется очевидной проблемой. Если мы хотим рассмотреть эту задачу с точки зрения классической теории Ляпунова, нам следует использовать модель в пространстве состояний не только для номинальной системы, но и для неизвестных возмущений. Но очевидно, что нежелательно предполагать наличие досконального знания природы возмущений и особенно нереалистично надеяться на наличие информации о пространстве состояний этих возмущений. Все эти аргументы являются основными причинами, почему большинство исследователей в области робастной устойчивости предпочитают избегать использования методов, принятых при анализе устойчивости в пространстве состояний. Правильная теория робастной устойчивости должна исходить из того, что неизвестные возмущения входят в систему как некоторый *черный ящик*, и что требования, накладываемые на эти возмущения, могут быть определены неточно и иметь лишь качественный характер.

7. Устойчивость «вход–выход» систем с обратной связью

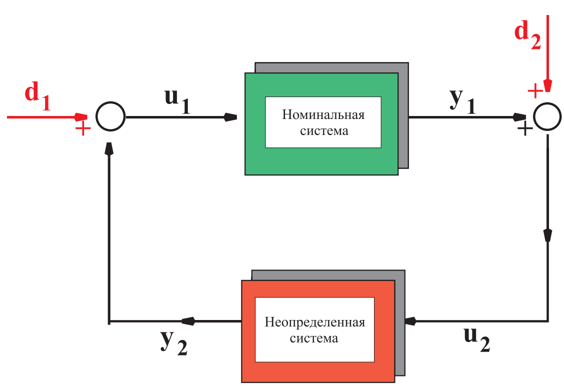

Рис. 2. Система с обратной связью

В наиболее успешной теории робастной устойчивости рассматриваются системы, блок-схема которых изображена на рис. 2. В системах с такой структурой управляемый объект входит в состав прямого контура обратной связи, а неопределенное возмущение — в состав обратного контура. Задача состоит в определении условий, при которых замкнутая система сохраняет устойчивость при условии, что неопределенные возмущения в обратной связи принадлежат некоторому классу.

Понятие устойчивости определяется как устойчивость «вход–выход» при наличии дополнительных «шумов» d_1, d_2, рассматриваемых в качестве входных сигналов, а также внутренних сигналов u_1, y_1, u_2, y_2, рассматриваемых в качестве выходных сигналов.

Получение удовлетворительной формулировки задачи устойчивости «вход–выход» для подобной системы не представляется простой проблемой. Решающим результатом в этой области является введение в рассмотрение *расширенного пространства состояний*, предложенного Сандбергом [11, 12] и Зеймсом [23]. Определим, например,

$$\mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{n}}) := \left\{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{n}} \;\middle|\; \int\limits_{-\infty}^{t} |f(t')|^2 \, dt' < \infty \quad \forall\, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Предположим, что сигналы d_1, u_1, y_2 могут принимать значения из $\mathbf{R}^{\mathtt{m}}$ и d_2, u_2, y_1 — из $\mathbf{R}^{\mathtt{p}}$. *$\mathcal{L}_2$-устойчивость «вход–выход»* изображенной на рис. 2 системы с обратной связью определяется требованием, что для любых $d_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $d_2 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ каждое соответствующее решение замкнутой системы в расширенных пространствах $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ должны в действительности принадлежать нерасширенным $\mathcal{L}_2$-пространствам: $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$. Представленная формулировка является в некотором смысле шагом в сторону от проблемы существования (и единственности). Действительно, в общем случае неверно, что для любых $d_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $d_2 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ существует (единственное) соответствующее решение $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$. Однако можно показать, что при соответствующих условиях для каждых $d_1 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $d_2 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ с лево-компактным носителем существует единственное соответствующее решение $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$, также с лево-компактным носителем. Это свойство, связанное с понятием *корректно поставленной задачи*, показывает, что при этих условиях из $\mathcal{L}_2$-устойчивости «вход–выход» следует, что для всех $d_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $d_2 \in \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ с лево-компактным носителем существует единственное соответствующее решение $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \mathcal{L}_{2,\mathrm{e}}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$, также с лево-компактным носителем, а также то, что это решение в действительности принадлежит $\mathcal{L}_2$: $u_1, y_1 \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$, $u_2, y_2 \in \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$. Представленную формулировку в совокупности с требованием корректно поставленной задачи и ограничением на компактность носителя слева для входов d_1, d_2 можно рассматривать как часть определения $\mathcal{L}_2$-устойчивости «вход–выход».

Этот подход к проблеме устойчивости «вход–выход» систем с обратной связью был разработан в 1960-х и 1970-х годах в работах Зеймса [23], Сандберга [11, 12] (и его последующих работах) и других авторов [6, 10, 16]. Существуют учебники по этой теории, например

[1, 14]. В работе [15] было показано, что этот подход является очень эффективным при анализе таких вопросов, как параметризация всех стабилизирующих регуляторов, одновременная стабилизация и других.

Несмотря на все вышеизложенные достоинства представленного подхода к проблеме устойчивости «вход–выход» он имеет ряд недостатков. Далее мы обсудим два наиболее значимых, которые связаны

1) со структурой входов-выходов объекта, неопределенной системой и их взаимосвязью;
2) с аддитивными входами d_1, d_2, в терминах которых определена устойчивость.

Описывают ли эта структура входов–выходов и эти аддитивные входы реально существующую физическую взаимосвязь в рассматриваемой системе?

Имеющаяся ограниченность рассмотрения системы лишь с точки зрения ее входов и выходов стало основной мотивацией для разработки поведенческого подхода (behavioral approach) в теории систем [7, 18, 19]. Физические системы не являются процессорами для обработки сигналов. Взаимосвязь между физическими системами осуществляется через общие или разделяемые переменные. Устанавливая связь между двумя оконечными контактами (terminals) двух электрических цепей, мы делаем равными напряжения и силу тока в этих двух системах (или в зависимости от выбора положительной направленности, мы делаем сумму соответствующих величин равной нулю). Следовательно, эти напряжения и силы тока в оконечных контактах представляют собой переменные, которые являются общими для двух систем. Конечно, мы можем рассматривать одну из систем в качестве управляемой по напряжению, а другую — управляемой по силе тока. В этом благоприятном случае взаимосвязь двух систем может рассматриваться как назначение соответствия между входами и выходами. Однако нет разумных оснований тому, чтобы описанную процедуру возводить в ранг общего принципа. Связывая две точки двух механических систем, мы приравниваем две силы (или, в зависимости от выбора положительной направленности, делаем их сумму равной нулю) и приравниваем друг другу два положения (или два угла, или два момента). Таким образом, эти две точки в двух системах характеризуются равными силами и одинаковыми положениями. Мы можем рассматривать одну из этих точек в качестве управляемой по силе, а другую — управляемой по положению. В этом случае взаимосвязь двух систем также может рассматриваться как назначение соответствия между входами и выходами. Однако и этот случай нет оснований возводить в ранг общего принципа. Связывая две точки двух жидкостных систем, мы приравниваем два потока (или в зависимости от выбора положительной направленности, мы делаем их сумму равной нулю) и два давления. Таким образом, эти две трубы в двух системах характеризуются равными потоками и равными давления в точке соединения систем. Однако нет причины и этот случай рассматривать как сопоставление входам их выходов. Список подобных примеров можно продолжить, рассматривая всевозможные физические системы.

Второй пункт, связанный с недостатками изложенного выше подхода, связан с наличием в контуре обратной связи аддитивных возмущений d_1, d_2 (см. рис. 2). Эти входы оказываются полезными при формулировке адекватного определения устойчивости, но сами они не могут быть точно определены с физической точки зрения. Обычно неопределенная подсистема задана аппроксимированной моделью. Примером этого могут служить игнорируемая при анализе динамика проводника тока в электрических сетях, упругость механической детали, моделируемой как абсолютно твердое тело, изменение параметров системы в результате износа или действия эффекта насыщения и т. п. Предположение о том, что эти возмущения могут быть представлены в виде аддитивных входов системы (и, следовательно, должны обладать своим собственным источником энергии с бесконечной емкостью) обычно не находит физического обоснования. Введение аддитивных возмущений для описания несовершенства модели системы является общепринятым приемом в теории систем, например, в теории идентификации систем. С прагматической точки зрения этот прием может рассматриваться как средство описания неопределенности модели, но лишь в редких случаях этот подход адекватен реальности. Этот метод введения аддитивных входов возможно навеян теми шумами сенсоров и исполнительных устройств, которые возникают в системах с обратной связью, но он не является адекватным при физическом описании неопределенных взаимосвязей.

При разработке концепции устойчивости обычно сталкиваются с проблемой выбора между методами устойчивости на языке «вход–выход» и методами установления устойчивости с использованием теории Ляпунова, т. е. когда определенные переменные сходятся к некоторой рабочей точке. Первый подход представляется убедительным лишь в случае, когда внешние входы являются физически реалистичными. Мы не думаем, что существует множество ситуаций, в которых неопределенность входит в систему именно так, как это показано на рис. 2. Однако если мы хотим, чтобы понятие устойчивости было сформулировано в терминах состояния системы, мы сталкиваемся с трудностью, связанной с необходимостью постулирования знания о пространстве состояний неопределенной системы, что также не представляется реалистичным.

В последующих разделах мы представим теорию робастной устойчивости, которая

- не предполагает, что имеется модель состояния неопределенной системы,
- не предполагает, что имеются аддитивные входы в точках связи, и
- имеет формулировку, не использующую представления в терминах «вход–выход».

Далее мы будем использовать следующую концепцию устойчивости, связанную с известной концепцией Ляпунова.

Определение 11. Система $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathcal{B})$ называется *устойчивой*, если $[\![w \in \mathcal{B}]\!] \Rightarrow [\![w(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty]\!]$.

Во всех случаях, когда мы будем иметь дело с понятием устойчивости, мы (неявно) будем предполагать, что $0 \in \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, где $\mathbf{V}$ — нормированное векторное пространство (это сделано для упрощения изложения может быть легко распространено на более общий случай).

8. Устойчивость неопределенных взаимосвязанных систем

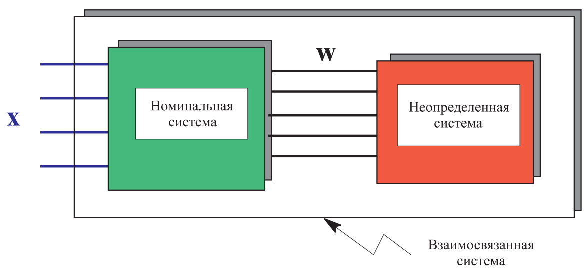

Рис. 3. Взаимосвязанная система

Мы будем исследовать устойчивую взаимосвязанную систему, показанную на рис. 3. С учетом этой блок-схемы мы будем предполагать, что номинальная система и неопределенная система взаимодействуют путем совместного использования в своей модели разделяемых переменных, обозначаемых через w. Тогда устойчивость определяется в терминах сходимости к нулю «внешних» переменных x. Далее мы формализуем эту идею на языке поведенческого подхода.

Объект представляет собой динамическую систему $\Sigma_{\text{plant}} = \left(\mathbf{R}, \mathbf{X} \times \mathbf{W}, \mathcal{B}_{\text{plant}}\right)$. Заметим, что описание объекта включает два типа переменных. Переменные первого типа ассоциированы с переменными x (обозначение x подразумевает «состояние», так как в дальнейшем мы будем рассматривать их в качестве переменных состояния объекта); переменные второго типа ассоциированы с переменными взаимосвязи w. Мы будем предполагать, что $0 \in \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — вещественное векторное пространство (или его подмножество). Каждая траектория в множестве поведений объекта представляется в идее пары $(x, w) : \mathbf{R} \to \mathbf{X} \times \mathbf{W}$. Переменными x являются те переменные, по которым мы хотим обеспечить устойчивость. Переменными w являются общие переменные, относящиеся к точкам связей в рассматриваемой системе. Неопределенная система представляет собой динамическую систему $\Sigma_{\text{uncertain}} = (\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathcal{B}_{\text{uncertain}})$. Взаимосвязанная система образуется при введении общих переменных w, совместных для объекта и неопределенной системы:

$$\Sigma_{\text{interconnected}} = \Sigma_{\text{plant}} \wedge \Sigma_{\text{uncertain}} = (\mathbf{R}\,, \mathbf{X}, \mathcal{B})\,,$$

где

$$\mathcal{B} = \Big\{x : \mathbf{R} \to \mathbf{X} \;\Big|\; \exists\; w : \mathbf{R} \to \mathbf{W} \;\text{ такое, что}$$
$$(x, w) \in \mathcal{B}_{\text{plant}} \text{ и } w \in \mathcal{B}_{\text{uncertain}}\Big\}\,.$$

В приложениях системы Σ_{plant} и $\Sigma_{\text{uncertain}}$ связаны друг с другом в точках соединения, как показано на рис. 3. Каждой такой точке соответствует набор некоторых переменных. Связывая подсистемы, мы приравниваем переменные, которые ассоциированы с этими точками и являются одновременно переменными как объекта, так и неопределенной системы. Примером подобной ситуации являются электрические соединения между двумя системами, в которых напряжения и силы тока равны; механические соединения, в которых равны положения и силы или углы и моменты; тепловые соединения, в которых равны температуры и тепловые потоки, и другие.

Таким образом, проблема может быть сформулирована следующим образом:

Определить такие условия на Σ_{plant} *и* $\Sigma_{\text{uncertain}}$, *что*

$\Sigma_{\text{plant}} \wedge \Sigma_{\text{uncertain}}$ *устойчива.*

9. Устойчивость диссипативных соединений систем

Основной принцип, лежащий в основе известных результатов по устойчивости замкнутых систем, заключается в том, что соединение диссипативных систем устойчиво. Это свойство представляет собой базис для теоремы о малом коэффициенте усиления, для теоремы о положительном операторе, для теоремы о коническом операторе (см. вышеприведенные ссылки на литературу), а также для других результатов, основанных на интегральных квадратичных связях (integral quadratic constraints) (ИКС).

Для объекта и неопределенной системы, изображенных на рис. 3, мы пока не определили соответствующих функций расхода. В действительности адекватный *выбор* этих функций является ключевым моментом при получении результатов об устойчивости рассматриваемой системы. Обычно предполагается, что функцией запаса является функция без памяти, зависящая от переменных системы, или некоторая КДФ, также заданная в переменных системы. Подобная ситуация часто встречается при рассмотрении физических приложений. В электрических сетях внешними переменными являются напряжения и силы тока, а функцией расхода (энергии, т.е. мощности) — сумма произведений напряжения и сил тока в местах соединения.

В механических системах внешними переменными являются силы и положения, а соответствующей функцией расхода (энергии, т. е. мощности) — сумма произведений сил и скоростей (производных от положений) в точках сочленения подсистем. Однако в рамках постановки общей задачи об устойчивости мы должны также предусмотреть возможность рассмотрения ситуаций, когда функция расхода не является явной функцией от системных переменных, но ассоциирована с переменными системы через ее поведение. Этому случаю соответствует, например, ситуация, когда в определение функции расхода входит передаточная функция. Для формального описания подобных ситуаций нам потребуются новые обозначения.

Пусть $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2, \mathcal{B})$ — некоторая динамическая система, переменными которой являются w_1 и w_2. Определим *проекции* $\pi_{\mathbf{W}_1}\Sigma$ и $\pi_{\mathbf{W}_2}\Sigma$ как $\pi_{\mathbf{W}_1}\Sigma := (\mathbf{R}, \mathbf{W}_1, \pi_{\mathbf{W}_1}\mathcal{B})$, где

$$\pi_{\mathbf{W}_1}\mathcal{B} := \left\{w_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{W}_1 \;\middle|\; \exists\, w_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{W}_2 \text{ такое, что } (w_1, w_2) \in \mathcal{B}\right\}.$$

Функция $\pi_{\mathbf{W}_2}\Sigma$ определяется аналогичным образом. Эти обозначения могут быть легко обобщены на случай, когда размерность пространства сигналов более двух. Далее будут введены функции расхода для объекта и неопределенной системы с учетом обозначений, приведенных на рис. 4.

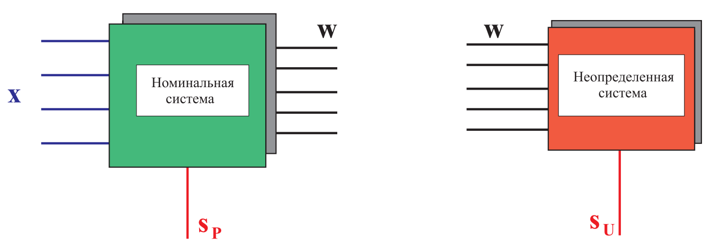

Рис. 4. Диссипативный объект и неопределенная система

Рассмотрим систему $\Sigma'_{\text{plant}} = (\mathbf{R}, \mathbf{X} \times \mathbf{W} \times \mathbf{R}, \mathcal{B}'_{\text{plant}})$, такую что объект представляет собой ее проекцию на компонент $\mathbf{X} \times \mathbf{W}$: $\pi_{\mathbf{X}\times\mathbf{W}}\Sigma'_{\text{plant}} = \Sigma_{\text{plant}}$. Обозначим проекцию на третий компонент, функцию расхода s_P, через $\pi_{s_P}\Sigma'_{\text{plant}}$. Аналогично, рассмотрим систему $\Sigma'_{\text{uncertain}} = (\mathbf{R}, \mathbf{W} \times \mathbf{R}, \mathcal{B}'_{\text{uncertain}})$, такую что неопределенная система является ее проекцией на компонент $\mathbf{W}$: $\pi_{\mathbf{W}}\Sigma'_{\text{uncertain}} = \Sigma_{\text{uncertain}}$. Обозначим проекцию на второй компонент, функцию расхода s_U, через $\pi_{s_U}\Sigma'_{\text{uncertain}}$.

Сформулированное ниже утверждение заключается в том, что если обе проекции $\pi_{s_P}\Sigma'_{\text{plant}}$ и $\pi_{s_U}\Sigma'_{\text{uncertain}}$ диссипативны и если, нестрого говоря, сумма $s_P + s_U$ (строго) неотрицательна вдоль траекторий взаимосвязанной системы, то траектории w этой взаимосвязанной системы интегрируемы с квадратом. Тем не менее, следует отметить, что траектории s_P и s_U не обязательно должны быть функциями переменных w. Они могут быть такими функциями, если, например, этими функциями расхода являются функции без памяти или квадратичные дифференциальные формы по переменным w. В общем случае эти траектории не соотносятся с (общепринятым) смыслом, заложенном в определении s_P и s_U, и не являются передаточными функциями, действующими на переменные w. С учетом всего вышесказанного, а также принимая во внимание рис. 5, мы получаем следующее утверждение, имеющее ключевое значение при установлении свойства устойчивости диссипативных взаимосвязанных систем. Мы будем предполагать, что $0 \in \mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ — вещественное векторное пространство, или его подмножество.

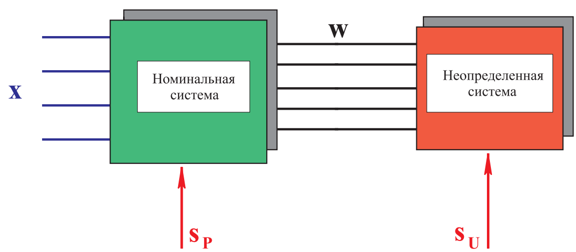

Рис. 5. Диссипация во взаимосвязанной системе

Утверждение 12. *Используя введенные выше обозначения, предположим, что*

(i) $\pi_{s_P}\Sigma'_{\text{plant}}$ *диссипативна,*

(ii) $\pi_{s_U}\Sigma'_{\text{uncertain}}$ *диссипативна,*

(iii) $\exists\,\varepsilon > 0$ *такая, что* $\forall\, w \in \pi_{\mathbf{W}}\mathcal{B}_{\text{plant}} \cap \mathcal{B}_{\text{uncertain}}$, $\exists\, s_P, s_U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *удовлетворяющие условиям:*

(a) (w, s_P) *принадлежит поведению* $\pi_{\mathbf{W}\times\mathbf{R}}\Sigma'_{\text{plant}}$,

(b) (w, s_U) *принадлежит поведению* $\Sigma'_{\text{uncertain}}$,

(c) $s_P(t) + s_U(t) + \varepsilon|w(t)|^2 \leqslant 0 \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$.

Тогда $\forall\, w \in \pi_{\mathbf{W}}\mathcal{B}_{\text{plant}} \cap \mathcal{B}_{\text{uncertain}}$, *выполнено* $\int_0^\infty |w(t)|^2\, dt < \infty$.

Доказательство. Из диссипативности следует, что для любой s_P, принадлежащей поведению $\pi_{s_P}\Sigma'_{\text{plant}}$, и для любой s_U, принадлежащей поведению $\pi_{s_P}\Sigma'_{\text{uncertain}}$, выполнены следующие утверждения:

$$\exists\, K_P \in \mathbf{R} \quad \text{такое, что} \quad -\int_0^T s_P(t)\, dt \leqslant K_P \quad \text{для } T \geqslant 0;$$

$$\exists\, K_U \in \mathbf{R} \quad \text{такое, что} \quad -\int_0^T s_U(t)\, dt \leqslant K_U \quad \text{для } T \geqslant 0.$$

Из этих результатов следует, что

$$-\int_0^T \left(s_P(t) + s_U(t)\right) dt \leqslant K_P + K_U \quad \text{для } T \geqslant 0.$$

Пусть $w \in \pi_{\mathbf{W}} \mathcal{B}_{\text{plant}} \cap \mathcal{B}_{\text{uncertain}}$. Тогда для s_P, s_U, удовлетворяющих условиям в формулировке этого утверждения, мы получаем неравенство

$$\int_0^T |w(t)|^2 \, dt \leqslant \frac{K_P + K_U}{\varepsilon} \quad \text{для } T \geqslant 0,$$

из которого следует $\int_0^\infty |w(t)|^2 \, dt < \infty$. □

Убедившись в том, что $\int_0^\infty |w(t)|^2 \, dt < \infty$, мы должны проанализировать структуру поведения объекта более детально для того, чтобы доказать сходимость $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Мы находимся в условиях часто случающейся ситуации, когда из квадратичной интегрируемости внешней системы следует сходимость к нулю внутренних переменных системы, имеющих в некотором смысле сходство с переменными состояния. Этот случай будет рассмотрен в следующем разделе, результаты которого касаются объекта, представленного в виде линейной стационарной дифференциальной системы.

Во многих приложениях утверждения 12 функции расхода определяются отображениями, действующими из w в s_P и s_U. В этих случаях условие (iii) утверждения может быть упрощено: $\exists \varepsilon > 0$ такая, что $\forall w \in \pi_{\mathbf{W}} \mathcal{B}_{\text{plant}} \cap \mathcal{B}_{\text{uncertain}}$ соответствующие s_P, s_U удовлетворяют условию (c). Следует также отметить, что если эти отображения не имеют памяти, скажем, имеют вид $\mathrm{w} \mapsto (\mathrm{s_P}(\mathrm{w}), \mathrm{s_U}(\mathrm{w}))$, то условие (c) будет выполнено, если $\exists \varepsilon > 0$ такая, что (c)$'$: $\mathrm{s_P}(\mathrm{w}) + \mathrm{s_U}(\mathrm{w}) + \varepsilon|\mathrm{w}|^2 \leqslant 0 \;\; \forall \mathrm{w} \in \mathbf{W}$. Тогда условия утверждения 12 сводятся к следующим: (i) диссипативность $\pi_{s_P} \Sigma'_{\text{plant}}$, (ii) диссипативность $\pi_{s_U} \Sigma'_{\text{uncertain}}$, и (c)$'$.

Покажем, как из утверждения 12 могут следовать результаты теоремы о малом коэффициенте, а также результаты теоремы о положительном операторе в приложении к объекту $\Sigma_{\text{plant}} = \left(\mathbf{R}, \mathbf{X} \times \mathbf{U} \times \mathbf{Y}, \mathcal{B}_{\text{plant}}\right)$ и неопределенной системе $\Sigma_{\text{uncertain}} = (\mathbf{R}, \mathbf{U} \times \mathbf{Y}, \mathcal{B}_{\text{uncertain}})$. В случае теоремы о малом коэффициенте введем функции расхода $s_P(t) = |u(t)|^2 - |y(t)|^2 + \varepsilon\left(|u(t)|^2 + |y(t)|^2\right)$ и $s_U(t) = |y(t)|^2 - |u(t)|^2$. Тогда условия утверждения 12 сводятся к следующим: (i) диссипативность объекта по функции расхода $|u(t)|^2 - |y(t)|^2 + \varepsilon\left(|u(t)|^2 + |y(t)|^2\right)$, т. е. (переформулировка) строгая сжимаемость (strict contractivity) объекта, и (ii) диссипативность неопределенной системы по функции расхода $-|u(t)|^2 + |y(t)|^2$, т. е. сжимаемость неопределенной системы. В случае теоремы о положительном операторе введем функции расхода $s_P(t) =$

$= u(t)^\top y(t) + \varepsilon\left(|u(t)|^2 + |y(t)|^2\right)$ и $s_U(t) = -u(t)^\top y(t)$. Тогда для устойчивости требуется (переформулировка) строгой пассивности объекта и пассивность неопределенной системы.

10. Устойчивость линейного стационарного объекта

В этом разделе мы будем предполагать, объект представляет собой линейную стационарную (ЛС) дифференциальную систему с переменными w, причем x — состояние для w-поведения. Несколько усложнив запись, обозначим этот объект символом $\Sigma_{\text{plant}} = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}, \mathcal{B}_{\text{plant}}\right) \in \mathcal{L}^{\mathtt{w}}$, где x — ассоциированное с $\mathcal{B}$ состояние, размерность которого минимальна. В этом случае можно показать, что $w \in \mathcal{B}$ и из неравенства $\int_0^\infty |w(t)|^2\, dt < \infty$ следует $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, при надлежащем выборе входов и выходов эволюция переменных объекта (w, x) описывается системой

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \qquad w = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix},$$

где (A, C) — наблюдаемая (вследствие того, что размерность состояния минимальна) пара. Тогда из $\int_0^\infty |w(t)|^2\, dt < \infty$ и $Cx = y - Du$ следует $\int_0^\infty |Cx(t)|^2\, dt < \infty$. Пусть $L \in \mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}$ такая, что $A - LC$ гурвицева. Тогда $\frac{d}{dt}x = (A - LC)x + LCx + Bu$. Поскольку $A - LC$ гурвицева и $\int_0^\infty |Cx(t)|^2\, dt < \infty$, $\int_0^\infty |u(t)|^2\, dt < \infty$, мы получаем $\int_0^\infty |x(t)|^2\, dt < \infty$. С учетом $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ можно показать, что $\int_0^\infty |x(t)|^2\, dt < \infty$. Тогда, поскольку $\int_0^\infty |x(t)|^2\, dt < \infty$ и $\int_0^\infty |\frac{d}{dt}x(t)|^2\, dt < \infty$, получаем $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Нашей основной целью в этом разделе является доказательство свойства устойчивости с использованием функций расхода, получаемых с использованием передаточных функций, действующих на переменные w (см. рис. 6).

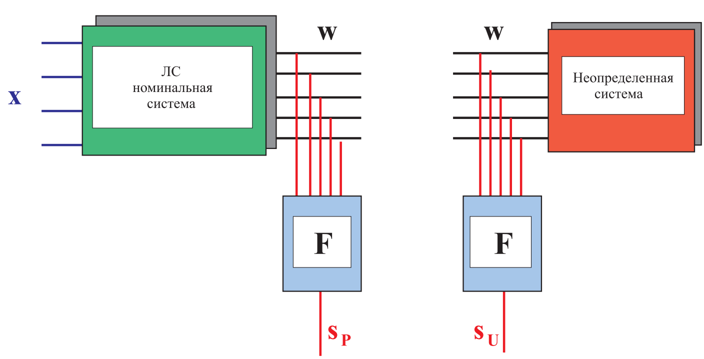

Рис. 6. Линейный объект и квадратичная функция расхода

Утверждение 13. *Пусть* $F \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\mathtt{w}}$ *и* $S = S^\top \in \mathbf{R}^{\bullet\times\bullet}$ *таковы, что для некоторой* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$s_P = v_P^\top S v_P - \varepsilon |w_P|^2, \quad v_P = F(\frac{d}{dt})w_P, \quad w_P \in \mathcal{B}_{plant}$$

и функции

$$s_U = -v_U^\top S v_U, \quad v_U = F(\frac{d}{dt})w_U, \quad w_U \in \mathcal{B}_{uncertain}$$

являются диссипативными. Тогда система $\Sigma_{plant} \wedge \Sigma_{uncertain}$ *устойчива.*

Это утверждение является непосредственным следствием утверждения 12. Действительно, для $w \in \mathcal{B}_{\mathrm{plant}} \cap \mathcal{B}_{\mathrm{uncertain}}$ существуют соответствующие выходные сигналы $v_P = v_U$, такие что $s_P + s_U + \varepsilon|w|^2 = 0$.

Проблема заключается в том, чтобы конкретизировать условия этого утверждения, например, путем замены свойства диссипативности первой системы на условия на передаточную функцию объекта с одновременной заменой свойства диссипативности второй системы на ИКС для неопределенной системы. Обозначим *дуальную* матрицу к матрице $F \in \mathbf{R}(\xi)^{\bullet\times\bullet}$ через F^* и определим ее следующим равенством $F^*(\xi) := = F^\top(-\xi)$. Эту дуальную матрицу иногда называют *полу-эрмитово сопряженной*.

Определение 14. $\Pi = \Pi^* \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{w}\times\mathtt{w}}$ определяет *интегральную квадратичную связь* (*ИКС*) для системы $\Sigma = (\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}}, \mathcal{B})$, если

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{w}(-i\omega)^\top \Pi(i\omega)\, \widehat{w}(i\omega)\, d\omega \geqslant 0$$

для всех $w \in \mathcal{B} \cap \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{w}})$, таких что этот интеграл существует. Символ $\widehat{w}$ обозначает преобразование Фурье для w.

Заметим, что в терминах определения 10 для выполнения ИКС необходимо, чтобы $\mathcal{I}_\Pi(w) \geqslant 0$ для $w \in \mathcal{B}$. Интегральные квадратичные ограничения были применены в работе [6, теорема 1], что позволило получить результаты по устойчивости достаточно общего характера. Далее мы используем утверждение 13 при получение результатов по устойчивости для специального случая постановки задачи в терминах входа и выхода, основанной на применении интегральных квадратичных ограничений и условия на взвешенный коэффициент усиления замкнутой цепи (weighted loop gain condition). Полное обобщение результата [6, теорема 1] в контексте утверждения 13 и в условиях отсутствия предположения о вход–выходной постановке задачи будет предметом дальнейших исследований.

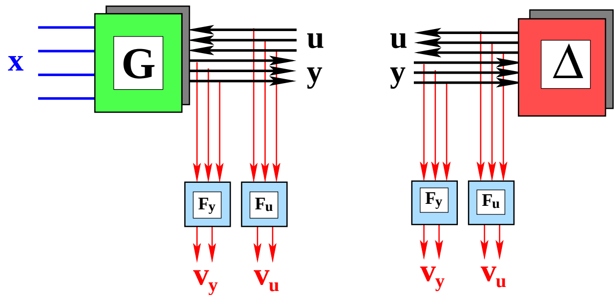

Рис. 7. Линейный объект с функциями расхода для входов и выходов

Далее мы рассмотрим ситуацию, соответствующую рис. 7. $\mathcal{B}_{\text{plant}}$ описывается представлением в терминах входа–состояния–выхода

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du,$$

где A — гурвицева матрица. Обозначим передаточную матрицу системы через G, $G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{p}\times\mathtt{m}}$. Предположим, что $\mathcal{B}_{\text{uncertain}}$ — граф неупреждающего отображения Δ, сопоставляющего каждой функции $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{p}}$, такой что $\int_{-\infty}^{t} |y(t')|^2\, dt'$ для всех $t \in \mathbf{R}$ функцию $u = \Delta(y) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathtt{m}}$, такую что $\int_{-\infty}^{t} |u(t')|^2\, dt'$ для всех $t \in \mathbf{R}$. Предположим, кроме того, что Δ отображает $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ в $\mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})$: $[\![y \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})]\!] \Rightarrow [\![u = \Delta(y) \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{m}})]\!]$.

При получении представленного ниже результата мы не предпринимали каких-либо попыток для того, чтобы сделать условия максимально строгими (в смысле получения строгих неравенств и максимально строгих предположений об ограниченности).

Предположим, что существуют $\Pi_u = \Pi_u^* \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{m}\times\mathtt{m}}$ и $\Pi_y = \Pi_y^* \in \mathbf{R}(\xi)^{\mathtt{p}\times\mathtt{p}}$, для которых $\exists\, k, K \in \mathbf{R}$, $k > 0$, где $kI \leqslant \Pi_u(i\omega)$, $\Pi_y(i\omega) \leqslant KI$ $\forall \omega \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям

(i) $\Sigma_{\text{uncertain}}$ удовлетворяет ИКС, определяемому равенством $\Pi = \begin{bmatrix} -\Pi_u & 0 \\ 0 & \Pi_y \end{bmatrix}$,

(ii) $\exists\, \varepsilon > 0$ такая, что $G^{\top}(-i\omega)\,\Pi_y(i\omega)\,G(i\omega) \leqslant (1-\varepsilon)\,\Pi_u(i\omega) \quad \forall \omega \in \mathbf{R}$.

Тогда взаимосвязанная система устойчива.

Представленный результат может быть доказан следующим образом. Рассмотрим разложения $\Pi_u = F_u^* F_u$ и $\Pi_y = F_y^* F_y$, такие что $F_u, F_y, F_u^{-1}, F_y^{-1}$ являются собственными и не имеют полюсов в замкнутой правой половине комплексной плоскости. Хорошо известно, что (следствие ограниченности и строгой положительности) такие спектральные разложения существуют. Рассмотрим также $v_u = F_u(\frac{d}{dt})u$, $v_y = F_y(\frac{d}{dt})y$. Докажем, что существует $\varepsilon > 0$ такая, что системы, определенные соответственно соотношениями

$$s_P = |v_{u,P}|^2 - |v_{y,P}|^2 - \varepsilon\left(|u_P|^2 + |y_P|^2\right),$$
$$v_{u,P} = F_u\left(\frac{d}{dt}\right)u_P, \quad v_y = F_y\left(\frac{d}{dt}\right)y_P,$$
$$\begin{bmatrix} u_P \\ y_P \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_{\text{plant}}$$

и

$$s_U = -|v_{u,U}|^2 + |v_{y,U}|^2,\ v_{u,U} = F_u\left(\frac{d}{dt}\right)u_U,\ v_{y,U} = F_y\left(\frac{d}{dt}\right)y_U,$$
$$\begin{bmatrix} u_U \\ y_U \end{bmatrix} \in \mathcal{B}_{\text{uncertain}}$$

являются диссипативными. Тогда результат следует из утверждения 13. Мы докажем лишь второе условие диссипативности (первое доказывается аналогично). Заметим, что из ИКС следует, что для $y_U \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^{\mathtt{p}})$ выполнено неравенство $\|F_u(\frac{d}{dt})\Delta(y_U)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{m}})} \leqslant \leqslant \|F_y(\frac{d}{dt})y_U\|_{\mathcal{L}_2(\mathbf{R},\mathbf{R}^{\mathtt{p}})}$. Тогда с учетом того, что $\mathcal{F}_u$, Δ и F_y^{-1} являются непредвосхищающими, мы получаем неравенство $\int_{-\infty}^{t}\left(|F_y(\frac{d}{dt})y_U|^2 - |F_u(\frac{d}{dt})\Delta(y_U)|^2\right)dt \geqslant 0\ \forall t \in \mathbf{R}$, из которого следует второе неравенство диссипативности.

11. Заключение

В этой статье мы представили новое определение диссипативности в терминах скорости изменения ресурса, поглощенного системой. Мы показали, что это определение эквивалентно существованию неотрицательного запаса.

Квадратичные дифференциальные формы являются одним из классов функций расхода, для которых оказывается возможным исследовать диссипативность. Мы получили частотные условия для диссипативности системы вида $\Sigma_\Phi = \left(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \operatorname{im}(Q_\Phi)\right)$. В частности, мы показали, что неравенство $\Phi\left(\lambda, \overline{\lambda}\right) + \Phi^\top\left(\overline{\lambda}, \lambda\right) \geqslant 0$ для $\lambda \in \mathbf{C},\ \operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$ является необходимым условием. В случае, если размерность Φ равна ее положительной сигнатуре, мы получили несколько эквивалентных и достаточных условий.

Во второй части статьи мы исследовали проблему устойчивости взаимосвязанных систем. Мы предложили простое доказательство результата, заключающегося в том, что соединение диссипативных систем устойчиво, если сумма из функций расхода строго отрицательна. Мы использовали этот принцип при определении в терминах ИКС условий устойчивости системы с обратной связью, накладываемых на частотно взвешенный коэффициент усиления замкнутой системы.

Признательности

Эти исследования были поддержаны Бельгийским федеральным правительством в рамках DWTC-программы Interuniversity Attraction Poles, Phase V, 2002–2006, «Dynamical Systems and Control: Computation, Identification and Modelling», KUL Concerted Research Action (GOA) MEFISTO–666, а также нескольких грантов и проектов, финансируемых IWT-Flanders и Фондом Флеминга для Научных Исследований.

Список литературы

1. *C. A. Desoer*, *M. Vidyasagar*. Feedback Systems: Input-Output Properties. — Academic Press, 1975. (Пер. с англ. *Ч.Дезоер*, *М.Видиасагар*. Системы с обратной связью: вход–выходные соотношения. — М.: Наука. 1983.)
2. *D. Hinrichsen*, *A. J. Pritchard*. Mathematical Systems Theory I: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. — Springer–Verlag, 2005.
3. *A. Hurwitz*. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt. Mathematische Annalen. — 1877. — Bd 46. — S. 273–284.
4. *R. E. Kalman*. Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. — 1963. — Vol. 49. — P. 201–205.
5. *J. C. Maxwell*. On governors. Proceedings of the Royal Society of London. — 1868. — Vol. 16. — P. 270–283.
6. *A. Megretski*, *A. Rantzer*. System analysis via integral quadratic constraints. IEEE Transactions on Automatic Control. — 1997. — Vol. 42. — P. 819–830.
7. *J. W. Polderman*, *J. C. Willems*. Introduction to Mathematical Systems Theory: A Behavioral Approach. — Springer-Verlag, 1998.
8. *V. M. Popov*. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. Automation and Remote Control. — 1961. — Vol. 22. — P. 961–979.
9. *E. J. Routh*. A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. — MacMillan, 1877.
10. *M. G. Safonov*. Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. — The MIT Press, 1980.
11. *I. W. Sandberg*. On the properties of some systems that distort signals (I and II). Bell System Technical Journal. — 1963. — Vol. 42. — P. 2033–2047, and Vol. 43. — P. 91–112.
12. *I. W. Sandberg*. On the $\mathfrak{L}_2$-boundedness of nonlinear functional equations. Bell System Technical Journal. — 1964. — Vol. 43. — P. 1581–1599.
13. *H. L. Trentelman*, *J. C. Willems*. Every storage function is a state function. Systems & Control Letters. — 1997. — Vol. 32. — P. 249–259.
14. *M. Vidyasagar*. Nonlinear Systems Analysis. — Prentice Hall, 1978.
15. *M. Vidyasagar*. Control System Synthesis. — The MIT Press, 1985.
16. *J. C. Willems*. The Analyis of Feedback Systems. — The MIT Press, 1971.

17. *J.C. Willems*. Dissipative dynamical systems - Part I: General theory, Part II: Linear systems with quadratic supply rates. Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1972. — Vol. 45. — P. 321–351 and 352–393.
18. *J.C. Willems*. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. IEEE Transactions on Automatic Control. — 1991. — Vol. 36. — P. 259–294.
19. *J.C. Willems*. On interconnections, control and feedback. IEEE Transactions on Automatic Control. — 1997. — Vol. 42. — P. 326–339.
20. *J.C. Willems*, *H.L. Trentelman*. On quadratic differential forms. SIAM Journal on Control and Optimization. — 1998. — Vol. 36. — P. 1703–1749.
21. *V.A. Yakubovich*. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. Doklady Akademii Nauk SSSR. — 1962. — Vol. 143. — P. 1304–1307. (См. [38] из списка трудов В. А. Якубовича; с. 16–34 в настоящем сборнике.)
22. *V.A. Yakubovich*. The frequancy theorem in control theory. Siberian Mathematics Journal. — 1973. — Vol. 14. — P. 384–419. (См. [111] из списка трудов В. А. Якубовича; с. 16–34 в настоящем сборнике.)
23. *G. Zames*. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I: Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity; Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — Vol. 11. — P. 228–238 and 465–476.

С. В. Гусев[†] *и А. Л. Лихтарников*[†]

Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры[*]

Аннотация: излагается история возникновения двух фундаментальных результатов математической теории систем: леммы Калмана–Попова–Якубовича и теоремы о неущербности S-процедуры. Приводится обзор исследований, непосредственно связанных с этими утверждениями. Анализируются недавние публикации, использующие теорему о неущербности S-процедуры для вывода леммы Калмана–Попова–Якубовича и ее обобщений.

1. Введение

1.1. О предмете нашего очерка

Очерк посвящен истории исследований, связанных с двумя указанными в названии результатами, в получение которых В. А. Якубович внес решающий вклад. Первый из них называется леммой Калмана–

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет.
[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 11. — С. 77–122.

Попова–Якубовича, второй — теоремой о неущербности S-процедуры. Оба результата заслужили всеобщее признание как основополагающие утверждения, отражающие фундаментальные принципы математической теории систем.

Издатели считают, что математические книги (и большая часть их содержания) в среднем стареют за двадцать пять лет, а научные статьи отживают примерно через пять лет. Иначе говоря, решенные задачи забываются или, наоборот, получают развитие в эти сроки. Подчеркнем, слегка перефразируя образное выражение П. Халмоша, что пятидесятилетние статьи могут быть полны жизни, а некоторые книги умирают уже при родах.

Два результата, о которых здесь пойдет речь, вскоре достигнут полувекового возраста. Далее будет показано, что сегодня они полны жизни как никогда ранее. Идет время, изменяются обозначения в формулировках теорем, рассматриваются новые сферы приложений и новые задачи, а сами результаты становятся все более востребованными как инструменты решения задач теории управления. Неудивительно, что эти две теоремы живут столь долго. Они имеют ясную алгебраическую природу и относятся к фундаментальным математическим фактам. Это видно даже из сильно упрощенного понимания их формулировок: как теорема о неущербности S-процедуры, так и лемма Калмана–Попова–Якубовича — суть утверждения о линейных неравенствах для квадратичных форм.

Удивительным представляется недавно обнаруженный вывод леммы Калмана–Попова–Якубовича из теоремы о неущербности S-процедуры. Долгое время эти две теоремы жили, образно выражаясь, как дружные соседи, и вот, спустя столько лет, все узнали, что они еще и родственники.

У авторов этой статьи было два значительных препятствия перед тем, чтобы ее написать. Первое из них — авторы не являются историками науки. Позиция историка предполагает намного более широкое понимание научного контекста обсуждаемого направления исследований. Наши возможности в этом плане невелики. Поэтому эта работа построена скорее как очерк, который можно трактовать как обзор развития наиболее известных достижений нашего учителя, на работах которого авторы учились. Возможность учиться у авторов была тогда, когда они читали статьи, которые цитируются в данной работе, и когда слушали его лекции, и тогда, когда имели возможность и честь быть соавторами В. А. Якубовича. Подготовка данной статьи стала продолжением этого процесса, когда были заново перечитаны работы разных авторов и разных времен, связанные с нашим обзором.

Второе препятствие проявилось как противоречие позже, когда были составлены набросок статьи и списки работ, опубликованных другими авторами. Дело в том, что два результата, указанные в названии статьи, имеют невероятно многочисленные приложения во всех областях математической теории систем. Во всех своих попытках побольше охватить всего: истории, фактов, результатов, авторы данной работы помнили о начале своей системы координат и не отходили далеко от поля деятельности основного автора, В. А. Якубовича. Одновременно предполагалось составить достаточно полный обзор работ, в которых эти теоремы применяются как инструменты исследования систем. Если бы удалось решить и эту задачу, то список литературы занял бы весь выпуск журнала, и не было бы места для текстов нашей и других статей. Поэтому авторам пришлось признать ограниченность своих возможностей и в широте обзора и принести здесь наши извинения тем авторам, работы которых упоминаются кратко, и другим, чьи работы не удалось упомянуть в обзоре потому, что авторы обзора не успели их изучить в должной мере.

1.2. Как отличить лемму от ее следствий и далеких аналогий

В настоящее время лемма Калмана–Попова–Якубовича настолько популярна, что нередко ее следствия и даже довольно далекие аналогии получают это название. Это затрудняет понимание читателей, особенно тех, кто знакомится с широким кругом работ, в которых лемма применяется к задачам из различных областей математической теории систем. Чтобы избежать разночтений, предлагаем простой критерий «опознания» леммы. В лемме участвуют:

а) так называемое «частотное» неравенство, в котором присутствует параметр, обычно имеющий в приложениях смысл частоты и меняющийся в некотором множестве комплексной плоскости;

б) матричное неравенство;

в) матричное уравнение, которое называется уравнением Лурье.

Далее в нашем очерке леммой Калмана–Попова–Якубовича называется утверждение о равносильности трех утверждений: выполнено частотное неравенство при всех допустимых значениях параметра; разрешимо матричное неравенство и, наконец, разрешимо матричное уравнение Лурье. Точные формулировки приведены ниже.

1.3. Обстоятельства возникновения леммы, первые доказательства, названия

Лемма Калмана–Попова–Якубовича впервые сформулирована и доказана в работе [75], где утверждается равносильность а) и б) в случае выполнения строгого частотного неравенства. В работе [152] рассмотрен случай нестрогого частотного неравенства и установлена его связь с разрешимостью уравнений Лурье. В обеих статьях рассматривались системы со скалярным входом. В работах [23, 180] было снято ограничение на размерность управления.

Этот результат встречается в литературе под различными названиями. Его называют леммой Якубовича [152], леммой Калмана–Якубовича [57, 158] и др., леммой Калмана–Якубовича–Попова (в англоязычных публикациях последнее название часто заменяется аббревиатурой «KYP lemma»). Специальные случаи этого утверждения известны как лемма о положительно-вещественных матрицах (positive real lemma) и лемма об ограниченно-вещественных матрицах (bounded real lemma). В. А. Якубович в своих работах называет этот результат «частотная теорема». В данной статье принято название лемма Калмана–Попова–Якубовича, в котором фамилии указаны в алфавитном порядке.

1.4. Области применения леммы

Возникновение леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры связано с исследованиями устойчивости нелинейных систем регулирования. Последовавшая после доказательства леммы серия работ В. А. Якубовича [26, 76–92], посвященных устойчивости, неустойчивости и колебательности нелинейных систем, в значительной мере определила направление дальнейших исследований в этой области. Обзоры полученных результатов приведены в работах [13, 24, 25, 35, 93, 94, 200].

Тесная связь леммы Калмана–Попова–Якубовича с задачами линейно квадратичной оптимизации впервые была отмечена В. М. Поповым [57, 180]. Значительный вклад в это направление исследований внесла работа Я. Виллемса [196]. Связь леммы Калмана–Попова–Якубовича и линейно-квадратичной оптимизации послужила основой для получения бесконечномерных аналогов леммы [95]. Работы В. А. Якубовича [96, 201], основанные на применении леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры, положили начало исследованию задач линейно-квадратичной оптимизации при наличии квадратичных ограничений. Эти исследования получили развитие в [50–52, 162].

Впервые лемма Калмана–Попова–Якубовича была применена для синтеза адаптивного управления в [177]. Более общие результаты получены в [17, 71, 170]. Развитие этого направления исследований отражено в [29, 70, 72]. Обзор результатов приведен в [7, 13].

Лемма Калмана–Попова–Якубовича в ее бесконечномерных вариантах [8, 14, 15, 18–20, 39, 40, 42, 43, 53, 95] применяется для исследования систем управления, описываемых уравнениями в частных производных различных классов: параболическими [121, 173], гиперболическими системами первого и второго порядков, уравнениями Эйлера–Бернулли, Кирхгофа, Шрёдингера, а также уравнениями колебаний струны и мембраны [116, 120, 156, 174, 192], нестандартными уравнениями Риккати, возникающими в задачах с граничным управлением демпфированием колебаний пластин, интегральными уравнениями Хаммерштейна со слабо сингулярным ядром [133, 157]; а также в теории пассивных систем рассеяния [112]; для ограниченных операторов управления, полугрупп класса C_0 и систем Притчарда–Саламона [126, 128, 160, 193], в систем с распределенными параметрами и дискретным временем, теории аппроксимации для систем с граничным управлением [109, 142, 161]. В настоящее время имеются обзоры по этой области развития леммы [127, 172, 175].

Лемма Калмана–Попова–Якубовича находит многочисленные применения в теории стохастических систем. Она используется в теории представления стохастических процессов линейными моделями [130, 131, 159], в теории оценивания [188]. В работах [73, 74] лемма Калмана–Попова–Якубовича используется для синтеза оптимальных универсальных регуляторов при наличии сингулярных стохастических возмущений. Лемма Калмана–Попова–Якубовича находит применение в задачах абсолютной устойчивости стохастических систем (см. обзор [54]).

Лемма Калмана–Попова–Якубовича используется в H^∞-оптимизации [123, 138, 139, 189] и в многокритериальной оптимизации [185], где она применяется для преобразования исходной задачи к решению линейных матричных неравенств.

Среди применений S-процедуры, не относящихся к теории управления, отметим ее использование в задаче минимизации знаконеопределенной квадратичной формы на квадратичной поверхности, в частности на эллипсоиде [69]. Эта минимизация является основной операцией в так называемом методе доверительных областей, применяемом в задачах глобальной оптимизации (см. обзор [125]). Используя S-процедуру, удается показать, что традиционные методы локальной оптимизации в действительности определяют глобальный минимум. Этот результат, полученный в [69], переоткрывался несколько раз [118, 134, 187].

Широкий круг вопросов, связанных с S-процедурой, рассматривается в обзорах [146, 178].

1.5. Связь между леммой и теоремой об S-процедуре

Лемма Калмана–Попова–Якубовича и S-процедура появились как два взаимодополняющих метода в исследовании задач абсолютной устойчивости [23]. И в настоящее время в приложениях S-процедура и лемма Калмана–Попова–Якубовича часто соседствуют друг с другом, выступая в качестве двух важнейших инструментов, позволяющих решить задачу.

Надо отметить, что изначально эти результаты возникли как утверждения совершенно различной природы. Лемма Калмана–Попова–Якубовича традиционно рассматривается как алгебраический результат, доказательство которого основано на теоремах о факторизации. S-процедура с момента первых публикаций В. А. Якубовича тесно связана с выпуклым анализом и теорией двойственности. В соответствии с таким различием проводившиеся в течение длительного периода интенсивные исследования по развитию и обобщению этих результатов не были связаны друг с другом.

Первое доказательство леммы Калмана–Попова–Якубовича, указывающее на внутреннюю связь этого результата с S-процедурой, получено А. Ранцером [182]. Как следует из аннотации этой интересной работы, ее целью являлось получение простого доказательства леммы Калмана–Якубовича–Попова. Эта цель вполне заслуживает внимания в свете многочисленных высказываний о крайней трудности доказательства леммы. Надо сказать, что несмотря на значительное упрощение доказательства, избежать жалоб на трудность его понимания не удалось.

Важным результатом этой работы является предложенный новый подход, который позволяет рассматривать утверждение леммы Калмана–Попова–Якубовича как специальный пример неущербности S-процедуры со многими связями. Эта идея была использована в [150] для получения неожиданного и интересного обобщения леммы Калмана–Попова–Якубовича на случай, когда частотное условие задано не на всей мнимой оси, а на некотором конечном интервале частот. В работах [28, 140, 149] этот подход применен для обобщения леммы Калмана–Попова–Якубовича на системы, заданные в неразрешенной относительно производной форме.

Эта, на наш взгляд интересная, история исследований в фундаментальной и одновременно актуальной области математической теории систем определила тему данной статьи, которая концентрируется на математических результатах, непосредственно относящихся к лемме Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуре. Многочисленные и важные приложения этих результатов, а также их связи с другими направлениями теории систем остались за рамками статьи. Некоторые из этих вопросов отражены в отдельных публикациях в данном выпуске журнала.

1.6. Как организована наша статья

Статья организована следующим образом. Во втором параграфе кратко описана история возникновения леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры, которая тесно связана с исследованием устойчивости нелинейных систем. В третьем параграфе даны современные формулировки леммы Калмана–Попова–Якубовича для конечномерных систем. Приведено предложенное А. Н. Чуриловым обобщение леммы на случай, когда частотное условие задано на произвольной прямой или окружности. Кроме того, дан обзор результатов по свойствам решений уравнения Лурье и линейного матричного неравенства. Эти свойства имеют большое значение в теории устойчивости, оптимальном управлении, H^∞-оптимизации и при других применениях леммы. Далее в этом параграфе указана связь леммы Калмана–Попова–Якубовича с решением алгебраического уравнения Риккати и обобщенных уравнений Лурье.

Четвертый параграф посвящен бесконечномерным обобщениям леммы Калмана–Попова–Якубовича. Обсуждается исторический контекст обобщения леммы на случай распределенных систем и основные публикации по лемме с начала 70-х г. до настоящего времени.

В пятом параграфе кратко описаны первые результаты о неущербности S-процедуры. Шестой параграф посвящен связи теорем о неущербности S-процедуры с выпуклостью образа, ассоциированного с

S-процедурой отображения. Приведен перечень результатов о выпуклости образа в конечномерном и бесконечномерном случаях. Рассматривается связь неущербности S-процедуры с наличием двойственности Лагранжа или двойственности Фенхеля в некоторых задачах математического программирования. Важный для приложений случай неущербности S-процедуры для эрмитовых форм рассматривается в седьмом параграфе. Сформулирован предложенный А. Л. Фрадковым критерий неущербности S-процедуры для произвольной формы и приведены примеры, когда этот критерий выполнен. Указана связь S-процедуры для квадратичных форм с линейной экстремальной задачей на конусе положительно полуопределенных матриц. Приведена формулировка обобщенной S-процедуры, принадлежащая Т. Ивасаки, Дж. Мейнсма и М. Фу.

В восьмом параграфе приведены результаты, устанавливающие связь S-процедуры и леммы Калмана–Попова–Якубовича. Утверждения леммы формулируются в общем виде, соответствующем рассмотрению систем, заданных в неразрешенной относительно производной форме. Приведена расширенная формулировка леммы Калмана–Попова–Якубовича, дополненная утверждениями о связи утверждений леммы с неущербностью S-процедуры и наличием двойственности Фенхеля в некоторой экстремальной задаче. Формулируется обобщение леммы на случай, когда частотное условие выполнено на ограниченном интервале частот.

Авторы выражают благодарность А. Л. Фрадкову, предложившему тему данной публикации, Н. Е. Барабанову, А. Х. Гелигу, А. С. Матвееву, А. Мегрецкому, В. Рейтману и А. Н. Чурилову за предоставленные материалы и полезное обсуждение отдельных параграфов статьи.

2. История появления леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры

История появления леммы и S-процедуры связана с исследованиями устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования. Первые результаты в этой области были основаны на применении прямого метода Ляпунова [46]. В 1944 г. в короткой заметке А. И. Лурье и В. Н. Постникова [45] была предложена новая форма функции Ляпунова для исследования нелинейных систем. В работе [45] рассматривается система непрямого регулирования, уравнения которой в общем случае имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + B\phi(\sigma), \quad \frac{d}{dt}\xi = \phi(\sigma), \quad \sigma = Cx + \rho\xi, \tag{1}$$

где $A \in \mathbf{M}_n$, $B \in \mathbf{M}_{n,1}$, $C \in \mathbf{M}_{1,n}$. Здесь и далее $\mathbf{M}_{m,n}$ множество (вообще говоря) комплексных матриц размера $m \times n$, $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{n,n}$. В [45] A, B, C — некоторые конкретные вещественные матрицы, $n =$ $= 3$. График нелинейной функции ϕ, которая в [45] имеет смысл силы трения, расположен в первом и третьем квадрантах. Это условие может быть записано в виде неравенства

$$\sigma\phi(\sigma) \geqslant 0.$$

Для исследования устойчивости системы рассматривается функция Ляпунова вида

$$V = x^* H x + \int\limits_0^\sigma \phi(\varsigma)\, d\varsigma, \tag{2}$$

где $H \in \mathbf{HM}_n$. Здесь и далее * означает транспонирование в вещественном случае и эрмитово сопряжение в комплексном. В (2) матрица H вещественная. Определяя матрицу H из условий

$$V(x(t)) \geqslant 0 \text{ и } \frac{d}{dt}V(x(t)) \leqslant 0 \text{ на решениях системы (1)}, \tag{3}$$

можно, при некоторых дополнительных предположениях о системе, доказать устойчивость множества решений уравнения $V(x) = 0$. В работе [45] определены условия на параметры рассматриваемой специальной системы третьего порядка, обеспечивающие устойчивость ее стационарного множества.

В работе [44] этот подход распространен на системы произвольного порядка, допускающие приведение матрицы системы к диагональному виду. Пусть

$$\Lambda'(H) = \begin{pmatrix} A^*H + HA & HB \\ B^*H & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A^*C^* \\ \frac{1}{2}CA & CB + \rho \end{pmatrix}$, тогда производная функции V в силу системы (1) имеет вид

$$V'(x) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(\sigma) \end{pmatrix}^* (\Lambda'(H) - G) \begin{pmatrix} x \\ \phi(\sigma) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Неравенство $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leqslant 0$ будет выполнено на решениях системы (1), если $V'(x) \leqslant 0$ при всех $x \neq 0$. При определении матрицы H, удовлетворяющей этому условию, Лурье заменяет неравенство $V'(x) \leqslant 0$ уравнением $V'(x) = -|h \begin{pmatrix} x \\ \phi(\sigma) \end{pmatrix}|^2$, где $h = (h_1, \ldots, h_{n+1})$ — некоторый неизвестный вектор. Уравнение должно быть выполнено для любой функции ϕ, удовлетворяющей (13), поэтому, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϕ, его можно записать следующим образом:

$$\Lambda'(H) - G = -h^*h. \tag{6}$$

В случае когда матрица A гурвицева, из существования решения уравнений Лурье следует, что найдется $H \geqslant 0$ такая, что выполнено (3).

Это условие, вообще говоря, недостаточно для заключения об устойчивости системы (1). Окончательный вывод об устойчивости системы делается на основе дополнительного исследования, использующего специфику рассматриваемой системы.

В работе [45] указанным методом определены условия на параметры рассматриваемой специальной системы третьего порядка, обеспечивающие устойчивость ее стационарного множества, представляющего собой отрезок прямой в фазовом пространстве системы.

Другой подход предложен И. Г. Малкиным [47]. Вместо функции (5), зависящей от нелинейности ϕ, И. Г. Малкин рассмотрел квадратичную форму $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* (\Lambda'(H) - G) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$, которая получается из (5) при замене функции ϕ свободной переменной u. При этом он предложил искать матрицу H, удовлетворяющую линейному относительно H матричному неравенству

$$\Lambda'(H) - G < 0. \tag{7}$$

В работе В. А. Якубовича [97] отмечено, что условие $V'(x) < 0$ при всех $x \neq 0$ и всех ϕ, удовлетворяющих (13), равносильно матричному неравенству

$$G_{xx} - HA - A^*H - (G_{xu} - HB)G_{uu}^{-1}(G_{xu} - HB)^* > 0, \tag{8}$$

где матрицы $G_{xx}, G_{xu}, G_{ux}, G_{uu}$ определены блочным представлением

$$G = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xu} \\ G_{ux} & G_{uu} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Известно, что при условии $G_{uu} > 0$ неравенства (7) и (8) равносильны. Отсюда следует, что неравенство (7) и указанное условие на $V'(x)$ равносильны.

В работе [98] доказано, что выполнение неравенства

$$\begin{pmatrix} A^{-1}B \\ 1 \end{pmatrix}^* G \begin{pmatrix} A^{-1}B \\ 1 \end{pmatrix} > 0 \tag{10}$$

является необходимым условием существования $H = H^*$, удовлетворяющего неравенству (8). Отметим, что В работе [98] рассматривается как случай вещественных, так и комплексных матриц A, B, G, H.

Очевидно, что если существует матрица $H > 0$, удовлетворяющая (7), то соответствующая функция V удовлетворяет на отличных от нуля решениях системы (1) неравенствам

$$V(x(t)) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}V(x(t)) < 0 \tag{11}$$

и гарантирует асимптотическую устойчивость системы (1).

В работе [56] В. М. Попов предложил новый, не использующий функции Ляпунова метод исследования устойчивости системы (1).

В соответствии с этим методом критерии устойчивости выражаются в частотных терминах, т. е. в терминах передаточной функции $W(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}B$ линейной части системы (1) от входа ϕ к выходу x. Пусть матрица $G(\vartheta)$ имеет указанную выше блочную структуру, а блоки определяются уравнениями

$$G_{xx} = 0,\ G_{ux} = \rho^{-1}C(\vartheta A + I)\ G_{xu} = G^*_{xu},\ G_{uu} = 2\vartheta(1 + \rho^{-1}CB),$$

тогда частотное условие Попова может быть записано следующим образом: существует $\vartheta > 0$ такое, что при всех вещественных ω

$$\begin{pmatrix} W(i\omega) \\ 1 \end{pmatrix}^* G(\vartheta) \begin{pmatrix} W(i\omega) \\ 1 \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{12}$$

В работе [56] показано, что если выполнено (12) и функция ϕ удовлетворяет условиям

$$\phi(0) = 0,\ \sigma\phi(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0, \tag{13}$$

то система (1) глобально асимптотически устойчива.

В той же статье показано, что если функция

$$V(x, \xi) = x^* H x + \xi^2 + \beta \int\limits_0^\sigma \phi(\varsigma)\, d\varsigma \tag{14}$$

удовлетворяет условиям (3) для любой функции ϕ, удовлетворяющей (13), то выполнено (12). Далее В. М. Попов формулирует следующую проблему: «Если условие (12) выполнено, можно ли построить функцию Ляпунова вида (14)?».

Решение сформулированной В. М. Поповым задачи для случая, когда нестрогое неравенство (12) заменено на строгое неравенство

$$\begin{pmatrix} W(i\omega) \\ 1 \end{pmatrix}^* G(\vartheta) \begin{pmatrix} W(i\omega) \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \tag{15}$$

анонсировано в работе В. А. Якубовича [75]. Подробное, принадлежащее В. А. Якубовичу доказательство, опубликовано в приложении к [2].

Однако основное содержание работы [75] составляет первая формулировка леммы Калмана–Попова–Якубовича, из которой и следует решение указанной задачи. Приведем оригинальную формулировку этого утверждения из [75], используя введенные нами обозначения и полагая, следуя [75], $G(\vartheta) = G = \text{const},\ G_{xx} = 0,\ G_{uu} = 1$.

Для того чтобы неравенство (8) *имело решение* $H = H^*$, *необходимо и достаточно*, *чтобы выполнялось* (15) *при* $-\infty < \omega < +\infty$.

Необходимость доказывается непосредственным вычислением левой части неравенства (15). Доказательство достаточности проводится рекуррентным понижением размерности. В работе [75] указано также, что необходимость условия (15) непосредственно следует из необходимости условия (10), поскольку левая часть (8) не меняется при замене A на $A - i\omega I$.

В работе Р. Калмана [152] установлена связь условия Попова (12) с разрешимостью уравнения Лурье (6). Пусть $G(\vartheta) = G = \mathrm{const}$, $G_{xx} = 0$, $G_{uu} = \gamma$, тогда в наших обозначениях результат Р. Калмана может быть сформулирован следующим образом:

Пусть пара A, B управляема и $\gamma \geqslant 0$. Тогда вектор h, удовлетворяющий уравнению Лурье (6) *при некоторой матрице $H = H^*$, существует тогда и только тогда, когда неравенство* (12) *выполнено при всех вещественных ω.*

Опишем теперь схему опубликованного в [2] доказательства того, что выполнение частотного условия Попова с заменой (12) на (15) обеспечивает существование у системы (1) функции Ляпунова вида (14). Неравенство $\frac{d}{dt}V(x(t), \xi(t)) \leqslant 0$ будет выполнено на отличных от стационарного решениях системы (1), если $V'(x, \xi) \leqslant 0$ при всех x, ξ удовлетворяющих (13). Следуя предложенному А. И. Лурье [44] подходу, заменим последнее условие более простым достаточным условием

$$S(x, \xi) \leqslant 0,$$

где $S(x, \xi) = V'(x, \xi) + \tau\sigma f(\sigma)$, $\tau \geqslant 0$ — параметр (у А. И. Лурье $\tau = 1$). Введенная функция обозначена буквой S в [2], где предложенный А. И. Лурье прием назван S-процедурой. Положим $\tau = -2\rho^{-1}$, тогда

$$S(x, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ \phi(\sigma) \end{pmatrix}^* (\Lambda'(H) - G(\vartheta)) \begin{pmatrix} x \\ \phi(\sigma) \end{pmatrix},$$

т. е. совпадает с функцией $V'(x)$, рассмотренной ранее. Таким образом, если выполнено (8) с $G = G(\vartheta)$, то в силу (13) $\frac{d}{dt}V(x(t), \xi(t)) < 0$ на отличных от стационарного решениях системы (1).

Неравенство (8) выполнено в силу условия Попова и результата В. А. Якубовича. Из гурвицевости матрицы A и неравенства (8) следует $H > 0$, что влечет выполнение условия (11) и асимптотическую устойчивость системы (1).

Аналогичные рассуждения, использующие результат Р. Калмана, позволяют показать, что функция (14) является функцией Ляпунова для системы (1) при выполнении условия Попова с нестрогим неравенством.

3. Лемма Калмана–Попова–Якубовича

В 1964 г. В. А. Якубович [23] (Труды состоявшегося в январе 1964 г. съезда по механике были опубликованы в 1965 г.) и В. М. Попов [180] получили обобщения леммы Калмана–Попова–Якубовича на случай многосвязных систем.

Начнем с обобщения результата Р. Калмана, касающегося выполнения нестрого частотного неравенства. Приведем формулировку этого результата, используя обозначения, отличающиеся от оригинальных обозначений из указанных работ.

Введем матрицу Попова

$$\Pi(\lambda) = \begin{pmatrix} W(\lambda) \\ I_m \end{pmatrix}^* G \begin{pmatrix} W(\lambda) \\ I_m \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Пусть $\Gamma = \mathbf{iR}$ — множество чисто мнимых чисел.

Теорема 1 (лемма Калмана–Попова–Якубовича. Сингулярный случай). *Пусть пара A, B управляема, тогда для любой матрицы $G \in \mathbf{HM}_{n+m}$ следующие утверждения равносильны:*

1. *Выполнено частотное условие Попова, т. е. при всех $\lambda \in \Gamma \setminus \operatorname{Sp} A$*
$$\Pi(\lambda) \geqslant 0; \tag{17}$$
2. *Существует матрица $H \in \mathbf{HM}_n$ такая, что*
$$\Lambda'(H) - G \leqslant 0; \tag{18}$$
3. *Существует решение уравнения Лурье, т. е. существуют матрицы $H \in \mathbf{HM}_n$ и $h \in \mathbf{M}_{n+m,m}$ такие, что*
$$\Lambda'(H) - G = -h^* h. \tag{19}$$

Если матрицы A, B, G — вещественные, то и матрицы H, h в (18) *и* (19) *могут быть выбраны вещественными.*

Отметим, что в работе [180] имеется некоторое дополнительное предположение, которое может быть исключено [57]. Кроме того, в работе [180] рассматривается только вещественный случай. В работе [23] рассматривается равносильность только утверждений 1 и 2 при дополнительном предположении о гурвицевости матрицы A, которое является несущественным, а также [23] рассматриваются вещественный и комплексный случаи.

В работе [23] получено также обобщение на случай многосвязных систем результата В. А. Якубовича.

Теорема 2 (лемма Калмана–Попова–Якубовича. Регулярный случай). *Пусть матрица A гурвицева, тогда для любой матрицы $G \in \mathbf{HM}_{n+m}$ следующие утверждения равносильны:*

1^+. *Выполнено строгое частотное условие Попова, т. е. существует $\delta > 0$ такое, что при всех $\lambda \in \Gamma$*
$$\Pi(\lambda) \geqslant \delta I; \tag{20}$$

2^+. *Существует матрица $H \in \mathbf{HM}_n$ такая, что*
$$\Lambda'(H) - G < 0. \tag{21}$$

Если матрицы A, B, G — вещественные, то матрица H в (21) *может быть выбрана вещественной.*

В дальнейшем исследования, связанные с леммой Калмана–Попова–Якубовича, продолжались в нескольких направлениях.

3.1. Ослабление условий леммы

Первая попытка такого рода была предпринята в [167], в которой утверждалось, что в сингулярном случае при $m = 1$ лемма Калмана–Попова–Якубовича выполнена без предположения об управляемости пары A, B при условии, что матрица A гурвицева. Это утверждение неверно. Для контрпримера достаточно рассмотреть случай $n = 1$, $A = -1$, $B = 0$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Можно показать однако, что утверждение становится верным, если дополнительно предположить, что $\Pi(\mathbf{i}\omega) \not\equiv 0$. Это следует, например, из результатов [63].

Ослабление условий для сингулярного случая получено в работах [64, 113]. Рассмотрим следующие частотные условия:

1_a. При всех $\lambda \in \Gamma$, $x \in \mathbf{C}^n$, $u \in \mathbf{C}^m$, удовлетворяющих уравнению $\lambda x = Ax + bu$, выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geqslant 0;$$

1_b. При всех $\lambda \in \Gamma$ выполнено (17) и существует $\lambda_0 \in \Gamma$ такое, что $\Pi(\lambda_0) > 0$.

Назовем $\lambda \in \mathbf{C}$ неуправляемым собственным значением пары A, B, если λ есть собственное число матрицы $A + Bk$ при всех $k \in \mathbf{M}_{m,n}$. Неуправляемое собственное значение λ пары A, B является недефектным, если существует $k \in \mathbf{M}_{m,n}$ такое, что для матрицы $A + Bk$ алгебраическая кратность λ равна его геометрической кратности.

В работе [113] доказано, что в случае, когда все неуправляемые собственные числа пары A, B лежат на мнимой оси и недефектны, утверждения 1_a и 2 равносильны. Бесконечномерный аналог этого утверждения получен в [181].

В работе [64] доказано, что в случае, когда пара A, B не имеет неуправляемых чисто мнимых собственных значений, условие 1_b влечет 2.

В работе [24, теорема 1.2.7.] показано, что в регулярном случае условие управляемости может быть заменено условием стабилизируемости пары A, B, если при этом частотное условие заменить следующим:

1_a^+. Существует $\delta > 0$ такое, что при всех $\lambda \in \Gamma$, $x \in \mathbf{C}^n$, $u \in \mathbf{C}^m$, удовлетворяющих уравнению $\lambda x = Ax + bu$, выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geqslant \delta(|x|^2 + |u|^2).$$

Из результатов работы [149], которая будет подробно рассмотрена в параграфе 8, следует, что утверждения 1_a^+ и 2^+ равносильны без каких-либо предположений о матрицах A и B.

В работе [83] В. А. Якубович получил результат, занимающий в некотором смысле промежуточное положение между утверждениями леммы Калмана–Попова–Якубовича для регулярного и сингулярного случаев. С целью избежать довольно громоздких формулировок оригинальной работы приведем частный случай этого утверждения.

Теорема 3. *Пусть пара* A, B *стабилизируема, матрица* A *не имеет чисто мнимых собственных значений,* $\operatorname{rank} B = m$, $G_{uu} = 0$, *тогда следующие утверждения равносильны:*

1°. *При всех* $\omega \in \mathbf{R}$ $\Pi(\mathbf{i}\omega) > 0$ *и* $\lim_{\omega\to\infty} \omega^2 \Pi(\mathbf{i}\omega) > 0$;

2°. *Существует матрица* $H \in \mathbf{HM}_n$, *удовлетворяющая неравенству* (18) *и неравенству* $A^*H + HA^* - G_{xx} < 0$.

Отметим, что для $m = 1$ этот результат был доказан в первой публикации леммы Калмана–Попова–Якубовича [75]. В работе [83] получено аналогичное утверждение для случая $G_{uu} \geqslant 0$. Подробное доказательство приведено в [24].

3.2. Лемма Калмана–Сегё

Для построения функции Ляпунова при исследовании устойчивости нелинейных систем с дискретным временем возникает необходимость в соответствующем аналоге леммы Калмана–Попова–Якубовича. Впервые такой результат, получивший название леммы Калмана–Сегё, был сформулирован в [190] для односвязных систем. Обобщение этого результата на случай многосвязных систем принято называть обобщенной леммой Калмана–Сегё или леммой Калмана–Попова–Якубовича для систем с дискретным временем.

Положим $\Gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| = 1\}$,

$$\Lambda'(H) = \begin{pmatrix} A^*HA - H & A^*HB \\ B^*HA & B^*HB \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Общая формулировка леммы Калмана–Попова–Якубовича для систем с дискретным временем в сингулярном случае приведена в [57], в регулярном случае — в [68]. В наших обозначениях эти утверждения совпадают с формулировками теорем 1 и 2. В работе [68] для доказательства использовано дробно-линейное преобразование, известное как преобразование Кэли, которое позволяют свести обобщенную лемму Калмана–Сегё к лемме Калмана–Попова–Якубовича. Этот метод доказательства был впервые использован в [30] в случае скалярного управления.

3.3. Обобщение Чурилова

Используя метод дробно-линейного преобразования, А. Н.Чурилов [63] распространил лемму Калмана–Попова–Якубовича на случай, когда Γ есть произвольная прямая или окружность на комплексной плоскости.

Пусть матрица $\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{12} \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} \end{pmatrix}$ эрмитова и удовлетворяет условию $\det \Theta < 0$. Положим

$$\begin{gathered} \Gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid (\lambda, 1)\Theta(\lambda, 1)^* = 0\}, \\ \Lambda'(H) = \begin{pmatrix} A & B \\ I_x & 0 \end{pmatrix}^* (\Theta \otimes H) \begin{pmatrix} A & B \\ I_x & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\Theta \otimes H$ — кронекерово произведение Θ и H. При $\vartheta_{11} = 0$ Γ есть прямая, при $\vartheta_{11} \neq 0$ — окружность на комплексной плоскости.

Из результатов [63, 64] следует, что утверждение 1_a влечет 2, если Γ не содержит неуправляемых собственных чисел пары A, B. Отметим, что из утверждения 2 очевидно следует 1 при любых A и B. Из результатов [28] следует, что если пара A, B управляема, то утверждения 1, 2 и 3 равносильны, а утверждения 1^+ и 2^+ равносильны следующему утверждению:

3^+. Существуют матрицы H, $h = (h_x, h_u)$, $h_x \in \mathbf{M}_{m,n}, h_u \in \mathbf{M}_m$, удовлетворяющие уравнению (19) и такие, что $\det h_u \neq 0$ и $\mathrm{Sp}\,(A - Bh_u^{-1}h_x) \cap \Gamma = \varnothing$.

В работе [149] показано, что утверждения 1_a^+ и 2^+ равносильны при любых A и B.

В случае $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Γ есть мнимая ось, а Λ' принимает вид (4). В этом случае указанные утверждения совпадают с приведенными выше формулировками леммы Калмана–Попова–Якубовича для систем с непрерывным временем. В случае $\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Γ есть единичная окружность, а Λ' принимает вид (22). В этом случае указанные утверждения усиливают указанные выше формулировками леммы Калмана–Попова–Якубовича для систем с дискретным временем.

3.4. Существование решений матричного неравенства, обладающих заданными спектральными свойствами

При применении леммы Калмана–Попова–Якубовича в задачах устойчивости представляет интерес вопрос о существовании положительно определенной или полуопределенной матрицы H, удовлетворяющей (18) или (21).

Имеет место следующее простое утверждение, основанное на свойствах решения уравнения Ляпунова.

Утверждение 1. *Пусть матрица A гурвицева, тогда если H удовлетворяет* (18) *и* $G_{xx} \leqslant 0$, *то* $H \geqslant 0$, *если H удовлетворяет* (21) *и* $G_{xx} \leqslant 0$ *или H удовлетворяет* (18) *и* $G_{xx} < 0$, *то* $H > 0$.

Приведем примеры применения утверждения 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{24}$$

где $A \in \mathbf{M}_n, B \in \mathbf{M}_{n,m}, C \in \mathbf{M}_{m,n}, D \in \mathbf{M}_m$, x — состояние, вход u и выход y имеют одинаковую размерность. Пусть $T(\lambda) = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$ — передаточная матрица системы от входа u к выходу y. Матрица T называется положительно вещественной [106], если $\operatorname{Sp} A \subset \operatorname{cl} \mathbf{C}^-$ и

$$T(\lambda) + T(\lambda)^* \geqslant 0 \text{ при } \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{25}$$

Матрица T называется строго положительно вещественной, если $\operatorname{Sp} A \subset \mathbf{C}^-$ и существует $\delta > 0$ такое, что

$$T(\lambda) + T(\lambda)^* > \delta I \text{ при } \lambda \in \mathbf{i}R.$$

Строго положительно вещественная матрица является положительно вещественной [107].

Пусть $W(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}B$. Определим матрицу G, положив $G_{xx} = 0, G_{xu} = C, G_{uu} = D + D^*$, и матрицу Попова $\Pi(\lambda)$ (см. (16)). Тогда $T(\lambda) + T(\lambda)^* = \Pi(\lambda)$.

Из леммы Калмана–Попова–Якубовича (регулярный случай) и утверждения 1 следует теорема 4.

Теорема 4 (лемма о строго положительно вещественных матрицах). *Матрица T строго положительно вещественная тогда и только тогда, когда существует положительно определенная матрица H, удовлетворяющая* (21). *В рассматриваемом случае любое решение* (21) *является положительно определенным.*

В литературе имеются и другие определения строго положительно вещественных матриц и соответствующие варианты леммы, отличающиеся от приведенного некоторыми условиями.

В работе [106] получен аналогичный критерий того, что T является вещественно-положительной.

Теорема 5 (лемма о положительно вещественных матрицах). *Пусть* $\operatorname{Sp} A \subset \operatorname{cl} \mathbf{C}^-$, *$A$ не имеет кратных чисто мнимых корней и матрицы A, B, C, D определяют минимальную реализацию T. Тогда для существования положительно определенной матрицы H, удовлетворяющей вместе с некоторой матрицей $h \in \mathbf{M}_{n+m,m}$ уравнению* (19) *необходимо и достаточно, чтобы матрица T была положительно вещественной.*

Другое следствие леммы Калмана–Попова–Якубовича, связанное с положительной определенностью H, известно как лемма об ограниченно-вещественных матрицах [108]. Сформулируем наиболее употребительный вариант этого утверждения, относящийся к случаю строгого матричного неравенства (21) и непрерывного времени. Пусть $\gamma > 0$, определим матрицу G, положив

$$G_{xx} = -C^*C, \quad G_{xu} = -C^*D, \quad G_{uu} = \gamma^2 I - D^*D. \tag{26}$$

Тогда $\Pi(\lambda) = T^*(\lambda)T(\lambda)$.

Теорема 6. *Для выполнения неравенства*

$$T^*(\lambda)T(\lambda) < \gamma^2 I \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \mathbf{C}^+ \tag{27}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $H > 0$, *удовлетворяющая* (21).

Это утверждение находит многочисленные применения в задачах H^∞-оптимизации, поскольку условие (27) равносильно условию $T \in H^\infty(\mathbf{C}^+)$, $\|T\|_{H^\infty} < \gamma$. В работе [108] показано, что аналогичное утверждение имеет место в случае нестрогих неравенств, если матрицы A, B, C определяют минимальную реализацию передаточной функции W.

Недостатком приведенных теорем является ограничение на спектр матрицы A. Пытаясь найти более удобный критерий положительной полуопределенности H, Я. Виллемс [196] сформулировал следующее утверждение: если пара A, B управляема и при всех $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, выполнено неравенство $\Pi(\lambda) > 0$, то существует $H \geqslant 0$, удовлетворяющая (18). Позже он же опубликовал контрпример [197], показывающий, что это утверждение, вообще говоря, неверно.

Выраженное в частотных терминах необходимое и достаточное условие существования положительно полуопределенного решения неравенства (18) получено в [169].

Имеет место следующее обобщение утверждения 1. Пусть кривая Γ и оператор Λ' заданы соотношением (23). Кривая Γ делит комплексную плоскость на открытые области

$$\Omega^\pm = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \pm(\lambda, 1)\Theta(\lambda, 1)^* > 0\}. \tag{28}$$

Утверждение 2. *Пусть* $G_{xx} \leqslant 0$, $\operatorname{Sp} A \cap \Gamma = \varnothing$ *и выполнено условие* 1_a, *тогда существует неособая* H, *удовлетворяющая* (18), *у которой количество собственных значений, лежащих в левой полуплоскости,* (*с учетом кратности*) *то же, что и число собственных значений матрицы* A, *лежащих в области* Ω^+.

Это утверждение легко получить из результатов работ [113, 124, 125]. Вариант утверждения для знаконеопределенной матрицы H находит применение при исследовании автоколебаний нелинейных систем.

Пусть $T(\lambda)$ — передаточная функция системы (25), $\Gamma, \Omega^\pm, \Lambda', \gamma > 0$ определены соотношениями (23), (28). Определим матрицу G равенствами (26). Из леммы Калмана–Попова–Якубовича (регулярный случай) и утверждения 2 следует, что T удовлетворяет условиям

$T \in H^\infty(\Omega^+)$, $\|T\|_{H^\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует матрица $H > 0$, удовлетворяющая (21). Этот результат обобщает теорему 6 и позволяет свести задачу оценки H^∞ нормы передаточной функции, аналитической в некотором круге или полуплоскости, к решению линейного матричного неравенства (21).

3.5. Экстремальные решения матричного неравенства

В работе [196] начато изучение свойств множества решений неравенства (18) для систем с непрерывным временем. Доказано, что в случае, когда пара A, B управляема и это множество не пусто, существуют матрицы $H^\pm$, удовлетворяющие (18) и такие, что любое решение H неравенства (18) удовлетворяет неравенству

$$H^- \leqslant H \leqslant H^+. \tag{29}$$

В работе [65] показано, что это утверждение верно для любых Γ, Λ', удовлетворяющих (23), при некотором дополнительном предположении относительно матрицы $\Pi(\lambda)$. В работе [28] показано, что это дополнительное условие можно отбросить.

В работах [34, 67] получены также условия невырожденности матриц H, удовлетворяющих (18), при выполнении которых имеют место неравенства $(H^+)^{-1} \leqslant H^{-1} \leqslant (H^-)^{-1}$.

3.6. Свойства решений уравнения Лурье

Рассмотрим сначала случай непрерывного времени и предположим, что пара A, B управляема. В работах [3, 4] доказано, что при выполнении условия (20) найдутся матрицы H, $h = (h_x, h_u)$, $h_x \in \mathbf{M}_{m,n}, h_u \in \in \mathbf{M}_m$, удовлетворяющие уравнению Лурье (19) такие, что матрица $A - Bh_u^{-1}h_x$ гурвицева.

В работе [196] приведена уточненная формулировка этого результата. Доказано, что при $G_{uu} > 0$ экстремальные решения $H^\pm$ неравенства (18) вместе с некоторыми матрицами $h^\pm = (h^\pm{}_x, h^\pm{}_u)$, $h^\pm{}_x \in \mathbf{M}_{m,n}$, $h^\pm{}_u \in \mathbf{M}_m$, удовлетворяют уравнению Лурье (19). При этом если выполнено строгое неравенство (20), то $\operatorname{Sp}(A - B(h^\pm{}_u)^{-1}h^\pm{}_x) \subset \mathbf{C}^\pm$, где $\mathbf{C}^\pm = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \pm \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ — правая и левая открытые полуплоскости. Если выполнено нестрогое неравенство (18), то $\operatorname{Sp}(A - B(h^\pm{}_u)^{-1}h^\pm{}_x) \subset \operatorname{cl}\mathbf{C}^\pm$.

В работах [5, 6] упомянутый выше результат из [3] распространен на системы с дискретным временем.

В работе [65] получено обобщение упомянутого результата из [196] на случай, когда Γ и Λ' заданы соотношениями (23). Пусть пара A, B управляема и выполнено (17), тогда существуют $h^\pm \in \mathbf{M}_{m,k}$ такие, что пары H^+, h^+ и H^-, h^- удовлетворяют (19).

В работе [28] показано, что если пара A, B управляема, то утверждения 1^+, 2^+, 3^+ равносильны следующему утверждению:

3_a^+. Для того из знаков «$\pm$», для которого выполнено неравенство $\pm\Theta_{11} \leqslant 0$, существуют матрицы $H^\pm$, $h^\pm = (h^\pm{}_x, h^\pm{}_u)$, $h^\pm{}_x \in \mathbf{M}_{m,n}$, $h^\pm{}_u \in \mathbf{M}_m$, удовлетворяющие уравнению (19) и такие, что
$$\det h^\pm{}_u \neq 0, \quad \mathrm{Sp}\,(A - B(h^\pm{}_u)^{-1} h^\pm{}_x) \subset \Omega^\pm. \tag{30}$$

Поясним соотношения (30). Если $\Theta_{11} = 0$, то Γ есть прямая. В этом случае (30) выполнено для обеих матриц h^+ и h^-. Если $\Theta_{11} \neq 0$, то Γ есть окружность. В этом случае может оказаться, что (30) выполнено только для той из матриц h^+ или h^-, которая соответствует ограниченной области Ω^+ или Ω^-.

3.7. Алгебраическое уравнение Риккати

Рассмотрим случай непрерывного времени. Положим $h = (h_x, h_u)$, $h_x \in \mathbf{M}_{m,n}$, $h_u \in \mathbf{M}_m$. Тогда уравнение (19) равносильно системе
$$A^*H + HA + h_x^* h_x = G_{xx}, \quad HB + h_x^* h_u = G_{xu}, \quad h_u^* h_u = G_{uu}. \tag{31}$$

Пусть $G_{uu} > 0$. Используя второе и третье уравнения (31), определим
$$h_u = G_{uu}^{1/2}, \quad h_x = G_{uu}^{-1/2}(G_{ux} - B^*H). \tag{32}$$

Исключая h_x из первого уравнения (31), получим алгебраическое уравнение Риккати
$$HPH + HQ + Q^*H + R = 0, \tag{33}$$
$$P = BG_{uu}^{-1}B^*, \quad Q = A - BG_{uu}^{-1}G_{ux}, \quad R = G_{xu}G_{uu}^{-1}G_{ux} - G_{xx}. \tag{34}$$

Легко видеть, что при условии $G_{uu} > 0$ разрешимость уравнения Лурье (19) равносильна разрешимости алгебраического уравнения Риккати (33), (34).

В теории систем впервые уравнение появилось в [151] в связи с задачами оптимального управления. Исследованию свойств решений этого уравнения посвящена обширная литература (см. библиографию в монографиях [134–136]). Связь этого уравнения с леммой Калмана–Попова–Якубовича впервые была отмечена в [196], где свойства решений этого уравнения использованы для исследования свойств решений матричного неравенства (18). Некоторые из этих результатов приведены в предыдущем разделе.

Решение H^- уравнения (33) называется стабилизирующим, если матрица $Q + PH^-$ гурвицева. Пусть H^- стабилизирующее решение. Найдем матрицу $h^- = (h^-{}_x, h^-{}_u)$, используя уравнения (31), (32). Тогда $Q + PH^- = A - B(G_{uu}^{-1}(G_{ux} - B^*H)) = A - B(h^-{}_u)^{-1}h^-{}_x$. Таким образом, определение стабилизирующего решения согласуется с включением (30).

Рассмотрим матрицу $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ R & -Q^* \end{pmatrix}$, которая называется гамильтоновой матрицей, соответствующей уравнению (33). Легко видеть, что (33) равносильно уравнению

$$\mathcal{H} \cdot \begin{pmatrix} I \\ -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -H \end{pmatrix} (Q + PH). \tag{35}$$

В работе [99] показано, что функция $\varphi(\lambda)$, определяемая на мнимой оси равенством $\varphi(\mathbf{i}\omega) = (\det G_{uu})^{-1} |\det(\mathbf{i}\omega I - A)|^2 \det \Pi(\mathbf{i}\omega)$, является многочленом. В работе [168] показано, что $\varphi(\lambda) = (-1)^n \det(\lambda I - \mathcal{H})$. Из результата [99] следует, что многочлен φ не меняется при преобразовании обратной связи, т. е. при замене A на $A + BK$ и G на T^*GT, где $T = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K & I \end{pmatrix}$, при произвольной матрице $K \in \mathbf{M}_{m,n}$.

Суммируя, получим, что если пара A, B не имеет неуправляемых собственных чисел на мнимой оси, то равенство $\varphi(\mathbf{i}\omega) = 0$ влечет равенство $\det \Pi(\mathbf{i}\omega) = 0$, и поэтому частотное условие 1^+ равносильно следующим условиям:

1_b^+. $G_{uu} > 0$, $\varphi(\mathbf{i}\omega) \neq 0\ \forall \omega \in \mathbf{R}$;

1_c^+. $G_{uu} > 0$, $\operatorname{Sp} \mathcal{H} \cap \mathbf{iR} = \varnothing$.

В частности, отсюда следует, что если пара A, B стабилизируема, то уравнения (33) и (35) имеют стабилизирующее решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ не имеет чисто мнимых собственных значений.

Алгебраическое уравнение Риккати (33) встречается во многих разделах математики вне связи с леммой Калмана–Попова–Якубовича. В общем случае уравнение (33) рассматривается при произвольных $P, R \in \mathbf{HM}_n$, $Q \in \mathbf{M}_n$. Наиболее изученным является случай, когда выполнено неравенство $P \geqslant 0$. Именно так обстоит дело в уравнении, получаемом из уравнения Лурье. Общий результат о разрешимости уравнения Риккати в этом случае получен в [61].

Теорема 7. *Пусть $P \geqslant 0$, пара матриц Q, P не имеет симметричных относительно мнимой оси неуправляемых собственных чисел, тогда следующие утверждения равносильны*:

R1. *Для всех $\omega \in \mathbf{R}$ таких, что $\det(\mathbf{i}\omega I - Q) \neq 0$, выполнено неравенство*

$$P + P(\mathbf{i}\omega I + Q^*)R(\mathbf{i}\omega I - Q)P \geqslant 0;$$

R2. *Существует $H \in \mathbf{HM}_n$, удовлетворяющая нестрогому неравенству Якубовича*

$$HPH + HQ + Q^*H + R \leqslant 0;$$

R3. *Существует $H \in \mathbf{HM}_n$, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати* (33).

R4. *Жордановы блоки матрицы* $\mathcal{H}$, *соответствующие чисто мнимым собственным числам (если такие существуют), имеют четную размерность.*

Этот результат приведен также в [62]. При более ограничительном предположении об управляемости пары Q, P это утверждение получено в [153, 154].

Пусть $G_{uu} > 0$. Положим $k = -h_u^{-1} h_x \in \mathbf{M}_{m,n}$, тогда уравнения Лурье (31) можно записать следующим образом:

$$A^* H + HA + k^* G_{uu} k = G_{xx}, \quad HB - k^* G_{uu} = G_{xu}. \tag{36}$$

Вопрос о разрешимости уравнения Лурье можно сформулировать [99] как задачу о представлении квадратичной формы $\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* \Lambda'(H) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (u - kx)^* G_{uu} (u - kx), \tag{37}$$

где $H \in \mathbf{HM}_n$, $k \in \mathbf{M}_{m,n}$ — матрицы, которые требуется определить. В работах В. А. Якубовича [100, 101], посвященных построению оптимальных управлений в дифференциальных играх, отмечено, что в таких задачах возникает необходимость рассматривать представление (37) при знаконеопределенной невырожденной матрице G_{uu}. Это равносильно решению алгебраического уравнения Риккати (33), (34) при знаконеопределенной невырожденной матрице P.

Эта задача исследовалось в [12, 114, 124, 137, 147, 155] и др. работах. Приведем результат из [11], в котором условия разрешимости формулируются в частотных терминах и дополняют условия из теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть* $G_{xu} = 0$, $\det P \neq 0$, *тогда для того чтобы уравнение* (33), (34) *имело решения достаточно, чтобы было выполнено условие* R4 *теоремы* 7 *и чтобы для каждого ненулевого* $x \in \mathbf{C}^n$ $x^* W(\lambda) \Pi(\lambda)^{-1} W(-\lambda)^* x \not\equiv 0$.

Случай $G_{xu} \neq 0$ может быть сведен к рассмотренному с помощью замен $A = \widetilde{A} - B G_{uu}^{-1} G_{ux}$, $G_{xx} = \widetilde{G}_{xx} - G_{xu} G_{uu}^{-1} G_{ux}$.

3.8. Обобщенное уравнение Лурье

В работе [115] в связи с вопросами H^∞ оптимизации поставлена следующая задача. Пусть $u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, $v \in \mathbf{R}^{m_v}$, $w \in \mathbf{R}^{m_w}$, рассмотрим соответствующие блочные представления $B = (B_v, B_w)$, $G_{uu} = \begin{pmatrix} G_{vv} & G_{wv} \\ G_{vw} & G_{ww} \end{pmatrix}$, $G_{xu} = (G_{xv}, G_{xw})$ и пусть $G_{ww} = 0$,

$G_{wv} = 0$, $G_{vw} = 0$. Требуется найти представление формы $\Psi(x,u)$ в виде

$$\Psi(x,u) = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}^* \Lambda'(H) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + (v-kx)^* G_{vv}(v-kx) + x^* K x, \quad (38)$$

где $H, K \in \mathbf{HM}_n$, $k \in \mathbf{M}_{m_v,n}$ — матрицы, которые требуется определить. Представление (38) можно записать в виде следующей обобщенной системы уравнений Лурье:

$$A^* H + HA + k^* G_{vv} k + K = G_{xx}, \ HB_v - k^* G_{vv} = G_{xv}, \ HB_w = G_{xw}. \quad (39)$$

Для произвольной эрмитовой матрицы M обозначим через $n_\pm(M)$ количество положительных (отрицательных) собственных чисел M. Положим $\Delta n_\pm = \lim_{\omega\to\infty} n_\pm(\Pi(\mathbf{i}\omega)) - n_\pm(G_{vv})$, тогда $\Delta n_\pm \geqslant 0$. Условие $n_\pm(K) \geqslant \Delta n_\pm$ необходимо для разрешимости уравнений (39). В работе [115] даны необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (39) с матрицей K минимального ранга: $n_\pm(K) = \Delta n_\pm$. Дано также точное описание всех решений этого уравнения.

4. Бесконечномерная лемма Калмана–Попова–Якубовича

4.1. Исторический контекст первых обобщений леммы

Традиционно, до 60-х г. включительно, применение методов теории управления было в основной массе работ направлено на исследование систем управления с сосредоточенными параметрами. Эти системы имеют конечномерное фазовое пространство и математически описываются, как правило, системами обыкновенных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. В большинстве математических моделей технических систем с распределенными параметрами (таких как газо- и гидродинамические установки, ядерные реакторы и т. д.) используются уравнения математической физики, которые включают дифференциальные операторы в частных производных по пространственным переменным.

К 70-м г. XX в. значимость проблем управления системами с распределенными параметрами резко возросла. Приведем несколько признаков этого роста. Библиография работ по теории устойчивости и управлению системами с распределенными параметрами, изданных до 1967 г., опубликованная П. К. С. Вангом [194], уместилась всего на 15 страницах. Уже четыре года спустя, в 1971 г. в Канаде состоялся первый международный симпозиум ИФАК, специально посвященный системам с распределенными параметрами. Еще через два года, в 1973 г. в Лондоне вышла книга «Последние математические достижения в теории управления» [183], содержащая доклады и материалы дискуссий по новым применениям математических методов в теории управления. В этой публикации было выделено пять основных направлений исследований: устойчивость нелинейных систем, оптимальное управление, теория фильтрации, управление системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных и, наконец, алгебраическая теория систем.

Именно в это время — в конце 60-х – начале 70-х г. — появляются публикации, содержащие идеи построения систем управления термоядерным синтезом [195] и др. Это направление исследований в публикациях часто называли «проблемой XX в.». Актуальность (и расчетная стоимость) этого проекта продолжают расти и сегодня, только теперь речь идет о «проблеме XXI в.». В физических экспериментах уже в XIX в. процессы управления экспериментом играли важную роль, но чаще вспомогательную по отношению к тому явлению, которое изучалось. В XX в. на первый план вышли проблемы, в которых роль управления процессом перестала быть вспомогательной. Задача создания термоядерного плазменного пучка рассматривалась в ряде работ как задача оптимального управления, в которой распределенным управлением в системе является внешнее электромагнитное поле. Предлагались различные математические постановки задачи управления термоядерной реакцией, имеющие физический смысл, в том числе вариационные задачи и задачи оптимизации, к которым применяется принцип максимума.

Таким образом, новые области приложений методов, развитых в теории управления с сосредоточенными параметрами, были привлекательными. Однако имелись и трудности. А. Г. Бутковский, один из авторов первых работ, посвященных собственно методам управления системами с распределенными параметрами, писал об этих трудностях в предисловии к одной из своих книг: «Не будем скрывать, что существо этих задач таково, что оно требует относительно сложного, нетрадиционного для инженера ... математического аппарата. Учитывая эту специфику, автор стремится прежде всего к максимальной ясности и наглядности постановок рассматриваемых задач, кое-где поступаясь ради этого формальной общностью математического описания ...» [155, с. 8–9].

Хорошо известно, что в 70-е годы большая часть специалистов в области теории управления, получивших инженерно-техническое образование, была не знакома с языком функционального анализа, используемого в современной математической физике, в котором граничные задачи могут быть представлены как неограниченные операторы в гильбертовых или в общем случае — в банаховых пространствах. Однако здесь перед исследователями появились содержательные препятствия. В теории управления системами с распределенными параметрами граничные задачи часто неоднородны, причем условия на границе обычно сами представляют собой динамическую систему. Варианты подобных систем управления с граничными управлением и наблюдением разнообразны и встречаются в тепловых, биологических, химических, ядерных и иных управляемых устройствах.

С другой стороны, именно таким языком были написаны монографии Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса [38] и Ж.-Л. Лионса [36], переведенные на русский язык в 1971–1972 гг., и представляющие наиболее продвинутый на тот момент математический подход к теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Требовались доступные книги, которые служили бы введением в функциональный анализ для специалистов по теории управления, и такие книги появились [10] и др.

Знакомство с понятиями и задачами оптимального управления системами с распределенными параметрами облегчалось тем, что указанные выше работы [36, 38] широко использовали известные достижения сильных отечественных школ оптимального управления и математической физики. Принцип максимума Л. С. Понтрягина применялся к задачам оптимального управления для распределенных систем уже в ряде работ 60-х г. [21] и др. Пространства С. Л. Соболева, вариационные постановки неоднородных начально-краевых задач и другие понятия, связанные с теорией обобщенных функций, входили в университетские курсы лекций по уравнениям в частных производных и широко применялись в работах по математической физике и механике сплошных сред. Задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, которым были посвящены также изданные несколько позже монографии [160–162], имели ту же вариационную природу и были привлекательны прежде всего стремлением переформулировать и представить на других языках новые практически важные задачи физики и техники. Библиография в работах [156–162] позволяла освоить постановки широкого круга задач оптимизации и методов их решения для систем с распределенными параметрами.

4.2. Первые публикации и различия подходов к обобщению леммы на бесконечномерный случай

Ситуацию развития теории управления распределенными системами, описанную выше, нетрудно было сопоставить с задачами, к которым применялась лемма Калмана–Попова–Якубовича. В 1973 г. была опубликована работа В. А. Якубовича [93], которая носила обобщающий характер и в определенной мере подводила итоги развития матричной леммы Калмана–Попова–Якубовича за первое десятилетие ее существования. Становились более понятными идеи приложений леммы Калмана–Попова–Якубовича к задачам абсолютной устойчивости и неустойчивости, адаптации, к получению критериев диссипативности и конвергенции, доказательствам существования периодических и почти периодических вынужденных режимов и автоколебаний. Это сопоставление закономерно приводило к идее переноса леммы на случай операторов в гильбертовом пространстве.

В. А. Якубович высказывал идею доказательства частотной теоремы для операторов в гильбертовом пространстве (может быть, не впервые) осенью 1971 г., когда ставил задачу об обобщении леммы на случай уравнений в частных производных одному из авторов этих строк (А. Л. Лихтарникову), тогда студенту 4 курса. Полученный студентом через некоторое время результат руководителя не удовлетворил. Формулировки теорем в вариационной постановке были неполны, а условие разрешимости операторного неравенства не было представлено в «частотной форме» (позднее, после доработки эти результаты были опубликованы в совместной работе [41]). Поэтому Владимир Андреевич взялся за дело сам.

Пионерским продвижением в обобщении леммы о матричных неравенствах на случай операторов в гильбертовом пространстве стала работа В. А. Якубовича [95], опубликованная в двух частях соответственно в 1974 и 1975 гг.

Описанные выше трудности потенциальных читателей, по-видимому, повлияли на выбор В. А. Якубовичем языка, которым написаны работа [95], потому что она содержала в формулировках теорем несколько излишних предположений. Одним из них, и как будет пояснено ниже, не самым существенным являлось требование ограниченности операторов, входящих в условия задачи, которое было снято в следующих публикациях.

Кроме того, автор сделал следующее замечание в предисловии к статье [95] (часть I): «Мы используем ряд известных в теории оптимального управления соображений и приемов... Чтобы не затруднять читателя ссылками на источники, в которых эти предложения приведены в другой форме и не в точно необходимом нам виде (в частности, рассматриваются конечномерные пространства), мы приводим доказательства этих предложений, тем более что эти доказательства очень простые».

По замыслу автора эта работа была предназначена как для обобщения матричной леммы, так и для определенных методических целей. В частности, этот текст снабжен определениями основных понятий теории управления и включает, например, простые выводы операторного варианта уравнений А. И. Лурье и утверждения о факторизации эрмитовой операторной «функции Попова» $\Pi(\mathbf{i}\omega)$, которая входит в «частотные условия» теорем, доказанных в работе (иногда эту функцию называют спектральной плотностью.). Заметим, что в бесконечномерном случае задача о факторизации функции Попова видоизменяется в зависимости от постановки линейно-квадратичной задачи оптимального управления и при появлении новых постановок (см., например, [176]) эту задачу приходится решать вновь.

Автор выделил в названии работы [95] предполагаемую область применения результатов — задачи синтеза оптимального управления в линейной системе управления с квадратичным критерием качества. Отметим, что линейно-квадратичная задача оптимального управления выступает здесь в двух ролях. Во-первых, сначала с помощью идеи динамического программирования Р. Беллмана рассматривается задача оптимального управления на бесконечном интервале, и затем результат этого исследования используется для доказательства леммы Калмана–Попова–Якубовича. Во-вторых, когда лемма доказана, уже она сама применяется для решения других задач линейно-квадратичной оптимизации, например в случае конечного интервала времени. В результате читатель получал доступное введение в теорию оптимального управления, в котором объяснялись наиболее употребительные понятия, в том числе управляемость и стабилизируемость в различных вариантах их определений, связи между различными свойствами систем управления, операторная форма уравнений А. И. Лурье и др. Наконец, сами формулировки леммы даны в двух известных вариантах: невырожденном и вырожденном.

В 1975 г., через год после публикации [33, ч. I], в свет вышли сразу пять работ о частотной теореме для бесконечномерного случая: [33, ч. II, 48–51].

В [14] были получены достаточные условия разрешимости (в форме нестрогого частотного условия) уравнений Лурье для случая ограниченных операторов. Здесь для бесконечномерного случая были сделаны два предположения одновременно: полной управляемости пары A, B в варианте, когда требуется достижимость любой точки пространства состояний (это требование в приложениях сводит результат к конечномерному случаю), и условие стабилизируемости. Использованная схема доказательства следует работе Лионса [36].

В [53] предполагается, что пространство управлений одномерно, однако работа интересна идеями доказательств, которые принципиально отличны от других и демонстрируют глубокие связи леммы с теорией функций.

Статья [18], если судить по ее названию, посвящена не частотной теореме как таковой, а ее самому известному приложению — задаче об абсолютной устойчивости нелинейных систем. Однако на том пути, который используется в [18], именно операторные неравенства леммы составляют существо результата и основу метода построения функционала Ляпунова. Работа [8] относится к бесконечномерной лемме Калмана–Сегё. Эта тема рассмотрена ниже.

В 1975–1976 гг. были опубликованы еще пять работ [15, 19, 20, 40, 41], посвященных бесконечномерному варианту леммы и ее приложениям. Работа [40] развивала тему бесконечномерной леммы Калмана–Сегё и была продолжением [8]. Следующие две публикации [19, 41] были посвящены обобщениям леммы на случай вариационного подхода к постановке задач для систем управления в гильбертовых пространствах, развитого Ж.-Л. Лионсом. Напомним, что в целом этот подход к постановке задач для операторных уравнений в шкалах гильбертовых пространств (или, в другой терминологии, в оснащенных гильбертовых пространствах) был создан для решения неоднородных граничных задач; именно поэтому он пригоден для задач оптимизации с граничным управлением и (или) наблюдением. В этом подходе существенными ограничениями являются условия на вход системы — оператор, действующий из пространства управлений в пространство состояний системы. Пусть, например, область значений оператора B есть X_0 $(B : U \to X_0)$ вместо X_{-1}. Это условие исключает из области значений B обобщенные функции и создает трудности в приложениях общей операторной схемы к наиболее интересным случаям систем с управлением на границе области, например при построении линейных или нелинейных регуляторов с импульсным управлением.

Работы [15, 20] посвящены приложениям развитого В. А.Брусиным [18] подхода к задачам об абсолютной устойчивости нелинейных систем с распределенными параметрами.

В 1977 г. публикаций на тему бесконечномерного случая леммы было уже только две [39, 42]. В работе [42] было получено обобщение результатов первой статьи [95] на случай неограниченных операторов, точнее, генераторов для полугрупп класса C_0. Эта работа не только распространила лемму на еще одну, новую для нее область постановок задач, но и показала, что доказательства, использованные в [95], с несущественными изменениями пригодны для случая неограниченных операторов. Работа [39], посвященная приложениям леммы к задачам абсолютной устойчивости, обобщала и усиливала как конечномерные критерии абсолютной устойчивости, так и критерии, полученные ранее для систем с распределенными параметрами.

4.3. Лемма для «невырожденного случая»

Здесь приведем результаты из [42], формулировки которых наиболее наглядны. Пусть X и U — гильбертовы пространства, элементы которых называются соответственно состояниями и управлениями, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ — производящий оператор полугруппы класса C_0, $B : U \to X$ — линейный ограниченный оператор, $G : X \times U \to X \times U$ — ограниченный самосопряженный оператор. Представим G в виде $G = \begin{pmatrix} G_{xx} & G_{xu} \\ G_{ux} & G_{uu} \end{pmatrix}$ и определим на $X \times U$ эрмитову форму $\Psi(x, u) = (G_{xx}x, x) + 2\mathrm{Re}\,(G_{xu}u, x) + (G_{uu}u, u)$.

Теорема 9 (невырожденный случай). *Пусть пара A, B стабилизируема, т. е. существует оператор $C : X \to U$ такой, что спектр $\mathrm{Sp}\,(A + BC)$ расположен в левой полуплоскости. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1^+_∞. *Для некоторого $\delta > 0$ выполнено «строгое частотное условие»*

$$\Psi(x, u) \geqslant \delta(|x|^2 + |u|^2) \tag{40}$$

для всех $x \in \mathcal{D}(A)$, u и ω таких, что $\mathbf{i}\omega x = Ax + Bu$;

2^+_∞. *Существует* $\delta > 0$ *и ограниченный самосопряженный оператор* $H : X \to X$ *такие, что*

$$2Re(Ax + Bu, Hx) - \Psi(x, u) + \leqslant -\delta(|x|^2 + |u|^2).$$

Кроме того, $1^+{}_\infty$ *влечет следующее утверждение:*

3^+_∞. *Существуют линейные ограниченные операторы* $H = H^* : X \to X$, $k : U \to X$, $r : U \to U$ *такие, что для всех* x *и* u *имеет место тождество*

$$\Psi(x, u) = 2\mathrm{Re}\,(Ax + Bu, Hx) + |r(u - k^*x)|^2. \qquad (41)$$

При этом оператор r *определяется из соотношения* $G_{uu} = r^*r$. *После выбора* r *однозначно определяются операторы* k *и* H *с указанными свойствами.*

Эти утверждения, доказанные в [42], верны при некоторых других априорных предположениях об операторах A и B кроме стабилизируемости, например если пара A, B L^2-управляема или L^2-стабилизируема.

4.4. Лемма для «вырожденного случая»

Теорема 10 (вырожденный случай). *Предположим, что а) пара* A, B L^2*-управляема, б) пара* $-A, -B$ L^2*-управляема. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1_∞. *Выполнено «частотное условие»*

$$\Psi(x, u) \geqslant 0 \qquad (42)$$

для всех $\omega \in \mathbf{R}$, $x \in \mathcal{D}(A)$, $u \in U$ *таких, что* $\mathbf{i}\omega x = Ax + Bu$;

2_∞. *Существует линейный оператор* $H = H^* : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, *удовлетворяющий соотношению*

$$2\mathrm{Re}\, x^*H(Ax + bu) - \Psi(x, u) \leqslant 0$$

(*для всех* $x \in \mathcal{D}(A)$ *и* $u \in U$);

3_∞. *Существуют линейные операторы* $H = H^* : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, $k : U \to X$, $r : U \to U$ *такие, что для всех* $x \in \mathcal{D}(A)$ *и для всех* u *имеет место тождество*

$$\Psi(x, u) = 2\mathrm{Re}\,(Ax + Bu, Hx) + |ru - k^*x|^2. \qquad (43)$$

З а м е ч а н и е. Если пара (A, B) удовлетворяет условию *а*) и не удовлетворяет условию *б*), то утверждение теоремы сохраняется при замене «частотного условия» 1_∞ следующим условием:

при любом $a \in D(A)$ функционал

$$J(x(.), u(.)) = \int_0^\infty \Psi(x(t), u(t))\, dt \qquad (44)$$

ограничен снизу на множестве пар $x(.), u(.)$, принадлежащих пространству $L^2[\mathbf{R}^+, X \times U]$ и удовлетворяющих уравнению $dx/dt = Ax + Bu$ и начальному условию $x(0) = a$.

Дадим некоторые комментарии к теоремам 9 и 10. Во-первых, соотношения (41) и (43) различны, причем (43) можно записать в виде (41), только если оператор G_{uu} обратим (в частности, если он положительно определен) на пространстве U. Во-вторых, тождества (43) и (41) равносильны операторному уравнению Лурье

$$\begin{pmatrix} A^*H + HA & HB \\ B^*H & 0 \end{pmatrix} - G = -h^*h,$$

где $h = (-rk^*, r)$ в случае (41) и $h = (-k^*, r)$ в случае (43).

4.5. Лемма Калмана–Сегё для бесконечномерного случая

Первый (конечномерный) результат для систем с дискретным временем был получен в [190]. В [95] при помощи известного преобразования Кэли дано обобщение леммы Калмана–Сегё на случай ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Затем последовали работы [8, 40], в которых предыдущие результаты были освобождены от излишних предположений, доказательства проведены независимо от случая систем с непрерывным временем и были представлены более подробно связи леммы и задач оптимального управления дискретными системами. Пусть $A : X \to X$, $B : U \to X$ — ограниченные линейные операторы, X и U — гильбертовы пространства. Рассмотрим систему управления, изменение состояний которой описывается уравнением с дискретным временем

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{45}$$

где $x(t)$ описывает состояние системы, а $u(t)$ — управление в момент t. Обозначим через $l_2(X)$ и $l_2(U)$ гильбертовы пространства квадратично суммируемых последовательностей со значениями соответственно в X и U.

Необходимые для формулировки леммы понятия определяются по аналогии с непрерывным случаем. Так, например, система (45) l_2-управляема, если для любого $a \in X$ существует такое управление $u_a \in l_2(U)$, что для решения системы с начальным условием $x(0) = a$ выполнено $x(.) \in l_2(X)$. Приведем здесь формулировку наиболее сложного из обобщений.

Теорема 11 (вырожденный случай леммы Калмана–Сегё). *Предположим, что кроме условий а) и б) теоремы* 10 *выполнены условия в) пара A, B l_2-управляема, г) пара $-A, -B$ l_2-управляема. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1°_∞. *Выполнено «частотное условие»*

$$\Psi(x, u) \geqslant 0,$$

для всех $x \in X$, $u \in U$ и λ таких, что $|\lambda| = 1$, $\lambda x = Ax + Bu$.

2°_∞. *Существует линейный оператор $H = H^* : X \to X$, удовлетворяющий соотношению*

$$(Ax + Bu)^* H(Ax + Bu) - x^* Hx - \Psi(x, u) \leqslant 0$$

(для всех $x \in X$, $u \in U$).

3°_∞. *Существуют линейные операторы $H = H^* : X \to X$, $k : U \to \to X$, $r : U \to U$ такие, что для всех $x \in X$ и $u \in U$ имеет место тождество*

$$\Psi(x, u) = (Ax + Bu)^* H(Ax + Bu) - x^* Hx + |ru - k^* x)|^2.$$

З а м е ч а н и е. Если пара A, B удовлетворяет условию *в*) и не удовлетворяет условию *г*), то утверждение теоремы сохраняется при замене условия 1°_∞ следующим условием:

при любом $a \in X$ функционал

$$J[x(.), u(.)] = \sum_{t=0}^{\infty} \Psi[x(t), u(t)]$$

ограничен снизу на множестве пар $x(.), u(.)$, принадлежащих пространству $l_2(X) \times l_2(U)$ и удовлетворяющих уравнению (45) с начальным условием $x(0) = a$.

4.6. Лемма, линейно-квадратичная задача оптимального управления, диссипативные системы и теория рассеяния

Как уже было отмечено выше, В. А. Якубович в [93, 95], а также в дальнейших работах с соавторами [8, 40–42] использовал линейно-квадратичную задачу оптимального управления как метод доказательства леммы. На наш взгляд, «за сценой» этого элегантного доказательства стоят закономерности, возникающие в различных задачах для динамических систем. Продвижения в исследованиях происходят в рамках определенных постановок задач, которые разделяют их направления на своеобразные «потоки», текущие в одном направлении, но остающиеся длительное время в своих руслах. Разные авторы переоткрывают одни и те же закономерности и часто дают соотношениям, которые они используют, различные названия и различные применения. Показать, что лемма — не исключение. Обратимся для определенности к постановке линейно-квадратичной задачи в [42]. Пусть линейная система управления задана в стандартном виде:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = a, \tag{46}$$

где $x(t)$ — состояние, а $u(t)$ — управление. Кроме того, предположим, что критерием качества управления является следующий квадратичный функционал качества

$$J[x(.), u(.)] = \int_0^{\infty} \Psi[x(t), u(t)]\, dt. \tag{47}$$

Задача состоит в том, чтобы найти процесс, для которого функционал (47) принимает наименьшее значение, которое обозначим через $E(a)$. Легко видеть, что частотное условие (40), сформулированное выше в лемме для невырожденного случая является достаточным условием для существования и единственности оптимального процесса $[x_a(t), u_a(t)]$ в системе оптимального управления (46), (47). При этом значение минимума $E(a) = -(Ha, a)$ является непрерывной квадратичной формой на пространстве X.

Оказывается, что $u_a(t) = k^* x_a(t)$, и если $a \in D(A)$, то процесс сильно непрерывно дифференцируем по t. Кроме того, нетрудно показать, что для произвольных элементов $a_1, a_2 \in D(A)$ и $u \in U$ имеет место неравенство

$$(Ha_1, a_1) - (Ha_2, a_2) + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Psi[x(t), u]\, dt \geqslant 0, \tag{48}$$

где $x(t)$ — решение (46) с $u(t) = u = \mathrm{const}$ на промежутке интегрирования $[t_1, t_2]$, a_1 и a_2 — начальные значения соответствующих оптимальных процессов, заданные в точках t_1, t_2 (см. также [49]).

Форму $E(x) = (Hx, x)$ в теории динамического программирования называют функцией Беллмана, в теории диссипативных систем рассеяния — функцией запаса и в теории устойчивости (Hx, x) — функцией Ляпунова.

Соотношение (48) было введено в теории систем Я. Виллемсом в 1972 г. [198] как определение диссипативности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (диссипативность по Виллемсу или W-диссипативность). При этом оно трактовалось как баланс абстрактной энергии в системе, неотрицательная функция (Hx, x) с точностью до знака была названа функцией запаса, а форма $\Psi[x, u]$ — функцией расхода. Далее в 1976 г. для обыкновенных дифференциальных уравнений это неравенство было изучено Д. Хиллом и П. Мойланом [145]. Их результат был назван нелинейной KYP-леммой. В [19] неравенство (48) использовалось как «нечастотный» эквивалент KYP-леммы. Различные варианты этого утверждения и его применения к задачам анализа и синтеза нелинейных и адаптивных систем были рассмотрены в [122, 143–145, 186, 198]. В [43] с его помощью получен ряд результатов о дихотомии и абсолютной устойчивости неопределенных нелинейных систем.

Понятия, близкие к теории диссипативности по Виллемсу, лежат в основе того круга теорий, которые принято называть теориями рассеяния. Здесь имеется в виду тот ее вариант, который был предложен П. Лаксом и Р. Филипсом [33] для конкретных задач прогнозирования случайных процессов, интерполяции функций, синтеза динамических систем и т. д.

На основе этой теории и работ Б. Надя, Ч. Фойяша, Р. Калмана и других авторов Д. З. Аров развил свой вариант теории пассивных систем [9, 110, 111]. Первые работы автора в этом направлении относятся к 60-м г. В начале 70-х г. это направление уже сформировалось [34] и определенный этап развития теории завершился. Укажем некоторые черты обсуждаемой теории. Ее первоисточник в физике — теория электрических цепей (Дарлингтон), а в теории управления это направление включает задачи, которые можно в определенном контексте отнести к лемме, составляющей основной предмет данной работы. В варианте непрерывного времени пассивная система задается уравнениями «вход–выход»:

$$\begin{array}{rcll} x'(t) & = & Ax(t) + Bu(t), & x(0) = a, \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t), & t \geqslant 0, \end{array}$$

и квадратичная связь в двух наиболее используемых вариантах задана формами

$$\Psi_1(u, y) = \|u\|^2 - \|y\|^2 \text{ или } \Psi_2(u, y) = \mathrm{Re}\, u^* y. \tag{49}$$

Система рассеяния H-пассивна, если для любых a и $u(.)$ решение системы удовлетворяет условию

$$E_H(x(t)) - E_H(x(0)) \leqslant \int\limits_0^t \Psi(u(s), y(s))\, ds, \tag{50}$$

где $E_H(x) = (Hx, x)$ — функция запаса. Хорошо известно, что для форм (49) неравенство (50) эквивалентно стандартному неравенству Калмана–Попова–Якубовича. С современным состоянием теории пассивных систем Д. З. Арова и ее результатами, относящимися к лемме, можно ознакомиться по недавним публикациям [110, 111].

5. Первые результаты о неущербности S-процедуры

Как уже говорилось, понятие S-процедуры было введено в [2] для описания метода построения функции Ляпунова для нелинейных систем управления. В работе [23] понятие S-процедуры было отделено от задачи построения функции Ляпунова и сформулировано в абстрактном виде.

Пусть функции Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, заданы на векторном пространстве $\mathcal{Z}$. Рассмотрим следующие утверждения.

I$^+$. При $z \neq 0$, удовлетворяющих неравенствам $\Phi_i(z) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполнено $\Phi_0(z) > 0$;

II$^+$. Существуют $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такие, что $S(x) = \Phi_0(x) - \sum_{i=1}^k \tau_i \Phi_i(x) > 0$.

Очевидно, II$^+$ влечет I$^+$. S-процедурой называется замена условия I$^+$ условием II$^+$. В работе [23] сформулирована проблема отыскания таких классов функций Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, для которых утверждения I$^+$ и II$^+$ равносильны.

Первое такое утверждение принадлежит В. А. Якубовичу и относится к случаю двух квадратичных форм вещественного аргумента. Это утверждение является следствием доказанного в [102] утверждения о том, что не существует абсолютно устойчивых линейных систем с одной нелинейностью, удовлетворяющей секторному условию, для которых факт абсолютной устойчивости может быть установлен с помощью функции Ляпунова вида Лурье–Постникова, но не может быть установлен с помощью S-процедуры.

Первой публикацией, специально посвященной исследованию S-процедуры, является широко известная статья В. А. Якубовича [103]. В этой статье наряду с условиями I^+ и II^+ рассматриваются аналогичные условия, в которых строгие неравенства заменены на нестрогие. На получаемые таким образом утверждения будем ссылаться как на утверждения I и II. В соответствии с определением из рассматриваемой статьи будем говорить, что S-процедура неущербна, если I^+ равносильно II^+ или I равносильно II. В противном случае S-процедура ущербна.

В работе [103] доказана следующая широко известная и имеющая многочисленные применения теорема о неущербности S-процедуры для двух квадратичных или эрмитовых форм.

Теорема 12. *Пусть* $\mathcal{Z}$ — *вещественное* (*комплексное*) *векторное пространство*, Φ_i, $i = 0{,}1$, *квадратичные* (*эрмитовы*) *формы на* $\mathcal{Z}$. *Если существует* $z \in \mathcal{Z}$ *такой, что* $\Phi_1(z) > 0$, *тогда* I^+ *равносильно* II^+, I *равносильно* II.

В работе [103] в формулировке условия теоремы допущена неточность, которая исправлена в [60]. Доказательство теоремы основано на том, что в силу теорем Хаусдорфа [141] и Дайнса [129] образ отображения, составленного из двух эрмитовых (квадратичных) форм, является выпуклым множеством.

Рассмотрим составное отображение $\widehat{\Phi} = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k)$. В работе [103] предложен общий метод доказательства выпуклости образа отображения $\widehat{\Phi}$ и получены новые доказательства упомянутых результатов Ф. Хаусдорфа и Л. Дайнса. Кроме того, в этой работе доказано, что в случае трех вещественных квадратичных форм S-процедура, вообще говоря, ущербна.

Исследование случая трех эрмитовых форм проведено в [60]. В этой работе наряду с ограничениями в виде неравенств рассмотрены ограничения в виде равенства. Для ограничений в виде равенств утверждения S-процедуры выглядят следующим образом:

I_0. При $z \neq 0$, удовлетворяющих неравенствам $\Phi_i(z) = 0$, $i = 1, 2$, выполнено $\Phi_0(z) \geqslant 0$.

II_0. Существуют τ_i, $i = 1, 2$, такие, что $\Phi_0(z) - \tau_1\Phi_1(z) - \tau_2\Phi_2(z) \geqslant \geqslant 0$.

Рассматривается также случай одного ограничения в виде равенства и одного в виде неравенства. Предполагается, что ограничения удовлетворяют некоторым условиям регулярности.

Формулировка этих условий, названных в [60] обобщенным условиям Слейтера, приведена в следующем разделе в общем виде для произвольного набора ограничений. В работе [60] доказано, что при выполнении условий Слейтера S-процедура для трех эрмитовых форм неущербна для всех перечисленных типов ограничений. Более того, этот результат остается справедливым, если вместо квадратичных форм рассмотреть квадратичные функционалы вида $\Phi_i(z) = z^* F_i z + \mathrm{Re}\,(f_i^* z) + \varphi_i$, $f_i \in \mathbf{C}^{\varkappa}$, $\varphi_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, 2$. В случае, если на функционал Φ_i накладывается ограничение-равенство, предполагается, что $F_i \neq 0$.

Отметим, что случай двух квадратичных форм и ограничения в виде равенства был рассмотрен в [132]. Доказанный в этой работе результат известен как лемма Финслера.

Теорема 13. *Пусть* Φ_0,Φ_1 — *квадратичные формы*, *тогда равносильны следующие утверждения*:

I_0^+. *При всех* $z \neq 0$, *удовлетворяющих равенству* $\Phi_1(z) = 0$, *выполнено неравенство* $\Phi_0(z) > 0$;

II_0^+. *Существует* $\tau \in \mathbf{R}$ *такое*, *что* $\Phi_0(z) - \tau\Phi_1(z) > 0$ *при всех* $z \neq 0$.

Аналогичное утверждение для эрмитовых форм с заменой строгих неравенств на нестрогие получен в [32] при дополнительном предположении, что форма Φ_1 является знакопеременной.

6. Общая постановка задачи о неущербности S-процедуры

Практический интерес представляет распространение упомянутых результатов на случай нескольких ограничений определяемых как неравенствами, так и равенствами. Первые результаты в этом направлении получены в [59, 60, 103].

Однако нам удобнее начать не с этих результатов, а с общей постановки задачи о неущербности S-процедуры, сформулированной в [96] и [51].

Пусть $\mathcal{Z}$ — некоторое множество, $\mathcal{Y}$ — топологическое векторное пространство, в котором задан выпуклый конус $\mathcal{Y}_+ \subset \mathcal{Y}$. Конус $\mathcal{Y}_+$ определяет на $\mathcal{Y}$ отношение предпорядка $\trianglelefteq$, которое для $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ определяется условием $y_1 \trianglelefteq y_2$, если $y_2 - y_1 \in \mathcal{Y}_+$. Если $\mathrm{ri}\,\mathcal{Y} \neq \varnothing$, то для $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ отношение $y_1 \lhd y_2$ означает, что $y_2 - y_1 \in \mathrm{ri}\,\mathcal{Y}_+$. Обозначим $\mathcal{Y}'$ — пространство, сопряженное к $\mathcal{Y}$, и пусть $\mathcal{Y}'_+ = \{\tau \in \mathcal{Y}' | \forall y \in \mathcal{Y}'_+ \ \langle \tau, y\rangle \geqslant 0\}$ — конус, двойственный к $\mathcal{Y}_+$. Здесь и далее $\langle y, \tau\rangle = \tau(y)$, где $y \in \mathcal{Y}, \tau \in \mathcal{Y}'$.

Пусть заданы отображения $\Phi_0 : \mathcal{Z} \to \mathbf{R}$ и $\Phi : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$.

Рассмотрим следующие утверждения:

I. Неравенство $\Phi_0(z) \geqslant 0$ выполнено для всех $z \in \mathcal{Z}$ таких, что $\Phi(z) \trianglerighteq 0$.

II. Существует $\tau \in \mathcal{Y}'_+$ такое, что неравенство $\Phi_0(z) - \langle \tau, \Phi(z)\rangle \geqslant 0$ выполнено для всех $z \in \mathcal{Z}$.

Если утверждения I и II равносильны, говорят, что S-процедура неущербна.

В работе [59] доказано общее утверждение, связывающее неущербность S-процедуры с выпуклостью множества $\mathcal{R} = \widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$.

Пусть $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}' = \mathbf{R}^k$,

$$\mathcal{Y}'_+ = \{\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) | \tau_i \geqslant 0 \text{ при } i \in P_+;\ \tau_i = 0 \text{ при } i \in P_0\}, \quad (51)$$

где множества индексов P_0, P_+ удовлетворяют условиям $P_0 \cap P_+ = \varnothing$, $P_0 \cup P_+ = \{1, 2, \dots, k\}$. Рассмотрим следующее условие, накладываемое на ограничения:

(i) Для каждого $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$, удовлетворяющего условию $\tau_i = \pm 1, i \in P_0$, $\tau_i = 1, i \in P_+$, существует $z(\tau) \in \mathcal{Z}$ такой, что $\tau_i \Phi_i(x(\tau)) > 0, i = 1, 2, \dots, k$.

Условие (i) является вариантом известных в математическом программировании условий Слейтера. В работе [59] доказана следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть множество* $\mathcal{R}$ *выпукло и выполнено условие* (*i*), *тогда* I *равносильно* II.

Обобщения теоремы 14 получены в [34, 36, 37], где предполагается, что $\mathcal{Y}$ — нормированное пространство, $\mathcal{Y}_+$ — произвольный выпуклый конус.

Следуя [51], рассмотрим следующее условие, накладываемое на ограничения:

(ii) Существует $z_* \in \mathcal{Z}$ такой, что $\Phi(z_*) \rhd 0$. Вектор $\tau = 0$ является единственным решением системы неравенств $\tau \trianglerighteq 0$, $\tau \trianglelefteq 0$, $\langle \tau, \Phi(z) \rangle \geqslant 0\ \ \forall z \in \mathcal{Z}$.

Условие (ii) обобщает условие (i). Пусть $\mathcal{R} = \widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$, $\mathcal{R}_+ = \{(y_0, y) \in \mathbf{R} \times \mathcal{Y} \mid \exists z \in \mathcal{Z} : y_0 \geqslant \Phi_0(z), y \trianglelefteq \Phi(z)\}$.

Теорема 15. *Пусть выполнено условие* (ii) *и множество* $\mathcal{R}_+$ *удовлетворяет одному из следующих условий*:

а) $\mathcal{R}_+$ *выпукло*;

б) $\mathrm{cl}\ \mathcal{R}_+$ *выпукло и* $\mathrm{int}\, \mathcal{Y}_+ \neq \varnothing$;

в) $\mathcal{R}_+$ *почти выпукло*, *т. е. существует выпуклое* $\mathcal{Q}$ *такое*, *что* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}_+ \subset \mathrm{cl}\ \mathcal{Q}$.

Тогда утверждения I *и* II *равносильны.*

Условия a) и b) введены в [34, 36], условие c) — в [50]. Отметим, что если множество $\mathcal{R}$ обладает одним из свойств, указанных в пунктах a)–c), то тем же свойством обладает $\mathcal{R}_+$. В работе [135] отмечено, что в теореме 15 достаточно требовать, чтобы условия a)–c) были выполнены для конической оболочки $\mathcal{R}$.

6.1. Результаты о выпуклости образа. Конечномерный случай

Пусть $\mathcal{Z} \subset \widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{Z}} = \mathbf{R}^n$ или $\widetilde{\mathcal{Z}} = \mathbf{C}^n$, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^k$, $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$, отображения Φ_i, $i = 0, 1, \dots, n$, — квадратичные или эрмитовы формы

$$\Phi_i(x) = z^* F_i z, \quad i = 0, 1, \dots, k, \tag{52}$$

где $F_i \in \mathbf{HM}_n$ — симметричные вещественные или эрмитовы матрицы, $\mathbf{S}(\mathbf{R}^n)(\mathbf{S}(\mathbf{C}^n))$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$.

Ниже перечислены случаи, когда множество $\mathcal{R} = \widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$ выпукло.

6.1.1. $\mathcal{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{C}^n)$, n произвольно, $k = 1$, F_0, F_1 — произвольные эрмитовы матрицы [141].

6.1.2. $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n$, n произвольно, $k = 1$, F_0, F_1 — произвольные вещественные симметричные матрицы [129].

6.1.3. $\mathcal{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$, $n \geqslant 3$, $k = 1$, F_0, F_1 — произвольные вещественные симметричные матрицы [119].

6.1.4. $\mathcal{Z} = \mathbf{C}^n$, n произвольно, $k = 2$, F_0, F_1, F_2 — произвольные эрмитовы матрицы [119].

6.1.5. $\mathcal{Z} = \mathbf{C}^n$, n произвольно, k произвольно, среди эрмитовых матриц F_i, $i = 0, \dots, k$, не больше трех линейно независимых [59].

6.1.6. $\mathcal{Z} = \mathbf{C}^2$, k произвольно, F_i, $i = 0, \dots, k$, — произвольные вещественные симметричные матрицы [103].

6.1.7. $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, $k = 2$, F_0, F_1, F_2 — вещественные симметричные матрицы такие, что $\alpha_0 F_0 + \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 > 0$ при некоторых $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ [179].

6.1.8. $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n$, n произвольно, k произвольно, матрицы F_i, $i = 0, \dots, k$, конгруэнтны диагональным при общем преобразовании [59].

6.1.9. $\mathcal{Z} = \mathbf{S}(\mathbf{C}^n)$, n произвольно, k произвольно, матрицы F_i, $i = 0, \dots, k$, эрмитово конгруэнтны эрмитовым теплицевым при общем преобразовании [1].

6.1.10. $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^n$, n произвольно, k произвольно, матрицы F_i, $i = 0, \dots, k$, конгруэнтны вещественным симметричным теплицевым при общем преобразовании (доказывается аналогично предыдущему).

6.1.11. $\mathcal{Z} = \mathbf{C}^n$, n произвольно, k произвольно, матрицы F_i, $i = 0, \dots, k$, эрмитово конгруэнтны вещественным симметричным трехдиагональным при общем преобразовании [1].

6.1.12. $\mathcal{Z} = \mathbf{C}^n$, n произвольно, k произвольно, матрицы F_i, $i = 0, \dots, k$, эрмитово конгруэнтны вещественным ганкелевым при общем преобразовании [1].

6.1.13. $\mathcal{Z} = \mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R})$, m, n произвольны, $\Phi_i(x) = \operatorname{tr}(x^* F_i x)$, F_i, $i = 0, \dots, k$, — произвольные вещественные симметричные матрицы, k удовлетворяет неравенству $\operatorname{entier}(\frac{\sqrt{8k+9}-1}{2}) \leqslant m$ при $m < n$ [117] и k — произвольное при $m \geqslant n$.

6.2. Результаты о выпуклости образа. Бесконечномерный случай

В вызвавшей большой резонанс работе [165] впервые показано, что в случае, когда $\mathcal{Z}$ бесконечномерно, неущербность S-процедуры при произвольной размерности пространства $\mathcal{Y}$ может иметь место для более широких классов отображений Φ_0, Φ, чем в конечномерном случае. В основе результата [165] и других работ этого направления лежат утверждения о выпуклости множества $\operatorname{cl}\mathcal{R}$ или почти выпуклости $\mathcal{R}$. В этом разделе даны краткие формулировки таких результатов.

6.2.1. Пусть $\widehat{\mathcal{Z}} = L^2((0,+\infty),\mathbf{R}^{\varkappa})$, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^k$, $\varkappa, k \geqslant 1$. В пространстве $\widehat{\mathcal{Z}}$ задано семейство операторов сдвига $T_\vartheta, \vartheta \in (0,+\infty)$, отображающих функцию $z \in \widehat{\mathcal{Z}}$ в функцию $T_\vartheta z(t) = 0$ при $t \leqslant \vartheta$ и $T_\vartheta z(t) = z(t-\vartheta)$ при $t > \vartheta$. Пусть $\mathcal{Z}$ — линейное подпространство $\widehat{\mathcal{Z}}$, $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, где Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, — непрерывные квадратичные формы, заданные на $\mathcal{Z}$. Предположим, что $\mathcal{Z}$ и отображения Φ_i инвариантны относительно операторов T_ϑ, т. е. при всех $\vartheta \in (0,+\infty)$, $z \in \mathcal{Z}$ выполнено $T_\vartheta z \in \mathcal{Z}$, $\Phi_i(T_\vartheta z) = \Phi_i(z), i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда $\operatorname{cl}\mathcal{R}$ выпукло [165, 166].

Применение сформулированного результата в задачах управления иллюстрируется следующим примером. Рассмотрим систему управления

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \tag{53}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, матрицы A, B имеют соответствующие размерности, $t \geqslant 0$. Пусть $z(t) = (x(t), u(t)) \in \mathbf{R}^{\varkappa}$, $\varkappa = m + n$. Пространство $\mathcal{Z}$ определим как множество траекторий $z \in L^2((0,+\infty),\mathbf{R}^{\varkappa})$, удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$. Определим квадратичные формы

$$\Phi_i(z) = \int\limits_0^{+\infty} z(t)^* G_i z(t)\, dt,$$

где $G_i \in S\mathbf{M}_{\varkappa}$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Легко видеть, что квадратичные формы и пространство траекторий инвариантны относительно сдвига по времени.

Сформулированный результат лежит в основе направления в исследовании систем управления, получившего название метод интегральных квадратичных ограничений [105, 164], и др.

6.2.2. Пусть $\widehat{\mathcal{Z}}$ — вещественное гильбертово пространство, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^k$, $k \geqslant 1$, $\mathcal{Z} = z_0 + \widehat{\mathcal{Z}}_0$, где $z_0 \in \widehat{\mathcal{Z}}$, $\widehat{\mathcal{Z}}_0$ — некоторое линейное (вообще говоря, незамкнутое) подпространство $\widehat{\mathcal{Z}}$. Отображения Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, — непрерывные квадратичные функционалы, заданные соотношениями $\Phi_i(z) = \langle z, \mathcal{G}_i z\rangle + \langle g_i, z\rangle + \gamma_i$, где $\mathcal{G}_i$ — непрерывные самосопряженные операторы в $\widehat{\mathcal{Z}}$, $g_i \in \widehat{\mathcal{Z}}$, $\gamma_i \in \mathbf{R}$. Предположим, что в пространстве $\widehat{\mathcal{Z}}$ задана последовательность ограниченных линейных операторов $\{T_j\}_1^\infty$, $T_j \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{Z}})$, такая, что при всех $j = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, k$ и всех $z_1, z_2 \in \widehat{\mathcal{Z}}$ выполнены равенства $T_j \widehat{\mathcal{Z}}_0 = \widehat{\mathcal{Z}}_0$, $\lim_{j\to\infty}\langle T_j z_1, z_2\rangle = 0$, $\lim_{j\to\infty}\langle T_j z, G_i T_j z\rangle = \langle z, G_i z\rangle$. Тогда $\mathrm{cl}\,\mathcal{R}$ выпукло [201].

Применение этого результата в задачах управления можно проиллюстрировать примером, аналогичным рассмотренному в предыдущем пункте. Пусть $\mathcal{Z}$ есть многообразие траекторий системы (53), удовлетворяющих (вообще говоря) ненулевому начальному условию $x(0) = a$, $a \in \mathbf{R}^n$, а отображения Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, имеют вид

$$\Phi_i(z) = \int_0^{+\infty} (z(t)^* G_i z(t) + g_i(t)^* z(t))\, dt + \gamma_i,$$

где $G_i \in S\mathbf{M}_\varkappa$, $g_i \in L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^\varkappa)$. Условия, накладываемые на операторы T_j, выполнены, если T_j — операторы сдвига по времени, аналогичные рассмотренным в 6.2.1.

6.2.3. Рассмотрим систему управления

$$\frac{d}{dt}x = F(x, u), \tag{54}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m, \varkappa = m + n$, $F : \mathbf{R}^\varkappa \to \mathbf{R}^n$ — непрерывное отображение, $t \geqslant 0$. Пусть $z(t) = (x(t), u(t)) \in \mathbf{R}^\varkappa$, на пространстве $L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^\varkappa)$ определим функционалы $\Phi_i(z) = \int_0^{+\infty} \varphi_i(z(t))\, dt$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Предполагается, что $\Phi_i(z)$ конечны при всех $i = 0, 1, \ldots, k$ и $z \in L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^\varkappa)$. Пространство $\widehat{\mathcal{Z}}$ определим как множество траекторий $z \in L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^\varkappa)$. Предположим, что система является устойчивой в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $u \in L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^m)$ и любого $a \in \mathbf{R}^n$, $|a| < \delta$, решение x_a системы (54) с начальным условием $x(0) = a$ лежит в $L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^n)$ и при всех $i = 0, 1, \ldots, k$ выполнены неравенства $|\Phi_i(z_a) - \Phi_i(z_0)| < \varepsilon$, где $z_a = (x_a, u)$, $z_0 = (x_0, u)$. Пусть $\mathcal{Z}$ — множество решений (54) с начальными данными $x(0) = 0$ при $u \in L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^m)$, тогда $\mathrm{cl}\,\mathcal{R}$ выпукло [184].

6.2.4. В работе [136] получен аналог утверждения из предыдущего пункта, в котором требование принадлежности решений пространству $L^2((0, +\infty), \mathbf{R}^\varkappa)$ заменено менее ограничительными условиями. Рассмотрим систему (54) с непрерывно дифференцируемой функцией F. Пусть $\mathcal{U}$ — пространство кусочно непрерывных функций $u : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^m$. Предположим, что для каждого $u \in \mathcal{U}$ найдется ограниченное решение x_u уравнения (54), которое является асимптотически устойчивым, т.е. $\lim_{t\to\infty} |x(t) - x_u(t)| = 0$ для любого решения x, соответствующего входу u. Предположим также, что для любого решения (54) определены функционалы $\Phi_i(z) = \lim_{t\to\infty} 1/t \int_0^t \varphi_i(z(\vartheta))\, d\vartheta$,

$i = 0, 1, \ldots, k$, где все функции φ_i непрерывно дифференцируемы. Пусть $\mathcal{Z}$ множество решений (54), тогда $\operatorname{cl}\mathcal{R}$ выпукло.

6.2.5. Пусть $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}} = l^1(\mathbf{R}^\varkappa)$ — пространство абсолютно суммируемых последовательностей $\{z_t\}_1^{+\infty}$, $z_t \in \mathbf{R}^\varkappa$ при всех $t = 0, 1, \ldots$, $\sum_0^{+\infty} |z_t| < \infty$, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^k$. Определим функционалы $\Phi_i(z) = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} \sup_{t=0,1,\ldots} |\sum_{\vartheta=0}^{t} \langle g_\vartheta^{(j)}, z_{t-\vartheta}\rangle|$, где $g^{(j)} \in l^1(\mathbf{R}^\varkappa)$, $\alpha_{i,j} \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 0, 1, \ldots, \varkappa$, тогда $\operatorname{cl}\mathcal{R}$ — выпуклое множество [163].

В работе [163] основанная на этом утверждении теорема о неущербности S-процедуры применена для исследования робастной устойчивости линейной системы с дискретным временем.

6.2.6. Пусть $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}}$ — вещественное гильбертово пространство, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^k$, $k \geqslant 1$, отображения Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, — непрерывные квадратичные формы, заданные соотношениями $\Phi_i(z) = \langle z, \mathcal{G}_i z\rangle$, где $\mathcal{G}_i$ — непрерывные самосопряженные операторы в $\widehat{\mathcal{Z}}$.

Если для любых $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_k) \in \mathbf{R}$ в случае, когда минимальная точка спектра оператора $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_0 - \tau_1\mathcal{G}_1 - \ldots - \tau_k\mathcal{G}_k$ является изолированным собственным числом, его кратность не меньше $k+1$, то $\mathcal{R}$ и $\widehat{\Phi}(\{|z| = 1\})$ — почти выпуклые множества [48].

Пусть $\mathcal{Y}_+$ — замкнутый конус, определяющий предпорядок в $\mathcal{Y}$, $\mathcal{P}_\tau(\,d\lambda)$ — разложение единицы оператора $\mathcal{G}_\tau$. Если для каждого $\tau \trianglerighteq 0$ выполнено либо $\dim \operatorname{Im} \mathcal{P}_\tau[(-\infty, 0)] = 0$, либо $\dim \operatorname{Im} \mathcal{P}_\tau[(-\infty, 0)] \geqslant k$, то $\mathcal{R}_+$ — почти выпуклое множество [48].

По-видимому, данные утверждения являются наиболее общими из известных результатов о выпуклости образа всего пространства. В отличие от приведенных выше результатов этого раздела указанные утверждения выполнены и в случае, когда $\mathcal{Z}$ конечномерно. В частности, из них следуют немного ослабленные варианты (вместо выпуклости получается почти выпуклость) утверждений из пп. 6.1.1–6.1.4.

6.2.7. В работе [55] получено общее утверждение о выпуклости образа малого шара при дифференцируемом отображении. Пусть $\widehat{\mathcal{Z}}, \mathcal{Y}$ — вещественные гильбертовы пространства, $\widehat{\Phi} : \widehat{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Y}$. Предположим, что $\widehat{\Phi}$ дифференцируемо по Фреше в некотором шаре $\mathcal{B}(a, r) = \{z \in \widehat{\mathcal{Z}} \mid |z - a| \leqslant r\}$ и существуют $L > 0$, $\delta > 0$ такие, что его производная $\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi}$ удовлетворяет оценкам $\|\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi}(z_1) - \frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi}(z_2)\| \leqslant L|z_1 - z_2|$ и $|(\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi})'(y)| \geqslant \delta|y|$ при всех $z_1, z_2 \in \mathcal{B}(a, r)$, $y \in \mathcal{Y}$. Здесь $(\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi})'$ — оператор, сопряженный к $(\frac{\partial}{\partial z}\widehat{\Phi})$. Тогда $\widehat{\Phi}(\mathcal{B}(a, \varepsilon))$ — выпуклое множество при всех $\varepsilon < \min(r, \delta/(2L))$.

В работе [55] приведенный результат применяется в задачах оптимизации, заданных в малой окрестности фиксированной точки. Этот класс задач математического программирования назван в [55] локальным программированием.

6.3. Двойственность Лагранжа

Рассмотрим экстремальную задачу

(P) *минимизировать* $\Phi_0(z)$ *при* $\Phi(z) \trianglerighteq 0$.

Пусть $v = \inf\{\Phi_0(z) \mid \Phi(z) \trianglerighteq 0\}$ — значение задачи (P). Утверждение I выполнено, если $v \geqslant 0$.

Двойственная к (P) экстремальная задача формулируется следующим образом:

(D) *максимизировать* $\inf_{\tau \in \mathcal{Y}'_+}(\Phi_0(z) - \langle \tau, \Phi(z) \rangle)$.

Пусть $v^* = \sup_z \inf_{\tau \in \mathcal{Y}'_+}(\Phi_0(z) - \langle \tau, \Phi(z) \rangle)$ — значение задачи (D). Величины v и v^* могут принимать бесконечные значения и всегда удовлетворяют неравенству $v \geqslant v^*$.

Если $v^* > 0$ или $v^* = 0$ и супремум в задаче (D) достигается, то выполнено условие II.

Таким образом, выполнение соотношения двойственности Лагранжа

$$\inf_{\Phi(z) \trianglerighteq 0} \Phi_0(z) = \max_{\tau \in \mathcal{Y}'_+} \inf_z (\Phi_0(z) - \langle \tau, \Phi(z) \rangle) \tag{55}$$

является достаточным условием для равносильности I и II. Впервые в связи с S-процедурой соотношение (55) рассмотрено в [103] для случая двух форм.

Если отображения Φ_0, Φ — положительно-однородные одной и той же степени однородности, то v и v^* могут принимать только значения 0 или $-\infty$. В этом случае (55) является необходимым и достаточным условием равносильности I и II [59].

Связь соотношений (55) и неущербности S-процедуры в общем случае установлена в [59, 60]. Следуя [96], назовем пару отображений Φ_0, Φ S-системой, если при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ утверждения I и II равносильны при замене Φ_0 на $\Phi_0 + \alpha$.

В случае, когда конус $\mathcal{Y}_+$ определяется соотношением (51), в [59] доказано, что пара Φ_0, Φ образует S-систему тогда и только тогда, когда выполнено соотношение (55). В работах [51, 96] этот результат обобщен на случай произвольного нормированного $\mathcal{Y}$ и произвольного замкнутого выпуклого конуса $\mathcal{Y}_+$. В работах [50, 96] показано, что при выполнении любого из условий *a*)–*c*) теоремы 15 пара Φ_0, Φ образует S-систему.

В работах [51, 96] показано, что при выполнении условий теоремы 15 все решения прямой экстремальной задачи (P) могут быть найдены при решении двойственной задачи (D), и предложен алгоритм решения последней задачи. Эти результаты и утверждения о выпуклости образа, сформулированные в пп. 6.2.2, 6.2.5, использованы в работах [50–52, 96, 201] при решении большого числа задач оптимального управления конечномерными и бесконечномерными системами при наличии квадратичных ограничений. Подробный обзор этих результатов имеется в [49].

6.4. Двойственность Фенхеля

Пусть $\mathcal{Y}$ — топологическое векторное пространство, $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$(\mathrm{P}_F) \qquad \textit{минимизировать } \Phi_0(z) \textit{ при } \Phi(z) \in \mathcal{D}.$$

Пусть $\mathcal{T} = \{\tau \in \mathcal{Y}' \mid \Phi_0(z) - \langle \tau, \Phi(z) \rangle \geqslant 0 \ \forall z \in \mathcal{Z}\}$ — множество векторов τ, при которых выполнено неравенство в утверждении II S-процедуры. Сформулируем двойственную к (P_F) экстремальную задачу следующим образом:

$$(\mathrm{D}_F) \qquad \textit{максимизировать } \inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle \textit{ при условии } \tau \in \mathcal{T}.$$

Функция $\inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle$ вогнута, поэтому задача (D_F) является задачей выпуклого программирования. Пусть $\upsilon = \inf\{\Phi_0(z) \mid \Phi(z) \in \mathcal{D}\}$ — значение задачи (P_F), $\upsilon^* = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle$ — значение задачи (D_F). Величины υ и υ^* могут принимать бесконечные значения и всегда удовлетворяют неравенству $\upsilon \geqslant \upsilon^*$.

При выполнении соотношения двойственности

$$\inf_{\Phi(z) \in \mathcal{D}} \Phi_0(z) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle \tag{56}$$

решение, вообще говоря, невыпуклой задачи (P_F) сводится к решению выпуклой задачи (D_F). Легко видеть, что в случае, когда $\mathcal{D} = \mathcal{Y}_+$ — конус, из соотношения (56) следует неущербность S-процедуры. Действительно, в этом случае $\inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle = 0$ при $\tau \in \mathcal{Y}'_+$ и $\inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle = -\infty$ при $\tau \notin \mathcal{Y}'_+$. Если выполнено I, то $\inf_{\Phi(z) \in \mathcal{D}} \Phi_0(z) > -\infty$, и, следовательно, $\mathcal{T} \cap \mathcal{Y}'_+ \neq \varnothing$, т. е. выполнено II.

Имеет место следующее утверждение [28], являющееся следствием теоремы двойственности Фенхеля [58].

Теорема 16. *Пусть $\mathcal{Y}$ — конечномерное пространство, $\mathcal{D}$ — выпуклое множество, $\widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$ — выпуклый конус. Если выполнено условие*

$$(\mathrm{iii}) \qquad \operatorname{ri} \mathcal{D} \cap \operatorname{ri} \Phi(\mathcal{Z}) \neq \varnothing,$$

то выполнено (56). *Если, кроме того, существует $\tau \in \mathcal{T}$ такое, что $\inf_{y \in \mathcal{D}} \langle \tau, y \rangle < +\infty$, то супремум в правой части* (56) *достигается.*

Если пространство $\mathcal{Y}$ бесконечномерно, утверждение теоремы сохраняется, если условие (iii) заменить условием $\operatorname{int} \mathcal{D} \cap \Phi(\mathcal{Z}) \neq \varnothing$. Существуют и другие, менее ограничительные условия, при которых утверждение теоремы сохраняется в бесконечномерном случае.

В отличие от двойственности Лагранжа двойственность Фенхеля позволяет рассматривать задачи, в которых множества, определяющие ограничения, не являются конусами. В случае, когда $\widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$ и $\mathcal{D} = \mathcal{Y}_+$ — выпуклые конусы, условия (ii) и (iii) равносильны.

7. S-процедура для эрмитовых форм

Пусть $\mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}} = \mathbf{C}^{\varkappa}$, $\widehat{\Phi} = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k)$, где Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, — эрмитовы формы (52). Рассмотрим линейные функционалы

$$\Lambda_i(S) = \operatorname{tr}(F_i S), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

где $S \in \mathbf{HM}_{\varkappa}$. Легко видеть, что $\Phi_i(z) = \Lambda_i(zz^*)$. Пусть конус $\mathcal{Y}_+$ задан соотношением (51). В работе [59] показано, что при выполнении условия (i) утверждение II равносильно следующему:

I^{Λ}. $\Lambda_0(S) \geqslant 0 \ \ \forall S \in \mathbf{HM}_{\varkappa}^{+} : \Lambda(S) \trianglerighteq 0$.

Таким образом, вопрос о неущербности S -процедуры сводится к проверке равносильности утверждений I и I^{Λ}.

В приложениях, например в рассмотренной задаче об абсолютной устойчивости, часто необходимо использовать S-процедуру при неизвестной форме Φ_0. Поэтому представляет интерес вопрос о том, когда при заданных Φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и ограничениях S-процедура неущербна для произвольной формы Φ_0. Используя приведенный выше результат, А. Л. Фрадков [59] указал необходимое и достаточное условие неущербности S-процедуры для произвольной формы Φ_0. Положим $\mathbf{HM}_{\varkappa}^{\otimes} = \{xx^* | x \in \mathbf{C}^n\}$. Множество $\mathbf{HM}_{\varkappa}^{\otimes}$ состоит из матриц, принадлежащих крайним лучам конуса $\mathbf{HM}_{\varkappa}^{+}$.

Теорема 17. *Пусть конус* $\mathcal{Y}_+$ *задан соотношением* (51), *а отображение* Φ *удовлетворяет условию* (i), *тогда для того*, *чтобы для любой формы* Φ_0 *из* I *следовало* II, *необходимо и достаточно*, *чтобы*

$$\mathbf{HM}_{\varkappa}^{+} \cap \Lambda^{-1}(\mathcal{Y}_+) = \operatorname{conv}(\mathbf{HM}_{\varkappa}^{\otimes} \cap \Lambda^{-1}(\mathcal{Y}_+)). \tag{57}$$

Утверждение сохраняет силу, *когда* Φ_i, $i = 0{,}1, \ldots, k$, *— квадратичные формы.*

Нетрудно показать, что теорема верна для произвольного выпуклого конуса $\mathcal{Y}_+$ при замене условия (i) на (ii).

7.1. Примеры выполнения условия Фрадкова

Из утверждений 6.1.2, 6.1.1 следует, что равенство (57) выполнено при $k = 2$ в случае эрмитовых форм и при $k = 1$ — в случае квадратичных форм.

7.1.1. Важный пример выполнения условия (57) указан А. Ранцером [182]. Пусть $\mathcal{Y} = \mathbf{HM}_n$, $n \geqslant 1$, $\mathcal{Y}_+ = \{0\}$, $\Lambda(S) = MSN^* + NSM^*$, где $M, N \in \mathbf{M}_{n,\varkappa}$, тогда выполнено (57).

7.1.2. Следующее обобщение этого результата получено в [27, 149]. Пусть $\mathcal{Y} = \mathbf{HM}_n$, $n \geqslant 1$, $\mathcal{Y}_+ = \{0\}$,

$$\Lambda(S) = (M, N)(\Theta \otimes S)(M, N)^*, \tag{58}$$

где $M, N \in \mathbf{M}_{n,\varkappa}(\mathbf{C})$, $\Theta \in \mathbf{HM}_2$, тогда выполнено (57).

7.1.3. Результат включающий ограничения-неравенства, получен в [149]. Пусть $\mathcal{Y} = \mathbf{HM}_n \times \mathbf{HM}_n,\ n \geqslant 1,\ \mathcal{Y}_+ = \{(Q_1, Q_2)\ | Q_1, Q_2 \in \mathbf{HM}_n,\ Q_1 = 0, Q_2 \geqslant 0\},\ \Lambda_i(S) = (M, N)(\Theta_i \otimes S)(M, N)^*,\ i = 1, 2$, где $M, N \in \mathbf{M}_{n,\varkappa},\ \Theta_i \in \mathbf{HM}_2,\ i = 1, 2,\ \det \Theta_1 < 0$. Положим $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$, тогда выполнено (57).

Отметим, что, хотя во всех вышеуказанных случаях в силу теоремы 17 S-процедура неущербна при любой форме Φ_0, в этих случаях образ $\widehat{\Phi}(\mathcal{Z})$, вообще говоря, не является выпуклым.

7.2. Метод линеаризации

Пусть $\mathcal{Z}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ — пространство самосопряженных ограниченных операторов, $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z}) \subset \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ — пространство самосопряженных ядерных операторов гильбертова пространства $\mathcal{Z}$ в себя, $\widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z})$ — конус положительно полуопределенных операторов из $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$, $\widehat{\mathcal{C}}_1^{\otimes}(\mathcal{Z}) = \{zz^* \mid z \in \mathcal{Z}\}$ — конус одномерных положительно полуопределенных операторов, принадлежащих крайним лучам $\widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z})$. Пусть $\mathcal{Y}$ — некоторое нормированное пространство, $\mathcal{Y}_+$ — выпуклый конус в $\mathcal{Y}$, Λ — линейный ограниченный оператор из $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$ в $\mathcal{Y}$, Λ_0 — линейный непрерывный функционал на $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$. Положим $\Phi(z) = \Lambda(zz^*)$, $\Phi_0(z) = \Lambda_0(zz^*)$.

Имеет место следующее простое утверждение, которое используется в [27]. Если

$$\widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z}) \cap \Lambda^{-1}(\mathcal{Y}_+) = \mathrm{cl\ conv}\,(\widehat{\mathcal{C}}_1^{\otimes}(\mathcal{Z}) \cap \Lambda^{-1}(\mathcal{Y}_+)), \tag{59}$$

то $\inf_{\{z \in \mathcal{Z}\ |\ \Phi(z) \in \mathcal{Y}_+\}} \Phi_0(z) = \inf_{\{S \in \widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z})\ |\ \Lambda(S) \in \mathcal{Y}_+\}} \Lambda_0(S)$ и, следовательно, I равносильно I^Λ.

Очевидно, что II равносильно следующему утверждению:

II^Λ. Существует $\tau \in \mathcal{Y}'_+$ такое, что неравенство $\Lambda_0(S) - \langle \tau, \Lambda(S) \rangle \geqslant 0$ выполнено для всех $S \in \widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z})$.

Таким образом, при выполнении условия (59) I равносильно II тогда и только тогда, когда I^Λ равносильно II^Λ.

Пусть $\widehat{\Lambda} = (\Lambda_0, \Lambda)$. Поскольку $\widehat{\Lambda}(\widehat{\mathcal{C}}_1^+(\mathcal{Z}))$ — выпуклый конус, утверждения I^Λ и II^Λ равносильны, если выполнено соотношение двойственности Фенхеля (56). В случае, когда пространство $\mathcal{Y}$ конечномерно, в силу теоремы 16 двойственность Фенхеля (56) имеет место при выполнении условия (iii). Если $\mathcal{Y}$ бесконечномерно, то наличие двойственности Фенхеля может быть установлено в некоторых специальных случаях [140].

Поскольку каждый линейный ограниченный функционал $f(S)$ на $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$ представим в виде $f(S) = \mathrm{tr}(FS)$ при некотором $F \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$, будем отождествлять сопряженное пространство $\widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$ с $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Пусть $\Lambda_0(S) = \mathrm{tr}(F_0 S)$, где $F_0 \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Обозначим Λ' — оператор, сопряженный к Λ, тогда $\Lambda'(\tau) \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ при любом $\tau \in \mathcal{Y}'$. С учетом этих обозначений утверждение II^Λ можно записать в следующем эквивалентном виде:

III. Существует $\tau \in \mathcal{Y}'_+$ такое, что $F_0 - \Lambda'(\tau) \geqslant 0$.

Суммируя, приходим к следующему утверждению. Пусть $\mathcal{Y}$ – конечномерно и выполнены условия (59) и (iii), тогда I равносильно III.

Следующий пример [27] является бесконечномерным аналогом примера, рассмотренного в п. 7.1.2. Пусть $\mathcal{Z}, \mathcal{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{Y} = \widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{H})$, $\mathcal{Y}_+ = \{0\}$, $\Lambda(S) = (M, N)(\Theta \otimes S)(M, N)^*$, где $M, N \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}, \mathcal{H})$, $\Theta \in \mathbf{HM}_2$, тогда выполнено (59).

Таким же образом может быть сформулирован бесконечномерный аналог утверждения 7.1.3.

7.3. Обобщенная S-процедура

Пусть Φ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, — эрмитовы формы (52), $\mathcal{Y}_+ = \{(y_1, \ldots, y_k) \mid y_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, k\}$. Рассмотрим множество $\mathcal{F} = \mathrm{cone}\,(\mathrm{conv}\,\{F_1, \ldots, F_k\})$, тогда условия I и II можно сформулировать следующим образом:

I^G. Неравенство $z^* F_0 z \geqslant 0$ выполнено для всех $z \in \mathcal{Z}$ таких, что $z^* F z \geqslant 0$ для любого $F \in \mathcal{F}$;

II^G. Существует $F \in \mathcal{F}$ такое, что $F_0 - F \geqslant 0$.

В работе [150] обобщенной S-процедурой названа замена условия I^G условием II^G в случае, когда $\mathcal{F}$ — некоторый выпуклый конус в $\mathbf{HM}^+_\varkappa$. Обобщенная S-процедура неущербна, если эти условия равносильны. В работе [150] доказана следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть выпуклый конус $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию*

$$\{S \in \mathbf{HM}^+_\varkappa \mid \mathrm{tr}(FS) \geqslant 0 \ \ \forall F \in \mathcal{F}\} = \\ = \mathrm{conv}\,\{S \in \mathbf{HM}^\otimes_\varkappa \mid \mathrm{tr}(FS) \geqslant 0 \ \ \forall F \in \mathcal{F}\},$$

тогда обобщенная S-процедура неущербна.

8. S-процедура и лемма Калмана–Попова–Якубовича

Впервые связь S-процедуры и леммы Калмана–Попова–Якубовича была отмечена в [182]. В основе предложенного в этой работе доказательства леммы Калмана–Попова–Якубовича лежит утверждение 7.1.1. Ниже приведен краткий обзор последующих результатов, использующих эту идею для обобщения леммы Калмана–Попова–Якубовича.

8.1. Лемма Калмана–Попова–Якубовича и двойственность Фенхеля

Рассмотрим линейную систему, заданную в неразрешенной относительно производной форме:

$$N \frac{d}{dt} z = M z, \tag{60}$$

где $z \in \mathbf{R}^\varkappa$, $M, N \in \mathbf{M}_{n,\varkappa}$, $\varkappa > n \geqslant 1$. Такая форма представления используется в так называемом поведенческом подходе в теории систем, предложенном Я. Виллемсом [199]. При этом не делается различия между входами и выходами системы, что естественно при исследовании многих систем, описывающих физические процессы.

В частном случае: $N = (I, 0)$, $M = (A, B)$, $I, A \in \mathbf{M}_n$, $B \in \mathbf{M}_{n,m}$, $\varkappa = m + n$, система (60) приобретает стандартный вид (24). В случае, когда $N = (J, 0)$, $J \in \mathbf{M}_n$, $\det J = 0$, (60) представляет так называемую дескрипторную систему, в описании которой наряду с дифферециальными имеются и линейные алгебраические уравнения. Приводимые ниже варианты леммы Калмана–Попова–Якубовича относятся к системам вида (60).

Введем следующее условие на матрицы M, N, обобщающее условие управляемости для систем вида (24).

(C) существуют матрицы $l^{\pm} \in \mathbf{M}_{m,\varkappa}$ такие, что

$$\det \begin{pmatrix} N \\ l^{\pm} \end{pmatrix} \neq 0, \ \mathrm{Sp}\left(M \begin{pmatrix} N \\ l^{\pm} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbf{C}^{\pm}.$$

Как и в разделе 3, выберем матрицу Θ и определим кривую Γ и области $\Omega^{\pm}$. Определим оператор $\Lambda : \mathbf{HM}_{\varkappa} \to \mathbf{HM}_n$ формулой (58), тогда сопряженный оператор имеет вид $\Lambda'(H) = (M^*, N^*)(\Theta^{\top} \otimes H)(M^*, N^*)^*$. В случае когда $N = (I, 0)$, $M = (A, B)$, $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Lambda'(H)$ имеет вид (4), что объясняет введенное в разделе 2 обозначение.

Имеет место следующее утверждение, которое можно назвать расширенной леммой Калмана–Попова–Якубовича для сингулярного случая.

Теорема 19. *Пусть выполнено условие* (C), *тогда для любой матрицы* $G \in \mathbf{HM}_{\varkappa}$ *утверждения* 2 *и* 3 *теоремы* 1, *а также приведенные ниже утверждения равносильны.*

1_c. *При всех* $\lambda \in \Gamma$ $z \in \mathbf{C}^{\varkappa}$, *удовлетворяющих уравнению*

$$(\lambda N - M)z = 0, \tag{61}$$

$$\Lambda_0(zz^*) \geqslant 0, \tag{62}$$

где $\Lambda_0(S) = \mathrm{tr}(GS)$, $S \in \mathbf{HM}_{\varkappa}$.

4. *Неравенство* (62) *выполнено для всех* z, *удовлетворяющих уравнению* $\Lambda(zz^*) = 0$.
5. *Для каждого ограниченного замкнутого выпуклого непустого множества* $\mathcal{D} \subset \mathbf{HM}_n$ *выполнено соотношение двойственности Фенхеля*

$$\inf_{\substack{S \in \mathbf{HM}_{\varkappa}^{+} \\ \Lambda(S) \in \mathcal{D}}} \Lambda_0(S) = \max_{\substack{H \in \mathbf{HM}_n \\ \Lambda'(H) - G \leqslant 0}} \inf_{Q \in \mathcal{D}} \mathrm{tr}(QH).$$

Замечание 1. При выполнении любого из утверждений теоремы 19 существуют матрицы $H^{\pm} \in \mathbf{HM}_n$ такие, что для любой матрицы

$H \in \mathbf{HM}_n$, удовлетворяющей (18), выполнены неравенства (29) и существуют $h^{\pm} \in \mathbf{M}_{m,\varkappa}$ такие, что пары H^+, h^+ и H^-, h^- удовлетворяют (19).

Для того чтобы прояснить связь теоремы с неущербностью S-процедуры, поясним кратко цикл импликаций $2 \Rightarrow 1_c \Rightarrow 4 \Leftrightarrow 2$. Импликация $2 \Rightarrow 1_c$ очевидна. Импликация $1_c \Rightarrow 4$ следует из равенства $\{z \mid \Lambda(zz^*) = 0\} = \mathrm{cl}\{z \mid \exists \lambda \in \Gamma : (\lambda N - M)z = 0\}$. Рассмотрим эквивалентность $4 \Leftrightarrow 2$. Утверждения 4 и 2 суть утверждения I и III S-процедуры для эрмитовых форм (см. параграф 7.2). При этом условие (57) выполнено в силу результата, сформулированного в п. 7.1.2. Условие (iii) выполнено, так как в силу условия (C) $\Lambda(\mathbf{HM}^+_{\varkappa}) = \mathbf{HM}_n$. Таким образом, равносильность утверждений 4 и 2 следует из результата о неущербности S-процедуры, сформулированного в параграфе 7.2.

Более развернутая формулировка приведенного результата, а также расширенный вариант леммы Калмана–Попова–Якубовича в регулярном случае приведены в [28]. В работе [140] получено обобщение указанных результатов на случай, когда z есть элемент гильбертова пространства $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{U}$, $M, N \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}, \mathcal{X})$, $H \in \widehat{\mathcal{B}}$, $h \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}, \mathcal{U})$, $S \in \widehat{\mathcal{C}}_1(\mathcal{Z})$.

8.2. Лемма Калмана–Попова–Якубовича для ограниченного интервала частот

В работе [150] получено обобщение леммы Калмана–Попова–Якубовича для системы (24) на случай, когда частотное условие выполнено на некотором замкнутом интервале мнимой оси. Следуя [149], приведем формулировку обобщения этого результата на случай системы, заданной уравнением (60) и частотного условия, заданного на произвольном замкнутом интервале или замкнутом секторе окружности в комплексной плоскости.

Пусть $\Theta_i \in \mathbf{HM}_2$, $\det \Theta_i < 0$, $i = 1, 2$. Определим соответствующие матрицам Θ_i, $i = 1, 2$, кривые Γ_i, области $\Omega_i^{\pm}$, и операторы Λ_i, используя соотношения (23), (28) и (58).

В регулярном случае лемма Калмана–Попова–Якубовича из [149] может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 20. *Пусть* $\Gamma_1 \cap \Omega_2^+ \neq \varnothing$, *тогда для любой матрицы* $G \in \mathbf{HM}_{\varkappa}$ *равносильны следующие утверждения*:

1_d^+. *Существует* $\delta > 0$ *такое, что при всех* $\lambda \in \Gamma_1 \cap \mathrm{cl}\ \Omega_2^+$, $z \in \mathbf{C}^{\varkappa}$, *удовлетворяющих* (61),

$$z^* G z \geqslant \delta |z|^2;$$

2_a^+. *Существуют матрицы* $H_1, H_2 \in \mathbf{HM}_n$, $H_2 \geqslant 0$, *удовлетворяющие неравенству*

$$\Lambda_1'(H_1) + \Lambda_2'(H_2) - G < 0.$$

Отметим, что это утверждение справедливо для произвольных матриц M, N. При рассмотрении сингулярного случая в [149] на матрицы M, N накладывается ограничение

$$(\mathrm{C}') \qquad \operatorname{rank} N = n, \ \operatorname{rank}(\lambda N - M) = n \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

Можно показать, что условия (C′) и (C) равносильны.

В сингулярном случае, дополняя формулировку леммы Калмана–Попова–Якубовича из [149] результатом, вытекающим из теоремы 19, получим следующее утверждение.

Теорема 21. *Пусть* $\Gamma_1 \cap \Omega_2^+ \neq \varnothing$ *и выполнено условие* (C′), *тогда для любой матрицы* $G \in \mathbf{HM}_\varkappa$ *равносильны следующие утверждения:*

1_c. *При всех* $\lambda \in \Gamma_1 \cap \mathrm{cl}\ \Omega_2^+$, $z \in \mathbf{C}^\varkappa$, *удовлетворяющих* (61), *выполнено* (62).

2_a. *Существуют матрицы* $H_1, H_2 \in \mathbf{HM}_n$, $H_2 \geqslant 0$, *удовлетворяющие неравенству*

$$\Lambda_1'(H_1) + \Lambda_2'(H_2) - G \leqslant 0. \tag{63}$$

3_a. *Для любой матрицы* $H_2 \geqslant 0$, *для которой разрешимо неравенство* (63), *найдутся матрицы* $H_1 \in \mathbf{HM}_n$, $h \in \mathbf{M}_{\varkappa,n}$, *удовлетворяющие уравнению*

$$\Lambda_1'(H_1) + \Lambda_2'(H_2) - G = -h^* h.$$

В работах [148–150] приведены примеры применения описанного в этом разделе обобщения леммы Калмана–Попова–Якубовича в задачах теории управления. Используя подход, изложенный в подразделе 7.2, можно обобщить теоремы 20 и 21 на бесконечномерный случай.

9. Заключение

В процессе работы над очерком авторам пришлось просмотреть и сопоставить между собой большое число статей и книг, связанных с ее темой. Было важно прочитать их заново и часто — впервые, обнаруживая много нового и неожиданного для себя. Удивляло упорство, терпение и мастерство, с которыми В. А. Якубович и многие его последователи находили и решали все новые и новые задачи, которые, на первый взгляд, казались частными случаями или простыми обобщениями уже решенных проблем.

Удивительным образом через несколько лет эти результаты выступали как нужные и важные инструменты, способные проложить пути к следующим новым интересным задачам.

Можно было видеть также, что некоторые из результатов спустя какое-то время повторялись другими авторами, причем не в лучших вариантах. Эти случаи нами также рассматривались как проявление интереса к данной области, который несомненно способствовал привлечению внимания к развитию исследований.

Авторы этой работы и прежде чувствовали актуальность леммы Калмана–Попова–Якубовича, теоремы об S-процедуре и методов, основанных на их использовании. В процессе работы над историческим очерком это чувство окрепло вместе с надеждой, что читатели могут вновь убедиться в том, что поле приложений двух замечательных теорем, в создание которых внес решающий вклад В. А. Якубович, плодородно как и сорок лет назад. Нам представляется, что это — наилучшее из всего, что возможно в математике сказать автору о результатах его труда.

Список литературы

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1983.
2. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задачах минимизации квадратичных функционалов // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 2. — С. 258–261.
4. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в задаче минимизации квадратичного функционала // Elektronische Informationsverarbeitung and Kybernetik. (Berlin). — 1972. — B. 8, H. 6/7. — S. 391–427.
5. *Андреев В. А., Шепелявый А. И.* Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратичного функционала // Elektronische Informationsverarbeitung and Kybernetik. (Berlin). — 1972. — B. 8, H. 8/9. — S. 449–568.
6. *Андреев В. А., Шепелявый А. И.* Синтез оптимальных управлений для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа // Сиб. мат. журн. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 250–276.
7. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания, синхронизации // АиТ. — 2006. — № 10. [1])
8. *Антонов В. Г., Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вест. ЛГУ. Сер. матем., механ., астр. — 1975. — Вып. 1, № 1. — С. 22-31.
9. *Аров Д. З.* Пассивные системы // Сиб. мат. журн. — 1979. — Т. 20, № 2. — С. 211–228.
10. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1974.
11. *Барабанов Н. Е.* Квадратичная стабилизация линейных динамических систем // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т. 37, № 1. — С. 1–16.
12. *Барабанов А. Е.* Факторизация матричных полиномов с ограничением на степени// АиТ. — 1997. — № 3. — С. 86–100.
13. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Лихтарников А. Л., Матвеев А. С., Смирнова В. Б., Фрадков А. Л.* Частотная теорема (лемма

[1]) См. также настоящий сборник, с. 452.

Якубовича–Калмана) в теории управления // АиТ. — 1996. — № 10. — С. 3–40.

14. *Барсук Л. О., Брусин В. А.* Обобщение леммы Калмана–Якубовича на случай ограниченных операторов в гильбертовых пространствах // Динамика систем, Межвуз. сб. Горький, 1975. — Вып.8. — С. 3-12.
15. *Барсук Л. О., Брусин В. А.* Исследование нелинейных распределенных систем при выполнении предельного неравенства, I // Динамика систем, Межвуз. сб. Горький, 1976. — Вып.9. — С. 3-14.
16. *Бенсусан А., Лионс Ж.-Л.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства. — М.: Наука, 1987.
17. *Бондарко В. А., Лихтарников А. Л., Фрадков А. Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 95–103.
18. *Брусин В. А.* О существовании глобальных функционалов Ляпунова для нелинейных распределенных систем // Динамика систем. Межвуз. сб. Горький, 1975. — Вып.7. — С. 18-34.
19. *Брусин В. А.* Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их разрешимость // Прикл. мат. и механика. — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 947-955.
20. *Брусин В. А.* Существование глобального функционала Ляпунова для некоторых классов нелинейных распределенных систем // Прикл. мат. и механика. — 1976. — Т. 40, № 6. — С. 1135-1142.
21. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
22. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
23. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем // Тр. II Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. — М.: Наука, 1965.
24. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Физматгиз, 1978.
25. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // АиТ. — 2006. — № 10. [1)]
26. *Георгиевский В. Г., Левит М. В., Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных регулируемых системах // АиТ. — 1972. — № 2.
27. *Гусев С. В.* Структура полуопределенных решений однородного обобщенного уравнения Ляпунова и частотная теорема в гильбертовом пространстве // Вест. СПбГу. Сер. 1. — 2005. — Вып. 3. — С. 16–23.
28. Гусев С. В. Двойственность Фенхеля, S-процедура и лемма Якубовича–Калмана // АиТ. — 2006. — № 2. — С. 135–153.
29. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. — М.: Наука, 1981.
30. *Дмитриев Ю. А.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с одним импульсным регулятором // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 3. — С. 511–514.

[1)] См. также настоящий сборник, с. 155.

31. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980.
32. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О плюс-операторах в пространствах с индефинитной метрикой // Мат. исследования. — 1966. — Т. 1, № 1. — С. 131–161.
33. *Лакс П., Филлипс Р.* Теория рассеяния. — М.: Мир, 1971.
34. *Левит М. В., Чурилов А. Н.* Об оценках некоторых функционалов от решений матричных неравенств, встречающихся в теории управления // Изв. вузов. Математика. — 1983. — № 5. — С. 53–59.
35. *Либерзон М. Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // АиТ. — 2006. — № 10. [1)]
36. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.
37. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. — М.: Наука, 1987.
38. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
39. Лихтарников А. Л. Критерий абсолютной устойчивости нелинейных операторных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — № 5. — С. 1064-1083.
40. Лихтарников А. Л., Пономаренко В. И., Якубович В. А., Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вест. ЛГУ. Сер. матем., механ., астр. — 1976. — Вып. 4, № 19. — С. 69-76.
41. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1069-1085.
42. Лихтарников А. Л., Якубович В. А. Частотная теорема для однопараметрических полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — № 4. — С. 895-911.
43. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Дихотомия и устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, № 6. — С. 132-155.
44. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.–Л.: Гостехиздат. 1951.
45. *Лурье А. И., Постников В. Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ 1944. Т.8. — С. 246–248.
46. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
47. *Малкин И. Г.* К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ 1951. Т.15. — С. 59–66.
48. *Матвеев А. С.* О выпуклости образов квадратичных отображений // Алгебра и анализ. — 1998. — Т. 10, № 2. — С. 159–196. [2)]

[1)] См. также настоящий сборник, с. 176.

[2)] См. также настоящий сборник, с. 534.

49. *Матвеев А.С.* Теория оптимального управления в работах В.А. Якубовича // АиТ. — 2006. — № 10.
50. *Матвеев А.С.* Лагранжева двойственность в теории невыпуклой оптимизации и модификации теоремы Теплица–Хаусдорфа // Алгебра и анализ. — 1995. — Т. 7, Вып.5. — С. 143–181.
51. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Невыпуклые задачи глобальной оптимизации // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, Вып.6. — С. 110–142.
52. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Невыпуклые задачи глобальной оптимизации в теории управления // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения», 1998. — Т. 60, С. 128–175.
53. *Нудельман А.А., Шварцман П.А.* О существовании решений некоторых операторных уравнений // Сиб. мат. журн. — 1975. — Т. 16, № 3. — С. 562-571.
54. *Пакшин П.В., Угриновский В.А.* Стохастические задачи абсолютной устойчивости // АиТ. — 2006. — № 10. [1])
55. *Поляк Б.Т.* Локальное программирование // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 2001. — Т.41, № 9. — С. 1324–1331.
56. *Попов В.М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // АиТ. — 1961. — Т. 22, № 8. — 961–979.
57. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970.
58. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
59. *Фрадков А.Л.* Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // Сиб. мат. журн. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 355–383.
60. *Фрадков А.Л., Якубович В.А.* S-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1973. — № 1. — С. 71–76.
61. *Чурилов А.Н.* О решериях квадратичного матричного уравнения / Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1978. — Вып. 2. — С. 24–33.
62. *Чурилов А.Н.* Частотная теорема и уравнение Лурье // Сиб. мат. журн. — 1979. — Т. 20, № 4. — С. 854–868.
63. *Чурилов А.Н.* О разрешимости некоторых матричных неравенств // Вест. Ленингр. ун-та. — 1980. — № 7. — С. 51–55.
64. *Чурилов А.Н.* О разрешимости матричных неравенств // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 5. — С. 725–732.
65. *Чурилов А.Н.* Экстремальные решения обобщенных неравенств Лурье // Нелинейные колебания и теория управления. — Устинов: Изд-во Удмуртского ун-та, 1985. — С. 11–19.
66. *Чурилов А.Н.* Замечание о лемме Калмана–Сегё // АиТ. — 1986. — № 9. — С. 168–169.
67. *Чурилов А.Н.* О решениях квадратичного матричного уравнения, встречающегося при исследовании дискретных систем управления // Изв. вузов. Математика. — 1986. — № 11. — С. 59–65.

[1]) См. также настоящий сборник, с. 243.

68. *Шепелявый А. И.* О качественном исследовании устойчивости в целом и неустойчивости для одного класса амплитудно-импульсных систем // ДАН СССР. — 1970. — Т. 190, № 5. — С. 1044–1047.
69. *Шишкин С. Л.* Задача проектирования точки на квадратичную поверхность и новое доказательство неущербности S-процедуры // Вест. ЛГУ. — 1990. — № 4. — С. 72–74.
70. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
71. *Фрадков А. Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АиТ. — 1974. — № 12. — С. 96–103.
72. *Цыкунов А. М.* Адаптивное управление объектами с последействием. — М.: Наука, 1984.
73. *Якубович В. А.* Универсальный регулятор для оптимального гашения вынужденных стохастических колебаний в линейной системе // ДАН. — 1994. — Т. 338, № 1. — С. 19–24.
74. *Якубович В. А.* Универсальные регуляторы в стохастических задачах оптимального управления линейными стационарными объектами // АиТ. — 1997. — № 6. — С. 170–182.
75. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
76. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования в критических случаях. I–III // АиТ. — 1963. — Т. 24, № 3. — С. 293–302; 1963. — Т.24, № 6. — С. 717–731; 1964. — Т.25, № 5. — С. 601–612.
77. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // Тр. Межвуз. конф. по прикл. теории устойчив. и аналит. механике. Казань, 1962. Изд-во Казан. авиац. ин-та, 1964. — С. 135–142.
78. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 2. — С. 288–291.
79. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // АиТ. — 1964. — Т. 25, № 7. — С. 1017–1029.
80. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II. Абсолютная устойчивость в классе нелинейностей с условием на производную. // АиТ. — 1965. — Т.26, № 4. — С. 577–599.
81. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // АиТ. — 1965. — Т. 26, № 5. — С. 763–768.
82. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем с одной дифференцируемой нелинейностью // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 2. — С. 298–301.

83. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими нелинейностями // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 533–536.
84. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — Т. 23, № 6. — С. 5–30.
85. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I–II // АиТ. — 1967. — Т. 28, № 9. — С. 59–72; 1968. — № 2. — С. 81–101
86. *Якубович В. А.* Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // ДАН СССР. — 1968. — Т. 180, № 2. — С. 283–294.
87. *Якубович В. А.* Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений, для которых вопросы об устойчивости в целом и о неустойчивости могут быть решены эффективно // ДАН СССР. — 1969. — Т. 186, № 5. — С. 1027–1030.
88. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I // АиТ. — 1970. — № 12. — С. 5–14.
89. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II // АиТ. — 1971. — № 6. — С. 25–33.
90. *Якубович В. А.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости при некоторых видах квадратичных ограничений // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 2. — С. 312–315.
91. *Якубович В. А.* Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия в квадратичном критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 5. — С. 1033–1042.
92. *Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. мат. журн. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 1100–1129.
93. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 384–419.
94. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости / Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р. А.Нелепина. — М.: Наука, 1975. — С. 74–180.
95. *Якубович В. А.* Частотная теорема для случая, когда пространство состояний и управлений гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления. I, II // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 639–668; 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1083–1102.
96. *Якубович В. А.* Об одном методе решения специальных задач глобальной минимизации // Вест. СПбГУ. Сер.1. — 1992. — Вып. 2, № 8. — С. 58–68.
97. *Якубович В. А.* Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. — 1957. — Т. 117, № 1. — С. 44–46.
98. *Якубович В. А.* О нелинейных дифференциальных уравнениях системы автоматического регулирования с одним регулирующим органом // Вест. ЛГУ. — 1960. — № 7, Вып. 2. — С. 120–153.
99. *Якубович В. А.* Решение одной алгебраической задачи, встречающейся в теории управления // ДАН СССР. — 1970. — Т. 193, № 1. — С. 57–60.

100. *Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195, № 2. — С. 296–299.
101. *Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре на конечном интервале времени с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 3. — С. 548–551.
102. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования // ДАН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 278–281.
103. *Якубович В. А.* S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник ЛГУ. Серия Математика, механика, астрономия. — 1971. — № 1. — С. 62–77.
104. *Abou-Kandil, H., Freiling, G., Ionescu, V., Jank, G.* Matrix Riccati Equations in Control and Systems Theory / Series: Syst. & Control: Foundations & Applications. — A Birkhauser book, 2003.
105. *D'Amato F.J., Megretski A., Jonson U.T., Rotea M.A.* Integral Quadratic Constrains for Monotonic and Slope-Restricted Diagonal Operators // Proc. Amer. Control Conf. (San Diego) 1999. — P. 2375–2379.
106. *Anderson B.D.O.* A system theorey criterion for positive real matrices // SIAM J. Control. — 1967. — V. 5, № 5. — P. 171–182.
107. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Algebraic structure of generalized positive real matrices // SIAM J. Control. — 1968. — V. 6, № 4. — P. 615–624.
108. *Anderson B.D.O., Vongpanitlerd S.* Network Analisys. — Englewoods Cliffs. NJ: Printice-Hall. 1973.
109. *Arov D. Z., Kaashoek M. A., Pik D. R.* The Kalman-Yakubovich-Popov inequality for discrete time systems of infinite dimension // J. Oper. Theory. 2006.
110. *Arov D.Z., Nudelman M.A.* Passive linear stationary dynamical scatteringsistems with continuos time // Integ. Equat. Oper. Theory. — 1996. — V. 24. — P. 1–45.
111. *Arov D. Z., Staffans O. J.* The infinite-dimensional continuous time Kalman-Yakubovich-Popov inequality // Oper. Theory: Advanc. and Appl. 2005. 1. — Birkhauser Verlag Basel. — P. 1–28.
112. *Arov D.Z., Staffans O.J.* The Infinite-Dimentional Continuous Kalman-Yakubovich-Popov Inequality (for Scattering Rate) // Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control — Europ. Control Conf. 2005. — P. 5947–5952.
113. *Balakrishnan V., Vandenberghe L.* Semidefinite Programmind Duality and Liner Time-Invariant Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2003. — V. 48, № 1. — P. 30–41.
114. *Barabanov A.E.* Canonical matrix factorization and polynomial Riccati equations// Europ. J. Control. — 1997. — № 1. — P. 47–67.
115. *Barabanov N.E., Ortega R.* On the stability of Extended Riccati equations // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2004. — V. 49, № 4. — P. 598–602.
116. Barbu V., Lasiecka I., Triggiani R. Extended algebraic Riccati equation in the abstract hyperbolic case // Nonlinear. Anal. — 2000. — V. 40. — P. 105-129.

117. *Barvinok A.I.* Problems of distance geometry and convex properties of quadratic maps // Discrete Comput. Geom. — 1995. — V. 13. — P. 189–202.
118. *Ben-Tal A., Teboulle M.* Hidden convexity in some nonconvex quadratically constrained quadratic-programming // Math. Program. — 1996. — V. 72, № 1. — P. 51–63.
119. *Brickman L.* On the Field of Values of a Matrix // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961, № 12. — P. 61–66.
120. *Bucci F.* The non-standard LQR problem for boundary control systems // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. — 1998. — 56(4). — P. 105–114.
121. *Bucci F.* Frequency domain stability of nonlinear feedback systems with unbounded input operator // Dynam. Contin., Discrete Impulsive Syst. — 2000. — 7. — P. 351–368.
122. *Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.* Passivity feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1991. — V. AC-36. — P. 1228-1240.
123. *Chilali M., Gahinet P.* H^∞ Design with pole placement constraints: An LMI approach // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1996. — V. 41, № 3. — P. 358–367.
124. *Clements D.J.* A state space approach to indefinite spectral factorization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2000. — V. 21, № 3. — P. 743–767.
125. *Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L.* Trust-Region Methods / MPS-SIAM series on optimization. SIAM, 2000.
126. *Curtain R. F.* The Kalman-Yakubovich-Popov Lemma for Pritchard-Salamon systems // Syst. Control Lett. — 1996. — V. 27. — P. 67–72.
127. Curtain, R.F. Old and new perspectives on the positive-real-lemma in systems and control theory // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. — 1999. — V. 79. — P. 579–590.
128. *Curtain R. F., Oostveen J. C.* The Popov criterion for strongly stable distributed parameter systems // Int. J. Control. — 2001. — 74(3). — P. 265–280.
129. *Dines L.* On the mapping of quadratic forms // Bull.Amer.Math. Soc. — 1944. — V. 17. — P. 494–498.
130. *P. Faurre* Identification par minimization d'une representation markovienne de processus aleatoire // Lecture Notes in Math. V. 132. — Berlin-Heidelberg-New York. Springer-Verlag. 1970.
131. *P. Faurre, M. Clerget, and F. Germain.* Operateurs Rationnels Positifs // Dunod. Paris. 1979.
132. *Finsler P.* Uber das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen // Comment Math. Helv. — 1936/37. — V. 9. — P. 188–192.
133. *Flandoli F.* Riccati equations arising in a boundary control problem with distributed parameters // SIAM J. on Control Optim. — 1984. — V. 22. — P. 76–86.
134. *Flippo O.E., Jansen B.* Duality and sensitivity in nonconvex quadratic optimization over an ellipsoid // Europ. J. Oper. Res. — 1996. — V. 94, № 1. — P. 167–178.
135. *Fradkov A.L.* Conic S-procedure and Constrained Dissipativity // ArXiv:math.OC/0509718. 2005. — P. 1–4.

136. *Fradkov A.L., Polushin I.G.* Quasidissipative Systems with One or Several Supply Rates // Proc. Europ. Contr. Conf, 1997.
137. *Freiling G., Mehrmann V., Xu H.* Existence, uniqueness, and parametrization of lagrangian invariant subspaces // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2002. — V. 23, № 4. — P. 1045–1069.
138. *Gahinet P.* Explicit controller formulas for LMI-based H^∞ synthesis // Proc. Amer. Control Conf. Baltimore, 1994. — P. 2396–2400.
139. *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H^∞ control // Int. J. Robust Nonlinear Contr. — 1994. — V. 4. — P. 421–448.
140. Gusev S.V. Extended Kalman-Yakubovich-Popov Lemma in a Hilbert Space and Fenchel Duality// Proc 44 IEEE Conf. on Decision and Control and ECC'05, 2005. — P. 1565–1570.
141. *Hausdorff F.* Der wertvorrat einer bilinearform // Math. Z. — 1919. — V. 3. — P. 314–316.
142. *Helton J. W.* A specral factorization approach to the distributed stable regulator problem; the algebraic Riccati equation // SIAM J. Control and Optim. — 1976. — V. 14. — P. 639–661.
143. *Hill D. J.* Dissipative nonlinear systems: Basic properties and Stability analysis // Proc. 31st IEEE Conf. Decision and Control, 1992. V. 4. — P. 3259–3264.
144. *Hill D. J., Moylan P.J.* Stability of nonlinear dissipative systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1976. — V. AC-21. — P. 708–711.
145. *Hill D. J., Moylan P. J.* Dissipative dynamic systems: basic Input-Output and State properties // J. Franklin Inst. — 1980. — V. 309, № 5. — P. 327–357.
146. *Hiriart-Urruty J.-B., Torki M.* Permanently Goimg Back and Forth between the «Quadratic World» and the «Comvexity World» in Optimization // Appl. Math. Optim. — 2002. — V. 45. — P. 169–184.
147. *Ionescu V., Oara C.* Generalized Continuous-time Riccati Theory // Linear Algebra Appl. — 1996. — V. 232. — P. 111–130.
148. *Iwasaki T., Hara S., Fradkov A.L.* Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges // Syst. and Control Lett. — 2005. — V. 54, № 6. — P. 681–691.
149. *Iwasaki T., Hara S.* Generalized KYP Lemma: Unified Frequency Domain Inequalities With Design Applications // IEEE Trans. Automat. Control. — 2005. — V. 50, № 1. — P. 41–59.
150. *Iwasaki T., Meinsma G., Fu M.* Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma // Math. Prob. Eng. — 2000. — V. 6. — P. 305–320.
151. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, segunda serie. — 1960. — V. 5, № 1. — P. 102–119.
152. *Kalman R. E.* Lyapunov Functions For The Problem Of Lur'e In Automatic Control // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1963. — V. 49. — P. 201–205.
153. *Lancaster P., Rodman L.* Existence and uniqueness theorems for the algebraic Riccati equation // Research Paper № 421. Department of mathematics and statistics. The University of Calgary. 1979.
154. *Lancaster P., Rodman L.* Existence and uniqueness theorems for the algebraic Riccati equation // Int. J.Control. — 1980. — V. 32, № 2. — P. 285–310.

155. *Lancaster P., Rodman L.* Algebraic Riccati Equations // The Clarendon Press, Oxford University Press. New York. 1995.
156. *Lasiecka I. and Triggiani R.* Algebraic Riccati equations arising in boundary point control: A review of theoretical and numerical results / Perspective in control theory. eds. Jacubczyk B., Malanovsky K., Raspondek W. — Birkhauser, Boston. 1990. Part 1: Continuous case. — P. 175–210. Part 2: Approximation theory. — P. 211–235.
157. *Lasiecka I., Lukas D., Pandolfi L.* Input dynamics and nonstandard Riccati equation with applications to boundary control of damped wave and plate equations // J. Optim. Theory Appl. — 1995. — 84 (3). — P. 549–574.
158. *Lefschetz S.* Stability of Nonlinear Control Systems. — New-York–London: Academic Press. 1965.
159. *Lindquist A., Picci G.* A geometric approach to modelling and estimation of linear stochastic systems // J. Math. Syst., Estimation and Control. — 1991. — № 1. — P. 241–333.
160. *Louis J. Cl., Wexler D.* The Hilbert space regulator problem and operator Riccati equation under stabilizability // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. — 1991. — Ser. 1. V. 105. — P. 137–165.
161. *Malinen J.* Discrete time algebraic Riccati equation. Techn. Report A 428. Institute of Mathematics. Helsinki University. Finland. 2000.
162. *Matveev A.S.* Spectral approach to duality in nonconvex global optimization // SIAM J. Control and Optim. — 1998. — V. 36, № 6. — P. 1217–1243.
163. *Megretski A., Khammash M.* Lagrange Multipliers Method in Robust Control: the l^1-setting // Proc. Amer. Contr. Conf. Baltimore, 1994. — P. 3171–3175.
164. *Megretski A., Rantzer A.* System Analysis via Integral Quadratic Constraints // IEEE Tr. Automat. Contr. — 1997. — V. 42, № 6. — P. 819–830.
165. *Megretsky A., Treil S.* S-procedure and Power Distributions Inequalities: a New method in Optimization and Robustness of Uncertain Systems // Mittag-Leffler institute. Report № 1. 1991.
166. *Megretsky A., Treil S.* Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems // Math. Syst. Estimation Control. — 1993. — V. 3. — P. 301–319.
167. *Meyer K.R.* Liapunov function for the problem of Lur'e // Proc.N.A.S. USA. — 1965. — V. 53. — P. 501–503.
168. *Molinari B.P.* The stabilizing solution of the algebraic Riccati equation // SIAM J. Control. — 1973. — V. 11, № 2. — P. 262–271.
169. *Molinari B.* Conditions on nonpositive solutions of the linear matrix inequality // IEEE Tr. Automat. Contr. — 1975. — V. 20, № 12. — P. 804–806.
170. *Monopoli R.V.* Kalman–Yakubovich lemma in adaptive control systems design // IEEE Trans. Automat. Control. — 1973. — № 5. — P. 526–529.
171. *Ostrovwski A., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. Appl. — 1962. — V. 4. — P. 72–84.
172. Pandolfi L. The Kalman-Popov-Yakubovich Theorem: an overview and new results for hyperbolic control systems // Nonlinear Analsis, Methods Appl. — 1997. — V. 30(2). — P. 735–745.

173. *Pandolfi L.* Dissipativity and Lur'e problem for parabolic boundary control systems // SIAM J. Control Optim. — 1998. — V. 36. — P. 2061–2081.
174. *Pandolfi L.* The Kalman-Yakubovich-Popov Theorem for stabilizable hyperbolic boundary control systems // Integral Equations Oper. Theory. — 1999. — V. 34. — P. 478–493.
175. *Pandolfi L.* Recent results on the Kalman-Popov-Yakubovich problem // Proc. Int. Conf. on Math. Appl. Yagyarta. 1999.
176. *Pandolfi L.* Factoization of the Popov function of a multivariable linear distributed parameter system in the non-coercive case: a penalization approach // Int.J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2001. — V. 11, № 6. — P. 1249–1260.
177. *Parks P.C.* Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1966. — № 3. — P. 362–367.
178. *Polik I., Terlaky T.* A survey of the S-lemma // http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2004/10/968.html
179. *Polyak B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optim. Theory Appl. — 1998. — V. 99, № 3. — P. 553–583.
180. *Popov V.M.* Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Rev. Roum. Sci.Tech. - Electrotech. et Energ. — 1964. — V. 9, № 4. — P. 629–890.
181. *Proskurnikov A.V.* On infinite dimensional Kalman-Yakubovich lemma for the case of non-strict inequalities// Proc. 11th Baltic Olympiad Automat. Control. St.Petersburg. 2006.
182. *Rantzer A.* On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma // Syst. Contr. Lett. — 1996. — V. 28. — P. 7–10.
183. Recent mathematical development in control / Ed. Bell D.J. — London: Acad. Press, 1973.
184. *Savkin A.V., Petersen R.* Nonlinear versus Linear Control in the Absolute Stability of Uncertain Systems with Structured Uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1995. — V. 40, № 1. — P. 122–127.
185. *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Muliobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1997. — V. 42, № 7. — P. 896–911.
186. *Seron M. M., Hill D. J., Fradkov A. L.* Nonlinear adaptive control of feedback passive systems // Automatica. — 1995. — V. 31, № 7. — P. 1053-1060.
187. *Stern R.J., Wolkowicz H.* Indefinite trust region subproblems and nonsymmetric eigenvalue perturbations // SIAM J. Optim. — 1995. — V. 5, № 2. — P. 286–313.
188. *Stoica P., McKelvey T., Mari J.* MA Estimation in Polynomial Time // IEEE Trans. Signal Proc. — 2000. — V. 48, № 7. — P. 1999–2012.
189. *De Souza C.E., Xie L.* On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback H^∞ controllers // Syst. and Control Lett. — 1992. — V. 18. — P. 61–71.
190. *Szego G., Kalman R.* Sur la stabilitié absolute d'un systéme d'equations aux differences finies // Comput. Rendus Acad. Sc. — Paris, 1963. — V. 257. — P. 388–390.

191. The Riccati Equation / Eds: S. Bittanti, A. Laub, J.C. Willems. — Berlin: Springer, 1991.
192. *Triggiani R.* An optimal control problem with unbounded control operator and unbounded observation operator where the algebraic Riccati equation is satisfied as a Lyapunov equation // Appl. Math. Lett. — 1997. — 10 (2). — P. 95–102.
193. *Van Keulen B.* Equivalent conditions for the solvability of the non-standart LQ-problem for Pritchard-Salamon systems // J. Control Optim. — 1995. — V. 33. — P. 1326–1356.
194. *Wang P.K.C.* Theory of stability and control for distributed parameter systems (bibliography) // Int. J. Control. — 1968. — V. 7. — P. 101–106.
195. *Wang P.K.C., Janos W.A.* A control-teoretic approach to the plasma confinement problem // J. Optim. Theory Appl. — 1970. — V. 5, № 1–6. — P. 313–329.
196. *Willems J. C.* Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — V. 16, № 6. — P. 621–634.
197. *Willems J.C.* On the existance of nonpositive solution to the Riccati equation // IEEE Tr. Automat. Contr. — 1974. — V. 19, № 10. — P. 592–593.
198. *Willems J. C.* Dissipative dynamic systems. Part I. General theory // Archive rational Mechanics Anal. — 1972. — V. 45. 3 5. — P. 321–393.
199. *Willems J.C.* Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1991. — V. 39. — P. 259–294.
200. *Yakubovich V.A., Leonov G. A. and Gelig A. Kh.* Stability Of Stationary Sets In Control Systems With Discontinuous Nonlinearities. Series on Stability, Vibration and Control of Systems. Ser. A. V. 14. — World Scientific Publishing, 2004.
201. *Yakubovich V.A.* Nonconvex optimization problem: The infinite-horizon linear quadratic control problem with quadratic constraints // Syst. Control Lett. — 1992. — V. 19. — P. 13–22.

Б. Т. Поляк[†], *П. С. Щербаков*[†]

Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств[*]

Аннотация: в развитие теории линейных матричных неравенств предлагается метод определения всех областей в пространстве параметров, внутри которых аффинное семейство симметричных матриц имеет фиксированное количество собственных значений одного знака. Подход

[†]) Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова.

[*]) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №05-01-00114 и 05-08-01177, а также Комплексной программы 22 Президиума РАН «Процессы управления». Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 11. — С. 159–174.

основан на идеях D-разбиения и особенно эффективен в задачах с малым числом параметров. Рассматриваются обобщения метода и его модификации на задачи с неопределенностью.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается следующая задача. Найти области в пространстве параметров $x \in \mathbb{R}^\ell$, внутри которых матрица

$$A(x) \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \qquad A_i \in \mathbb{S}^{n\times n}, \tag{1}$$

имеет фиксированное число отрицательных собственных значений; здесь $\mathbb{S}^{n\times n}$ означает пространство вещественных симметричных $n \times n$ матриц.

Частный случай такой задачи — отыскание точки x, в которой линейная комбинация симметричных матриц отрицательно определена, — это хорошо известная задача допустимости линейного матричного неравенства (ЛМН; в англоязычной литературе общепринята аббревиатура LMI) $A(x) \leqslant 0$. Первое применение ЛМН в теории управления принадлежит А. М. Ляпунову: он установил, что устойчивость системы $\dot{x} = Ax$ эквивалентна разрешимости ЛМН $A^{\mathrm{T}}P + PA < 0$, $P > 0$, где матрица P определяет квадратичную функцию Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$. Сам термин «матричные неравенства» был введен в обиход В. А. Якубовичем [4] в 1962 г. применительно к задачам абсолютной устойчивости; впоследствии этот аппарат был развит им в ряде других работ (см., например, [2–4]). Роль В. А. Якубовича в создании теории ЛМН общепризнана; так, в [10] говорится: «Справедливо будет сказать, что Якубович является отцом этого направления, а дедушкой — Ляпунов».

Со временем линейные матричные неравенства оказались весьма общим и плодотворным аппаратом исследования задач оптимизации, теории управления и теории систем. Так, в [10] было показано, что многие классические и новые проблемы в указанных областях могут быть сформулированы в терминах линейных матричных неравенств и эффективно решены с помощью методов выпуклого программирования.

Важным шагом в развитии теории послужило простое соображение о том, что линейные матричные неравенства могут быть записаны в виде задач выпуклой оптимизации [18], после чего для решения остается применить к ним тот или иной численный метод. Первые систематические исследования численных реализаций алгоритмов ЛМН также были проведены Е. С. Пятницким и соавторами; в частности, они предложили специальный вариант метода эллипсоидов.

Начиная с середины 80-х годов стали появляться работы А. С. Немировского и Ю. В. Нестерова, в которых были разработаны эффективные процедуры выпуклой оптимизации, в основе которых лежат методы внутренней точки [15]. При этом была доказана невысокая вычислительная сложность предлагаемых процедур. Эти методы и их модификации стали с успехом применяться к решению различных задач ЛМН, и со временем в теории систем сформировался стандарт, согласно которому задача считается решенной, если она сведена к формату линейных матричных неравенств. К середине 90-х годов теория и методы линейных матричных неравенств выделились в самостоятельную дисциплину. Что касается использования аппарата ЛМН в управлении, то следует отметить книгу [1] (единственную на русском языке), в которой приводятся последние результаты по применению линейных матричных неравенств для синтеза законов управления.

К настоящему времени эта область развита очень полно также и в прикладном аспекте: имеются мощные пакеты решателей и удобные интерфейсы; среди наиболее популярных следует отметить LMILab, SeDuMi, Yalmip (см., например, [3]). В то же время, как теоретические обоснования, так и сами численные процедуры решения не лишены ограничений. Так, теория линейных матричных неравенств не предполагает описания всего допустимого множества и тем более других областей постоянства сигнатуры; задачи с неопределенностями в модели также не всегда поддаются эффективному решению.

Прежде всего в данной работе ставится цель не только описать *целиком* допустимое множество $\{x \in \mathbb{R}^\ell \colon A(x) \leqslant 0\}$, но и характеризовать *все* области в пространстве параметров, внутри которых матрица $A(x)$ имеет постоянную сигнатуру. Эта цель достигается с помощью техники, известной как D-разбиение [2], исходно разработанной для исследования устойчивости скалярных систем, и ее модификации на случай симметричных матриц. При этом для малого числа параметров, $\ell = 2$, области легко изображаются графически на плоскости. Полное описание допустимого множества позволяет по-новому ставить и решать задачи полуопределенного программирования, а определение других областей с фиксированным числом отрицательных собственных значений очень важно для проверки условий применимости обобщенной S-процедуры (см. [8, с. 312]). Кроме того, появляется возможность сравнительно легко решать матричные неравенства при наличии неопределенности в матричных коэффициентах. Помимо других возможных приложений предлагаемый подход представляет общетеоретический интерес.

Отметим, что техника D-разбиения впервые была использована в матричном варианте в [13] применительно к устойчивости аффинной комбинации вещественных матриц общего вида; в этой задаче методами D-разбиения полностью удается исследовать лишь случай одного вещественного или комплексного параметра.

2. Построение областей D-разбиения

2.1. Скалярный случай

Прежде всего рассмотрим случай одного параметра, $\ell = 1$ в (1):

$$A(x) \;=\; A + xB, \qquad A, B \in \mathbb{S}^{n\times n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Требуется определить отрезки постоянства сигнатуры матрицы $A(x)$ на оси параметра x:

$$D_m \;=\; \{x \in \mathbb{R}\colon\ A(x) \ \text{ имеет ровно } m \ \text{ отрицательных собственных значений}\}.$$

Основные идеи предлагаемого подхода видны на этом простейшем скалярном случае.

Пусть при некотором вещественном x^0 симметричная матрица $A(x) = A + x^0 B$ невырождена и имеет m отрицательных и $n - m$ положительных собственных значений. Изменение количества собственных значений одного знака при изменении x возможно лишь при переходе одного (или нескольких) из них через нуль, т. е. если $\det(A + xB) = 0$ при некотором $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что найдется такой ненулевой вектор e, что $(A + xB)e = 0$, т. е. $Ae = -xBe$; иначе говоря, x является обобщенным собственным значением пары матриц A и $-B$, а e — соответствующий ему обобщенный собственный вектор. Таким образом, процедура отыскания границ (точек) D-разбиения в скалярном случае сводится к нахождению всех вещественных обобщенных собственных значений: $\mathtt{eig}\,(A, -B) \in \mathbb{R}$.

Видно, что максимальное число областей (отрезков на оси x) равно $n + 1$, ибо уравнение $\det(A + xB) = 0$ имеет не более n вещественных решений. С другой стороны, решений может не существовать вовсе; в этом случае D-разбиение состоит из одной области: матрица $A + xB$ имеет постоянное количество отрицательных собственных значений при всех x.

В общем случае несимметричных матриц изменение числа устойчивых собственных значений происходит при пересечении ими мнимой оси, в результате чего появляется дополнительный параметр — частота. Поэтому возможности графического изображения областей D-разбиения ограничиваются случаем одного свободного вещественного или комплексного параметра (см. [13]), а двухпараметрические семейства удается исследовать лишь для некоторых специальных типов матриц.

Область устойчивости D_n. Особый интерес представляет описание области устойчивости D_n семейства; иногда будем называть ее *допустимой областью* D_{feas}. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $A, B \in \mathbb{S}^{n\times n}$ *и* B *невырождена. Пусть* λ_i, e_i, $i = 1,\ldots$ $\ldots, n$, *— обобщенные собственные значения и соответствующие им обобщенные собственные векторы пары матриц* $(A, -B)$. *Тогда*

1. *Если среди* λ_i *есть комплексные, то* D_n *пусто.*
2. *Если все* λ_i *вещественные, то обозначим*

$$\underline{x} \;=\; \begin{cases} \max\limits_{i\in I_-} \lambda_i, & I_- \doteq \{i\colon\ (Be_i, e_i) < 0\} \neq \varnothing; \\ -\infty, & I_- = \varnothing; \end{cases}$$

и

$$\overline{x} \;=\; \begin{cases} \min\limits_{i\in I_+} \lambda_i, & I_+ \doteq \{i\colon\ (Be_i, e_i) > 0\} \neq \varnothing; \\ +\infty, & I_+ = \varnothing. \end{cases}$$

Тогда

$$D_n \;=\; \begin{cases} (\underline{x}, \overline{x}), & \textit{если} \quad \underline{x} < \overline{x}; \\ \varnothing, & \textit{если} \quad \underline{x} \geqslant \overline{x}. \end{cases}$$

Если известно, что $A < 0$, то приведенные формулы принимают вид

$$\underline{x} \;=\; \begin{cases} \max\limits_{\lambda_i<0} \lambda_i, \\ -\infty, & \text{если} \quad \text{все} \quad \lambda_i > 0; \end{cases} \tag{2}$$

и

$$\overline{x} \;=\; \begin{cases} \min\limits_{\lambda_i>0} \lambda_i, \\ +\infty, & \text{если} \quad \text{все} \quad \lambda_i < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство леммы 1. По существу этот результат имеется в [17] (см. утверждение 3.1); для полноты изложения приведем кратко лишь идею доказательства. Пусть все λ_i вещественны и различны, тогда $(Be_i, e_j) = 0$ для $i \neq j$, так что всякий $v \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде $v = \sum_i \alpha_i e_i$ с некоторыми $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Нетрудно получить выражение $\big((A + xB)v, v\big) = \sum_i \alpha_i^2 (Be_i, e_i)(x - \lambda_i)$, поэтому функция $f(x) = \sum_i \alpha_i^2 (Be_i, e_i)(x - \lambda_i)$ отрицательна при всех α_i лишь для значений x, удовлетворяющих $\max\limits_{i:(Be_i,e_i)<0} \lambda_i < x < \min\limits_{i:(Be_i,e_i)>0} \lambda_i$. $\square$

2.2. Два параметра

Перейдем к задаче с двумя параметрами:

$$A(x) \;=\; A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \qquad A_i \in \mathbb{S}^{n\times n}, \qquad i = 0, 1, 2.$$

Пусть одна из матриц A_1, A_2, например A_2, невырождена. Зафиксируем x_1 и обозначим $A = \overline{A}(x_1) \doteq A_0 + x_1 A_1$ и $B \doteq A_2$. Тогда находимся в условиях предыдущего раздела, и критические значения параметра x_2 при данном x_1 находятся как вещественные обобщенные собственные значения $x_2(x_1) = \mathtt{eig}\,\big(\overline{A}(x_1), -B\big)$. Варьируя x_1, получаем границы областей D-разбиения. При каждом значении x_1 уравнение $\det\big(\overline{A}(x_1) + x_2 B\big) = 0$ имеет не более n вещественных корней, поэтому граница D-разбиения состоит не более чем из n ветвей.

Особенно просто задача анализируется для случая диагональных матриц. Имеем $A_0 = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $A_1 = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $A_2 = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ и $A(x) = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, где $d_i = a_i + x_1 b_i + x_2 c_i$. Поэтому границы областей задаются n прямыми $a_i + x_1 b_i + x_2 c_i = 0$. Если область D_n непуста, то она — выпуклый многоугольник (возможно, неограниченный), задаваемый системой неравенств $a_i + x_1 b_i + x_2 c_i \leqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Как известно, n прямых общего положения разбивают плоскость на $n(n+1)/2 + 1$ областей, т. е. в этом случае общее число областей D-разбиения равно этой величине. Число областей D_{n-1} не превосходит n (это области, соседние с ребрами n-угольника D_n).

В общем случае можно отдельно строить область устойчивости

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ A(x) < 0\}$$

(она выпукла). Для каждого x_1 находим отрезок $\big(\underline{x}_2(x_1),\ \overline{x}_2(x_1)\big)$ в соответствии с леммой 1 (он может быть пустым при некоторых или всех значениях x_1); при варьировании x_1 концы отрезка описывают границу области устойчивости.

Заметим, что D_n заведомо неограничена, если одна из A_i, $i = 1, \ldots, \ell$, знакоопределена.

Способы разметки областей D-разбиения. Разметку можно проводить стандартным образом: построив области D_m на плоскости, выбираем по точке в каждой из них и вычисляем собственные значения соответствующей матрицы.

Пересечения границ D-разбиения соответствуют кратным нулевым собственным значениям матрицы $A(x)$. Пусть x^* — точка двукратного пересечения: $\lambda_1(x^*) = \lambda_2(x^*) = 0$, и пусть остальные $n-2$ собственных значения отрицательны. Тогда область D_n непуста (это одна из четырех смежных областей).

2.3. Общий случай. Граничный оракул

При $\ell > 2$ графическое изображение областей D-разбиения сложно ($\ell = 3$) или невозможно ($\ell > 3$), однако их можно описывать следующим образом. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}^\ell$ и направление $y \in \mathbb{R}^\ell$. При $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$A(x + \lambda y) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i + \lambda \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

и, обозначая

$$A \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \qquad B \doteq \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

оказываемся в ситуации с одним параметром $A(\lambda) = A + \lambda B$. Поэтому определение точек границ в выбранном направлении y сводится к нахождению вещественных обобщенных собственных значений λ_i пары матриц $(A, -B)$. Генерируя векторы направлений равномерно на единичной ℓ-мерной сфере в виде $y = \eta/\|\eta\|$, где η имеет стандартное ℓ-мерное гауссовское распределение, получаем точки $x + \lambda_i y$ границ D-разбиения. Описанная процедура может быть названа *граничным оракулом* (boundary oracle) по аналогии с оракулом принадлежности (membership oracle) и оракулом отделимости (separation oracle), используемыми в современной теории выпуклой оптимизации. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ граничный оракул находит точки пересечения луча $x + \lambda y$ с границами неявно заданных множеств D_m или указывает на отсутствие пересечений.

Такой граничный оракул особенно эффективен при характеризации области устойчивости D_n, которая выпукла. Пусть при некотором $x \in \mathbb{R}^\ell$ матрица $A(x)$ (1) отрицательно определена, $x \in D_n$, и y — некоторое направление; тогда критические значения $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$, при которых сохраняется знакоопределенность матрицы $A(x + \lambda y)$, находятся по формулам (2), (3). Этот подход удобно использовать для генерирования равномерных распределений на D_n (ср. [11]) и конструирования новых методов полуопределенного программирования. Кроме того, он может быть использован для приближенного отыскания центра тяжести области устойчивости. Этой тематике будет посвящена специальная работа авторов.

3. Примеры

Во-первых, покажем на примерах, что даже для простейших маломерных семейств D-разбиение может быть устроено сложно, а разнообразие типов границ велико. Рассматриваем задачи с двумя параметрами; области D_m при этом наглядно изображаются на плоскости (x_1, x_2). Обозначим для удобства $A \doteq A_0$, $B \doteq A_1$, $C \doteq A_2$, $D(x) \doteq A + x_1 B + x_2 C$. В простейших ситуациях уравнения границы нетрудно получить аналитически, решая уравнение $\det D(x) = 0$; там, где это затруднительно, приведем примеры использования техники из разделов 2.1 и 2.2.

Матрицы 2×2. Этот простейший случай легко анализируется аналитически, поскольку границы областей задаются квадратным уравнением относительно переменных x_1, x_2; в то же время он иллюстрирует многообразие возможных типов областей D-разбиения.

1. *Границы — прямые.* Все типы таких границ можно получить, если матрицы A, B и C — диагональные. Граница может состоять из одной или двух прямых, которые определяют две, три или четыре области. Например, при $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $D(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, т. е. границами D-разбиения являются координатные оси $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Четыре получающихся области показаны на рис. 1, а; здесь и всюду ниже соответствующие числа на рисунках отвечают количеству отрицательных собственных значений, а граница области устойчивости отмечена жирными линиями.

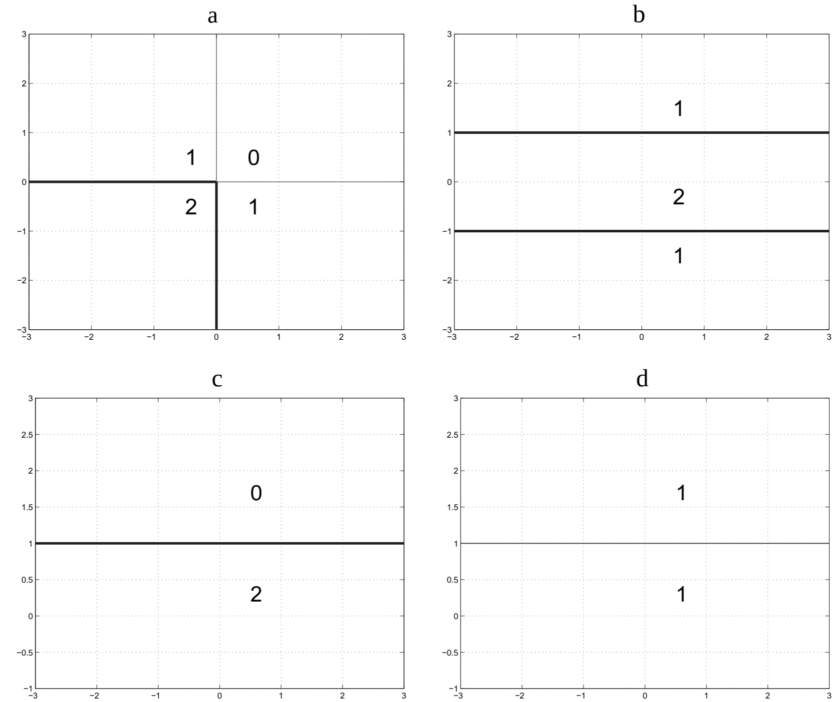

Рис. 1. Примеры D-разбиения для 2×2 матриц

При $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $D(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - 1 & 0 \\ 0 & x_2 - 1 \end{pmatrix}$, и граница состоит из двух параллельных прямых $x_2 = \pm 1$, которые дают три области, в том числе область устойчивости — неограниченную (выпуклую) полосу $\{-1 < x_2 < 1\}$ (рис. 1, b). При $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ границы те же, но область устойчивости отсутствует. Поменяв местами B и C, получаем вертикальную полосу $\{-1 < x_1 < 1\}$; можно сказать, что в этом случае уравнение $\det D(x) = 0$ имеет решение лишь при двух значениях x_1.

При $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем одну прямую $x_2 = 1$, и областью устойчивости является вся полуплоскость $\{x_2 < 1\}$ (рис. 1, c).

Интересен случай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; здесь границей также является одна прямая $x_2 = 1$, но при ее пересечении происходит перемена знаков для обоих собственных значений: одного — с $+$ на $-$, а другого — с $-$ на $+$, так что D-разбиение состоит из двух областей D_1, разделенных «двукратной» границей (рис. 1, d).

Если обратиться к семействам вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

то границы задаются уравнением

$$b_1 b_2 x_1^2 - c^2 x_2^2 + x_1(a_1 b_2 + a_2 b_1) + a_1 a_2 = 0, \tag{5}$$

и при различных комбинациях входящих величин получаем следующие возможности.

2. *Границы отсутствуют.* Уравнение (5) может не иметь вещественных решений; например, при $b_1 = b_2 = 0$, $c \neq 0$, $a_1 a_2 < 0$ имеем $x_2^2 = a_1 a_2 / c^2 < 0$, т. е. D-разбиение состоит из одной области D_1.

3. *Граница состоит из одной точки.* При $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 b_2 = -d^2 < 0$, $c \neq 0$ уравнение имеет вид $d^2 x_1^2 + c^2 x_2^2 = 0$ с единственным решением $x_1 = x_2 = 0$. Другая возможность: $a_1/b_1 = a_2/b_2$. Например, при $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = -A$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ уравнение (5) приобретает вид $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$, и граница D-разбиения также состоит из одной точки (1; 0).

4. *Граница — замкнутая кривая*; соответственно, одна из областей D-разбиения ограничена (иначе говоря, уравнение $\det D(x) = 0$ может быть разрешимо лишь для x_1 из некоторого интервала). Это возможно при $b_1 b_2 < 0$, $a_1 a_2 > 0$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$, т. е. граница — эллипс с центром в нуле. В частности, если $b_1 b_2 = -c^2$, то получаем окружность; например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ дают границу $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

5. *Незамкнутые кривые второго порядка.* При $b_1 b_2 > 0$, $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$, $a_1 a_2 \neq 0$ получаем две ветви гиперболы вида $d^2 x_1^2 - c^2 x_2^2 = a$ (при $a > 0$ уравнение $\det D(x) = 0$ не имеет решений при x_1 из некоторого интервала). Гипербола вида $x_1 x_2 = 1$ получается при $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Граница имеет вид параболы $x_1 = a x_2^2 + b$ в случае когда $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$ и либо $b_1 = 0$, либо $b_2 = 0$ (уравнение $\det D(x) = 0$ разрешимо для x_1 на полуоси).

Наконец, возможна ситуация, обратная случаю 2.

6. *Каждая точка плоскости — граничная.* Если $\det A = 0$, а $B = \beta A$, $C = \gamma A$ с произвольными β, γ, то $\det D(x) = (1 + \beta x_1 + \gamma x_2)^2 \det A = 0$ для всех x_1, x_2 (это верно и для $\ell > 2$ параметров).

Вообще, все возможные типы и расположения кривых, определяющих границы для 2×2 матриц, можно получить, анализируя коэффициенты уравнения $\det(A + x_1 B + x_2 C) = 0$, которое в общем случае имеет вид

$$s_{11} x_1^2 + s_{22} x_2^2 + s_{12} x_1 x_2 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_0 \ = \ 0, \tag{6}$$

где

$$
\begin{gathered}
s_{11} = |B|, \quad s_{22} = |C|, \quad s_{12} = |B+C| - |B| - |C|, \\
s_1 = |A+B| - |A| - |B|, \quad s_2 = |A+C| - |A| - |C|, \quad s_0 = |A|
\end{gathered}
\tag{7}
$$

($|\cdot|$ означает $\det(\cdot)$). Так, по формулам (6)–(7) нетрудно получить границы в виде круга, эллипса, гипербол, параболы общего положения.

Некоторые специальные случаи, $n > 2$**.** Для матриц более высоких размерностей и для большего числа параметров столь подробный анализ, как выше, сложен, однако в некоторых специальных случаях описание областей также можно получить аналитически.

В качестве одного такого простого примера рассмотрим матрицы размера $2m \times 2m$, имеющие вид

$$
\begin{gathered}
A = -I; \quad B = \mathrm{diag}\,(b_1, \dots, b_m, -b_m, \dots, -b_1); \\
C = \overline{\mathrm{diag}}\,(c_1, \dots, c_m, c_m, \dots, c_1),
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $\overline{\mathrm{diag}}$ обозначает антидиагональную матрицу. Нетрудно вычислить определитель

$$
\det(A + x_1 B + x_2 C) \;=\; (x_1^2 b_1^2 + x_2^2 c_1^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (x_1^2 b_m + x_2^2 c_m^2 - 1),
$$

так что границы D-разбиения — это $m = n/2$ эллипсов $x_1^2 b_i^2 + x_2 c_i^2 = 1$ (они разбивают плоскость на $n(n-2)/2 + 2$ областей). На рис. 2, a приведен пример D-разбиения для 6×6 матриц такого вида.

Если в (8) поменять местами A и C:

$$
\begin{gathered}
A = \overline{\mathrm{diag}}\,(c_1, \dots, c_m, c_m, \dots, c_1); \quad B = \mathrm{diag}\,(b_1, \dots, b_m, -b_m, \dots, -b_1); \\
C = -I,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

то для определителя получаем

$$
\det(A + x_1 B + x_2 C) \;=\; (x_1^2 b_1^2 - x_2^2 + c_1^2) \cdot \ldots \cdot (x_1^2 b_m - x_2^2 + c_m^2).
$$

Границы D-разбиения задаются семейством из m пар гипербол вида $x_1^2 b_i^2 - x_2^2 + c_i^2 = 0$, при этом общее число областей не превосходит $n^2/2 + 1$. Для значений b_i, c_i из предыдущего примера соответствующие области изображены на рис. 2, b.

В общем случае при $\ell > 2$ прямая визуализация областей невозможна, но в некоторых отдельных ситуациях их можно характеризовать явно. Простейшая из них — когда матрицы $A_i \in \mathbb{S}^{n\times n}$ коммутируют. Тогда они одновременно диагонализируемы, и области $D_m \subset \mathbb{R}^\ell$ являются многогранными множествами, задаваемыми пересечениями n гиперплоскостей вида $a_i^0 + v_i^{\mathrm{T}} x = 0$, где $a_i^0 = (A_0)_{ii}$, а вектор v составлен из (i,i)-х элементов матриц $A_1, \dots, A_\ell$ (здесь матрицы уже приведены к диагональному виду).

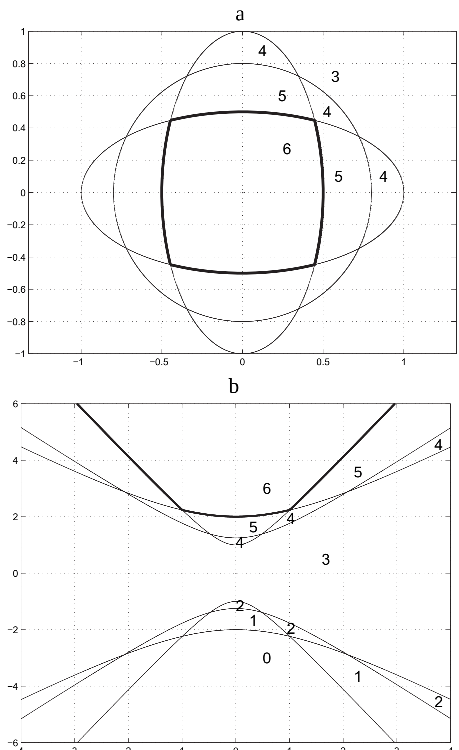

Рис. 2. D-разбиение для семейств (8) и (9) с $b_1 = 1$; $b_2 = 1{,}25$; $b_3 = 2$; $c_1 = 2$; $c_2 = 1{,}25$; $c_3 = 1$

Эволюция областей при возмущении коэффициентов. Интересно посмотреть, как изменяются области D_m при внесении возмущений в матрицы. Аналитическое решение задачи громоздко, в то время как техника, предложенная в разделах 2.1 и 2.2, проста и наглядна; проиллюстрируем ее на примерах 3×3 матриц.

Рассмотрим семейство

$$D(x) = A + \Delta + x_1 B + x_2 C,$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta \in \mathbb{S}^{3\times 3}$ — фиксированное симметричное возмущение. В невозмущеной задаче ($\Delta = 0$) границы D-разбиения задаются тремя прямыми на рис. 3, а.

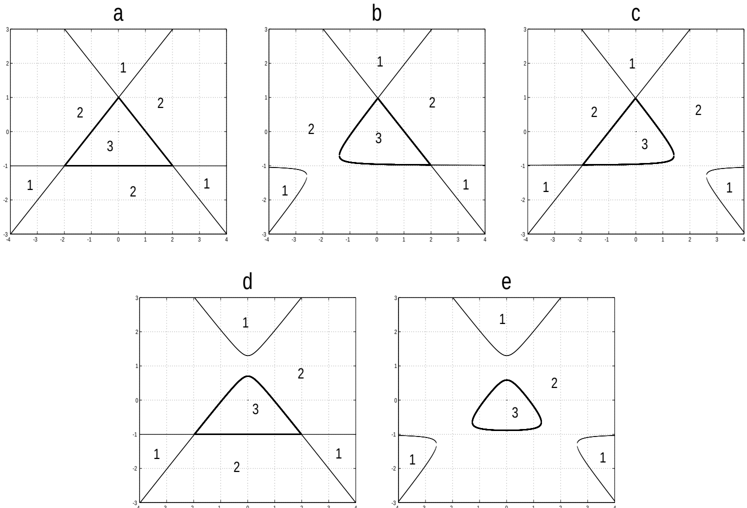

Рис. 3. D-разбиения при различных возмущениях в матрице A

При внесении возмущения картина меняется. На рис. 3, b–3, e показаны границы D-разбиения при добавлении к матрице A «элементарных» возмущений $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ с $\varepsilon = 0{,}3$ и их суммы соответственно.

Для семейства с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

при отсутствии возмущения границы также образованы тремя пересекающимися прямыми (рис. 4, a). Однако внесение таких же возмущений дает совсем иной эффект, см. рис. 4, b–4, e.

Проиллюстрируем еще, как области D-разбиения эволюционируют с ростом возмущения. Для матриц из первого примера возьмем в качестве возмущающей $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и построим D-разбиение для семейства $A + \gamma\Delta + x_1 B + x_2 C$ при увеличивающемся γ. При малых $\gamma \lesssim 0{,}3$ границы имеют вид, близкий к изображенному на рис. 3, e, причем область устойчивости сжимается с увеличением γ. Дальнейший рост возмущения приводит к существенным изменениям геометрии областей. На рис. 5, a–5, e приведены результаты D-разбиения, когда γ принимает значения 0,35; 1,95; 2,0; 2,05; 12,0.

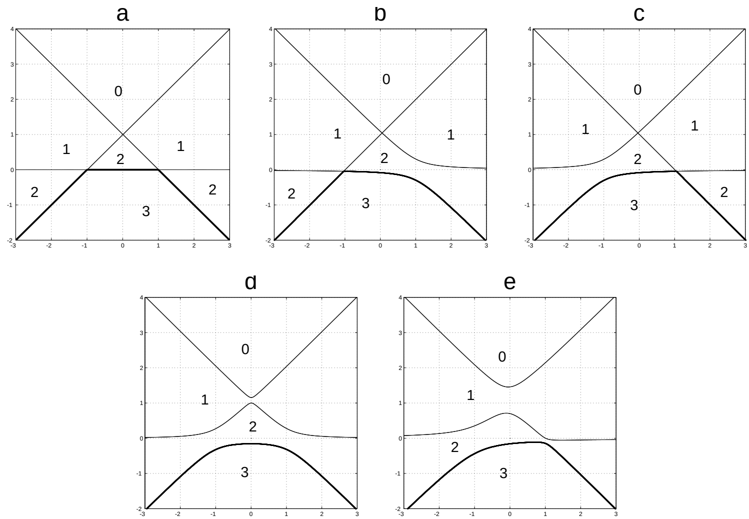

Рис. 4. D-разбиения для семейства (10) при различных возмущениях в A: a) $\Delta = 0$; b) $\Delta = \Delta_2$; c) $\Delta = \Delta_3$; d) $\Delta = \Delta_2 + \Delta_3$; e) $\Delta = \Delta_1 + \Delta_3$; везде $\varepsilon = 0{,}3$

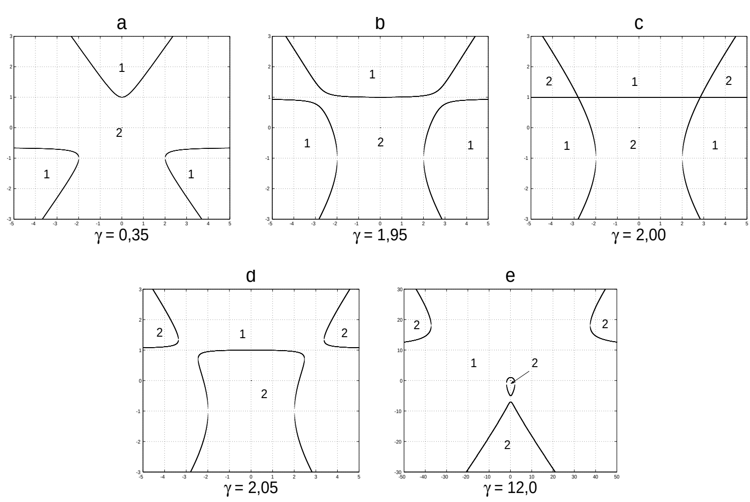

Рис. 5. Эволюция границ D-разбиения с ростом возмущения

4. Робастность

Одно из важных обобщений предложенного подхода — возможность его модификации на ситуации с неопределенностью. В литературе имеется несколько различных постановок задач ЛМН и предположений о неопределенности (например, см. [9, 10, 12]); здесь рассмотрим случай, когда неопределенность ограничена в спектральной норме.

Пусть

$$A_i(\Delta_i) \;=\; A_i + \Delta_i, \quad A_i, \Delta_i \in \mathbb{S}^{n\times n}, \quad \|\Delta_i\| \leqslant \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, \ell, \quad (11)$$

где $\|\cdot\|$ — *спектральная* норма, а $\varepsilon_i \geqslant 0$ — заданные числа. Подчеркнем, что рассматриваются только симметричные возмущения Δ_i, чтобы сохранить структуру ЛМН. Приходим к следующей неопределенной линейной функции:

$$\begin{gathered} A(x,\Delta) \;=\; A_0(\Delta_0) + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i(\Delta_i), \\ \Delta \in \mathcal{D} \doteq \big\{ \{\Delta_i = \Delta_i^{\mathrm{T}}\}_0^{\ell} :\; \|\Delta_i\| \leqslant \varepsilon_i \big\}. \end{gathered} \quad (12)$$

Области D_m робастного D-разбиения теперь определяются следующим образом:

$$D_m^{\mathrm{rob}} \;=\; \Big\{ x \in \mathbb{R}^{\ell} :\; A(x,\Delta) \text{ имеет ровно } m \text{ отрицательных собственных значений} \,\forall\, \Delta \in \mathcal{D} \Big\}; \quad (13)$$

в частности, робастно допустимая область:

$$D_n^{\mathrm{rob}} \;=\; D_{feas}^{\mathrm{rob}} \;=\; \Big\{ x \in \mathbb{R}^{\ell} :\; A(x,\Delta) \leqslant 0 \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{D} \Big\}.$$

Задача заключается в описании границ областей робастного D-разбиения; эти границы теперь определяются как те значения параметров x, при которых матрица $A(x,\Delta)$ оказывается вырожденной при некотором $\Delta \in \mathcal{D}$. В отличие от задачи без возмущений границы робастного D-разбиения размываются в «полосы», внутри которых матрица $A(x,\Delta)$ может иметь различное число отрицательных собственных значений в зависимости от того или иного допустимого значения Δ.

4.1. Один параметр

Как и при анализе задачи без неопределенности, обратимся к однопараметрическим семействам и рассмотрим простейший случай, когда неопределенность присутствует лишь в матрице A:

$$A(x,\Delta) \;=\; (A+\Delta) + xB; \qquad \Delta \in \mathcal{D} \doteq \{\Delta \in \mathbb{S}^{n\times n} :\; \|\Delta\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Границы областей (отрезков) робастного D-разбиения определяются из условия вырожденности матрицы $A + xB + \Delta$ при некотором $\Delta \in \mathcal{D}$, т. е. задача заключается в определении радиуса невырожденности матрицы $A + xB$. Основным инструментом здесь служит следующая лемма, на которой основаны все дальнейшие построения.

Лемма 2. *Для невырожденной матрицы $M \in \mathbb{S}^{n\times n}$ симметрический радиус невырожденности*

$$\rho(M) \doteq \inf\{\|P\|\colon\ P \in \mathbb{S}^{n\times n},\ \ M+P \text{ вырождена}\}$$

равен

$$\rho(M) = 1/\|M^{-1}\| = \min_i |\lambda_i(M)|.$$

При этом критическое значение P равно $P = -\lambda ee^{\mathrm{T}}$, где λ — минимальное по абсолютной величине собственное значение M, а e — отвечающий ему собственный вектор.

Доказательство. Пусть M невырождена, λ_i — ее собственные значения, и λ — то из них, на котором достигается $\min_i |\lambda_i|$; имеем $\rho(M) = |\lambda|$. Тогда для любой матрицы с $\|P\|_2 < \rho(M)$ и любого $\|x\|_2 = 1$ справедливо

$$\begin{aligned}\big|\big((M+P)x,x\big)\big| &= |(Mx,x)+(Px,x)| \geqslant \\ &\geqslant |(Mx,x)| - |(Px,x)| \geqslant \min_i |\lambda_i| - \|P\|_2 > 0,\end{aligned}$$

т. е. $M+P$ невырождена.

С другой стороны, рассмотрим $P = -\lambda ee^{\mathrm{T}}$, где e, $\|e\|_2 = 1$, — собственный вектор M, отвечающий собственному значению λ: $Me = \lambda e$. Тогда получаем $\|P\|_2 = |\lambda|$ и $(M+P)e = \lambda e - \lambda ee^{\mathrm{T}}e = 0$. □

Лемма 2 представляет собой аналог теоремы 3 из [16] (см. также [14]) в симметричном случае; если не оставаться в классе симметричных матриц, то радиус невырожденности дается общей формулой теоремы 3 из [16]. Отметим, что лемма в явном виде указывает минимальное по норме возмущение, при котором матрица M вырождается, — это симметричная матрица $P = -\lambda ee^{\mathrm{T}}$ ранга 1.

В соответствии с леммой матрица $(A+xB)+\Delta$ с возмущениями $\|\Delta\| \leqslant \varepsilon$ остается робастно невырожденной при значениях x, удовлетворяющих

$$\|(A+xB)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}, \tag{14}$$

поэтому, составляя функцию

$$\varphi(x) \doteq \|(A+xB)^{-1}\|,$$

находим численно отрезки робастной невырожденности $\{x\colon\ \varphi(x) < 1/\varepsilon\}$.

Пример 1. Рассмотрим $A(x,\Delta) = A + \Delta_A + xB$ с $A = \operatorname{diag}(-4\ \ -6\ \ 20\ \ 27)$, $B = \operatorname{diag}(7\ \ 1\ \ 3\ \ 6)$ и $\|\Delta_A\| \leqslant \varepsilon = 0{,}03\|A\|$. На рис. 6 границы робастного D-разбиения показаны жирными отрезками, в которые размываются точки $x^i = \mathtt{eig}_i(A,-B)$ — критические значения параметра для невозмущенной задачи. Эти отрезки разделяют области робастности D_i^{rob}, внутри которых матрица $A + xB + \Delta_A$ имеет постоянное число отрицательных собственных значений при всех допустимых возмущениях $\|\Delta_A\| \leqslant \varepsilon$.

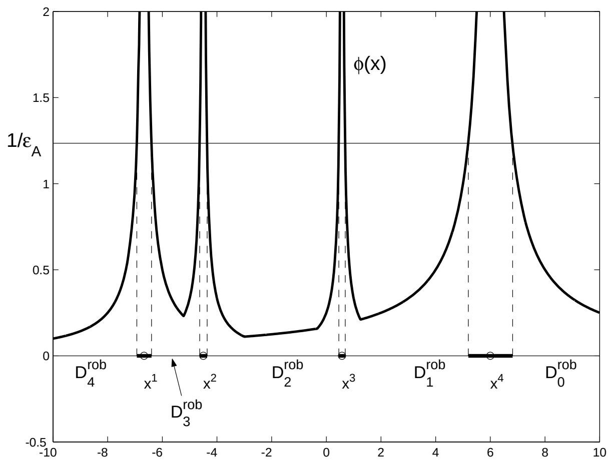

Рис. 6. Робастное D-разбиение по одному параметру с неопределенностью в матрице A

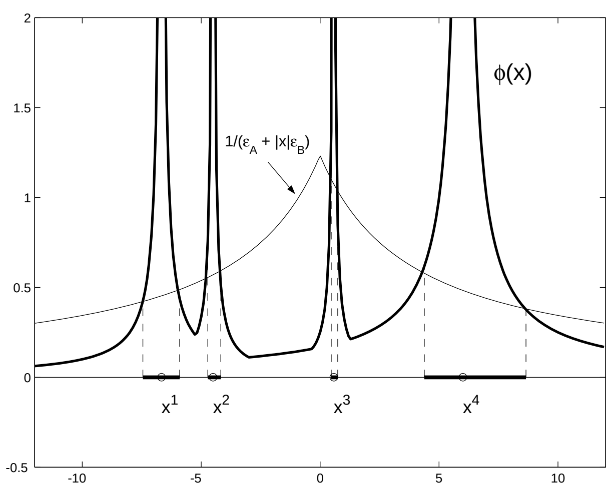

Рис. 7. Робастное D-разбиение по одному параметру с неопределенностью в A и B

Аналогично анализируется и более общая задача, в которой неопределенность присутствует в обеих матрицах:

$$A(x,\Delta) \;=\; (A+\Delta_A)+x(B+\Delta_B); \quad \|\Delta_A\| \leqslant \varepsilon_A; \quad \|\Delta_B\| \leqslant \varepsilon_B. \quad (15)$$

Представим $A(x,\Delta) = (A+xB)+(\Delta_A+x\Delta_B)$. Для возмущения $\Delta_A + x\Delta_B$ матрицы $A+xB$ имеем оценку $\|\Delta_A + x\Delta_B\| \leqslant \varepsilon_A + |x|\varepsilon_B$, причем она точна (равенство достижимо), поскольку Δ_A и Δ_B выбираются независимо. Введем функцию $\varphi(x) = \|(A + xB)^{-1}\|$. В соответствии с леммой 2 отрезки робастной невырожденности, или, иными словами, области D_m^{rob} определяются условием

$$\varphi(x) \;<\; \frac{1}{\varepsilon_A + |x|\varepsilon_B}\,.$$

Пример 2. Рассмотрим те же матрицы, что и в предыдущем примере, но добавим в матрицу B неопределенность (того же уровня): $\|\Delta_B\| \leqslant \leqslant \varepsilon_B = 0{,}03\|B\|$. Описанные выше построения представлены на рис. 7; из-за наличия дополнительной неопределенности отрезки робастности сужаются (границы становятся шире).

4.2. Два параметра

Перейдем к двухпараметрическим семействам, слегка изменяя обозначения:

$$A(x,\Delta) \;=\; (A_0 + \Delta_0) + x_1(A_1 + \Delta_1) + x_2(A_2 + \Delta_2);$$
$$\|\Delta_i\| \leqslant \varepsilon_i,\ i = 0,1,2.$$

Зафиксируем x_1 и обозначим $A = A_0 + x_1 A_1$ и $B = A_2$, а также $\varepsilon_A \doteq \varepsilon_0 + |x_1|\varepsilon_1$ и $\varepsilon_B = \varepsilon_2$. Оказываемся в ситуации задачи (15): для определения границ составляем функции $\varphi(x_2) = \|(A + x_2 B)^{-1}\|$ и $\varepsilon(x_2) = 1/(\varepsilon_A + |x_2|\varepsilon_B)$ и проверяем условие $\varphi(x_2) < \varepsilon(x_2)$, которое определяет отрезки робастности по x_2 при данном значении x_1. При варьировании x_1 эти отрезки заполняют двумерные области робастного D-разбиения. С другой стороны, те значения x_2, при которых условие $\varphi(x_2) < \varepsilon(x_2)$ нарушено, отвечают отсутствию робастности; при варьировании x_1 эти отрезки нарушения заметают двумерные области — границы робастного D-разбиения.

Отметим еще, что так же, как и в ситуации без возмущений, можно строить область D_n^{rob} отдельно от остальных D_m^{rob}, объединяя результаты лемм 1 и 2.

Пример 3. Для двухпараметрического семейства из $\mathbb{S}^{4\times 4}$ с матрицами $A_0 = -I$, $A_1 = \mathrm{diag}\,(-1\ \ 1\ \ 1\ -1)$ и $A_2 = \mathrm{diag}\,(1\ -1\ \ 1\ -1)$ границы D-разбиения при отсутствии неопределенности представлены двумя парами параллельных прямых на рис. 8. При внесении неопределенности границы размываются в полосы, и области D_m сужаются. В рассматриваемой задаче при возмущениях одинакового относительного уровня $\|\Delta_i\| \leqslant \varepsilon_i = 0{,}2\|A_i\|$, $i = 0,1,2$, границы робастного D-разбиения показаны серым цветом, а незакрашенные острова являются областями робастности.

4.3. Общий случай. Робастный граничный оракул

Обратимся теперь к общему случаю описания границ областей D_m^{rob} (13) для семейства (11)–(12) при $\ell > 2$. Поступим так же, как и в разделе 2.3: будем искать точки пересечения одномерного луча с

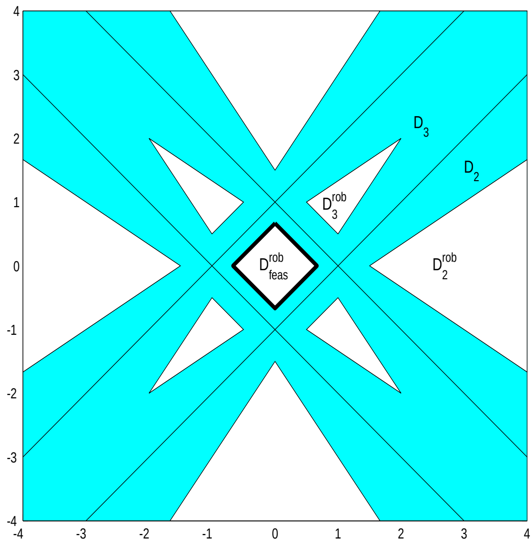

Рис. 8. Робастное D-разбиение по двум параметрам

границами робастного D-разбиения. Для простоты ограничимся описанием границы области робастной устойчивости.

Дальнейшие выкладки по существу являются лишь небольшим обобщением рассуждений раздела 4.1. Действительно, пусть $x \in$ $\in D^{\mathrm{rob}}_{feas}$ — робастно допустимая точка и пусть $y \in \mathbb{R}^\ell$ — некоторое направление. Рассмотрим прямую $x + \lambda y$ и найдем $\underline{\lambda}^{\mathrm{rob}}$ и $\overline{\lambda}^{\mathrm{rob}}$ — минимальное и максимальное значения λ, при которых отрицательная неопределенность матрицы $A(x + \lambda y, \Delta)$ гарантирована при всех $\Delta \in$ $\in \mathcal{D}$. Имеем

$$A(x + \lambda y, \Delta) \; = \; \widehat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda),$$

где обозначено

$$\widehat{A}(\lambda) \; = \; A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) A_i, \qquad \Delta(\lambda) \; = \; \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) \Delta_i,$$

и согласно лемме 2 матрица $\widehat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda)$ остается невырожденной (следовательно, отрицательно определенной) при всех $\Delta \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих

$$\big\| \big(\widehat{A}(\lambda)\big)^{-1} \big\| \; < \; \frac{1}{\|\Delta(\lambda)\|}\,.$$

Поскольку возмущения независимо пробегают свои области неопределенности, оценка

$$\|\Delta(\lambda)\| \; \leqslant \; \|\Delta_0\| + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \, \|\Delta_i\| \; = \; \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \, \varepsilon_i$$

точна. Поэтому, составляя две скалярные функции

$$\varphi(\lambda) \;=\; \left\|\Big(A_0+\sum_{i=1}^{\ell}(x_i+\lambda y_i)A_i\Big)^{-1}\right\|, \quad \varepsilon(\lambda) \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0+\sum_{i=1}^{\ell}|x_i+\lambda y_i|\,\varepsilon_i}\,, \tag{16}$$

отрезок $[\underline{\lambda}^{\rm rob},\ \overline{\lambda}^{\rm rob}]$ робастной отрицательной определенности семейства $A(x+\lambda y,\Delta)$ определяем численно как $\{\lambda\colon\ \varphi(\lambda)\leqslant\varepsilon(\lambda)\}$.

Ясно, что справедливо включение $[\underline{\lambda}^{\rm rob},\ \overline{\lambda}^{\rm rob}]\subset[\underline{\lambda},\ \overline{\lambda}]$, где $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$ — критические значения параметра λ при отсутствии неопределенности (минимальное и максимальное значения λ, сохраняющие отрицательную определенность матрицы $A(x+\lambda y,0)$). Тем самым, проверку $\varphi(\lambda)\leqslant\varepsilon(\lambda)$ следует осуществлять лишь на отрезке $[\underline{\lambda},\ \overline{\lambda}]$. Таким образом, приходим к следующему *робастному граничному оракулу*.

Лемма 3. *Пусть $A(x,0)<0$. Для любого $y\in\mathbb{R}^\ell$ максимальное и минимальное значения λ, сохраняющие отрицательную определенность матрицы $A(x+\lambda y,\Delta)$ при всех допустимых возмущениях Δ, даются двумя решениями уравнения $\varphi(\lambda)=\varepsilon(\lambda)$* (4.3) *на отрезке* $[\underline{\lambda},\ \overline{\lambda}]$ (2)–(3).

Аналогично, чтобы решить более простую задачу проверки $x\in\in D^{\rm rob}_{feas}$ для некоторого $x\in\mathbb{R}^\ell$, достаточно рассмотреть невозмущенную матрицу в точке x

$$A(x,0) \;=\; A_0+\sum_{i=1}^{\ell}x_iA_i$$

и проверить выполнение неравенства

$$\varepsilon_0+\sum_{i=1}^{\ell}|x_i|\varepsilon_i \;<\; 1/\|(A(x,0))^{-1}\|.$$

5. Заключение

В работе предложена техника построения областей в пространстве параметров, внутри которых аффинное семейство симметричных матриц имеет фиксированное число собственных значений одного знака; приводится обобщение на случай наличия неопределенности в матричных коэффициентах. Для малого числа параметров результаты наглядно иллюстрируются на плоскости или прямой. Для общего случая $\ell>2$ параметров предложен граничный оракул, с помощью которого удается просто и эффективно характеризовать допустимую область, в том числе и в робастной постановке.

Среди возможных применений полученных результатов — эллипсоидальное оценивание состояний динамических систем, квадратичная оптимизация, отыскание центра тяжести выпуклых множеств и другие. Перспективным направлением развития предложенной техники является ее применение к решению задач полуопределенного программирования, особенно в робастной постановке, для которой в настоящее время отсутствуют удовлетворительные численные методы.

Список литературы

1. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Наука, 2006.
2. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. — Л.: ЛКВВИА, 1949.
3. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств (путеводитель по программным пакетам). — Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2004.
4. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
5. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I // АиТ. — 1964. — № 7. — С. 1017–1029.
6. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II // АиТ. — 1965. — № 4. — С. 577–590.
7. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III // АиТ. — 1965. — № 5. — С. 753–763.
8. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms and engineering applications. — Philadelphia: SIAM, 2001.
9. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* On tractable approximations of uncertain linear matrix inequalities affected by interval uncertainty // SIAM J. Optim. — 2002. — V. 12, No. 3. — P. 811–833.
10. *Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
11. *Calafiore G.* Random walks for probabilistic robustness // Proc. 43rd Conf. Decision Control, Bahamas. Dec. 2004. — P. 5316–5321.
12. *El Ghaoui L., Oustry F., Lebret, H.* Robust solutions to uncertain semidefinite programs // SIAM J. Optim. — 1998. — V. 9, No. 1. — P. 33–52.
13. *Gryazina E.N., Polyak B.T.* Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited // Automatica. — 2006. — V. 42. — P. 13–26.
14. *Kahan W.* Numerical linear algebra // Canadian Math. Bull. — 1966. — V. 9. — P. 757–801.
15. *Nesterov Yu., Nemirovskii A.* Interior-point polynomial algorithms in convex programming. — Philadelphia: SIAM, 1994.
16. *Polyak B.T.* Robust linear algebra and robust aperiodicity / A.Rantzer, C.I.Byrnes (eds.), Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. Springer, 2003. P. 249–260.
17. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optim. Theory Appl. — 1998. — V. 99, No. 3. — P. 553–583.
18. *Pyatnitskii E.S., Skorodinskii V.I.* Numerical methods of Lyapunov matrix construction and their application to the absolute stability problem // Syst. Control Lett. — 1982. — V. 2, No. 2. — P. 130–135.

Глава 2

ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ И АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Гелиг,[†] *А. Н. Чурилов*[††]

Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией*

Аннотация: приведен обзор частотных методов исследования устойчивости нелинейных систем управления с различными видами импульсной модуляции.

1. Введение

По-видимому, первыми работами по исследованию систем управления с импульсной модуляцией были статья [63] и спецкурс Н. Е. Жуковского [23], читавшийся в 1908–1909 гг. В первой был предложен регулятор температуры, который с помощью широтно-импульсной модуляции позволял поддерживать постоянную температуру в котле с точностью до $0,002^\circ$ С. Во второй работе рассматривалась система регулирования турбины методом отсечки пара, в которой была реализована широтно-частотная импульсная модуляция.

Интерес к импульсным системам управления значительно возрос во второй половине XX в., он был связан как с запросами техники, так и с исследованиями нейронных структур.

[†]) Санкт-Петербургский Государственный Университет.

[††]) Санкт-Петербургский Морской Технический Университет.

*) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 11. — С. 60–76.

Импульсные регуляторы благодаря простоте их реализации, малой энергоемкости и высокой точности стали применяться в различных технических отраслях (электротехнике, космической технике, энергетике, теплотехнике, радиотехнике, гидравлике, пневматике и пр.). С другой стороны, некоторые модели нейронных сетей [5, 8, 65, 73, 76] представляли собой импульсные системы. Поэтому естественно, что построение математической теории импульсных систем привлекло внимание многих исследователей.

Первоначальными объектами математического исследования явились дискретные системы. К ним в ряде случаев сводится математическое описание устройств, в контуре управления которых имеется ЭВМ либо импульсные элементы, осуществляющие амплитудную модуляцию или широтную модуляцию первого рода. Математическая теория дискретных систем была развита в трудах П. В. Бромберга [2, 3], Я. З. Цыпкина [36], Э. Джури [17] и многих других ученых. На эти системы была, в частности, перенесена теория абсолютной устойчивости нелинейных непрерывных систем [19, 20, 37–40, 46, 66, 80, 81].

Однако многие виды импульсных систем не описываются дискретными (разностными) уравнениями. К ним относятся системы с различными видами широтной модуляции второго рода, частотной модуляции, системы с неавтономным формированием импульсов и ряд других (см., например, [4, 22, 26, 33, 75]). Для описания таких систем могут быть использованы функционально-дифференциальные уравнения, причем нелинейные операторы, моделирующие импульсные элементы, в ряде случаев являются разрывными. Попытки распространить на эти системы методы теории абсолютной устойчивости непрерывных систем натолкнулись на существенную трудность, заключающуюся в том, что сигналы на входе и выходе импульсного модулятора не удовлетворяют локальным квадратичным связям, изначально применявшимся в теории абсолютной устойчивости. Прорыв в этой области был достигнут благодаря введению В. А. Якубовичем в теорию абсолютной устойчивости интегральных квадратичных связей [27, 28]. Этот подход, явившийся обобщением метода интегральных оценок В. М. Попова, оказался удобным при исследовании систем не только с импульсными элементами, но и с другими сложными нелинейными операторами, например с гистерезисными функциями [53]. В настоящее время метод интегральных квадратичных связей (IQC — integral quadratic constraints) является популярным инструментом математического исследования систем управления [77], поэтому интересно отметить, что толчком к его появлению послужила именно теория систем с импульсной модуляцией.

Начиная с [6, 51], метод интегральных квадратичных связей систематически применялся в теории нелинейных импульсных систем. Его развитие в монографиях [13, 62] и сопутствующих публикациях позволило распространить методы анализа и синтеза непрерывных нелинейных систем на импульсные системы с достаточно высокой частотой импульсации.

Данный обзор посвящен частотным методам в теории устойчивости импульсных систем. Во втором разделе статьи приводится описание математических моделей импульсных элементов с различными видами импульсной модуляции. Остальные разделы посвящены изложению частотных подходов к исследованию нелинейных импульсных систем. Эти подходы основываются на втором методе Ляпунова, частотной теореме (лемме Якубовича–Калмана), методе априорных интегральных оценок (методе Попова), свойствах положительных ядер интегральных операторов, интегральных квадратичных связях и методе усреднения. С другими (не частотными) методами исследования устойчивости нелинейных импульсных систем можно познакомиться в обзорах [14, 61].

2. Основные понятия систем с импульсной модуляцией

Импульсная модуляция — это процесс преобразования непрерывного сигнала в импульсную последовательность. С ней связывается строго возрастающая последовательность моментов импульсации $t_0 < t_1 < < t_2 < \ldots$. При этом обычно $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ и последовательность не имеет точек сгущения. Интервал времени $[t_n,\, t_{n+1})$ называется n-м тактовым интервалом или интервалом импульсации.

Для описания импульсной последовательности используются два класса моделей: импульсы конечной длительности, описываемые кусочно-непрерывными функциями, и мгновенные импульсы, описываемые дельта-функциями (обобщенными функциями). Для краткости, вводя основные понятия, будем ориентироваться на модель с импульсами конечной длительности.

В случае импульсов конечной длительности функция $\xi(t)$, описывающая импульсную последовательность, может быть представлена в виде

$$\xi(t) = \xi_n(t), \quad t_n \leqslant t < t_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где кусочно-непрерывная функция $\xi_n(t)$ описывает форму n-го импульса. При этом односторонние пределы $\xi_{n-1}(t_n - 0)$ и $\xi_n(t_n + 0)$ конечны, но могут не совпадать друг с другом.

Простейшая и наиболее распространенная форма импульса — прямоугольная. При этом

$$\xi_n(t) = \begin{cases} 0, & t_n \leqslant t < t_n', \\ \lambda_n, & t_n' \leqslant t < t_n'', \\ 0, & t_n'' \leqslant t < t_{n+1}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь t_n', t_n'' — моменты времени, определяющие положение переднего и заднего фронтов импульса соответственно. Возможны случаи, когда $t_n' = t_n$ или $t_n'' = t_{n+1}$. Параметр λ_n характеризует амплитуду импульса. При разных n он может принимать значения одного знака (однополярная последовательность) или разных знаков (двухполярная последовательность).

Прямоугольный импульсный сигнал (1) характеризуется следующим набором модулируемых параметров:

- амплитуда импульса λ_n (с учетом знака);
- фаза импульса (смещение переднего фронта относительно начала тактового интервала) $\vartheta_n = t'_n - t_n$;
- длительность (ширина) импульса $\tau_n = t''_n - t'_n$;
- длина тактового интервала $T_n = t_{n+1} - t_n$ или, что эквивалентно, частота следования импульсов $T_n^{-1} = 1/(t_{n+1} - t_n)$.

Таким образом, имеем

$$\xi_n(t) = \xi_n(t, p_n), \qquad p_n = \{\lambda_n, \vartheta_n, \tau_n, T_n\}.$$

Если длина тактового интервала T_n — функционал от входного сигнала $\sigma(t)$, а все остальные параметры фиксированы, говорят о частотно-импульсной модуляции (ЧИМ). Если параметр T_n не модулируется, то $t_n = t_0 + nT$, где T — заданное положительное число (период импульсации). В случае амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) значение λ_n зависит от $\sigma(t)$, а остальные параметры фиксированы. Для широтно-импульсной модуляции (ШИМ) модулируемым параметром является τ_n. Наконец, в случае модуляции t'_n говорят о фазо-импульсной модуляции (ФИМ). Частотную, широтную и фазовую модуляцию иногда объединяют в общее понятие время-импульсной модуляции [4].

Существуют импульсы и более сложной формы: треугольные, трапецевидные, синусоидальные и пр. Например, для импульсов на выходе тиристорных преобразователей амплитуда λ_n зависит от времени $\lambda_n = \lambda_n(t)$ (импульс «вырезается» из некоторого опорного гармонического сигнала) [33].

В случае импульсов конечной длительности импульсный модулятор (ИМ) описывается нелинейным оператором, который отображает непрерывную входную функцию $\sigma(t)$ в кусочно-непрерывную выходную функцию $\xi(t)$ (обе функции определены при $t \geqslant t_0$ и имеют вещественные значения):

$$M: \quad \sigma(t) \mapsto \xi(t).$$

Рассмотрим некоторые общие свойства импульсного модулятора. При описании свойств будем использовать следующие обозначения: если $\sigma(t), \widetilde{\sigma}(t)$ — входные функции, то $\xi = M\sigma$, $\widetilde{\xi} = M\widetilde{\sigma}$, а $\{t_n\}$, $\{\widetilde{t}_n\}$ — последовательности моментов импульсации, отвечающие входным сигналам $\sigma(t)$ и $\widetilde{\sigma}(t)$ соответственно.

Физическая реализуемость. Будем рассматривать модуляторы, не имеющие внутренних состояний: выход модулятора определяется значением входа $\sigma(t)$ и только им.

Как и любое преобразование, описывающее техническое устройство, оператор M должен обладать свойством причинности (физической реализуемости) [24]. Рассмотрим две произвольные входные функции $\sigma(t)$, $\widetilde{\sigma}(t)$, определенные при $t \geqslant 0$.

Оператор M называется *физически реализуемым*, если для любого момента времени t соотношения $t_0 = \widetilde{t}_0$ и $\sigma(s) = \widetilde{\sigma}(s)$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$, влекут равенство $\xi(t) = \widetilde{\xi}(t)$. В случае, когда модулируется частота импульсации, дополнительно предполагаем следующее: если $t_0 = \widetilde{t}_0$ и $\sigma(s) = \widetilde{\sigma}(s)$ при $t_0 \leqslant s \leqslant t_n$, то $t_n = \widetilde{t}_n$.

Потактовый сброс. Более сложное свойство импульсного модулятора связано с тем, что может быть названо «памятью» этого преобразования. Будем называть его *свойством потактового сброса*, которое заключается в следующем.

Пусть σ, $\widetilde{\sigma}$ — две произвольные входные функции, t — произвольный момент времени такой, что $t_n \leqslant t < t_{n+1}$. Если $t_n = \widetilde{t}_n$ и $\sigma(s) = \widetilde{\sigma}(s)$ при $t_n \leqslant s \leqslant t$, то $\xi(t) = \widetilde{\xi}(t)$. В случае, когда модулируется частота импульсации, дополнительно выполнено следующее: если $t_n = \widetilde{t}_n$ и $\sigma(s) = \widetilde{\sigma}(s)$ при $t_n \leqslant s \leqslant t_{n+1}$, то $t_{n+1} = \widetilde{t}_{n+1}$.

Таким образом, модулятор «забывает» про прошлые значения входа с началом нового тактового интервала.

Квазистационарность. Большинство импульсных модуляторов не обладает свойством стационарности в том смысле, в каком оно понимается в теории систем управления. Тем не менее, для них справедливо похожее свойство, которое мы будем называть *квазистационарностью.*

Наряду с определенными выше величинами σ, $\widetilde{\sigma}$, ξ, $\widetilde{\xi}$, t_n, $\widetilde{t}_n$, определим последовательности $T_n = t_{n+1} - t_n$ и $\widetilde{T}_n = \widetilde{t}_{n+1} - \widetilde{t}_n$.

Будем называть импульсный модулятор квазистационарным, если он обладает следующим свойством. Пусть σ, $\widetilde{\sigma}$ — две произвольные входные функции, m и n — произвольные целые неотрицательные числа, τ — произвольное число такое, что $0 \leqslant \tau \leqslant T_n$. Тогда, если $\sigma(t_n + s) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{t}_m + s)$ при $0 \leqslant s \leqslant \tau$, то $\xi(t_n + \tau) = \widetilde{\xi}(\widetilde{t}_m + \tau)$. В случае, когда модулируется частота импульсации, имеет место дополнительное свойство: если $\sigma(t_n + s) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{t}_m + s)$ при $0 \leqslant s \leqslant T_n$, то $T_n = \widetilde{T}_m$.

Очевидно свойство потактового сброса вытекает из квазистационарности при $n = m$ и $t_n = \widetilde{t}_n$.

Свойство квазистационарности говорит о том, что форма импульса не зависит от момента времени, в котором начинается тактовый интервал.

Модуляция первого и второго рода. Для некоторых видов модуляции свойство потактового сброса может быть усилено: если $t_n = \widetilde{t}_n$ и $\sigma(t_n) = \widetilde{\sigma}(t_n)$, то $t_{n+1} = \widetilde{t}_{n+1}$ и $\xi(s) = \widetilde{\xi}(s)$ при всех $t_n \leqslant s < t_{n+1}$. Другими словами, значения выхода на тактовом интервале зависят только от значения входа в начале этого интервала. Виды модуляции, обладающие этим свойством, называются *модуляцией первого рода*, тогда как остальные виды модуляции — *модуляцией второго рода* [26] (в [36] использовались термины «1-тактная модуляция» и «2-тактная модуляция» соответственно).

Таким образом, для модуляции первого рода параметры n-го импульса (1) полностью определяются значением модулирующей функции в момент времени t_n:

$$p_n = p_n(\sigma(t_n)).$$

В функциональные зависимости такого типа укладываются наиболее простые и известные схемы квантования по времени.

Если обозначить $d_n(t) = t - t_n$ при $t_n \leqslant t < t_{n+1}$, то

$$\sigma(t_n) = \sigma(t - d_n(t)), \quad 0 \leqslant d_n(t) \leqslant T_n.$$

Таким образом, системы с модуляцией первого рода ведут себя подобно системам с переменным запаздыванием, а модулятор представляет собой инерционное звено. Модуляция второго рода позволяет уменьшить эту инерционность и тем самым улучшить динамические свойства системы управления за счет усложнения закона модуляции. Для этого типа модуляции параметры p_n определяются неявно, как корни некоторых вспомогательных уравнений, включающих входной сигнал $\sigma(t)$.

Модуляционная и амплитудная характеристики. Рассмотрим квазистационарный модулятор. Возьмем в качестве входа модулятора постоянную функцию $\sigma(t) \equiv \sigma_0 = \mathrm{const}$. Из определения квазистационарности следует, что такая функция преобразуется модулятором в периодическую импульсную последовательность с одним импульсом на периоде:

$$t_{n+1} - t_n = T, \qquad \xi(t) = \xi(t+T). \tag{2}$$

Задавая различные значения σ_0, можно рассматривать параметры этого выходного импульса как функции от σ_0.

Функция $F(\sigma_0)$, которая определяет зависимость модулируемого параметра от постоянного входа модулятора $\sigma(t) \equiv \sigma_0 = \mathrm{const}$, называется *модуляционной характеристикой*. Функция $\lambda(\sigma_0)$, задающая зависимость амплитуды выходного импульса от постоянного входа модулятора, называется *амплитудной характеристикой* модулятора. Очевидно для АИМ модуляционная и амплитудная характеристики совпадают, для других видов модуляции они различаются.

Модуляционная характеристика $F(\sigma)$ обычно является монотонной при $\sigma > 0$: чем больше величина входного сигнала, тем больше модулируемый параметр (амплитуда выходного импульса, его ширина, фаза или частота следования импульсов).

Статическая характеристика модулятора. Рассмотрим квазистационарный модулятор и возьмем в качестве входа модулятора постоянную функцию $\sigma(t) \equiv \sigma_0 = \mathrm{const}$. Как отмечалось ранее, она преобразуется модулятором в периодическую импульсную последовательность (2) с одним импульсом на периоде. Разложим функцию $\xi(t)$ в ряд Фурье. Постоянная составляющая этого разложения равна среднему значению импульса на тактовом интервале

$$\varphi(\sigma_0) = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt.$$

Задавая различные значения σ_0, получаем функцию $\varphi(\sigma_0)$, которая называется *статической характеристикой модулятора*.

Для всех видов модуляции, кроме частотной, справедливо $t_{n+1} - t_n = T$, поэтому в этом случае статическая характеристика модулятора может рассматриваться как нормированная (с коэффициентом $1/T$) площадь импульса при постоянном входном сигнале. В приложениях широко используется «принцип эквивалентных площадей» (впервые сформулированный в [37, 38] для систем с ШИМ): если частота импульсации лежит за пределами полосы пропускания непрерывной части системы управления, то при теоретическом рассмотрении импульсная последовательность может быть заменена на импульсы любой удобной формы, но той же площади. Этот принцип чаще всего применяется следующим образом: исходная импульсная последовательность заменяется на последовательность импульсов той же площади, модулированных по амплитуде; полученная система сводится к системе дискретных (разностных) уравнений; к дискретной системе применяется один из известных алгоритмов проектирования; этот алгоритм переформулируется в терминах исходной модели.

Несмотря на простоту и большую популярность, этот подход обычно используется без достаточного математического обоснования и может приводить к неверным результатам.

3. Примеры импульсной модуляции

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся виды импульсной модуляции [8, 26, 40], которые, разумеется, далеко не исчерпывают многообразия видов импульсной модуляции, применяющихся на практике.

Амплитудно-импульсная модуляция (*АИМ*). В этом случае $t_n = nT \quad (T = \mathrm{const} > 0)$,

$$\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{T}{\tau}\,F(\sigma(nT)), & nT \leqslant t < nT + \tau, \\ 0, & nT + \tau \leqslant t < (n+1)T, \end{cases}$$

где $0 < \tau < T$, $F(\sigma)$ — заданная непрерывная ограниченная функция, $F(0) = 0$, $F(\sigma)$ нечетна и $F(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$. Таким образом, рассматриваемая модуляция относится к первому роду, $F(\sigma)$ — статическая характеристика модулятора, $F(\sigma)T/\tau$ — модуляционная характеристика.

Частотно-импульсная модуляция первого рода (ЧИМ-1). В этом случае $t_{n+1} = t_n + \Phi(\sigma(t_n))$,

$$\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\sigma(t_n))}{\tau}, & t_n \leqslant t < t_n + \tau, \\ 0, & t_n + \tau \leqslant t < t_{n+1}. \end{cases}$$

Здесь амплитудная характеристика

$$\lambda(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| \leqslant \Delta, \\ \operatorname{sign}\sigma, & |\sigma| > \Delta, \end{cases}$$

где $\Delta \geqslant 0$ — порог нечувствительности. Функция $\Phi(\sigma)$ описывает модуляционную характеристику. Она определена и непрерывна на вещественной оси, четная, не возрастает при $0 \leqslant \sigma < \infty$ и имеет положительную горизонтальную асимптоту $\Phi = \Phi_\infty > 0$ при $\sigma \to +\infty$ (простейший пример: $\Phi(\sigma) = \Phi_\infty + 1/(|\sigma| + 1)$). Кроме того, $0 < \tau < \Phi_\infty$. Очевидно, статическая характеристика для ЧИМ-1 имеет вид $\lambda(\sigma)/\Phi(\sigma)$.

Частотно-импульсная модуляция второго рода (ЧИМ-2). В этом случае t_{n+1} — минимальный корень уравнения

$$t_{n+1} = t_n + \Phi(\sigma(t_{n+1})), \quad t_{n+1} > t_n.$$

Функции $\lambda(\sigma)$, $\Phi(\sigma)$, $f(t)$ и статическая характеристика модулятора здесь такие же, как для ЧИМ-1.

Широтно-импульсная модуляция первого рода (ШИМ-1). В этом случае $t_n = nT$,

$$\xi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(nT), & nT \leqslant t < nT + \tau_n, \\ 0, & nT + \tau_n \leqslant t < (n+1)T, \end{cases} \tag{3}$$

$$\tau_n = F(\sigma(nT)).$$

Здесь амплитудная характеристика равна $\operatorname{sign}\sigma$, а модуляционная характеристика

$$F(\sigma) = \begin{cases} T|\sigma|/\Delta, & |\sigma| \leqslant \Delta, \\ T, & |\sigma| \geqslant \Delta, \end{cases}$$

где Δ — заданный положительный параметр. Очевидно, статическая характеристика модулятора имеет вид

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} \sigma/\Delta, & |\sigma| \leqslant \Delta, \\ \operatorname{sign}\sigma, & |\sigma| \geqslant \Delta. \end{cases}$$

Широтно-импульсная модуляция второго рода (ШИМ-2). Здесь $t_n = nT$, $\xi(t)$ определяется формулой (3), а τ_n определяется как минимальный неотрицательный корень уравнения

$$|\sigma(nT + \tau_n)| = \Delta\tau_n/T,$$

если такой корень существует на интервале $[0, T]$. Если же такого корня нет, то $\tau_n = T$. При $\sigma(nT) = 0$ выполнено $\xi(t) = 0$ при $nT \leqslant t < (n+1)T$.

Здесь амплитудная, модуляционная и статическая характеристики импульсного модулятора такие же, как для ШИМ-1.

Интегральная широтно-импульсная модуляция (ИШИМ). В этом случае $t_n = nT$,

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & nT \leqslant t < nT + \varsigma_n, \\ \operatorname{sign} \mu_n(\varsigma_n), & nT + \varsigma_n \leqslant t < (n+1)T, \end{cases}$$

где

$$\mu_n(t) = \int\limits_0^t \sigma(nT + s)ds,$$

а ς_n — минимальный положительный корень уравнения $|\mu_n(\varsigma_n)| = T\Delta \quad (\Delta = \mathrm{const} > 0)$, принадлежащий интервалу $(0, T]$; если такого корня не существует, то $\varsigma_n = T$. Нетрудно убедиться, что статическая характеристика модулятора имеет вид

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| \leqslant \Delta, \\ \left(1 - \dfrac{\Delta}{|\sigma|}\right) \operatorname{sign} \sigma, & |\sigma| \geqslant \Delta. \end{cases}$$

Преимуществом ИШИМ является фильтрация высокочастотных шумов ввиду того, что функция $\sigma(t)$ интегрируется. Основной недостаток ИШИМ состоит в том, что модулятор нечувствителен к значениям входа $|\sigma| \leqslant \Delta$ и статическая характеристика существенно нелинейна.

В работе [22] описаны два вида ИШИМ с линейной статической характеристикой и отсутствием нечувствительности.

В заключение отметим, что модулированные параметры как функционалы, действующие в пространстве непрерывных входных функций, в случае модуляции второго рода, как правило, разрывны, даже если соответствующая модуляционная характеристика непрерывна.

Иногда рассматривают АИМ и ЧИМ с мгновенными импульсами, которые получаются из прямоугольных предельным переходом при $\tau \to 0$ [32]. В этом случае для сигнала $\xi(t)$ на выходе ИМ имеет место выражение

$$\xi(t) = \sum_n \lambda_n(\sigma(t_n - 0))\, \delta(t - t_n), \tag{4}$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака [32].

4. Устойчивость систем с мгновенными импульсами

Для простоты ограничимся рассмотрением системы с одним ИМ, непрерывная линейная часть (НЛЧ) которой описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + b\,\xi, \qquad \sigma = c^* x, \tag{5}$$

где A — постоянная $m \times m$-матрица, b и c — постоянные m-мерные столбцы (все величины вещественные), звездочка — знак транспонирования, $\sigma(t)$ и $\xi(t)$ — сигналы на входе и выходе ИМ, связанные соотношениями (4).

Система (5) называется устойчивой в целом, если состояние равновесия $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову и, кроме того, $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и при всех $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Наряду с этим определением для систем с мгновенными импульсами используется понятие конечно-импульсной устойчивости [64].

Система (4), (5) называется глобально конечно-импульсной устойчивой, если для любого $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ существует такое число N, что при $t > t_N$ выполнено $\xi(t) = 0$.

Понятие конечно-импульсной устойчивости применительно к нейронной сети, перерабатывающей импульсы, поступающие на ее входы, означает, что при прекращении внешней стимуляции сеть возвращается в состояние покоя [8].

Рассмотрим систему с АИМ, описываемую уравнениями (4), (5) при $t_n = nT$. В этом случае, подставив (4) в (5) и проинтегрировав от $nT - 0$ до $(n+1)T - 0$, получим дискретную систему

$$x_{n+1} = Px_n + q\lambda(\sigma_n), \tag{6}$$

где $x_n = x(nT - 0)$, $\sigma_n = c^* x(nT - 0)$, $P = e^{A\tau}$, $q = e^{A\tau} b$.

Устойчивость в целом системы (6) и более общих дискретных систем изучалась как с помощью функций Ляпунова и частотной теоремы [19, 20, 45–47, 80, 81], так и с помощью метода априорных интегральных оценок [35, 38–40, 49, 50, 66, 84]. Были получены частотные критерии устойчивости в целом системы (6) для класса непрерывных нелинейных функций $\lambda(\sigma)$, удовлетворяющих условию сектора, а также для монотонных $\lambda(\sigma)$. Приведем простейший из этих критериев [40].

Теорема 1. *Пусть все собственные числа матрицы P лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости и при всех комплексных μ, $|\mu| = 1$, выполнено частотное условие*

$$\frac{1}{k} + \Re W(\mu) > 0,$$

где $W(\mu) = c^*(P - \mu I)^{-1}q$. *Тогда система* (6) *устойчива в целом при любой непрерывной нелинейной функции* $\lambda(\sigma)$, *удовлетворяющей при* $\sigma \neq 0$ *условию сектора*

$$0 < \frac{\lambda(\sigma)}{\sigma} < k.$$

Если применить описанную выше схему к системам с ШИМ или ЧИМ, то также получаем уравнения вида (6), но уже не с постоянными, а с переменными коэффициентами (которые к тому же являются функционалами от $x(t)$). Единственное исключение представляют системы с ШИМ-1, для которых в [58] был предложен оригинальный метод сведения к дискретному случаю.

Предположим, что все собственные числа матрицы A вещественны и различны. Тогда матрица A может быть приведена к диагональному виду, т. е. существует матрица S такая, что $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_m)$. Сделаем в системе (5) замену переменных, используя формулу $x = Sy$. Получаем систему

$$\frac{dy_j}{dt} = \nu_j y_j + g_j \xi \quad (j = 1, \ldots, m), \qquad \sigma = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j.$$

Интегрируя эту систему от nT до $(n+1)T$, получим

$$y_j((n+1)T) = e^{\nu_j T} y_j(nT) + g_j \phi_j(\sigma_n),$$

где $\sigma_n = \sigma(nT)$,

$$\phi_j(\sigma_n) = \frac{e^{\nu_j T}}{\nu_j} \left(1 - e^{-T\nu_j \phi(\sigma_n)}\right) \operatorname{sign} \sigma_n.$$

В результате имеем систему вида (6), но уже не с одной, а с m нелинейностями. Для таких систем известны частотные условия абсолютной устойчивости [18]. Описанный метод был распространен на случай комплексных собственных чисел матрицы A [71], а также использовался в других различных ситуациях [46, 57, 67, 72, 78, 79, 85, 86].

В работе [28] был получен частотный критерий отсутствия периодических режимов в системе (6).

В случае частотной модуляции сведение к дискретному уравнению с целью получения частотных условий устойчивости мало продуктивно, так как P и q в уравнении (6) оказались бы не постоянными, а зависящими от x_n. Для исследования устойчивости систем с ЧИМ оказалась полезна следующая лемма [8, 34], вытекающая из свойства положительности ядер интегральных операторов.

Пусть $K(t)$ — комплекснозначная $l \times l$-матрица с непрерывными и ограниченными при $t \geqslant 0$ элементами, причем $K(+0) = K(+0)^*$ (звездочка обозначает эрмитово сопряжение). Распространим $K(t)$ на отрицательные значения t с помощью формулы $K(-t) = K^*(t)$ и введем обозначение

$$\widetilde{K}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} K(t)\,dt,$$

$|\widetilde{K}(p)|$ — сумма модулей элементов матрицы $\widetilde{K}(p)$.

Рассмотрим неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Lambda_k^* K(t_k - t_j)\Lambda_j \geqslant 0, \tag{7}$$

где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, Λ_k — l-мерные комплексные столбцы.

Лемма 1. *Пусть матрица* $\widetilde{K}(p)$ *аналитична при* $\Re p > 0$, *непрерывна на мнимой оси и величина* $|\widetilde{K}(p)|$ *ограничена при* $\Re p \geqslant 0$. *Тогда неравенство*

$$\widetilde{K}(i\omega) + \widetilde{K}(i\omega)^* \geqslant 0$$

при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ *необходимо и достаточно для выполнения свойства* (7).

В качестве примера рассмотрим систему (4), (5) с сигма-импульсной модуляцией (Σ-ЧИМ) [74, 75], при которой $t_{n+1} = t_n + T_n$, где T_n — минимальный положительный корень уравнения $|u_n(T_n)| = \Delta$ ($\Delta = \mathrm{const}$) при

$$u_n(t) = \int\limits_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\sigma(t_n + \tau)\,d\tau,$$

а $\lambda_{n+1} = \operatorname{sign} u_n(T_n)$. Отметим, что этот вид частотной модуляции использовался в [73] при описании математической модели нейрона.

Введем обозначения:

$$W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b, \quad G(p) = \frac{1}{p + \alpha}(\Delta + W(p)), \quad r = \lim_{p\to\infty} pW(p).$$

С помощью леммы и предложенного в [21] технического приема был получен следующий результат [8].

Теорема 2. *Предположим, что матрица A гурвицева и существует такое положительное число ϑ, что выполнены неравенства*

$$\Delta > \vartheta(r - \Delta\alpha), \qquad \Re[(1 + i\omega\vartheta)G(i\omega)] > \vartheta\Delta, \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Тогда система (4), (5) *с сигма-импульсной модуляцией глобально конечно-импульсно устойчива.*

В [31] эта теорема была распространена на случай $\vartheta < 0$, а в [8] — на случай наличия у матрицы A одного нулевого или пары чисто мнимых собственных чисел. Там же были получены частотные условия конечно-импульсной устойчивости системы, содержащей несколько несинхронизированных частотно-импульсных модуляторов. Несколько иной частотный подход к исследованию систем с сигма-импульсной модуляцией был предложен в [68].

В монографии [4] частотные критерии абсолютной устойчивости и неустойчивости использовались для исследования частотно-импульсных систем, в которых описание модулятора может быть сведено к релейно-гистерезисной модели [41]. Приближенный частотный метод, позволяющий установить отсутствие периодических решений в системе с ЧИМ и основанный на идее гармонической линеаризации, был предложен в [82, 83].

Отметим также многочисленные работы, в которых были получены частотные критерии устойчивости дискретных систем фазовой синхронизации (см., например, [29, 30, 70]).

5. Устойчивость систем с импульсами конечной длительности

Основная трудность, возникающая при исследовании устойчивости таких систем, состоит в том, что знаки сигналов на входе и выходе ИМ могут не быть согласованы, т. е. неравенство $\xi(t)\sigma(t) \geqslant 0$ может нарушаться. Например, в случае ШИМ-1 модулирующий сигнал на промежутке $[nT,\, nT+\tau_n]$ может сменить знак, в то время как функция $\xi(t)$ на этом промежутке постоянна. Однако если имеется нечувствительность, т. е.

$$\xi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(nT) & \text{при} \quad nT \leqslant t < nT+\tau_n, \\ 0, & \text{при} \quad nT+\tau_n \leqslant t < (n+1)T, \end{cases}$$

если $|\sigma(nT)| > \Delta > 0$, и $\xi(t) = 0$ при $t \in [nT,\, (n+1)T)$, если $|\sigma(nT)| \leqslant \Delta$, то можно найти такое число $\nu_0 > 0$, что

$$\int\limits_{nT}^{(n+1)T} [\sigma(t)\xi(t) - \nu_0\xi^2(t)]\, dt \geqslant 0.$$

Используя эту идею, в [7] методом априорных интегральных оценок были получены частотные условия устойчивости в целом асинхронных импульсных систем с несколькими ИМ, непрерывные линейные части которых могут содержать астатические блоки. В случае одного ИМ и устойчивой НЛЧ полученные частотные условия имеют вид

$$\nu_0 + \Re W(i\omega) > 0, \quad \omega \in [-\infty,\, +\infty]. \tag{8}$$

Однако $\nu_0 \to +0$ при $\Delta \to +0$ и в случае отсутствия нечувствительности область устойчивости становится пустой.

В [51] для исследования устойчивости нелинейных систем было введено понятие интегральной квадратичной связи. Пусть система имеет m нелинейных блоков и описывается уравнением

$$\sigma(t) = \alpha(t) + \int\limits_0^t \Omega(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - R\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — m-мерная вектор-функция выходов нелинейных блоков, $\sigma(t)$ — m-мерная вектор-функция входов этих блоков, R — постоянная $m \times m$ матрица, $\Omega(t)$ — $m \times m$-мерная матрица-функция, $\alpha(t)$ — m-мерная вектор-функция, описывающая собственные колебания НЛЧ. Нелинейные блоки могут описываться как обычными нелинейными функциями, так и гистерезисными функциями, а также представлять собой импульсные модуляторы. Основное их свойство заключается в наличии интегральной квадратичной связи

$$\int\limits_0^{t_k} F(\varphi(t), \sigma(t))\,dt \geqslant \mathrm{const}, \tag{9}$$

где $t_k \to +\infty$, а F — некоторая вещественная квадратичная форма своих аргументов. В случае $R = 0$ в (9) форма F может зависеть еще и от $\dot{\sigma}$.

В [51] метод интегральных квадратичных связей был детализирован для системы с одним ИМ. Сформулируем соответствующий результат для случая прямоугольных импульсов.

Пусть $t_{k+1} = \psi(t_k, \sigma(t_k))$. В случае модуляции ширины импульса $\varphi(t) = 0$ для $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, если $|\sigma(t_k)| < \Delta$. Если $|\sigma(t_k)| \geqslant \Delta$, то

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(t_k) & \text{при} \quad t_k \leqslant t < t_k + F(|\sigma(t_k)|), \\ 0 & \text{при} \quad t_k + F(|\sigma(t_k)|) \leqslant t < t_{k+1}, \end{cases}$$

где $F(\lambda)$ — непрерывная монотонно возрастающая при $\lambda \geqslant \Delta$ функция.

Теорема 3 ([51]**).** *Пусть* $m = 1$, $R = 0$, $\alpha(t) \in L_2[0, +\infty) \cap L_1[0, +\infty)$ *и справедлива оценка* $|\Omega(t)| + |\dot{\Omega}(t)| \leqslant Ce^{-\varepsilon t}$, $\varepsilon > 0$. *Определим*

$$\nu = \inf_{\sigma \geqslant \Delta} \left[\sigma + \frac{1}{2}(a-b)F(\sigma)\right], \qquad a = \Omega(0), \qquad b = \int\limits_0^\infty |d\Omega|.$$

Пусть

$$\nu + \Re\chi(i\omega) > 0, \qquad \omega \in [-\infty, +\infty], \tag{10}$$

где $\chi(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}\Omega(t)\,dt$. *Тогда*

$$\varphi(t)^2 + \sigma(t)^2 + \dot{\sigma}(t)^2 \leqslant \varkappa_1 \int\limits_0^\infty |\alpha(t)|\,dt + \varkappa_2[\alpha(t)^2 + \dot{\alpha}(t)^2],$$

причем $\varphi(t)$, $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$ *принадлежат пространству* $L_2[0, +\infty)$ *и* $\sigma(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что $\nu = 0$ при $\Delta = 0$. Таким образом, область устойчивости в пространстве параметров, определяемая частотными условиями как (8), так и (10), становится пустой при $\Delta \to +0$. Отсюда видна необходимость развития иного подхода, который более полно учитывал бы характеристики ИМ и в случае ШИМ давал бы непустую область устойчивости и при отсутствии нечувствительности.

Для систем с достаточно высокой частотой импульсации такой подход был предложен в [59] на основе усреднения сигнала на выходе ИМ и метода априорных интегральных оценок. Пусть $\varphi_0(\sigma)$ — «эквивалентная» нелинейность, т. е. такая функция, что для любого n существует такое число $\widetilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1}]$, что среднее значение n-го импульса

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t)\, dt$$

удовлетворяет равенству $v_n = \varphi_0(\sigma(\widetilde{t}_n))$. Для всех описанных выше видов модуляции такая эквивалентная нелинейность совпадает со статической характеристикой ИМ.

Введем в рассмотрение класс G импульсных модуляторов (G-модуляторов — genuine modulators), обладающих следующими свойствами:

1. Оператор G каждой непрерывной при $t \geqslant t_0$ функции $\sigma(t)$ сопоставляет кусочно-непрерывную функцию $\xi(t)$ и числовую последовательность $\{t_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$;
2. При всех n справедлива оценка $\delta_0 T \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant T$, где T, δ_0 — положительные числа, т. е. частота импульсации ограничена и снизу, и сверху;
3. На любом промежутке $[t_n, t_{n+1})$ функция $\xi(t)$ сохраняет знак;
4. Оператор физически реализуем, т. е. $\xi(t)$ зависит лишь от значений $\sigma(s)$ при $s \leqslant t$;
5. Для оператора существует эквивалентная нелинейность.

В [59] для систем с устойчивой НЛЧ и G-модулятором, эквивалентная нелинейность которого непрерывна и при $\sigma \neq 0$ удовлетворяет условию сектора

$$0 < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < k, \tag{11}$$

было получено частотное условие устойчивости в целом

$$\frac{1}{k} + \Re\chi(i\omega) > \varkappa(T),$$

где $\chi(i\omega)$ — частотная характеристика НЛЧ, а $\varkappa(T)$ зависит от временны́х характеристик НЛЧ, причем $\varkappa(T) \to 0$ при $T \to 0$.

Развитие метода усреднения было продолжено в [42–44], где были предложены новые виды интегральных квадратичных связей. Окончательное оформление эта теория получила в [13, 62].

Введем в рассмотрение функции: $v(t) = v_n$ при $t_n \leqslant t < t_{n+1}$ («замороженная эквивалентная нелинейность») и

$$u(t) = \int_0^t [\xi(\lambda) - v(\lambda)]\, d\lambda$$

(ошибка усреднения). Тогда справедливо неравенство [13]

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u(t)^2 dt \leqslant \frac{(t_{n+1} - t_n)^2}{3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} v(t)^2 dt. \tag{12}$$

Поясним технику усреднения на примере импульсной системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \qquad \xi = M\sigma, \qquad \sigma = c^* x, \tag{13}$$

где A — постоянная гурвицева $m \times m$ матрица, b и c — постоянные m-мерные столбцы, M — G-модулятор, эквивалентная нелинейность которого удовлетворяет условию (11).

Сделаем в системе (13) замену $x = y + bu$ и приведем ее к виду

$$\dot{y} = Ay + bv + Abu, \qquad \sigma = c^* y + c^* bu. \tag{14}$$

Для исследования устойчивости системы (14) рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = x^* H x$, где H — положительно определенная матрица. Воспользовавшись S-процедурой [54], неравенствами (12) и

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (c^* y(t) - c^* y(\widetilde{t}_n))^2 dt \leqslant \frac{4(t_{n+1} - t_n)^2}{\pi^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (c^* \dot{y}(t))^2 dt,$$

а также частотной теоремой [52], после ряда интегральных оценок приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Если существуют такие положительные числа ε, τ, что справедливо неравенство*

$$1/k - \varepsilon_1 - \tau - \varepsilon_1 \varkappa^2 > 0$$

и при всех вещественных ω выполнено частотное условие

$$\frac{1}{k} + \Re W(i\omega) > \delta(\omega, T), \tag{15}$$

где

$$\delta(\omega, T) = \tau + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \omega^2 |W(i\omega)|^2 + \frac{T^2}{3\tau} |\chi(i\omega)|^2 \left[\varepsilon_1 (1/k - \varepsilon_2 - \tau)\omega^2 + 1/4\right],$$

$$\varepsilon_1 = \frac{T^2}{\pi^2\varepsilon}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon + T|\varkappa|, \qquad \varkappa = -c^*b, \qquad \chi(p) = pW(p) - \varkappa,$$

то система (13) *устойчива в целом.*

Центральным моментом доказательства является вывод оценки

$$V(y(t_{n+1})) - V(y(t_n)) + \varepsilon_0 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\|y(t)\|^2 + v^2 + u^2\right) dt \leqslant 0,$$

из которой вытекает утверждение теоремы.

Очевидно, что если в (15) положить $\varepsilon = \tau = T$ и устремить $T \to +0$, то $\delta(\omega, T) \to 0$ и (15) примет вид кругового критерия

$$\frac{1}{k} + \Re W(i\omega) > 0$$

абсолютной устойчивости непрерывной системы, которая получается из (13) при замене соотношения $\xi = M\sigma$ на $\xi = \varphi(\sigma)$.

С помощью метода усреднения на импульсные системы с достаточно высокой частотой импульсации был перенесен частотный критерий Попова абсолютной устойчивости [13, 60], частотный критерий устойчивости систем с монотонной дифференцируемой нелинейностью [25, 69], изложенный в [1] прием построения функций Ляпунова в виде форм высшего порядка [12], предложенный в [27] метод стабилизации линейной системы с помощью периодического внешнего воздействия [16], частотные критерии автоколебательности по В. А. Якубовичу [13, 15] и была исследована устойчивость импульсных систем с белошумным возмущением коэффициентов [9–11].

6. Заключение

В статье дано математическое описание двух классов импульсной модуляции (с импульсами конечной длительности и с мгновенными импульсами) и проанализированы их свойства. Рассматриваются примеры импульсной модуляции (АИМ, ЧИМ-1, ЧИМ-2, Σ-ЧИМ, ШИМ-1, ШИМ-2, ИШИМ). Излагается история развития частотных методов исследования устойчивости нелинейных импульсных систем как с импульсами конечной длительности, так и с мгновенными импульсами.

Список литературы

1. *Баркин А.И.*, *Зеленцовский А.Л.*, *Пакшин П.В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
2. *Бромберг П.В.* Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования. — М.: Оборонгиз, 1953.
3. *Бромберг П.В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. — М.: Наука, 1967.

4. Время-импульсные системы автоматического управления / Под ред. И.М. Макарова. — М.: Наука, 1997.
5. *Гелиг А.Х.* Об устойчивости математической модели нейронной сети // Биофизика. — 1968. — № 2. — С. 290–296.
6. *Гелиг А.Х.* Абсолютная устойчивость нелинейных импульсных систем с широтной и временной модуляцией // АиТ. — 1968. — № 7. — С. 33–43.
7. *Гелиг А.Х.* Устойчивость нелинейных импульсных систем // ДАН СССР. — 1968. — Т. 178, № 4. — С. 793–796.
8. *Гелиг А.Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1982.
9. *Гелиг А.Х.*, *Елхимова Ю.В.* Устойчивость функционально-дифференциальных уравнений Ито с монотонной нелинейной характеристикой // Вест. СПб. ун-та. Сер. 1. — 1995. — Т. 28, Вып. 4. — С. 3–7.
10. *Гелиг А.Х.*, *Елхимова Ю.В.* Устойчивость нелинейных импульсных систем при случайных возмущениях параметров // АиТ. — 1995. — № 11. — С. 140–147.
11. *Гелиг А.Х.*, *Елхимова Ю.В.*, *Чурилов А.Н.* Устойчивость одного класса функционально-дифференциальных уравнений Ито // Вест. СПб. ун-та. Сер. 1. — 1994. — Вып. 2, № 8. — С. 3–9.
12. *Гелиг А.Х.*, *Кузнецов Н.В.*, *Михеева Н.Н.* Устойчивость импульсных систем управления // Тр. 6-го СПб. симпозиума по теории адаптивных систем. СПб., 1999, 7–9 сент. — Т. 2. — С. 50–53.
13. *Гелиг А.Х.*, *Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1993.
14. *Гелиг А.Х.*, *Чурилов А.Н.* Динамика систем с импульсной модуляцией // Нелинейная теория управления и ее приложения. Динамика, управление, стабилизация / Под ред. В.М. Матросова, С.Н. Васильева, А.И. Москаленко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 313–339.
15. *Гелиг А.Х.*, *Чурилов А.Н.* Автоколебания в импульсной системе с несколькими модуляторами // Вест. СПб. ун-та, Сер. 1. — 1999. — Вып. 2. № 8. — С. 3–8.
16. *Гелиг А.Х.*, *Чурилова М.Ю.* Стабилизация импульсных систем периодическим внешним воздействием // Анализ и управление нелинейными колебательными системами / Под ред. Г.А. Леонова и А.Л. Фрадкова. — СПб.: Наука, 1998. — С. 5–21.
17. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: ГИФМЛ, 1963. (перевод с англ.).
18. *Джури Э.*, *Ли Б.* Абсолютная устойчивость систем с многими нелинейностями // АиТ. — 1965. — Т. 26, № 6. — С. 945–965.
19. *Дмитриев Ю.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с одним нелинейным блоком // ДАН СССР. — 1965. — Т. 164, № 2. — С. 263–266.
20. *Дмитриев Ю.А.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с одним импульсным регулятором // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 3. — С. 511–514.
21. *Дымков В.И.* Об абсолютной устойчивости частотно-импульсных систем // АиТ. — 1967. — № 10. — С. 109–114.

22. *Ерихов М.М.*, *Островский М.Я.* Достаточные условия существования T-периодических режимов в системах «линейной» интегральной широтно-импульсной модуляцией // АиТ. — 1987. — № 9. — С. 26–30.
23. *Жуковский Н.Е.* Теория регулирования хода машин / Собр. сочинений. Т. III. Гидравлика. Прикладная механика. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
24. *Красносельский М.А.*, *Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.
25. *Кузнецов Н.В.* Устойчивость одного класса функционально-дифференциальных уравнений в простейшем критическом случае с монотонной дифференцируемой нелинейной характеристикой // Дифференц. уравнения и процессы управления (электронный журн.). — 2003. № 3. — http://www.neva.ru/journal.
26. *Кунцевич В.М.*, *Чеховой Ю.Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. — Киев: Техника, 1970.
27. *Леонов Г.А.* Частотный критерий стабилизации нелинейных систем гармоническим внешним воздействием // АиТ. — 1986. — № 1. — С. 169–184.
28. *Леонов Г.А.* Оценка периодических колебаний нелинейных динамических систем // АиТ. — 2005. — № 6. — С. 147–152.
29. *Леонов Г.А.*, *Селеджи С.М.* Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. — СПб.: Невский диалект, 2002.
30. *Леонов Г.А.*, *Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000.
31. *Лычак М.М.*, *Чеховой Ю.Н.* О некотором обобщении статьи А.Х. Гелига «Устойчивость импульсных систем с частотной модуляцией второго рода» // АиТ. — 1973. — № 5. — С. 177–179.
32. *Микусинский Я.*, *Сикорский Р.* Элементарная теория обобщенных функций. — М.: ИЛ, 1959.
33. *Морговский Ю.Я.* Импульсные системы управляемой структуры с тиристорными преобразованиями. — М.: Энергия, 1976.
34. *Халанай А.* Положительно-определенные ядра и устойчивость автоматических систем // Revue Roumaine Math. Pures Appl. — 1964. — V. 9, № 8. — P. 751–765.
35. *Цыпкин Я.З.* Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем // ДАН СССР. — 1962. — Т. 145, № 1. — С. 52–55.
36. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. — М.: Физматгиз, 1963.
37. *Цыпкин Я.З.* Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах // АиТ. — 1963. — № 12. — С. 4–12.
38. *Цыпкин Я.З.* Частотные критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем // АиТ. — 1964. — № 3. — С. 281–289.
39. *Цыпкин Я.З.* Критерий абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 5. — С. 1029–1032.
40. *Цыпкин Я.З.*, *Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. — М.: Наука, 1973.
41. *Чеховой Ю.Н.* Релейно-гистерезисная модель частотно-импульсного модулятора второго рода // Автоматика (Киев). — 1973. — № 4. — С. 35–38.

42. *Чурилов А.Н.* Частотный критерий устойчивости нелинейных импульсных систем // АиТ. — 1991. — № 6. — С. 95–104.
43. *Чурилов А.Н.* Частотный критерий устойчивости нелинейных импульсных систем с четным законом импульсации // АиТ. — 1992. — № 4. — С. 93–101.
44. *Чурилов А.Н.* Устойчивость систем с интегральной широтно-импульсной модуляцией // АиТ. — 1993. — № 6. — С. 142–150.
45. *Шепелявый А.И.* О качественном исследовании устойчивости в целом и неустойчивости амплитудно-импульсных систем // ДАН СССР. — 1970. — Т. 190, № 5. — С. 1044–1047.
46. *Шепелявый А.И.* Частотные критерии устойчивости в целом и неустойчивости широтно-импульсных систем управления // Вест. Ленинград. ун-та. Сер. мат., мех., астр. — 1972. — Вып. 3. — С. 77–85.
47. *Шепелявый А.И.* Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // АиТ. — 1972. — № 6. — С. 49–56.
48. *Якубович В.А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — V. 28, № 6. — С. 5–30.
49. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I // АиТ. — 1967. — № 9. — С. 59–72.
50. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // АиТ. — 1968. — № 2. — С. 81–101.
51. *Якубович В.А.* Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // ДАН СССР. — 1968. — Т. 180. — С. 283–285.
52. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 384–420.
53. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Р.А. Нелепина. — М.: Наука, 1975. — С. 74–180.
54. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун-та, Сер. мат., мех., астр. — 1977. — Т. 4. — С. 73–93.
55. *Andeen R.E.* Analysis of pulse duration sampled-data systems with linear elements // IRE Trans. Automat. Control. — 1960. — V. 5, № 4. — P. 306–313.
56. *Andeen R.E.* The principle of equivalent areas // Trans. AIEE (Applications and Industry). — 1960. — № 79. — P. 332–336.
57. *Datta K.B.* Stability of pulse-width modulated feedback systems // Int. J. Control. — 1972. — V. 16, № 5. — P. 977–983.
58. *Delfeld F.R.*, *Murphy G.J.* Analysis of pulse-width-modulated control systems // IRE Trans. Automat. Control. — 1961. — V. 6, № 3. — P. 35–44.
59. *Gelig A.Kh.* Frequency criterion for nonlinear pulse systems stability // Syst. Control Lett. — 1982. — V. 1, № 6. — P. 409–412.
60. *Gelig A.Kh.*, *Churilov A.N.* Popov-type stability criterion for the functional-differential equations describing pulse-modulated control systems // Functional Different. Equations. — 1993. — V. 1. — P. 95–107.

61. *Gelig A.Kh.*, *Churilov A.N.* Stability and oscillations in pulse-modulated systems: a review of mathematical approaches // Functional Differential Equations. — 1996. — V. 3, № 3–4. — P. 287–420.
62. *Gelig A.Kh.*, *Churilov A.N.* Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. — Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1998.
63. *Gouy M.* Sur une étuve a température constante // J. Physique, Sér. 3. — 1897. — V. 6. — P. 479–483.
64. *Gülcür H.O.*, *Meyer A.U.* Finite-pulse stability of interconnected systems with complete-reset pulse frequency modulators // IEEE Trans. Automat. Control. — 1973. — V. 18, № 4. — P. 387–392.
65. *Jones R.W.*, *Li C.C.*, *Meyer A.U.*, *Pinter B.B.* Pulse modulation in physiological systems: Phenomenological aspects // IRE Trans. — 1961. — V. BME-8, № 1. — P. 59–63.
66. *Jury E.I.*, *Lee B.W.* On the stability of a certain class of nonlinear sampled-data systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1964. — V. 9, № 1. — P. 51–61.
67. *Kadota T.T.*, *Bourne H.C.* Stability conditions of pulse-width-modulated systems through the second method of Lyapunov // IRE Trans. Automat. Control. — 1961. — V. 6, № 3. — P. 266–275.
68. *Kan E.P.F.*, *Jury E.I.* On Popov criteria for ΣPFM systems // Int. J. Control, Ser. I. — 1971. — V. 13. — P. 1121–1129.
69. *Kuznetsov N.V.* On the stability of nonlinear systems with the monotonic differentiable characteristics // Дифференц. уравнения и процессы управления (электронный журн.). — 2001. — № 1. — http://www.neva.ru/journal.
70. *Leonov G.A.*, *Reitmann V.*, *Smirnova V.B.* Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. — Stuttgart, Leipzig: Teubner, 1992.
71. *Min B.I.*, *Slivinsky Ch.*, *Hoft R.G.* Absolute stability analysis of PWM systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1977. — V. 22, № 3. — P. 447–451.
72. *Murphy G.J.*, *Wu S.H.* A stability criterion for pulse-width-modulated feedback control systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1964. — V. 9, № 4. — P. 434–441.
73. *Pavlidis T.* A new model for simple neuronal nets and its application in the design of a neuronal oscillation // Bull. Math. Biophys. — 1965. — V. 27, № 2. — P. 215–229.
74. *Pavlidis T.*, *Jury E.I.* Comments to ‘Discussion of «Analisys of a new class of pulse-frequency modulated feedback systems»’ // IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — V. 10, № 4. — P. 213–214.
75. *Pavlidis T.*, *Jury E.I.* Analisys of a new class of pulse-frequency modulated feedback systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1965. — V. 10, № 1. — P. 35–43.
76. Pulsed Neural Networks / Eds. W. Maass and C.M. Bishop. — London: The MIT Press, 1998.
77. *Rantzer A.*, *Megretski A.* System analysis via integral quadratic constraints // IEEE Trans. Automat. Control. — 1997. — V. 42, № 6. — P. 812–830.
78. *Schulz H.J.* Regelungssysteme mit Impulsbreitenmodulation // Z. für Messen, Steuern, Regeln. — 1964. — V. 7, № 3. — P. 129–133.

79. *Schulz H.J.* Untersuchung von Impulssystemen mit Impulsbreitenmodulator als Regeln // Z. für Messen, Steuern, Regeln. — 1966. — V. 9, № 5. — P. 174–178.
80. *Szegö G.* On the absolute stability of sampled data control systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1963. — V. 50, № 3. — P. 558–560.
81. *Szegö G.*, *Kalman R.* Sur la stabilité absolue d'un système d'équations aux différences finies // Compt. Rendus Acad. Sci. (Paris). — 1963. — V. 257, № 2. — P. 388–390.
82. *Todo T.*, *Mori T.*, *Kuroe Y.* Modified Nyquist analysis for PFM-continuous-time hybrid systems // Int. J. Syst. Sci. — 2001. — V. 32, № 12. — P. 1143–1147.
83. *Todo T.*, *Selvaratnam K.*, *Mori T.*, *Kuroe Y.* Analysis of hybrid feedback systems with PFM mechanisms // IEE Proc. Control Theory Appl. — 1999. — V. 146, № 3. — P. 259–264.
84. *Yakubovich V.A.* Absolute stability of nonlinear discrete systems // Revue Roumaine Math. Pures Appl. — 1994. — V. 39, № 4. — P. 385–389.
85. *Ziedan I.E.* Conditions for ensuring a satisfactory stability range in a PWM system using the method of Murphy and Wu // Electron. Lett. — 1966. — V. 2. — P. 400–401.
86. *Ziedan I.E.* Stability criterion for PWM feedback systems containing one integrating element // Electron. Lett. — 1966. — V. 2. — P. 402–403.

М. Р. Либерзон[†]

О некоторых исследованиях по абсолютной устойчивости динамических систем[*]

Аннотация: настоящая статья базируется на обзоре автора [109], текст которого несколько скорректирован, а список литературы существенно расширен.

1. Вводные замечания

В течение последних шести десятилетий теория абсолютной устойчивости успешно и интенсивно развивается благодаря усилиям большого числа исследователей из разных стран. Количество публикаций в этой области очень велико. При формировании приведенного ниже списка литературы была сделана попытка представить как можно больше работ, связанных с теорией абсолютной устойчивости, тем не менее, известных автору публикаций в этой области значительно больше.

[†]) МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Москва.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 10. — С. 86–120.

Список литературы сформирован следующим образом.

Монографии [1–79] и обзоры [80–110] расположены в хронологическом порядке их выхода в свет. Список публикаций отдельных результатов разбит по годам.

Монографии, включенные в список литературы, в разной степени отражают результаты теории абсолютной устойчивости. Книги А. И. Лурье [1], В. А. Плисса [2] и А. М. Летова [4] были первыми, анализирующими результаты решения задачи Лурье–Постникова. Книга М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [5] полностью посвящена вопросам абсолютной устойчивости и дает детальный анализ всех известных на тот момент времени результатов в этой области. Среди остальных монографий есть и полностью посвященные теории абсолютной устойчивости, и такие, в которых рассматриваются другие вопросы, но результатам по абсолютной устойчивости уделено значительное внимание. В книге А. М. Цыкунова [60] квадратичный критерий абсолютной устойчивости применяется для синтеза алгоритмов адаптации систем. В монографии П. В. Пакшина [64] частотный подход и алгебраические методы исследования абсолютной устойчивости развиваются для дискретных стохастических систем. Существенное место вопросы абсолютной устойчивости стохастических систем занимают и в книге Д. Г. Кореневского [58]. В книге Г. А. Леонова и. В. Б. Смирновой [68] детально с полными математическими доказательствами приводятся основные критерии и методы теории абсолютной устойчивости (см. также обзорную статью [108]). В некоторых монографиях вопросам абсолютной устойчивости уделено немного места, но их включение в список литературы оправдано другими соображениями. Так, в известной книге Э. И. Джури [32] вопросы абсолютной устойчивости упоминаются лишь бегло, но разработанная в ней теория инноров послужила основой для иннорного развития вариационного подхода в задаче абсолютной устойчивости и привела к появлению новых видов критериев. В книге В. А. Иванова, С. А. Купреева и М. Р. Либерзона [78] задаче об абсолютной устойчивости посвящена только одна небольшая глава, но перспективы использования методов теории абсолютной устойчивости для исследования динамики космических тросовых систем очень широки и важны, что показано в подготовленной теми же авторами к печати новой монографии по космическим тросовым системам, в которой методами теории абсолютной устойчивости проводится исследование динамики космических тросовых систем различных видов. Также сравнительно небольшую по объему часть учебника В. В. Александрова и др. [77] занимают вопросы абсолютной устойчивости, но здесь впервые полно представлено очень важное направление развития вариационного подхода к проблеме абсолютной устойчивости, основанное на задаче Булгакова о накоплении возмущений и использовании принципа максимума Понтрягина.

Список обзоров сформирован по тому же принципу. Часть из них посвящена исключительно теории абсолютной устойчивости: обзоры

Ф. Р. Гантмахера и. В. А. Якубовича [82] и Е. С. Пятницкого [84] дают полную картину всех исследований по абсолютной устойчивости за период после выхода в свет монографии [5], В. А. Якубович [92] детально обсуждает частотные методы, а в обзоре А. В. Жаркова и В. А. Якубовича [91] основное место занимает квадратичный критерий, обзор М. Р. Либерзона [94] продолжает обзор [84] в части результатов по абсолютной устойчивости нестационарных систем, в работе А. Л. Лихтарникова и В. А. Якубовича [98] дан очень подробный анализ методов теории абсолютной устойчивости, обзоры Н. Е. Барабанова и др. [102] и С. В. Гусева и А. Л. Лихтарникова [107] посвящены одному из самых ярких результатов — частотной теореме (лемме Якубовича–Калмана), а обзоры [103, 104] освещают историю развития теории абсолютной устойчивости и выборочно представляют ее методы. Некоторые статьи, включенные в список обзоров, посвящены другим вопросам, но результаты по абсолютной устойчивости в большей или меньшей степени в них представлены. Исключение составляет обзорная статья А. Ю. Левина [86], в которой проблема абсолютной устойчивости напрямую не обсуждается, но получены очень важные результаты по неосцилляции решений дифференциальных уравнений, сыгравшие заметную роль в теории абсолютной устойчивости.

Несмотря на то, что список публикаций отдельных результатов далек от полноты, он все же дает достаточно ясную картину истории развития теории абсолютной устойчивости, многообразия ее методов и подходов, полученных с их помощью результатов и широты спектра их приложений.

Представляется нецелесообразным давать здесь детальное обсуждение результатов теории абсолютной устойчивости, так как это сделано в цитируемых монографиях и обзорах. Кроме того, глубокий анализ конкретных методов и результатов проводится в других статьях этого сборника. Основная цель этого обзора — играть роль своеобразного путеводителя по направлениям теории абсолютной устойчивости, помочь читателю ориентироваться в обширной литературе в этой области.

Автор выражает искреннюю признательность профессору А. Л. Фрадкову за плодотворные обсуждения настоящей статьи и ценные замечания, нашедшие отражение в тексте и в списке литературы.

2. Истоки

В 1944 г. А. И. Лурье и В. Н. Постников опубликовали статью [111] с формулировкой новой задачи об устойчивости регулируемых систем. Этой статье и обязана своим возникновением теория абсолютной устойчивости.

Необходимо назвать имена еще двух исследователей, сыгравших значительную роль в становлении и развитии теории абсолютной устойчивости.

В статьях Б. В. Булгакова [113, 114, 116] решались другие задачи (его интересовали условия отсутствия автоколебаний и вопросы о накоплении возмущений), но впервые рассматривались дифференциальные уравнения с нелинейной характеристикой, о которой известно только то, что она лежит в некотором заданном угле. Этот способ задания нелинейной характеристики был использован авторами статьи [111] и получил затем широкое распространение в теории абсолютной устойчивости. Кроме того, задача Булгакова о накоплении возмущений послужила основой для ряда исследований при изучении абсолютной устойчивости нестационарных систем с применением вариационных методов.

В статье М. А. Айзермана [115] дано уточнение постановки задачи об абсолютной устойчивости и сформулирована известная гипотеза Айзермана. Эта и последующие работы М. А. Айзермана оказали очень большое влияние на развитие теории абсолютной устойчивости.

В первоначальной постановке проблема абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования заключалась в определении условий, при которых нулевое решение $y = 0$ системы

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^* y, \quad \varphi(0) = 0, \tag{1}$$

асимптотически устойчиво в целом при любом выборе функции $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей неравенству

$$0 \leqslant \varphi(\sigma)\sigma \leqslant k\sigma^2, \quad k > 0 \text{ — число}, \tag{2}$$

т. е. лежащей в угле $[0, k]$. Здесь y — n-мерный вектор обобщенных координат, A — квадратная матрица порядка n, b — столбец, c^* — строка, $\varphi(\sigma)$ — скалярная функция. Требуется, конечно, чтобы функция $\varphi(\sigma)$ обеспечивала существование и единственность решения системы (1).

В последующие годы понятие абсолютной устойчивости расширилось и в смысле вводимых различными авторами новых определений, и в смысле многообразия рассматриваемых видов систем, тем не менее, основная суть задачи Лурье остается прежней.

Задача Лурье об абсолютной устойчивости привлекала и продолжает привлекать к себе внимание многочисленных ученых и инженеров, работающих в разных областях науки и техники. Это объясняется как интересом в теоретическом плане, так и огромным значением задачи абсолютной устойчивости в прикладных вопросах, связанных с обеспечением надежности работы технических систем, управлением движением, решением ряда других задач при заранее неизвестных, но неизбежных в процессе эксплуатации изменениях технических характеристик.

3. Гипотезы и примеры

Показательно, что продвижение в решении задачи Лурье об абсолютной устойчивости связано с большим количеством выдвигаемых гипотез, которые не подтверждались, опровергались контрпримерами и все же оказывали влияние на приближение к решению задачи. Остановимся на некоторых из них, по-видимому, наиболее существенных.

В 1949 г. М. А. Айзерманом [115] была сформулирована гипотеза об устойчивости в гурвицевом угле, суть которой сводится к следующему. Возьмем в системе (1) вместо нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ линейную из угла $[0, k]$:

$$\varphi(\sigma) = h\sigma, \quad h \in [0, k] \text{ — число.}$$

Предположим, что полученная таким образом линейная система асимптотически устойчива независимо от выбора числа $h \in [0, k]$, т. е. угол $[0, k]$ — гурвицев. Следует ли из этого, что нелинейная система (1) абсолютно устойчива в классе нелинейных характеристик (2)? Поиском ответа на этот вопрос занялись многие исследователи. Сразу же [117, 120–124] были построены примеры, показавшие, что если гипотеза и верна, то в классе нелинейных характеристик, из которого исключены функции $\varphi(\sigma)$, асимптотически приближающиеся к ограничивающим прямым. Гипотеза Айзермана в общей формулировке была окончательно опровергнута в 1956 г. В. А. Плиссом, построившим контрпример системы 3-го порядка. Тогда возникла проблема Айзермана о выделении нелинейных систем, устойчивых в гурвицевом угле.

В 1957 г. Р. Калман [125] высказал гипотезу о том, что устойчивость в гурвицевом угле имеет место для систем с более жесткими условиями на нелинейность:

1) дифференцируемая функция $\varphi(\sigma)$ лежит в заданном угле $[0, k]$,

2) ее производная по σ удовлетворяет ограничениям:

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leqslant k - \varepsilon_2, \quad \varphi(0) = 0,$$

ε_1 и ε_2 — произвольные фиксированные сколь угодно малые положительные числа.

В 1966 г. Р. Е. Фиттс [149] построил пример системы 4-го порядка, опровергающий гипотезу Калмана. Позднее Н. Е. Барабанов [376, 497] обнаружил ошибки в [149], построил другой контрпример к гипотезе Калмана и показал, что гипотеза не может быть верна для систем выше третьего порядка.

Каждая из указанных гипотез, несмотря на то, что оказалась в общем случае неверной, послужила стимулом к научным исследованиям, что привело к важному направлению теории абсолютной устойчивости о выделении нелинейных систем, устойчивость которых может быть исследована линейными методами.

Гипотезам Айзермана и Калмана и вопросам, связанным с проблемой Айзермана, посвящено большое количество работ, например, [158, 220, 257, 266, 288, 295, 297, 335, 345, 367, 372, 376, 401, 430, 468, 469, 479, 497, 530, 593, 628, 662, 729, 796, 812] и другие.

Оригинальный и эффективный критерий В. М. Попова [128, 16], полученный в 1959–61 гг. в виде частотного достаточного условия абсолютной устойчивости, вызвал новый подъем в исследованиях по абсолютной устойчивости. Гипотеза о том, что полученные с помощью частотных методов достаточные условия абсолютной устойчивости являются также и необходимыми, многим исследователям казалась непреложной. По этому поводу М. А. Айзерман писал в предисловии к русскому переводу книги С. Лефшеца [13]: «...найденные достаточные условия абсолютной устойчивости оказались столь широкими, что все работающие в этой области уверены в том, что необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости лежат где-то совсем близко». Эта гипотеза была опровергнута В. А. Якубовичем, построившим в 1967 г. пример абсолютно устойчивой системы, для которой не выполнено частотное условие Попова, а затем Е. С. Пятницким, на основе вариационного подхода построившим в 1973 г. пример системы 6-го порядка, полную область абсолютной устойчивости которой невозможно обнаружить с помощью критерии Попова. Тем не менее, вопрос о необходимости частотных условий является предметом исследований (см., например, работы [161, 361, 362, 431]).

Обилие гипотез и контрпримеров вызвало появление работ, посвященных их анализу, и на протяжении всего времени развития теории абсолютной устойчивости стимулировало периодические подъемы в исследованиях и следовавшие за ними спады, что внесло некоторый драматизм в историю этого направления науки.

4. Методы и подходы

Начальный этап исследований по теории абсолютной устойчивости связан с именем ее основоположника А. И. Лурье, который пытался решить поставленную им задачу с помощью функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» и методом S-процедуры. Классический метод исследования абсолютной устойчивости с помощью функции Ляпунова использовали вслед за А. И. Лурье очень многие авторы, а вопрос применимости S-процедуры интересовал и продолжает интересовать исследователей [107, 173, 403, 445, 511, 606, 646, 755, 815].

Частотный подход в теории абсолютной устойчивости, впервые примененный румынским ученым В. М. Поповым [128, 16], положил начало новому этапу в развитии этой области науки и лежит в основе очень большого числа работ. Кроме прямого использования критерия Попова для исследования абсолютной устойчивости ищутся специальные способы его применения [158, 190, 558, 559, 566, 798, 808], формулируются аналогичные частотные критерии [710, 731, 758, 780, 805], разрабатываются и применяются различные виды частотных критериев абсолютной неустойчивости [154, 166, 174, 273], создаются численные и итерационные методы проверки частотных критериев [316, 491, 555]. Частотный подход при исследовании систем с импульсной модуляцией описан в обзоре [106].

Глубокая проработка обоих указанных выше методов, исследование связи между ними, ряд новых оригинальных подходов к решению задачи абсолютной устойчивости и полученные на их основе важные и в некоторых случаях выдающиеся результаты содержатся в многочисленных публикациях В. А. Якубовича и руководимого им коллектива ученых и отражены в книгах и обзорах [25, 46, 56, 63, 65, 68, 72, 76, 82, 89, 91, 92, 98, 102, 106]. В серии статей [132, 135, 136, 141, 142, 143, 147, 148, 150, 151, 152, 156, 157, 160, 166, 167, 173, 174, 178, 179] представлены фундаментальные результаты В. А. Якубовича по абсолютной устойчивости и первые шаги их развития. Эти результаты оказали определяющее влияние на последующие работы в этой области. Заложены основы метода матричных неравенств, оказавшегося исключительно эффективным инструментом для исследования динамических систем. Получена частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана), которая играет особую роль в теории абсолютной устойчивости и подробно описана в обзорных статьях [102, 107]. В различных модификациях для различных видов систем и задач лемма Якубовича–Калмана применяется в целом ряде работ [293, 400, 415, 470, 495, 529, 576, 586, 595, 624, 642, 656, 726, 750, 786]. Один из основных результатов — квадратичный критерий абсолютной устойчивости. В обзоре [89] этот критерий подробно обсуждается, показаны его преимущества по отношению к известным частотным условиям абсолютной устойчивости. Окончательная формулировка квадратичного критерия абсолютной устойчивости приводится в [723], а статья [768] посвящена необходимости в квадратичном критерии абсолютной устойчивости. Широта и интенсивность использования квадратичного критерия многими исследователями подтверждают его важность и значимость в теории абсолютной устойчивости. Результаты В. А. Якубовича [452] оказались востребованы и в развитии вариационного подхода [77]. Полный список трудов В. А. Якубовича представлен в [819].

В 1970 г. Е. С. Пятницкий [162–164] положил начало применению вариационного подхода к исследованию абсолютной устойчивости нестационарных систем с нелинейной характеристикой вида $\varphi(\sigma, t)$:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b\varphi(\sigma, t), \quad \sigma = c * y, \quad \varphi(0, t) \equiv 0, \tag{3}$$

$$0 \leqslant \varphi(\sigma, t)\sigma \leqslant k\sigma^2. \tag{4}$$

Важный результат, полученный в работе [163] и послуживший основой для применения вариационного подхода, состоит в следующем. Вводится в рассмотрение линейная система, полученная из системы

(3), (4) выбором только линейных по σ функций $\varphi(\sigma, t)$. Доказано, что задачи абсолютной устойчивости полученной таким образом линейной системы и абсолютной устойчивости нелинейной системы (3), (4) эквивалентны.

Вариационный подход получил дальнейшее развитие [177, 275, 315, 343, 344, 366, 368, 385, 388, 394, 480, 481, 551, 552, 553, 649, 775, 783, 784, 806], ему уделено много места и внимания в обзоре [94].

Одно из плодотворных развитий вариационного подхода связано с идеей. В. В. Александрова о разбиении всего множества исследуемых систем на два класса: первый содержит только так называемые абсолютно неколебательные системы, второй — остальные. Для рассматриваемого вида систем выполнение условия абсолютной неколебательности влечет абсолютную устойчивость [336]. В основу исследования абсолютной устойчивости систем, не являющихся абсолютно неколебательными, положена поставленная В. В. Александровым вариационная задача о максимальном отклонении с нефиксированным временем. Решение задачи приводит к критериям абсолютной устойчивости. Этот метод развивается в работах [176, 181, 182, 239, 310, 311, 331, 341, 387, 439, 588, 590, 621, 770, 823], а с применением аппарата инноров, разработанного в монографии [32], условия абсолютной устойчивости удается привести к алгебраической легко проверяемой форме [464, 513, 514, 604, 637, 764]. Заметим, что вопросы связи между абсолютной устойчивостью и осцилляцией решений изучаются многими авторами [336, 353, 429, 499, 540, 571, 618, 787, 811, 823].

Для того чтобы продемонстрировать указанные выше результаты по развитию вариационного подхода с привлечением вопросов об осцилляции решений, рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)} + p_n(v)x^{(n-1)} + p_{n-1}(v)x^{(n-2)} + \ldots + p_1(v)x = 0, \tag{5}$$

коэффициенты которого $p_i(v) \quad (i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные функционалы, определенные на множестве V ограниченных функций времени $v(t)$, называемых возмущениями:

$$v \in V = \{v(t), |v(t)| \leqslant 1\}. \tag{6}$$

При выполнении необходимых условий (управляемость и наблюдаемость, существование и единственность решений) для динамических систем (3), (4) и (5), (6) в силу результатов из работы [163] задачи их абсолютной устойчивости эквивалентны.

Разбиение множества уравнений (5), (6) на классы может быть произведено двумя следующими способами.

I. Разбиение на два класса:
   1. Уравнения, все решения которых таковы, что их $(n-2)$-я производная не колеблется (это и есть абсолютно неколебательные системы);
   2. Остальные уравнения.

II. На n классов [621]:

1. Уравнения, все решения которых таковы, что их $(n-2)$-я производная не колеблется (абсолютно неколебательные).
2. Уравнения, все решения которых таковы, что их $(n-3)$-я производная не колеблется, но существует хотя бы одно решение, $(n-2)$-я производная которого колеблется.

……………………………………………………

k. Уравнения, все решения которых таковы, что их $(n-k-1)$-я производная не колеблется, но существует хотя бы одно решение, $(n-k)$-я производная которого колеблется ($k = 3, 4, \ldots, n-2$).

……………………………………………………

n-1. Уравнения, у которых существует хотя бы одно решение, 1-я производная которого колеблется, и хотя бы одно решение, 1-я производная которого не колеблется.

n. Уравнения, все решения которых таковы, что их 1-я производная колеблется.

В обоих разбиениях абсолютно неколебательные системы, отнесенные к первому классу, являются абсолютно устойчивыми [336]. Исследование абсолютной устойчивости систем, отнесенных к другим классам, может быть проведено на основе задачи Булгакова о накоплении возмущений (о максимальном отклонении), что подробно описано и обсуждено в монографии [77].

Возникает вопрос о выделении из всего множества рассматриваемых систем абсолютно неколебательных, т. е. абсолютно устойчивых систем. Алгебраическое легко проверяемое условие принадлежности системы к классу 1, т. е. достаточное условие абсолютной устойчивости, получено с помощью иннорного подхода следующим образом [513, 514].

Используя коэффициенты $p_i(v)$ уравнения (5), построим квадратную матрицу Δ порядка $(2n-1)$, показанную на рис. 1. Квадратные матрицы, отделенные сплошными линиями, называются иннорами [32]. Постоянная квадратная матрица вида Δ называется иннорно-положительной, если положительны определители всех ее инноров и определитель самой матрицы Δ.

Если для любых постоянных возмущений v из множества V выполняются следующие два условия:

а) коэффициенты $p_i(v)$ строго положительны,

б) матрица Δ иннорно-положительная,

то система (5), (6) является абсолютно неколебательной и, следовательно, абсолютно устойчивой.

Проверка выполнения условий а) и б) очень проста. Она облегчается тем, что матрица Δ всегда содержит левый треугольник нулей по построению, а в ее правой части треугольник нулей легко строится, как показано в [32]. Эти треугольники отделены на рис. 1 пунктирными линиями.

$$\Delta = \left\| \begin{array}{ccccccccccc} 1 & p_n & \dots & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \dots & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_2 & p_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n & (n-1)p_n & (n-2)p_{n-1} & \dots & 2p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n & (n-1)p_n & (n-2)p_{n-1} & (n-3)p_{n-2} & \dots & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)p_n & (n-2)p_{n-1} & (n-3)p_{n-2} & (n-4)p_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & n & \dots & 4p_5 & 3p_4 & 2p_3 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & (n-1)p_n & \dots & 3p_4 & 2p_3 & p_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Рис. 1

Другой подход к проблеме абсолютной устойчивости, названный принципом отсутствия ограниченных решений, предложен М. А. Красносельским и. А. В. Покровским [225]. Суть этого подхода описана в обзоре [94]. Принцип отсутствия ограниченных решений применим не только для непрерывных систем, но и в дискретных случаях. Метод развивается в работах [252, 270, 360, 402, 524, 525].

Предлагается целый ряд других методов и подходов в решении задачи об абсолютной устойчивости. Многие исследователи применяют численные методы, включая численные методы построения функции Ляпунова. Вводятся новые определения и постановки задачи абсолютной устойчивости. Целью ряда работ является получение легко проверяемых алгебраических условий абсолютной устойчивости. Эффективным инструментом исследования абсолютной устойчивости является изучение свойств полиномов. Используются методы пассификации, которым посвящена обзорная статья [105]. В. А. Якубовичем построена абстрактная теория абсолютной устойчивости [408, 414], обобщающая многие методы и критерии абсолютной устойчивости с целью их применения для исследования различных видов динамических систем.

5. Виды динамических систем

Расширение задачи об абсолютной устойчивости по сравнению с ее первоначальной постановкой связано и с рассмотрением различных новых видов динамических систем.

В 1964 г. Р. В. Брокеттом и Л. Дж. Фори [145] впервые были исследованы на абсолютную устойчивость системы автоматического регулирования с нестационарной нелинейной характеристикой вида $\varphi(\sigma, t)$. В [154] получены частотные критерии неустойчивости таких систем. Многие результаты по абсолютной устойчивости нестационарных систем представлены в обзоре [94]. Нестационарные системы являются объектом исследования с помощью вариационных методов, поэтому практически во всех работах, упомянутых выше по поводу вариационного подхода, рассматриваются нестационарные системы. Различные критерии абсолютной устойчивости нестационарных систем получены с помощью других методов. Работы [503, 509, 527] посвящены исследованию нелинейных систем с периодически нестационарной линейной частью, а [576, 586, 595] — лемме Якубовича–Калмана для нестационарных систем.

При построении математических моделей реальных систем автоматического регулирования для более точного описания работы систем возникает необходимость рассмотрения уравнений с запаздывающим аргументом, с последействием, с отклоняющимся аргументом. Исследование абсолютной устойчивости таких систем проводится многими авторами, полученные результаты отражены в монографиях и обзорах [26, 42, 50, 90, 100]. Большое место в теории абсолютной устойчивости занимают исследования импульсных и дискретных систем (см., например, [19, 46, 63, 64, 106]). Многомерные системы рассмотрены в работах [184, 197, 224, 227, 228, 229, 253, 338, 340, 815] и обзоре [108]. Абсолютная устойчивость стохастических систем изучается в монографиях [58, 62, 64], результатам исследований стохастических систем посвящен обзор [110]. В работах [245, 359, 363, 407, 413, 442, 443, 444, 451, 776, 786] изучаются распределенные системы. Абсолютная устойчивость систем, в которые нелинейные характеристики входят в виде суперпозиции, исследуется в [310, 311, 341, 516]. Критерии абсолютной устойчивости и неустойчивости систем с различными видами нелинейностей — гистерезисными, монотонными, градиентными — получены в работах [136, 147, 148, 299, 300, 301, 377]. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости гибридных динамических систем даны в статье [695], устойчивость гибридных систем изучается и в [761]. В работах [730, 795] проводится анализ абсолютной устойчивости систем с наследственностью. Методы теории абсолютной устойчивости нашли эффективное применение при исследовании абсолютной устойчивости нейронных сетей — направлению, которому посвящено очень большое число работ, многие из них представлены в списке литературы настоящего обзора. Укажем здесь лишь две сравнительно недавние статьи [742, 743] и монографию [46].

6. Приложения

Востребованность и привлекательность теории абсолютной устойчивости в большой степени обусловлена широтой применения ее методов и результатов как в других научных областях при решении других типов задач, так и в инженерных расчетах, при решении проблем механики, физики, для построения различных видов технологических процессов и пр.

Показательным примером практического применения методов теории абсолютной устойчивости является задача обеспечения устойчивости движения в атмосфере осесимметричного вращающегося летательного аппарата. Эту актуальную и важную задачу механики разные исследователи в разное время решали различными методами теории абсолютной устойчивости, уточняя и улучшая конечные результаты.

Задача состоит в следующем. Рассматривается управляемое движение в воздухе осесимметричного оперенного вращающегося летательного аппарата (рис. 2). Одним из основных требований является обеспечение правильности полета, т. е. достаточно хорошего отслеживания осью симметрии летательного аппарата переменного направления вектора скорости его центра масс. Другими словами, необходимо, чтобы «гасились» отклонения оси симметрии летательного аппарата от направления скорости его центра масс.

На рис. 2 показан летательный аппарат и так называемая полусвязанная система координат $Oxyz$. Ее начало помещено в центр масс аппарата, ось Ox совпадает с осью симметрии. Система координат $Oxyz$ колеблется вместе с осью симметрии, но не участвует во вращении аппарата вокруг оси симметрии. Плоскость Oxy и часть системы управления, которая осуществляет управление в этой плоскости, называется каналом тангажа. Плоскость Oxz и часть системы управления, которая осуществляет управление в этой плоскости — каналом курса. α — угол атаки в канале тангажа, β — угол скольжения в канале курса (угол рысканья). Для правильности полета необходимо, чтобы углы атаки и скольжения α и β оставались достаточно малыми, т. е. необходимо обеспечить устойчивость движения.

Задача об устойчивости в случае стационарного обтекания была поставлена и решена В. Н. Жермоленко и Б. Я. Локшиным (Труды НИИ механики МГУ, 1975, № 40, С. 117-122) с учетом результатов большого количества экспериментов (*Benton E.R.* Supersonic Magnus effect on a finned missile // AIAA Journal. — 1964. — V. 2, No. 1. — P. 153-155). Затем теми же авторами задача была уточнена с учетом нестационарности обтекания, эффектов типа эффекта Магнуса, отсутствия полной информации о ряде характеристик полета, что привело

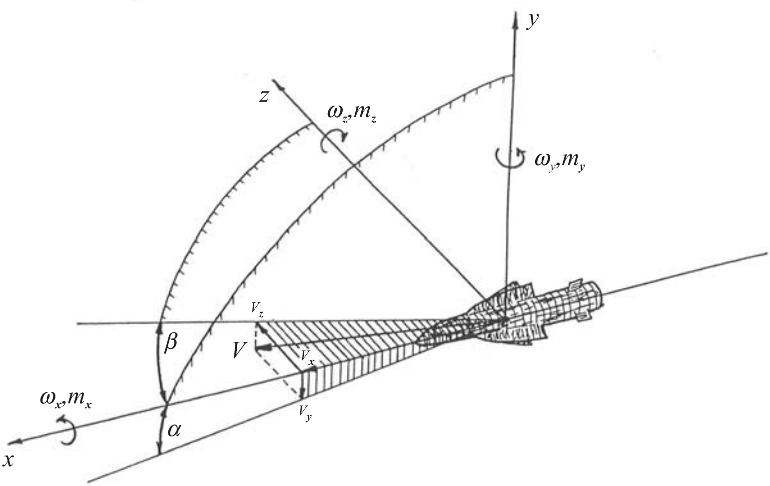

Рис. 2

к задаче об абсолютной устойчивости нестационарной системы, которая решена в работе [222] с помощью частотного достаточного критерия В. А. Якубовича. Получены несовпадающие необходимое и достаточное условия абсолютной устойчивости.

Позднее В. И. Скородинский [430] подошел к решению этой задачи с помощью численных методов, разработанных в статье [396]. Им было доказано, что достаточное условие абсолютной устойчивости, полученное в работе [222], в рассматриваемом случае является и необходимым, поэтому предположение о нестационарности обтекания воздухом летательного аппарата не оказывает влияния на устойчивость. Показано, что в данном случае гипотеза Айзермана верна и проблема Айзермана имеет решение.

В указанных работах не учитывались следующие факторы. Скорость V центра масс летательного аппарата меняется с течением времени под воздействием порывов ветра, нестационарности силы тяги, неоднородной плотности атмосферы, моментов силы Магнуса m, других возмущений, полная информация о которых отсутствует. То же относится и к угловой скорости крена ω_x. Кроме того, скорость центра масс V и угловая скорость крена ω_x функционально связаны между собой. Эти факторы, существенно влияющие на рассматриваемое движение, учтены в работе М. Р. Либерзона [500], в которой соответствующая задача об абсолютной устойчивости поставлена в новой, более точной форме. Скорость центра масс V и угловая скорость крена ω_x представлены как функции приведенного времени τ в следующем виде:

$$V(\tau) = V^0 + v(\tau), \quad |\, v(\tau)\,| \leqslant a \quad (a > 0),$$

$$\omega_x(\tau) = k(\tau)V(\tau) = k(\tau)\left(V^0 + v(\tau)\right), \quad 0 \leqslant k(\tau) \leqslant K \quad (K > 0),$$

где $v(\tau)$ и $k(\tau)$ — возмущения, полная информация о которых отсутствует. Как и в предыдущих работах, указанных выше, выписываются уравнения в отклонениях, которые на этот раз содержат две функции с неполной информацией и составляют систему дифференциальных уравнений 4-го порядка. Для этой системы и ставится задача об абсолютной устойчивости. Задача решается на основе вариационного подхода с использованием метода инноров. Продолжение решения этой задачи и уточнение конечных результатов проводится в [751] также с использованием иннорного критерия. Полученные алгебраические условия выделяют в пространстве параметров области абсолютной устойчивости и неустойчивости.

Столь подробное описание здесь решения этой задачи об устойчивости движения летательного аппарата обусловлено тем, что оно представляет собой яркий пример применения методов теории абсолютной устойчивости в прикладных вопросах. Еще один такой пример представляет собой следующая задача абсолютной устойчивости, связанная с построением специальных технологических процессов.

На протяжении последних 25–30 лет интенсивно развиваются исследования явления, названного электропластичностью: при определенном воздействии на токопроводящие материалы (металлы, сплавы, композиционные материалы) электромагнитного поля значительно улучшаются их пластические и прочностные характеристики, способность к диффузионной сварке и другие свойства. Теоретического объяснения явления электропластичности до сих пор нет (автор настоящей статьи в книге «Проблемы механики». — М.: Физматлит, 2003, на с. 510–512 высказал несколько гипотез с целью стимулировать создание теории электропластичности), но оно успешно используется в промышленности при прокатке, штамповке, волочении, производстве «бутербродов» — биметаллов и триметаллов, которые широко применяются в авиакосмической и военной отраслях промышленности.

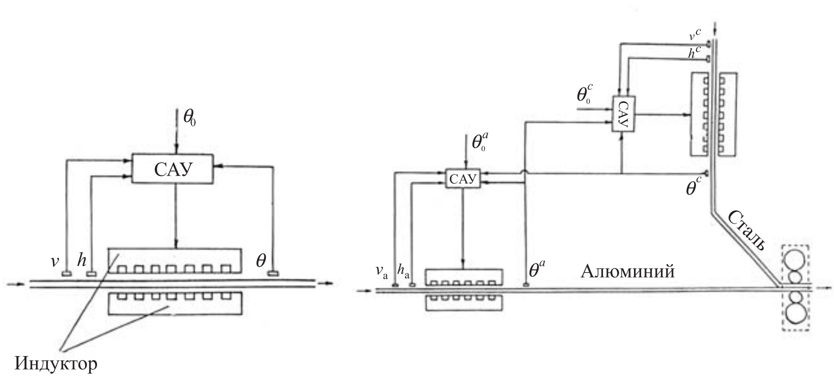

Рис. 3

На рис. 3 схематично показаны процессы, использующие явление электропластичности. Металл или сплав перед обработкой пропускается через зону воздействия электромагнитного поля (индуктор), характеристики которого регулируются в процессе работы с помощью специальной системы автоматического управления (САУ). Одним из параметров, на основе которого осуществляется управление, является температура θ полосы металла на выходе из индуктора. Температура θ сравнивается с эталонным значением θ_0 и вырабатывается сигнал ошибки $\delta = \theta_0 - \theta$. На усилитель подается напряжение u_*, пропорциональное ошибке: $u_* = k_1\delta$, где k_1 — коэффициент пропорциональности. Работу усилителя описывает уравнение

$$\tau\frac{du}{dt} + u = k_2 u_*,$$

в котором τ и k_2 — постоянная времени и коэффициент усиления усилителя. Напряжение u с выхода усилителя подается на вход регулирующего органа, в котором по закону

$$T\frac{dU}{dt} + U = k_3 u$$

формируется напряжение U, питающее индуктор (T и k_3 — характеристики регулятора). Процессы в обмотке индуктора описывает уравнение

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U,$$

где L и R — индуктивность и сопротивление обмотки, I — ток в ней.

Все выписанные выше соотношения имеют упрощенный вид, в них пренебрегали нелинейными частями характеристик звеньев, что оправдано механикой и физикой процесса. Однако при определении зависимости скорости изменения температуры разогрева полосы индуктором от величины тока в нем дело обстоит иначе. Тогда зависимость имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = RI + f(I,t).$$

Нелинейная функция f нестационарна, что обусловлено изменениями в процессе обработки свойств материала (неоднородность по длине), режима работы системы охлаждения, протекания внутренних процессов в индукторе и т. п. Зависимость f от тока I не может быть выяснена исчерпывающе. Получить явный вид этой зависимости не представляется возможным. Функция f является характеристикой не только индуктора, но и всей совокупности $<$индуктор–материал–технологический процесс$>$ и меняется с изменением режима протекания процесса. Ясно, что функция f непрерывна и $f(0,t) \equiv 0$. Границы, в которых может изменятся функция f, определяются экспериментально на основании большого количества замеров, позволяющих задать функцию f точечно на координатной плоскости (I, f). Таким образом выделяется некоторый угол $[0, K]$, за границы которого не выходит нелинейная характеристика f, т. е.

$$0 \leqslant f(I,t)I \leqslant KI^2.$$

Число K считают технической характеристикой индуктора в данном технологическом процессе.

Показанные выше соотношения описывают динамику системы автоматического управления индуктором. Конечно, это очень упрощенные соотношения, призванные лишь продемонстрировать возникновение задачи об абсолютной устойчивости. Вид функции $f(I,t)$, входящей в построенную выше систему дифференциальных уравнений, и необходимость обеспечить устойчивость этой динамической системы при любой допустимой функции $f(I,t)$ приводят к задаче об абсолютной устойчивости. Решение этой задачи дает возможность определить границы, в пределах которых могут изменяться технические характеристики без потери устойчивости работы системы. В работах [533, 597, 635, 636, 639, 665, 692, 706] строятся математические модели различных технологических процессов, в которых используется явление электропластичности для производства биметаллов, триметаллов, прокатки, штамповки и т. п., ставятся соответствующие задачи абсолютной устойчивости и проводятся их решения на основе вариационного подхода с использованием иннорных критериев.

Интересны и успешны применения методов и результатов теории абсолютной устойчивости при исследовании динамики космических тросовых систем [78], управлении вращением твердого тела [409], исследовании электроэнергетических систем [309, 547], следящих систем (таких, как электропривод) [311, 508], других физико-технических систем [369, 370], для управления курсом корабля и самолета [384, 577], движением автомобиля [694], космическими летательными аппаратами [603] и, в частности, «челноками» типа ШАТТЛ [633], при управлении деформацией пьезопреобразователя [810], исследовании ряда физических эффектов [800], при постановке экспериментов по имитации и моделированию пилотажных стендов [493]. Кроме того, методы теории абсолютной устойчивости нашли плодотворное применение при решении задач в других областях науки (см., например, работы [255, 529, 602, 630, 703, 717, 794]).

7. О возможных направлениях развития теории абсолютной устойчивости

Теория абсолютной устойчивости — это интенсивно и успешно развивающаяся область науки. Пути и направления ее развития чрезвычайно разнообразны.

Прежде всего, несмотря на обилие результатов и решенных задач по абсолютной устойчивости в самых разных постановках для большого круга различных систем, исчерпывающего решения задачи Лурье–Постникова в общей постановке до сих пор не получено. Этот факт вызывает все новые попытки получить такое решение, поэтому и возникают новые методы и подходы.

Кроме того, уже разработанные методы и полученные с их помощью критерии абсолютной устойчивости подвергаются модернизации, поискам возможного расширения применимости методов и действия критериев, усилению критериев, сравнению их с целью оптимизации выбора критерия, упрощению и облегчению проверки критериев и т. д.

Есть вопросы и задачи теории абсолютной устойчивости, ставшие уже классическими, например, проблема Айзермана, которые требуют ответов и решений все в новых постановках, для новых условий или систем, что диктуется временем и каждый раз другими актуальными требованиями.

Изобретаемые новые способы построения функции Ляпунова с целью использования исторически самого первого метода в теории устойчивости указывают еще одно направление развития в этой области.

То же самое относится и к постоянно появляющимся новым определениям и постановкам задачи абсолютной устойчивости, постоянно расширяющемуся спектру видов динамических систем, исследуемых на абсолютную устойчивость.

Большое пространство направлений развития задают разнообразные приложения. Упомянутые выше приложения методов и результатов теории абсолютной устойчивости при решении задач, возникающих вне этой теории, показывают, что необходимость решения задач абсолютной устойчивости в самых различных областях, особенно при конструировании и эксплуатации инженерных систем, существует и будет актуальна всегда.

8. Заключение

Как уже говорилось, теория абсолютной устойчивости пользуется вниманием и вызывает неиссякающий научный интерес большого числа исследователей.

Это объясняется и ее привлекательностью в теоретическом плане, и явной востребованностью со стороны практики.

Широкую известность принесла теории абсолютной устойчивости целая серия замечательных результатов, отличающихся математической красотой и оригинальностью. Главное место среди них с очевидностью занимают труды. В. А. Якубовича — разнообразные и многочисленные, всегда выделяющиеся высочайшим исследовательским мастерством, глубиной понимания и проработки проблем и огромной ценностью полученных результатов.

Несомненно, что все это является мощным стимулом к продолжению и расширению исследований по абсолютной устойчивости как для тех, кто уже давно работает в этой сфере, так и для тех, чьи имена пока неизвестны. Конечно, еще не одну яркую страницу впишет в теорию абсолютной устойчивости ее лидер Владимир Андреевич Якубович.

Пожелаем всем работающим в этой области больших творческих успехов.

Список литературы

Монографии

1. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951.
2. *Плисс В. А.* Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. — Л.: ЛГУ, 1958.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961.
4. *Летов А. М.* Устойчивость нелинейных регулируемых систем. — М.: Физматгиз, 1962.
5. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф.* Траектории корней линейных автоматических систем. — М.: Наука, 1964.
7. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
8. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964.
9. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
10. *Айзерман М. А.* Теория автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966.
11. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М.: Наука, 1966.
12. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
13. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. — М.: Мир, 1967.
14. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.
15. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
16. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970.
17. *Калман Р. Е., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
18. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1971.
19. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971.
20. *Наумов Б. Н.* Теория нелинейных автоматических систем. — М.: Наука, 1972.
21. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

22. *Барабанов А. Т., Катковник В. Я., Нелепин Р. А., Хлыпало Е. И., Якубович В. А.* Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975.
23. *Зубов В. Н.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
24. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М.: Наука, 1977.
25. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.
26. *Ивачев А. И.* Об условной устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений с последействием. — Минск, 1978.
27. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. — Киев: Вища школа, 1978.
28. *Шильман С. В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. — М.: Наука, 1978.
29. Теория устойчивости и ее приложения. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1979.
30. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. — М.: Наука, 1979.
31. *Воскресенский Е. В.* Об асимптотике решений квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Куйбышев: Мат. физ., 1979.
32. *Джури Э. И.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М.: Наука, 1979.
33. *Павликов В. Ю.* К вопросу о дискретной стабилизации нестационарных линейных систем // Вестник ЛГУ. Серия матем. мех. астрономия. — Л., 1979.
34. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений. — Одесса: Одесский ун-т, 1979.
35. *Попов Е. П.* Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1979.
36. *Айсагалиев С. А.* Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления на основе второго метода Ляпунова. — Алма-Ата: Наука, 1980.
37. *Карибов М. Р.* Разрешимость некоторых краевых задач для функционально-дифференциальных включений. — Пермь: Пермский политехн. ин-т., 1980.
38. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Принцип сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1980.
39. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости — М.: Мир, 1980.
40. *Follinger Otto.* Nichtlineare Regelungen. I. Grundlagen und harmanishe Balance. — Berlin: Akad.-Verl, 1980.
41. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. — М.: Энергоиздат, 1981.
42. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. — М.: Наука, 1981.

43. *Поливенко В. И.* Об устойчивости в целом нулевого решения одной системы третьего порядка с несколькими нелинейностями, зависящими от одной, двух и трех переменных. — Элиста: Калм. Университет, 1981.
44. *Баркин А. И.* Оценки качества нелинейных систем регулирования. — М.: Наука, 1982.
45. *Бирюк Н. Д., Юргелас В. В., Ефанова Т. Д.* Критерии устойчивости и неустойчивости линейной нестационарной системы второго порядка. — Воронеж: Воронежский ун-т, 1982.
46. *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. — Л.: ЛГУ, 1982.
47. *Боголюбов А. Н.* Математики. Механики. Биографический справочник. — Киев: Наук. думка, 1983.
48. *Косякин А. А., Шмариков Б. М.* Колебания в цифровых автоматических системах. — М.: Наука, 1983.
49. *Нетушил А. В.* Теория автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1983.
50. *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. — М.: Наука, 1983.
51. *Гиль М. И.* Операторные функции, дифференциальные уравнения и динамика систем. — М.: Наука, 1984.
52. *Под ред. Матросова В. М., Иртегова В. Д.* Устойчивость движения. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985.
53. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
54. *Первозванский А. А.* Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986.
55. *Под ред. Воронова А. А., Матросова В. М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Наука, 1987.
56. *Под ред. Красовского А. А.* Справочник по теории автоматического управления. — М.: Наука, 1987.
57. *Хэррис К., Валенка Ж.* Устойчивость динамических систем с обратной связью. — М.: Мир, 1987.
58. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — Киев: Наук. думка, 1989.
59. *Айсагалиев С. А., Маговин М. М.* Управляемость и абсолютная устойчивость регулируемых систем в простом критическом случае. — Казань: Казан. гос. техн. ун-т, 1990.
60. *Цыкунов А. М.* Квадратичный критерий абсолютной устойчивости в теории адаптивных систем. — Фрунзе: Илим, 1990.
61. *Айсагалиев С. А., Маговин М. М.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем в критических случаях. — Казань: Казан. гос. техн. ун-т, 1991.
62. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
63. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Устойчивость и колебания нелинейных импульсных систем. — СПб.: Изд-во СПб. гос. ун-та, 1993.

64. *Пакшин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. — М.: Наука, 1994.
65. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepelyavyi A.I.* Frequency methods in oscillation theory. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
66. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency methods for nonlinear analysis. Theory and applications. — Singapore: World Scientific, 1996.
67. *Гришин В. Н., Гаврилин М. А.* Устойчивость близких к инвариантным систем стабилизации центра масс космических аппаратов. — М: Моск. авиац. ин-т (Техн. ун-т), 1997.
68. *Леонов Г.А, Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000.
69. *Leonov G.A.* Mathematical problems of control theory. — Singapore: World Scientific, 2001.
70. *Леонов Г. А., Селеджи С. М.* Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. — СПб.: Невский диалект, 2002.
71. *Khalil Hassan K.* Nonlinear systems. — 3rd Ed., Prentice-Hall, 2003.
72. *Vidyasagar M.* Nonlinear Systems Analysis. — 2nd Ed., Prentice-Hall, 2003.
73. *Леонов Г. А.* Введение в теорию управления. — СПб.: Изд-во СПб. гос. ун-т, 2004.
74. *Леонов Г. А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. — СПб.: Изд-во СПб. ун-т, 2004.
75. *Пятницкий Е. С.* Избранные труды.Теория управления. Т.1. — М.: Физматлит, 2004.
76. *Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh.* Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities. — Singapore: World Scientific, 2004.
77. *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением. — М.: Физматлит, 2005.
78. *Иванов В. А., Купреев С. А., Либерзон М. Р. (под ред. М.Р. Либерзона)*. Космические тросовые системы. Некоторые аспекты практического использования. — М.: Изд-во Рос. инж. акад. СИП РИА, 2005.
79. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2005.

Обзоры

80. *Старжинский В. М.* Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентамию // ПММ. — 1954. — Т. 18. — С. 469–510.
81. Проблемы теории импульсных систем управления. Итоги науки. — М.: Наука, 1966.
82. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем. Труды II Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. — М.: Наука, 1966.

83. *Brocket R.W.* The status of stability theory for deterministic systems. IEEE Trans. Aut. Cont. — 1966. — V. AC-11, № 3. — P. 696–706.
84. *Пятницкий Е.С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования // АиТ. — 1968. — № 6. — С. 5–36.
85. *Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения. Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1968. Т. 1. — С. 7–66.
86. *Левин А.Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x(n) + p_1(t)x(n-1) + \ldots + p_n(t)x = 0$ // УМН. — 1969. — Т. 24, Вып. 2 (146). — С. 43–96.
87. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в системах с обратной связью // АиТ. — 1972. — № 9. — С. 63–75.
88. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в анализе сложных систем с распределенными параметрами // АиТ. — 1973. — № 1. — С. 5–22.
89. *Якубович В.А.* Методы теории абсолютной устойчивости / В кн. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — С. 74–180.
90. *Алексеевская Н.Л., Громова П.С.* Второй метод Ляпунова для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Диф. уравн. с отклоняющимся аргументом. — Киев, 1977.
91. *Жарков А.В., Якубович В.А.* Квадратичный критерий условной абсолютной устойчивости и его применение // Динамика систем. — 1977. — Вып. 12. — С. 54–66.
92. *Якубович В.А.* Частотные методы качественного исследования нелинейных регулируемых систем // Abh. Akad. Wiss. DDR. — 1977. — № 3. — P. 365–387.
93. *Venkatesh Y.V.* A survey of some results in the stability and instability analyses of time-varying systems // Int. J. Non-linear Mech. — 1977. — V. 12, No. 4. — P. 251–268.
94. *Либерзон М.Р.* Новые результаты по абсолютной устойчивости нестационарных регулируемых систем (обзор) // АиТ. — 1979. — № 8. — С. 29–48.
95. *Ferrante Luigi, Marchetti Federico.* Some results on total stability // Boll. Unione mat. ital. — 1981. — V. A18, № 3.
96. *Parks P.S.* Stability of systems – a survey // Int. Conf. Contr. and App., Warwick, 23–25 March, 1981, London, New York. — P. 266–267.
97. *Воронов А.А.* Современное состояние и проблемы теории устойчивости // АиТ. — 1982. — № 5. — С. 5–28.
98. *Литхарников А.Л., Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем / Доп. к кн. В. Резвана «Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием». — М.: Наука, 1983. — С. 287–356.
99. *Румянцев В.В.* О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения // Диф. уравн. — Минск: Наука и техника, 1983. — Т. 19, № 5.
100. *Кордуняну К., Лакшмикантам В.* Уравнения с неограниченным запаздыванием // АиТ. — 1985. — № 7. — С. 5–44.
101. *Pradecp S., Shrivastava S.K.* Stability of dynamical systems // J. of Guidance Control & Dynamics. — 1990. — V. 13, № 3. — P. 315–393.

102. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Лихтарников А. Л., Матвеев А. С., Смирнова В. Б., Фрадков А. Л.* Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления // АиТ. — 1996. — Т. 57, № 10. — С. 3–40.

103. *Liberzon M.R.* Lur'e problem of absolute stability — a historical essay // Proc. IFAC Symposium Nonlinear Control Systems NOLCOS'01, St-Petersburg, 2001. — V. 1. — P. 22–25.

104. *Liberzon M.R.* Absolute stability of dynamical systems (survey) // Proc. IFAC World Congress. Barcelona, 2002. V. 1. — P. 265–268.

105. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания, синхронизации // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 3–37. [1)]

106. *Гелиг А. Х.,Чурилов А. Н.* Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 60–76. [2)]

107. *Гусев С. В., Лихтарников А. Л.* Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 77–121. [3)]

108. *Леонов Г. А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // АиТ. — 2006. — № 10. — С. 47–85. [4)]

109. *Либерзон М. Р.* Очерки о теории абсолютной устойчивости // АиТ. — 2006. — № 10. — С. 86–119.

110. *Пакшин П. В., Угриновский В. А.* Стохастические задачи абсолютной устойчивости // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 122–158. [5)]

Публикации

1944

111. *Лурье А. И., Постников В. Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ. — 1944. — Т. 8, Вып. 3. — С. 246–248.

1946

112. *Айзерман М. А.* О сходимости процесса регулирования после больших начальных отклонений // АиТ. — 1946. — № 2–3. — С. 148–167.

113. *Булгаков Б. В.* Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками // ПММ. — 1946. — Т. 10, Вып. 3. — С. 313–332.

114. *Булгаков Б. В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН. — 1946. — Т. 51, № 5. — С. 339–342.

1949

115. *Айзерман М. А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости «в большом» динамических систем // УМН. — 1949. — Т. 4, Вып. 4. — С. 187–188.

[1)] См. также настоящий сборник, с. 452.
[2)] См. также настоящий сборник, с. 155.
[3)] См. также настоящий сборник, с. 77.
[4)] См. также настоящий сборник, с. 327.
[5)] См. также настоящий сборник, с. 243.

1950

116. *Булгаков Б. В., Кузовков Н. Т.* О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами // ПММ. — 1950. — Т. 14. — С. 7–12.
117. *Еругин Н. П.* Некоторые вопросы устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом // ПММ. — 1950. — Т. 14. — С. 459–512.
118. *Якубович В. А.* Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0, p(t + w) = p(t)$ // ДАН. — 1950. — Т. 74, № 5. — С. 901–903.

1951

119. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // ПММ. — 1951. — Т. 15. — С. 323–348.
120. *Малкин И. Г.* К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ. — 1951. — Т.15. — С. 59–66.

1952

121. *Еругин Н. П.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // ПММ. — 1952. — Т. 16, Вып. 5. — С. 620–628.
122. *Красовский Н. Н.* Теоремы об устойчивости движения, определяемого системой двух уравнений // ПММ. — 1952. — Т. 16, Вып. 5. — С. 547–554.

1953

123. *Красовский Н. Н.* Об устойчивости при любых начальных возмущениях одной нелинейной системы трех уравнений // ПММ. — 1953. — Т. 17, Вып. 3. — С. 330–350.

1955

124. *Еругин Н. П.* Качественные методы в теории устойчивости // ПММ. — 1955. — Т. 19, Вып. 5. — С. 599–616.

1957

125. *Kalman R.E.* Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Trans. ASME. — 1957. — № 79. — P. 553–566.

1961

126. *Гноенский Л. С.* О накоплении возмущений в линейных системах // ПММ. — 1961. — Т. 25. — С. 319–331.
127. *Левин А. Ю.* Об устойчивости решений уравнений второго порядка // ДАН. — 1961. — Т. 141, № 6. — С. 1298–1301.
128. *Попов В. М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // АиТ. — 1961. — № 8. — С. 961–979.

1962

129. *Левин А. Ю.*К вопросу о нулевой зоне устойчивости // ДАН. — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221–1223.
130. *Левин А. Ю.* Об одном критерии устойчивости // УМН. — 1962. — Т. 17, Вып. 3. — С. 211–212.
131. *Цыпкин Я. З.* Об устойчивости в целом нелинейных и импульсных автоматических систем // ДАН. — 1962. — Т. 145, № 10. — С. 52–55.

132. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.

1963

133. *Левин А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений // ДАН. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512–515.
134. *Левин А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка // ДАН. — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257–1260.
135. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования в критических случаях. I, II // АиТ. — 1963. — № 3. — С. 717–731.
136. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // ДАН. — 1963. — Т. 149, № 2. — С. 288–291.
137. *Kalman R.E.* Lyapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1963. — V. 49, № 1. — P. 201–205.

1964

138. *Кибенко А. В., Красносельский М. А., Левин А. Ю., Перов А. И.* Некоторые краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений // Труды 4-го Всес. матем. съезда, 1964. — № 2. — С. 437–444.
139. *Левин А. Ю.* О распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения // ДАН. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1281–1284.
140. *Левин А. Ю.* Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных // Матем. сб. — 1964. — Т. 64, № 3. — С. 396–409.
141. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования в критических случаях. III // ДАН. — 1964. — № 5. — С. 601–612.
142. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I // АиТ. — 1964. — № 7. — С. 1017–1029.
143. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования // ДАН. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 278–281.
144. *Bongiorno J.J. Jr.* Real-frequency stability criteria for linear time-varying systems // Proc. of the IEEE. — 1964. — V. 52, № 7. — P. 886–896.
145. *Brockett R.W., Forys L.J.* On the stability of systems containing a time-varying gain // Proc. II Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, Univ. of Illinois. Urbana, 1964. — V. 3. — P. 413–430.
146. *Hochstadt H.* A stability estimate for differential equations with periodic coefficient // Arch. Math. — 1964. — V. 15, № 4.

1965

147. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. II, III // АиТ. — 1965. — № 4. — С. 763–768.
148. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем с одной дифференцируемой нелинейностью // ДАН. — 1965. — Т. 160, № 2. — С. 298–301.

1966

149. *Fitts R.E.* Two counterexamples to Aizerman's conjecture // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1966. — V. AC-11. — P. 553–556.

1967

150. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными и линейными нестационарными блоками. I // АиТ. — 1967. — № 9. — С. 59–72.
151. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными и линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — № 6. — С. 5–30.
152. *Якубович В. А.* Частотные условия устойчивости нелинейных интегральных уравнений автоматического управления // Вестник ЛГУ. — 1967. — Вып. 2. — С. 103–125.
153. *Bickart T.A.* Periodically time-varying systems an instability criterion // Proc. of the IEEE. — 1967. — V. 55, № 11. — P. 2057–2058.
154. *Brocket R.W., Lee H.B.* Frequency-domain instability criteria for time-varying and nonlinear systems // Proc. of the IEEE. — 1967. — V. 55, № 5. — P. 604–619.

1968

155. *Левин А. Ю.* Поведение решений уравнения $x + p(t)x + q(t)x = 0$ в неколебательном случае // Матем. Сб. — 1968. — Т. 75, № 1. — С. 39–63.
156. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. II // АиТ. — 1968. — № 2. — С. 81–101.
157. *Якубович В. А.* Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // ДАН. — 1968. — Т.180, № 2. — С. 283–294.
158. *Willems J.L. Willems J.C.* Stability analisys of nonlinear control systems in the frequency domain // Messen Steuern Regeln. — 1968. — V. 11, № 3. — P. 114–116.

1969

159. *Персидский С. К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // АиТ. — 1969. — № 12. — С. 5–11.
160. *Якубович В. А.* Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений, для которых вопросы об устойчивости в целом и о неустойчивости могут быть решены эффективно // ДАН. — 1969. — Т. 186, № 5. — С. 1027–1030.

1970

161. *Леонов Г. А.* О необходимости частотного условия абсолютной устойчивости стационарных систем в критическом случае пары чисто мнимых корней // ДАН. — 1970. — Т. 193, № 4. — С. 756–759.
162. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нелинейных импульсных систем с нестационарной нелинейностью // АиТ. — 1970. — № 8. — С. 50–58.
163. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // АиТ. — 1970. — № 1. — С. 5–15.
164. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем. Свободные и вынужденные движения // АиТ. — 1970. — № 3. — С. 5–15.

165. *Смоляр Э. И.* О некоторых оценках характера решений системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Труды 5-й Международной конференции по нелинейным колебаниям. Аналитические методы. Изд. АН УССР, 1970. — Т. 1. — С. 522–528.

166. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I. Общие частотные критерии // АиТ. — 1970. — № 12. — С. 5–14.

167. *Якубович В. А.* Решение одной алгебраической задачи, встречающейся в теории управления // ДАН. — 1970. — Т. 193, № 1. — С. 57–60.

168. *Venkatesh Y. V.* Noncausal Multipliers for Nonlinear System Stability // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1970. — V. AC-15, № 2. — P. 195.

169. *Willems J.L., Willems J.C.* The application of Lyapunov methods to the computation of transient stability regions for multimachine power systems // IEEE Trans. Power Apparatus Syst. — 1970. — V. PAS-89, № 5–6. — P. 292–299.

1971

170. *Бурганская Л. И.* Абсолютная устойчивость систем прямого регулирования в двух критических случаях // Дифференциальные уравнения. Минск: Наука и техника. — 1971. — Т. 7, № 9. — С. 1566–1574.

171. *Леонов Г. А.* Неустойчивость в целом нелинейных систем управления // АиТ. — 1971. — № 11.

172. *Смоляр Э. И., Эпельман Г. С.* Об осреднении параметров при исследовании динамики нестационарных процессов // Матем. модели в агрофизике и биологии. — Москва, 1971. — Вып. 30. — С. 196–201.

173. *Якубович В. А.* S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник ЛГУ. Серия матем. мех. астрономия. Л. — 1971. — № 1. — С. 62–77.

174. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. II. Системы с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // АиТ. — 1971. — № 6. — С. 25–34.

175. *Willems J.C., Blankenship G.L.* Frequency domain stability criteria for stochastic systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1971. — V. AC-16, № 4. — P. 292–299.

1973

176. *Жермоленко В. Н.* Абсолютная устойчивость одного класса систем третьего порядка // Научн. труды асп. мех.-мат. МГУ. — 1973. — С. 160–167.

177. *Пятницкий Е. С.* О равномерной устойчивости при параметрических возмущениях // Диф. ур. — Минск: Наука и техника, 1973. — Т. 9, № 7. — С. 1262–1273.

178. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. матем. журн.. — 1973. — Т. 14, Вып. 2. — С. 384–419.

179. *Якубович В. А., Фрадков А. Л.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости в классах систем с двумя интегральными квадратичными связями // ДАН. — 1973. — Т. 213, № 4. — С. 798–901.

1974

180. *Willems J.C., Brockett R.W.* Average value symmetry criteria for symmetric systems // Ricerche di Automatica. — 1974. — V. 4, № 2–3. — P. 87–108.

1975

181. *Александров В. В., Жермоленко В. Н.* Абсолютная устойчивость систем третьего порядка с нелинейным нестационарным элементом // Научн. труды НИИ МЕХ. — 1975. — № 40. — С. 48–64.
182. *Александров В. В., Жермоленко В. Н.* Критерий абсолютной устойчивости систем третьего порядка // ДАН. — 1975. — Т. 222. — С. 309–311.
183. *Буркин И. М., Якубович В. А.* Частотные условия существования двух почти периодических решений у нелинейной системы автоматического регулирования // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 916–924.
184. *Леонов Г. А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сиб. матем. ж. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1031–1052.
185. *Перестюк Н. А.* К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем // Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 145–151.
186. *Alfredo S. Somolinos.* On the condition $cTA - 1b = r > 0$, in the Lurie problem // Proc. of the American Math. Soc. — 1975. — V. 47, № 2. — P. 432–441.
187. *Garg D.P., Maizza-Neto O.* Absolute stability results for non-linear systems using logarithmic plots // Int. J. of Cont. — 1975. — V. 21, № 6. — P. 899–909.
188. *Shauying R. Kou, David L. Elliott, Tzyh Jong Tarn.* Exponential Observers for Nonlinear Dynamic Systems // Information and Control. — 1975. — № 29. — P. 204–216.
189. *Venkatesh Y.V.* Geometric stability criteria for certain non-linear time varying systems // Int. J. of Non-Linear Mech. — 1975. — V. 10, № 5. — P. 245–252.

1976

190. *Бендриков Г. А., Сидорова Г. А.* Применение метода траекторий корней для исследования абсолютной устойчивости нелинейных систем по критерию В. М. Попова // Вестник МГУ. — 1976. — № 2. — С. 177–186.
191. *Брусин В. А.* Существование функции Ляпунова для некоторых классов нелинейных распределенных систем // ПММ. — 1976. — Т. 40, № 6. — С. 1135–42.
192. *Брусин В. А.* Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их решение // ПММ. — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 947–56.
193. *Гайдук А. И.* Абсолютная устойчивость систем управления с несколькими нелинейностями // АиТ. — 1976. — Т. 37, № 6. — С. 5–11.
194. *Гелиг А. Х., Морговский Ю. Я.* Абсолютная устойчивость систем // АиТ. — 1976. — Т. 37, № 10. — С. 41–47.
195. *Иоффе И. В., Леонов Г. А.* Об одном обобщении теоремы Брокетта-Ли // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1976. — Т. 12, № 11. — С. 2095–2096.
196. *Каретный О. Я., Ройтман А. Х.* Абсолютная устойчивость автоматических систем управления третьего порядка // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1976. — № 9. — С. 1025–1026.
197. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т. 17, № 1. — С. 91–112.

198. *Майсаканов С. Ж.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной системы автоматического непрямого управления четвертого порядка // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1976. — № 1. — С. 71–75.

199. *Нечитайло А. В.* Условия абсолютной устойчивости регулируемых систем в классе нелинейностей с условием на производную // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т. 17, № 5, С. 1190–1193.

200. *Скачков Б. Н.* Построение функции Ляпунова для систем авторегулирования // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1976. — Т. 12, № 8. — С. 1452–1461.

201. *Сневчелиев Х. П.* Исследование устойчивости сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений путем исследования исключительных направлений // Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат. — 1976. — Т. 12, № 1. — С. 215–224.

202. *Стоянов Н. В., Рашнов П. И.* Условная устойчивость систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Годишн. Висш. учебни завед. Прилож. мат. — 1976. — Т. 12, № 1.

203. *Чантурия Т. А.* Об одной теореме сравнения для линейных дифференциальных уравнений Серия математическая. — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 1126–1142.

204. *Bettis D.G., Horn M.K.* An optimal $(m+3)(m+4)$ Runge–Kutta algorithm // Celestial Mechanics. — 1976. — V. 14, № 1. — P. 133–140.

205. *Cartianu Gh., Pilat F.L.* Extension of applicability of Popov's steady-state absolute stability frequency criterion of nonlinear systems // Probleme de Automatizare. — 1976. — V. 9. — P. 97–105.

206. *Datta K.B.* Absolute stability of pulse-width modulated feedback systems containing an integrator // J. of the Institution of Electronics & Telecommunication Engineers. — 1976. — V. 22, № 9. — P. 591–594.

207. *Datta K.B.* On the stability of discrete multivariable Lur'e problem // J. of the Institution of Electronics & Telecommunication Engineers. — 1976. — V. 22, № 1. — P. 15–17.

208. *Friedland S.* Nonoscillation, disconjugacy and integral inequalities // Memoirs of the American Math. Soc. — 1976. — V. 7, № 176. — P. 1–74.

209. *Gekeler E.* Linear multistep methods and Galerkin procedures for initial boundary value problems // SIAM J. on Numerical An. — 1976. — V. 13, № 4. — P. 536–548.

210. *Min B.J., Slivinsky C., Hoft R.G.* Absolute stability analysis of PWM systems // Region V IEEE Conf. Digest on Electrical Engineering. IEEE, 1976. — P. 181–186.

211. *Pilat F.L.* Synthesis of correction network which permits absolute stability of a nonlinear control system, by using Popov's frequencial stability criterion // Probleme de Automatizare. — 1976. — V. 9. — P. 115–139.

212. *Venkatesh Y.V.* Passivity and linear system stability // Quarterly of applied math. — 1976. — V. 34, № 1. — P. 19–27.

1977

213. *Абрамович С. М.* Об асимптотическом поведении решений одной неавтономной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1977. — № 1. — С. 60–61.

214. *Александров В. В., Беляков В. И., Полоцкий В. Н.* Линейный анализ систем управления // Вестник МГУ. Матем. и мех. — 1977. — № 6. — С. 80–87.
215. *Анапольский Л. Ю., Бородин В. М.* Об одном приеме исследования устойчивости регулируемых систем // Устойчивость и управление. — Казань, 1977. — Вып. 1. — С. 3–8.
216. *Баркин А. И.* Геометрический критерий качества одного класса нелинейных систем // АиТ. — 1977. — № 7. — С. 5–8.
217. *Буркин И. М., Комарова Г. Л., Леонов Г. А.* О существовании предельных циклов второго рода у одной динамической системы с цилиндрическим фазовым пространством. Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск, 1977. — Вып. 1. — С. 82–96.
218. *Буркин И. М., Леонов Г. А.* О существовании нетривиальных периодических решений в автоколебательных системах // Сиб. матем. ж. — 1977. — Т. 18, № 2. — С. 251–262.
219. *Буркина Л. И.* Круговые движения в одной динамической системе с цилиндрическим фазовым пространством // Проблемы теории периодических движений. — Ижевск, 1977. — С. 75–80.
220. *Воронов А. А.* Системы с дифференцируемой неубывающей нелинейностью, абсолютно устойчивые в гурвицевом угле // ДАН СССР. — 1977. — Т. 234, № 1. — С. 38–41.
221. *Громова П. С., Пелевина А. Ф.* Абсолютная устойчивость систем автоматического регулирования с запаздыванием // Диф. ур. — Минск: Наука и техника, 1977. — Т. 13, № 8. — С. 1375–1383.
222. *Жермоленко В. Н., Локшин Б. Я.* Об устойчивости нестационарных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата // МТТ. — 1977. — № 5. — С. 32–39.
223. *Касымов Е. К.* Абсолютная неустойчивости нелинейных систем управления // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1977. — № 3. — С. 73–76.
224. *Корякин Ю. А., Леонов Г. А.* Частотные условия устойчивости в целом многосвязных фазовых систем // Проблемы теории периодических движений. — Ижевск, 1977. — С. 61–64.
225. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости // ДАН. — 1977. — Т. 233, № 3. — С. 293–296.
226. *Кушков Н. Н.* Об ограниченности решений некоторой многомерной системы в критическом случае одного нулевого корня. I // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1977. — Т. 13. № 6. — С. 1026–1037.
227. *Леонов Г. А.* Теорема сведения для нестационарных нелинейностей // Вестник ЛГУ. — 1977. — № 7. — С. 38–42.
228. *Леонов Г. А., Чурилов А. Н.* Об устойчивости в целом фазовых систем с запаздыванием // Проблемы теории периодических движений. — Ижевск, 1977. — С. 65–66.
229. *Леонов Г. А., Чшиева Т. Л.* Об устойчивости одного класса фазовых систем с двумя нелинейностями // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1977. — № 3. — С. 76–78.

230. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение функций Ляпунова для систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1977. — Т. 13, № 6. — С. 1038.
231. *Лычак М. М.* Новый подход к исследованию устойчивости нелинейных динамических систем / Ин. киберн. АН УССР, Динамика систем управления. — 1977. — С. 38–46.
232. *Мухаметзянов И. А., Саакян А. О.* Условия абсолютной устойчивости нелинейных многообразий // Аналит. мет. синтеза регуляторов. — 1977. — № 2. — С. 82–87.
233. *Персидский С. Н., Перфильев В. Г.* К исследованию устойчивости решений систем разностных уравнений // Вопросы матем. и прикл. мат. — Алма-Ата, 1977.
234. *Римский Г. В., Соловьев В. П., Таборовец В. В.* Автоматика исследования абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейными членами // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1977. — Т. 20, № 11. — С. 46–51.
235. *Саликов Л. М., Резцов В. П.* Расширение применимости частотного критерия устойчивости // Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника. — 1977. — Т. 20, № 12. — С. 16–20.
236. *Смирнова В. Б.* Устойчивость класса систем регулирования с запаздыванием // Межвуз. тем. сб. — Ленингр. инж.-строит. ин. — 1977. — № 1.
237. *Соколов В. И.* О стабилизации нестационарных линейных систем с полиномиальными коэффициентами // Синтез алгоритмов сложных систем. — 1977. — № 3. — С. 52–59.
238. *Шильман С. В.* Алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем // АиТ. — 1977. — Т. 38, № 12. — С. 48–55.
239. *Alexandrov V.V., Carton R.H., Betancourt M.M.* Estabilidad absoluta de los sistemas lineales de secondo orden con coeficientes variables // Investic Oper. — 1977. — № 20. — P. 21–37.
240. *Alfredo S. Somolinos.* Stability of Lurie-Type Functional Equations // J. of Differential equations. — 1977. — № 26. — P. 191–199.
241. *Bickart T.A., Jury E.I.* Regions of Polynomial Root Clustering // J. of the Franklin Institute. — 1977. — V. 304, № 4/5. — P. 149–160.
242. *Deren L., Piekarski M.S.* Absolute stability criteria of linear frequency-invariant 3-port networks // Archiwum Elektrotechniki (Warsaw). — 1977. — V. 26, № 1. — P. 121–129.
243. *Garg D.P., Kumar M.* Absolute stability results for a class of systems with multiple nonlinearities // Joint Automatic Control Conference, IEEE. — 1977. — Part II. — P. 948–953.
244. *Grujic L.T.* A reciprocal matrix lemma, application to absolute stability // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L'Academie des Sciences. — 1977. — V. 284, № 21. — P. 1409–1412.
245. *Jumarie G.* Stochastic hyperstability for a broad class of distributed systems with space dependent coefficients // Ricerche di Automatica. — 1977. — V. 8, № 2–3. — P. 163–192.
246. *Kurzweil Jaroslaw.* On differential inclusions and on Filippov's concept of differential equations // Diff. Eq. — Stockholm, 1977. — P. 109–113.

247. *LaSalle J.P.* New stability results for nonautonomous systems // Dyn. Syst. Proc. Univ. Fla Int. Symp. Cainesville. — New York, 1976. — P. 175–183.

248. *Min B.J., Slivinsky C., Hoft R.G.* Absolute stability analysis of PWM systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1977. — V. AC-22, № 3. — P. 445–450.

1978

249. *Айзенгендлер П.Г., Оборин Л.А.* Об устойчивых особых периодических решениях неавтономных уравнений // Диф. ур. — 1978. — № 11. — С. 3–15.

250. *Алексеев А.С., Чубаров М.А.* О численно-аналитическом построении областей абсолютной устойчивости // Диф. и интегр. ур. — Горький, 1978. — № 2. — С. 101–108.

251. *Алексеевская Н.Л.* Устойчивость запаздывающих систем автоматического регулирования и матричные уравнения // Мех. твердого деформир. тела и родств. пробл. анализа. — М., 1978. — С. 69–82.

252. *Ахмеров Р.Р., Казакова Н.Г., Покровский А.В.* Принцип отсутствия ограниченных решений и абсолютная устойчивость уравнений нейтрального типа // Сердика Бъм. мат. спис. — 1978. — Т. 4, № 1. — С. 61–69.

253. *Блягоз З.У., Леонов Г.А.* Об устойчивости одной динамической системы с цилиндрическим фазовым пространством // Диф. ур. — 1978. — Т. 14, № 8. — С. 1502–1503.

254. *Блягоз З.У., Леонов Г.А.* Частотные критерии устойчивости в большом нелинейных систем // Вестник ЛГУ. — 1978. — № 13. — С. 18–23.

255. *Брусин В.А.* Синтез беспоисковой самонастраивающейся системы методом теории абсолютной устойчивости // АиТ. — 1978. — Т. 39, № 7. — С. 61–67.

256. *Бурганская Л.И.* Необходимые условия устойчивости в целом некоторых нелинейных систем // ДАН БССР. — 1978. — Т. 22, № 11.

257. *Воронов А.А.* Абсолютно устойчивые системы с дифференцируемой неубывающей нелинейностью // АиТ. — 1978. — № 7. — С. 12–18.

258. *Гноенский Л.С., Розенблат Г.М.* О точности некоторых нестационарных следящих систем // АиТ. — 1978. — № 9.

259. *Голубев В.Г.* Исследования по проблеме абсолютной устойчивости по Хиллу в неограниченной задаче трех тел. — Ин. теор. и эксперим. физ. — Москва, 1978. — № 52. — С. 42.

260. *Егоров И.Г.* Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом нулевого решения одной автономной системы второго порядка // Диф. ур. — 1978. — Т. 14, № 7. — С. 1317–1320.

261. *Егоров И.Г.* Об устойчивости в целом нулевого решения автономной системы двух дифференциальных уравнений // Некоторые вопросы диф. и интегр. ур. и их прил. — Якутск, 1978. — № 3.

262. *Егоров И.Г.* Об устойчивости в целом нулевого решения одной автономной системы второго порядка // Диф. ур. — 1978. — Т. 14, № 3.

263. *Жуков В.П.* Об одном методе исследования устойчивости нелинейных систем // ДАН. — 1978. — Т. 243, № 1. — С. 52–53.

264. *Жуков В. П.* Об одном методе качественного исследования устойчивости нелинейных систем // АиТ. — 1978. — № 6. — С. 11–15.
265. *Ирисов А. Е., Тонкова В. С., Тонков Е. Л.* Периодические решения дифференциального включения. Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск, 1978. — № 2.
266. *Калитин Б. С., Черчун М. Я.* К проблеме Айзермана для систем второго порядка // Вестник Белорусского ун-та, Мат., физ., мех., Минск. — 1978. — С. 17.
267. *Колпакова Н. П., Акиндинов В. А.* О влиянии норм векторов на условия абсолютной устойчивости сложных нелинейных систем // Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1978. — № 434. — С. 59–64.
268. *Коновалов А. С., Грозова В. Л.* К определению абсолютной устойчивости нелинейных систем методом В. М. Попова // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1978. — № 11. — С. 1211–1215.
269. *Коновалов А. С., Захаров В. М.* Анализ абсолютной устойчивости нелинейных систем управления используя критерий Попова // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1978. — Т. 21, № 3. — С. 27–31.
270. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временем // АиТ. — 1978. — № 2. — С. 42–45.
271. *Леонов Г. А.* Теорема сведения для нестационарных нелинейностей // Вестник ЛГУ. — 1978. — № 7. — С. 38–42.
272. *Липатов А. В.* Расширение кругового критерия абсолютной устойчивости для одного класса линейных непрерывных нестационарных систем. Тем. сб. науч. тр. — М.: МАИ, 1978. — № 434. — С. 65–69.
273. *Майгарин Б. Ж., Касимов Е. К.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1978. — № 3. — С. 42–48.
274. *Маликов А. И.* Применение метода векторных функций Ляпунова к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем // Методы оптимиз. и исслед. операций в энерг., Материалы 7–8-й конференций молод. научн. сотр. Сиб. энерг. ин. — Иркутск, 1978. — С. 110–117.
275. *Мейлахс А. М.* О синтезе устойчивых систем автоматического регулирования при параметрических возмущениях // АиТ. — 1978. — № 10. — С. 5–16.
276. *Мухаметзянов И. А., Саакян А. О.* Некоторые достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных интегральных многообразий // Проб. мех. управл. движения, оптимиз. процессов упр. — Пермь, 1978. — С. 137–144.
277. *Орурк И. А., Осипов Л. А., Коновалов А. С.* Исследование абсолютной устойчивости систем с несколькими нелинейностями // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1978. — Т. 21, № 2. — С. 27–32.
278. *Соколов В. И.* Условия абсолютной устойчивости динамических систем // АиТ. — 1978. — Т. 39, № 8. — С. 187–189.
279. *Хапаев М. М., Анашкин О. В.* Об исследовании на устойчивость в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // ДАН. — 1978. — Т. 240, № 5. — С. 1028–1031.

280. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Диф. ур. — 1978. — Т. 14, № 11.

281. *Цалюк В. З.* Обобщенные функции как возмущения экспоненциально устойчивых дифференциальных включений // Функц.-диф. ур. и краев. задачи мат. физ. — Пермь, 1978. — С. 155–158.

282. *Шаров В. Ф.* Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // АиТ. — 1978. — № 11. — С. 63–71.

283. *Шевелев А. Г., Полухин А. В.* Об оценке качества переходных процессов в абсолютно устойчивых нелинейных системах // Кибернет. и вычисл. техн. Респ. межвед. сб. — 1978. — № 39. — С. 109–111.

284. *Barone A., Campanella M.* Absolutely stable networks with operational amplifier topological structure and maximum value of quality factor // Alta Frequenza. — 1978. — V. 47, № 10. — P. 735–740.

285. *Borne P., Gentina J.C.* Absolute stability of nonlinear, nonstationary large scale systems // Joint automatic control conference. ISA, 1978. Part III. — V. 3–4. — P. 3/317–3/326.

286. *Grujic L.T.* Absolute stability of non-stationary systems: resolutions and applications // Joint automatic control conference. — ISA, 1978. — Part III. — V. 3–4. — P. 3/327–3/337.

287. *Grujic L.T.* Singular perturbations, uniform asymptotic stability and large-scale systems // Proc. Joint. Autom Contr. Conf. Philadelphia, Pittsburgh, 1978. — V. 3–4. — P. 3/339–3/347/

288. *Grujic L.T.* Solutions for the Lurie-Postnikov and Aizerman problems // Int. J. of Systems Science. — 1978. — V. 9, № 12. — P. 1359–1372.

289. *Grujic L.T., Gentina J.C., Borne P., Burgat C., Bernussou J.* On the stability of large systems // RAIRO Automatique. — 1978. — V. 12, № 4. — P. 319–348.

290. *Harrison G.W.* Stability of linear systems with uncertain parameters // Int. J. of Systems Science. — 1978. — V. 9, № 9.

291. *Igarashi K., Takahashi S., Ikeda M.* Absolute stability criterion for the networks including RC distributed lines of finite length // Trans. of the Institute of Electronics & Communication Engineers of Japan. — 1978. — V. E61, № 4. — P. 308–309.

292. *Mitra D.* Summary of results on the absolute stability of high order, discrete-time systems utilizing the saturation nonlinearity // Proc. of the 1978 IEEE Int. Symp. on Circ. & Syst. IEEE, 1978. — P. 1029–1033.

293. *Mitra D.* The absolute stability of high-order discrete-time systems utilizing the saturation nonlinearity // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1978. — V. CAS-25, № 6. — P. 365–371.

294. *Rasvan V.* Some system theory ideas connected with the stability problem // J. of Cybernetics. — 1978. — V. 8, № 2. — P. 203–215.

295. *Singh V., Kumar A.* Verification of Aizerman's conjecture for a class of non-linear systems // J. of the Institution of Engineers (India) Electronics &Telecommunication, Engineering Division. — 1978. — V. 59, № ET-1. — P. 23–24.

296. *Venkatesh Y. V.* Global variation criteria for the L2-stability of nonlinear time varying systems // SIAM J. on Math. Anal. — 1978. — V. 9, № 3.

297. *Vidyasagar M.* Some general necessary and sufficient conditions for the absolute stability of nonlinear feedback systems // Proc. of the IEEE Int. Symp. on Circ. & Syst. IEEE, 1978. — P. 620–625.

1979

298. *Абдуллаев А. А., Джафаров Э. М.* Частотный критерий устойчивости СПС с запаздыванием // АиТ. — 1979. — № 6. — С. 198–205.

299. *Барабанов Н. Е.* Абсолютная устойчивость систем регулирования с монотонными нелинейностями // Вестник ЛГУ. Серия матем., мех., астрономия. — 1979. — С. 11.

300. *Барабанов Н. Е.* Устойчивость и неустойчивость стационарных множеств нелинейных систем регулирования с ограничением на производную // Вестник ЛГУ. — 1979. — № 13. — С. 115–116.

301. *Барабанов Н. Е., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 5–12.

302. *Баркин А. И.* Некоторые оценки координат абсолютно устойчивых систем // АиТ. — 1979. — № 1. — С. 182–186.

303. *Блягоз З. У., Гелиг А. Х.* Устойчивость широтно-импульсных систем фазовой синхронизации // Проблемы устойчивости движения, аналитическая механика и управление движением. — Новосибирск, 1979.

304. *Ваплюшкин В. М., Вдовин С. И., Сабаев Е. Ф.* Устойчивость в большом одного класса регулируемых систем // АиТ. — 1979. — № 7. — С. 5–12.

305. *Венец В. И.* Дифференциальные включения в выпуклых задачах // АиТ. — 1979. — № 9. — С. 5–14.

306. *Громова П. С., Лисана П. М.* Метод векторных функций Ляпунова для систем с запаздыванием // Диф. ур. с отклоняющимся аргументом. — Москва, 1979. — № 11. — С. 14–22.

307. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // ПММ. — 1979. — Т. 43, № 2.

308. *Константинов М. М., Байнов Д. Д.* Абсолютная экспоненциальная устойчивость нелинейных систем дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. ВУЗов. Математика. — 1979. — № 6. — С. 28–32.

309. *Леонов Г. А., Абрамович С. М., Буркина Л. И., Козярук Р. Е., Корякин Ю. А., Райтман Ф.* Метод сведения в теории динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством и его применение к исследованию устойчивости электро-энергетических систем // Теория устойчивости и ее прил. — Новосибирск, 1979. — С. 55–60.

310. *Либерзон М. Р.* Абсолютная устойчивость одного класса систем управления // Вестник МГУ. — 1979. — № 3. — С. 74–80.

311. *Либерзон М. Р.* Абсолютная устойчивость одного класса следящих систем // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 25–29.

312. *Липатов А. В.* Метод построения критериев абсолютной устойчивости систем с нестационарными нелинейными блоками с памятью // АиТ. — 1979. — № 5.

313. *Майгарин Б. Ж., Айкинов М. К.* Абсолютная устойчивость управляемых систем со многими исполнительными органами // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1979. — № 5. — С. 34–35.

314. *Майгарин Б. Ж., Жуматов С. С.* Абсолютная устойчивость, оценка показателей переходного процесса программного многообразия управляемых систем // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1979. — № 1. — С. 29–36.

315. *Молчанов А. П.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нестационарными нелинейными элементами // АиТ. — 1979. — № 3. — С. 43–51.

316. *Осипов Л. А., Кочетов С. А., Коновалов А. С.* Автоматическое определение области абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейными элементами // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1979. — Т. 22, № 11. — С. 23–28.

317. *Плотников В. А.* Усреднение дифференциальных включений // Украинский матем. ж. — 1979. — Т. 31, № 5.

318. *Попов В. М., Рудницкий М. П.* Анализ устойчивости «в большом» нелинейной системы второго порядка с использованием аппроксимации нелинейности функцией релейного типа // Теория устойчивости и ее прил. — Новосибирск, 1979. — С. 122–128.

319. *Римский Г. В.* Корневой метод построения областей абсолютной устойчивости нелинейных систем // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1979. — № 6. — С. 23–28.

320. *Римский Г. В., Скудняков Ю. А.* Абсолютная устойчивость одного класса нелинейных дискретных систем // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1979. — Т. 22, № 7. — С. 31–35.

321. *Саакян А. О.* Достаточные условия абсолютной устойчивости интегральных многообразий // Диф. и интегр. ур. — Ереван, 1979. — С. 101–111.

322. *Чубаров М. А.* О критериях неотрицательности полиномов и определении областей абсолютной устойчивости // Диф. и интегр. ур. — Горький, 1979. — С. 149–157.

323. *Claasen T.A.C.M.* Comments on 'The absolute stability of high-order discrete-time systems utilizing the saturation nonlinearity' // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1979. — V. CAS-26, № 2. — P. 138–140.

324. *Grujic L.T., Borne P., Gentina J.C.* Matrix approaches to the absolute stability of time-varying Lurie-Postnikov systems // Int. J. of Cont. — 1979. — V. 30, № 6. — P. 967–980.

325. *Humes Ana F., Jury E.I.* Stability of multidimensional discrete systems: state-space representation approach // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo. — New York, 1979. — P. 527–530.

326. *Jumarie G.*, Hyperstability and average hyperstability conditions for a broad class of Gaussian stochastic systems // Information Sciences. — 1979. — V. 17, № 1. — P. 23–41.

327. *Kaszkurewicz E., Hsu L.* Stability of nonlinear systems: a structural approach // Automatica. — 1979. — V. 15, № 5. — P. 609–614.

328. *Rasvan V.* Absolute stability of nonlinear difference systems // Revue Roumaine des Sciences Techniques. — 1979. — V. 24, № 3. — P. 495–500.

329. *Vidyasagar M.* Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: stability and stabilizability // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo. — New York, 1979. — P. 591–595.

330. *Vidyasagar M.* On the absolute instability of nonlinear feedback systems // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo. — New York, 1979. — P. 415–419.

331. *Zhermolenko V.N., Hing Corton R.* Etabilidad absoluta de los sistemas de control automatico de sugundo orden con coeficientes variables // Invest. oper. — 1979. — № 28. — P. 39–54.

1980

332. *Айкинов М. К.* Частотный критерий абсолютной устойчивости управляемых систем // Изв. АН Казахской ССР. Сер. физико-матем. — 1980. — № 1.

333. *Айсагалиев С. А., Айпанов Ш. А.* Глобальная асимптотическая устойчивость нелинейных фазовых систем // Диф. ур. и их прил. — Алма-Ата, 1980. — С. 3–11.

334. *Гиль М. И.* Об экспоненциальной устойчивости нелинейных систем // Хабаровский комплекс НИИ ДВНЦ АН СССР. — Хабаровск, 1980. — № 1.

335. *Груйич Л. Т.* Необходимые и достаточные ляпуновские условия абсолютной устойчивости и гипотезы Айзермана // Матем. физ. — Киев, 1980. — № 28. — С. 7–19.

336. *Кигурадзе И. Т., Розов Н. Х.* Об абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем автоматического регулирования // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1980. — Т. 16, № 4. — С. 755–756.

337. *Константинов М. М.* Об абсолютной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Качеств. исслед. диф.-функц. ур. — Киев, 1980. — С. 55–59.

338. *Леонов Г. А.* Метод нелокального сведения в теории дифференциальных уравнений // Стабилизация частоты. — М., 1980. — С. 121–124.

339. *Леонов Г. А.* Об одном расширении частотного критерия В. М.Попова для нестационарных нелинейностей // АиТ. — 1980. — № 11. — С. 21–26.

340. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Метод сведения для интегро-дифференциальных уравнений // Сиб. матем. ж. — 1980. — № 4. — С. 112–124.

341. *Либерзон М. Р.* Об абсолютной устойчивости систем 3-го порядка с двумя нелинейными элементами // Вестник МГУ. — 1980. — № 3. — С. 88–92.

342. *Лычак М. М.* Новый подход к исследованию устойчивости нелинейных динамических систем // Автоматика. — 1980. — Т. 13, № 1. — С. 38–45.

343. *Мейлахс А. М.* О существовании функции Ляпунова для параметрически возмущенных линейных систем // Сложные системы управления. — Киев, Ин-т кибернетики АН УССР. 1980. — С. 11–15.

344. *Мейлахс А. М.* О стабилизации линейных регулируемых систем при постоянно действующих возмущениях // АиТ. — 1980. — № 11. — С. 27–32.

345. *Онайбаев К. О.* Связь между двумя проблемами Айзермана // Матем. моделир. и оптим. управл. — Алма-Ата: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1980. — С. 152–155.

346. *Цалюк В. З.* Об устойчивости по первому приближению дифференциальных включений // Диф. ур. — 1980. — Т. 16, № 2.
347. *Grujic L.T., Porter B.* Continuous-time tracking systems incorporating Lur'e plants with single nonlinearities // Int. J. of Systems Science. — 1980. — V. 11, № 2. — P. 177–189.
348. *Grujic L.T., Porter B.* Discrete-time tracking systems incorporating Lur'e plants with multiple nonlinearities // Int. J. of Systems Science. — 1980. — V. 11, № 12. — P. 1505–1520.
349. *Porter B.* Necessary conditions for absolute stability of nonlinear multivariable regulators // Electronics Letters. — 1980. — V. 16, № 10. — P. 392–393.
350. *Porter B.* Necessary conditions for absolute stability of nonlinear regulators // Electronics Letters. — 1980. — V. 16, № 5. — P. 181–182.
351. *Porter B., Grujic L.T.* Continuous-time tracking systems incorporating Lur'e plants with multiple nonlinearities // Int. J. of Systems Science. — 1980. — V. 11, № 7. — P. 827–840.
352. *Sharma T.N., Singh V.* On the absolute stability of continuous-time nonlinear systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1980. — V. AC-25, № 2. — P. 332–334.

1981

353. *Айзикович А. А.* Критерий неосцилляции решений разностного уравнения // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1981. — Т. 17, № 12. — С. 2201–2211.
354. *Айкинов М. К.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем в критических случаях // Диф. ур. и их прил. — Алма-Ата, 1981. — С. 8–15.
355. *Айсагалиев С. А., Онайбаев К. О.* Оптимальность и абсолютная устойчивость регулируемых систем // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-матем. — 1981. — № 3.
356. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л.* Критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // АиТ. — 1981. — № 7. — С. 5–10.
357. *Бияров Т.* Об одном утверждении, эквивалентном частотным теоремам В. А.Якубовича и В. М.Попова // АиТ. — 1981. — № 7. — С. 143–146.
358. *Гиль М. И.* Об устойчивости в целом нелинейных нестационарных систем // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1981. — № 6. — С. 158–162.
359. *Гиль М. И.* Об устойчивости нестационарных систем с распределенными параметрами // АиТ. — 1981. — № 1. — С. 5–8.
360. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости // Устойчивость движ., аналит. мех., управл. движ. — М., 1981. — С. 156–169.
361. *Леонов Г. А.* Необходимые частотные условия абсолютной устойчивости нестационарных систем // АиТ. — 1981. — № 1. — С. 15–19.
362. *Леонов Г. А.* Об устойчивости в целом нелинейных систем в критическом случае двух нулевых корней // ПММ. — 1981. — Т. 45, № 4. — С. 752–755.
363. *Лихтарников А. Л.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных распределенных систем по линейному выходу // Числ. мет. в гидромеханике. — Л.: ЛИСИ, 1981. — С. 71–76.

364. *Майгарин Б. Ж.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости управляемых систем // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-матем. — 1981. — № 3.

365. *Молчанов А. П.* Равномерная устойчивость конечно-разностных уравнений при параметрических возмущениях // Диф. ур. — 1981. — Т. 17, № 12. — С. 2250–2264.

366. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем I // АиТ. — 1981. — № 1. — С. 19–27.

367. *Опойцев В. И.* Неограниченные области асимптотической устойчивости // АиТ. — 1981. — № 3. — С. 5–13.

368. *Скородинский В. И.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. I // АиТ. — 1981. — № 9. — С. 21–29.

369. *Datta K.B., Chaki S.R.* Absolute stability of thyristor controlled constant field separately excited DC motor under mark-space control // J. Technology. — 1981. — V. 26, № 1. — P. 41–53.

370. *Datta K.B., Chaki S.R.* Absolute stability of thyristor controlled constant field separately excited DC motor under AC phase control // J. Technology. — 1981. — V. 26, No.2. — P. 1–10.

371. *Grujic L.T.* Lyapunov-like solutions for stability problems of the most general stationary Lurie-Postnikov systems // Int. J. of Systems Science. — 1981. — V. 12, № 7. — P. 813–833.

372. *Grujic L.T.* On absolute stability and the Aizerman conjecture // Automatica. — 1981. — V. 17, № 2. — P. 335–349.

373. *Ioannou P.A.* Robustness of absolute stability // Int. J. Control. — 1981. — V. 34, № 5. — P. 1027–1033.

374. *Sharma T.N., Singh V.* On the absolute stability of multivariable discrete-time nonlinear systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1981. — V. AC-26, № 2. — P. 585–586.

375. *Zhu Siming.* Absolute stability for direct control system of multi adjustment mechanism // Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni. — 1981. — № 3. — P. 1–8.

1982

376. *Барабанов Н. Е.* Существование периодических решений нелинейных управляемых систем и гипотеза Калмана // УМН. — 1982. — Т. 37, № 1. — С. 164.

377. *Барабанов Н. Е.* Устойчивость, неустойчивость и дихотомия систем регулирования с градиентными нелинейностями // АиТ. — 1982. — № 4. С. 5–8.

378. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л.* Метод нелинейного преобразования координат для исследования абсолютной устойчивости систем управления // Динамика неоднородных систем. Материалы сем. — М.: ВНИИСИ, 1982. — С. 41–50.

379. *Веретенников В. Г., Зайцев В. В.* Необходимые и достаточные условия устойчивости в большом // ПММ. — 1982. — Т. 46, № 5. — С. 753–761.

380. *Громова П. С.* Об устойчивости в целом систем с запаздыванием. — М.: Труды МЭИ, 1982. — № 566.

381. *Громова П. С., Пелевина А. Ф.* Абсолютная устойчивость систем автоматического регулирования с запаздыванием // Краев. задачи. — Пермь, 1982. — С. 24–30.
382. *Игнатьев А. О.* Об устойчивости положения равновесия колебательных систем с переменными коэффициентами // ПММ. — 1982. — Т. 46, № 1. — С. 167–168.
383. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применение. I // Сиб. матем. ж. — 1982. — Т. 23, № 4. — С. 103–121.
384. *Майгарин Б. Ж.* Исследование нелинейных систем автоматического управления курсом корабля и самолета // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-матем. — 1982. — № 3. — С. 25–30.
385. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем управления. I, II, III // АиТ. — 1982. — № 1. — С. 19–27, № 2. — С. 17–28, № 3. — С. 29–41.
386. *Мурзабеков З. Н.* Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем // Функц. анализ, дифф. ур и их прил. — Алма-Ата, 1982.
387. *Розов Н. Х.* Исследование абсолютной устойчивости систем автоматического управления // Диф. ур. и прил. Труды 2-й Конф., Руссе, 29 июня – 4 июля 1981. — 1982. — Ч. 2. — С. 622–627.
388. *Скородинский В. И.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с двумя нелинейными нестационарными элементами. II // АиТ. — 1982. — № 6. — С. 87–94.
389. *Слюсарчук В. С.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Пробл. соврем. теории период. движений. — Ижевск, 1982. — № 6.
390. *Artstein Zvi.* Stability, observability and invariance // J. of Diff. eq. — 1982. — V. 44, № 2.
391. *Chiriacescu S.T.* Absolute stability analysis of the multivariable dynamic machining system // Buletinul Universitatii Din Brasov. — 1982. — V. 24. — P. 13–20.
392. *Danila N., Goliciu D.* Conditions of absolute stability in frequency for a class of monotonic and differentiable nonlinear systems // Revue Roumaine des Sciences Techniques. — 1982. — V. 27, № 2. — P. 249–260.
393. *Lurie B.J.* Absolutely stable feedback system with dynamic nonlinear corrector // Proc. of the IEEE. — 1982. — V. 70, № 8. — P. 869–870.
394. *Molchanov A.P., Pyatnitsky E.S.* A variational method for investigating absolute stability and absolute instability of nonlinear control systems // Proc. of the 8th Triennial World Congress of the IFAC, Kyoto, 24–28 Aug. 1981. — 1982. — V. 1. — P. 129–136.
395. *Nguyen Cang.* Absolute stability criteria for a class of superposed systems with differentiable nonlinearities // Revue Roumaine des Sciences Techniques. — 1982. — V. 27, № 1. — P. 107–117.
396. *Pyatnitsky E.S., Skorodinsky V.I.* Numerical methods of Lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem // Systems & Control Letters. — 1982. — V. 2, № 2. — P. 130–135.

397. *Singh V.* Absolute stability criterion for a class of nonlinear systems with slope-restricted nonlinearity // Proc. of the IEEE. — 1982. — V. 70, № 10. — P. 1232–1233.

398. *Singh V.* On the existence of Lyapunov function for absolute stability of nonlinear feedback systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1982. — V. AC-27, № 4. — P. 963–964.

1983

399. *Баркин А. И.* Устойчивость и абсолютная устойчивость нелинейных систем // АиТ. — 1983. — № 10. — С. 64–69.

400. *Гиль М. И.* Об одном классе абсолютно устойчивых систем // АиТ. — 1983. — № 10. — С. 70–75.

401. *Гиль М. И.* Об одном классе систем, абсолютно устойчивых в гурвицевом угле // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269, № 6. — С. 1324–1327.

402. *Зарубин А. Г., Красносельский М. А., Покровский А. В.* О принципе отсутствия ограниченных режимов в проблеме абсолютной устойчивости систем с распределенными параметрами // АиТ. — 1983. — № 3. — С. 13–19.

403. *Каменецкий В. А.* Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость систем управления с несколькими нелинейными нестационарными элементами // АиТ. — 1983. — № 12. — С. 20–30.

404. *Каменецкий В. А., Пятницкий Е. С.* Итеративный метод построения функций Ляпунова и его численная реализация на ЭВМ // ЭВМ в задачах управления. Сб. трудов. — М.: Ин-т проблем управления. — 1983. — С. 61–74.

405. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Абсолютная устойчивость систем с несколькими нелинейными звеньями // ДАН СССР. — 1983. — Т. 271, № 6.

406. *Леонов Г. А.* Об ограниченности решений неавтономных дифференциальных уравнений // Вестник ЛГУ. — 1983. — № 7. — С. 21–26.

407. *Лихтарников А. Л.* Дихотомия и абсолютная неустойчивость в нелинейных системах с распределенными параметрами. — Ленинград: ЛИСИ, 1983. — С. 22–29.

408. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применение II // Сиб. матем. ж. — 1983. — Т. 24, № 5. — С. 129–148.

409. *Мейлахс А. М.* Об управлении вращательным движением твердого тела // Диф. ур. — Минск: Наука и техника. — 1983. — Т. 19, № 11. — С. 1860–1866.

410. *Молчанов А. П.* Критерий абсолютной устойчивости импульсных систем с нестационарной нелинейностью I, II // АиТ. — 1983. — № 5. — С. 73–81, № 6. — С. 42–45.

411. *Молчанов А. П.* Условия равномерной абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных импульсных систем // АиТ. — 1983. — № 3. — С. 40–49.

412. *Пятницкий Е. С., Скородинский В. И.* Численные методы построения функций Ляпунова и критерий абсолютной устойчивости в форме численных процедур // АиТ. — 1983. — № 11. — С. 52–63.

413. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем с распределенными параметрами I // АиТ. — 1983. — № 6. — С. 53–61.
414. *Якубович В. А.* Абстрактная теория абсолютной устойчивости и ее применение // Киберн. и вычисл. техн. — 1983. — С. 3–8.
415. *Якубович В. А.* Графические критерии абсолютной устойчивости и неустойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1983. — Т. 271, № 1–3. — С. 307–310.
416. *Barkin A.I., Zelentsovsky A.L.* Method of power transformations for analysis of stability of nonlinear control systems // Systems & Control Letters. — 1983. — V. 3, № 5. — P. 303–310.
417. *Barkin A.I., Zelentsovsky A.L.* A new criterion for absolute stability: nonlinear transformation technique // Int. J. Syst. Sci. — 1983. — V. 4, № 10. — P. 1217–1228.
418. *Cohen M.A., Grossberg S.* Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks // IEEE Trans. on Systems. — 1983. — V. SMC-13, № 5. — P. 815–826.
419. *Li Sen-lin.* The necessary and sufficient conditions for the absolute stability of several classes of direct control systems // Acta Mathematicae Applacatae Sinica. — 1983. — V. 6, № 4. — P. 458–467.
420. *Suda N., Kumura H., Maeda H., Kitamori T., Suzuki M., Ikeda M., Fujii T., Araki M., Tagawa R., Mayeda H., Fujii S., Sunahara Y., Ichikawa A., Sugeno M., Takagi T.* Model uncertainty in control theory (fuzziness) // J. of the Society of Instrument & Control Engineers. — 1983. — V. 22, № 1. — P. 47–86.

1984

421. *Баркин А. И.* О соотношении между двумя критериями абсолютной устойчивости // АиТ. — 1984. — № 1. — С. 36–41.
422. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л.* Абсолютная устойчивость автоматических систем управления с единственной нелинейностью // ДАН СССР. — 1984. — Т. 276, № 4–6. — С. 809–812.
423. *Гиль М. И.* Об устойчивости систем регулирования в «большом» // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1984. — № 2.
424. *Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А.* О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем II, III // АиТ. — 1984. — № 3. — С. 42–47, № 8. — С. 63–67.
425. *Леонов Г. А.* Метод нелокального сведения в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем I, II // АиТ. — 1984. — № 2. — С. 45–53, № 3. — С. 48–56.
426. *Леонов Г. А.* Об одной гипотезе А. А. Воронова // АиТ. — 1984. — № 5. — С. 17–20.
427. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Метод нелокального сведения в теории устойчивости // Метод функций Ляпунова и его приложения. — М.: Наука, 1984. — С. 98–106.
428. *Липатов А. В.* Устойчивость дискретной стационарной системы с одним нелинейным блоком // АиТ. — 1984. — Т. 45, № 9. — С. 74–83.
429. *Розов Н. Х.* Три задачи по обыкновенным дифференциальным уравнениям // УМН. — 1984. — Т. 39, № 4. — С. 145–146.

430. *Скородинский В. И.* Абсолютная устойчивость нестационарных движений осесимметричного вращающегося летательного аппарата // МТТ. — 1984. — № 3. — С. 17–21.

431. *Сперанская Л. С.* Необходимые частотные условия абсолютной устойчивости систем в критическом случае пары чисто мнимых и одного нулевого корня // Матем. Физика. — Ленинград: ЛГПИ. — 1984. — С. 46–55.

432. *Grujic L.T., Bucevac Z., Ribar Z.* On necessary and sufficient conditions for absolute stability of discrete-time systems // Preprints of the 9th World Congress IFAC. — Budapest, Hungary, 1984. — V. 8. — P. 159–163.

433. *Kaszkurewicz E., Hsu L.* A note on the absolute stability of non-linear discrete-time systems // Int. J. of Cont. — 1984. — V. 40, № 4. — P. 867–869.

434. *Kaszkurewicz E., Resende P.* On the absolute stability of linearly interconnected nonlinear systems // Large Scale Systems: Theory and Applications. Proc. of the IFAC/IFORS Symposium. — Pergamon, 1984. — P. 309–313.

435. *Lurie B.J.* The absolutely stable Nyquist-stable nonlinear feedback system design // Int. J. of Cont. — 1984. — V. 40, № 6. — P. 1119–1130.

436. *Resende P., Kaszkurewicz E.* A new state-space block-tridiagonal realization algorithm for matrix transfer functions and its use in absolute stability problems // Proc. of the 23rd IEEE Conf. on Dec. Cont., 1984. — V. 1. — P. 106–110.

437. *Zhou Chongjing.* Absolute stability of delta modulation systems // J. of China Institute of Communications. — 1984. — V. 5, № 2. — P. 88–93.

1985

438. *Айсагалиев С. А., Онайбаев К. О., Мазаков Т. Ж.* Управляемость нелинейных систем управления // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-матем. — 1985. — № 1. — С. 83–87.

439. *Александров В. В., Морозова О. И.* О необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости систем второго порядка // АиТ. — 1985. — № 8. — С. 161–164.

440. *Андрусевич В. В.* Об одном классе абсолютно устойчивых нелинейных нестационарных систем // АиТ. — 1985. — № 11. — С. 26–33.

441. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. — М.: Наука, 1985. — Т. 169. — С. 194–252.

442. *Гиль М. И.* Об абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем с распределенными параметрами // АиТ. — 1985. — № 6. — С. 12–19.

443. *Гиль М. И.* Об одном классе абсолютно устойчивых многосвязных систем // ДАН СССР. — 1985. — Т. 280, № 4. — С. 811–815.

444. *Гиль М. И.* Об одном классе абсолютно устойчивых распределенных систем // АиТ. — 1985. — № 12. — С. 54–59.

445. *Каменецкий В. А.* Абсолютная устойчивость дискретных систем управления с нестационарными нелинейностями // АиТ. — 1985. — № 8. — С. 172–176.

446. *Леонов Г. А.* Об одном способе построения функций Ляпунова // Устойчивость движения. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 67–71.

447. *Леонов Г. А., Первозванский А. А.* Частотные оценки области диссипативности нелинейных систем автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 4. — С. 826–830.

448. *Мейлахс А. М.* Наблюдение параметрически возмущенных динамических систем // АиТ. — 1985. — № 10. — С. 20–26.

449. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Построение функций Ляпунова, определяющих необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости в классе нестационарных нелинейностей // Устойчивость движения. — Новосибирск: Наука. — 1985. — С. 82–88.

450. *Покровский А. В.* Предельная норма линейного звена // АиТ. — 1985. — № 11. — С. 62–69.

451. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость по заданному выходу нелинейных систем с частными производными // Устойчивость движения. — Новосибирск: Наука. — 1985. — С. 22–26.

452. *Якубович В. А.* Сингулярная задача оптимального управления линейной стационарной системой с квадратичным функционалом // Сиб. матем. ж. — 1985. — Т. 26, № 1. — С. 189–200.

453. *de la Sen M.* Absolute stability of nonlinear systems under unmodeled linear dynamics // Proc. IASTED Intern. Symposium Robotics and Automation. Acta Press, 1985. — P. 138–140.

454. *Feng Chunbo.* Passivity analysis of feedback systems and its applications // Zidonghua Xuebao/Acta Automatica Sinica. — 1985. — V. 11, № 2. — P. 111–117.

455. *Grujic L.T., Bucevac Z., Ribar Z.* On necessary and sufficient conditions for absolute stability of discrete-time systems // Proc. 9th Triennial World Congr. of IFAC. — Pergamon Press, 1985. — V. 1. — P. 201–205.

456. *Qidi Wu., Djordjevic M.* An application of polynomial positivity to the absolute stability analysis of nonlinear systems // Scientia Electrica. — 1985. — V. 31, № 4. — P. 140–152.

457. *Singh V.* A new approach to the absolute stability of nonlinear feedback systems with slope-restricted nonlinearity // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1985. — V. CAS-32, № 4. — P. 402–403.

1986

458. *Андрусевич В. В.* Абсолютная неустойчивость монотонных нелинейных систем // АиТ. — 1986. — № 7. — С. 40–47.

459. *Андрусевич В. В.* Условия абсолютной неустойчивости положительных нелинейных импульсных систем // АиТ. — 1986. — № 12. — С. 155–157.

460. *Гаспарян О. Н.* Исследование абсолютной устойчивости нелинейных многосвязных систем // Изв. АН Армянской ССР. Серия технич. наук. — 1986. — Т. 39, № 5. — С. 23–29.

461. *Гиль М. И.* О системах, удовлетворяющих обобщенной гипотезе Айзермана-Калмана // ДАН СССР. — 1986. — Т. 290.

462. *Жуйкова А. Г., Хусаинов Д. Я.* Численный алгоритм построения оптимальной функции Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // Вестник Киевского ун-та. — 1986. — № 5. — С. 73–76.

463. *Зеленцовский А. Л.* Построение функций Ляпунова из класса форм степени 2 для исследования абсолютной устойчивости систем управления с нестационарными нелинейными элементами // АиТ. — 1986. — № 5. — С. 166–169.

464. *Либерзон М. Р.* Признак абсолютной устойчивости нестационарных систем // АиТ. — 1986. — № 2. — С. 39–46.

465. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления I, II, III // АиТ. — 1986. — № 3. — С. 63–73, № 4. — С. 5–15, № 5. — С. 38–49.

466. *Пакшин П. В.* Алгебраическая проверка абсолютной устойчивости // ДАН СССР. — 1986. — Т. 290, № 4–6. — С. 813–815.

467. *Пятницкий Е. С., Скородинский В. И.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем управления в форме численных процедур // АиТ. — 1986. — № 9. — С. 32–39.

468. *Смоляр Э. И.* О контрпримерах в проблеме М. А. Айзермана // Препринт № 4728, Агрофиз. научно-исслед. ин. ВАСХНИЛ. — Ленинград, 1986.

469. *Смоляр Э. И.* Об устойчивости в целом нелинейных систем, удовлетворяющих обобщенным условиям Гурвица // Препринт № 4727, Агрофиз. научно-исслед. ин. ВАСХНИЛ. — Ленинград, 1986.

470. *Якубович В. А.* Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем I // Сиб. матем. ж. — 1986. — Т. 27, № 4. — С. 181–200.

471. *Grujic L.T., Petkovski D.B.* On various approaches to robustness of Lurie systems absolute stability // Proc. 25th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1986. — V. 3. — P. 2069–2070.

472. *Liao Xiao Xin.* The absolute stability of Lure direct control systems // Theory and Applications of Nonlinear Control Systems. — North-Holland, 1986. — P. 513–519.

473. *Resende P., Kaszkurewicz E., Hsu L.* On the absolute stability of multivariable non-linear systems using a block-tridiagonal state-space representation // Int. J. of Cont. — 1986. — V. 43, № 2. — P. 643–655.

1987

474. *Айсагалиев С. А.* К теории регулируемых и фазовых систем // АиТ. — 1987. — № 5. — С. 29–39.

475. *Андрусевич В. В.* Рассинхронизация в сложных системах и индикаторное поведение // АиТ. — 1987. — № 3. — С. 3–10.

476. *Барабанов Н. Е.* Метод расширения кругового критерия для импульсных систем автоматического управления // Динамика неоднородных систем, материалы семинара. — М.: ВНИИСИ, 1987. — Вып. 6. — С. 61–68.

477. *Богатырев А. В., Пятницкий Е. С.* Построение кусочно-квадратичных функций Ляпунова для нелинейных систем управления // АиТ. — 1987. — № 10. — С. 30–38.

478. *Каменецкий В. А., Пятницкий Е. С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // АиТ. — 1987. — № 1. — С. 3–12.

479. *Лапин Ю. Н.* О положительности импульсных функций и абсолютной устойчивости нелинейных систем в гурвицевом угле // АиТ. — 1987. — № 5. — С. 40–47.

480. *Мейлахс А. М.* О вариационном подходе к проблеме абсолютной устойчивости нестационарных нелинейных систем // Диф. ур. — Минск: Наука и техника, 1987. — Т. 23, № 7. — С. 1464–1466.

481. *Мейлахс А. М.* О вариационном подходе к проблеме устойчивости параметрически возмущенных линейных систем // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. — Новосибирск: Наука, 1987. — С. 62–64.

482. *Мейлахс А. М.* О существовании функций Ляпунова для устойчивых дифференциальных включений // Динамические процессы и их устойчивость. Якутск: Якутский гос. ун-т, 1987. — С. 98–100.

483. *Молчанов А. П.* Функции Ляпунова для нелинейных дискретных систем управления // АиТ. — 1987. — № 6. — С. 26–35.

484. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // ДАН СССР. — 1987. — № 1. — С. 37–40.

485. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия линейных дифференциальных включений. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1987. — С. 52–61.

486. *Рапопорт Л. Б.* Абсолютная устойчивость систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // АиТ. — 1987. — Т. 48, № 5. — С. 66–74.

487. *Рапопорт Л. Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // АиТ. — 1987. — № 5. — С. 66–74.

488. *Юнгер И. Б.* Алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического управления // АиТ. — 1987. — № 1. — С. 48–54.

489. *Grujic L.T., Petrovski D.B.* Robust absolutely stable Lurie systems // Int. J. of Cont. — 1987. — V. 46, № 1. — P. 357–368.

490. *Kamenetskiy V.A., Pyatnitskiy E.S.* An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions // Systems & Control Letters. — 1987. — № 8. — P. 445–451.

491. *Krishnamurthy V., Sastry G.V.K.R.*, A new design method for absolute stability of nonlinear systems // J. of the Institution of Engineers (India), Electronics & Telecommunication, Engineering Division. — 1987. — V. 67. — P. 77–80.

492. *Mori T., Kokame H.* Absolute stability conditions for nonlinear feedback systems with perturbed parameters // Systems & Control Letters. — 1987. — V. 31, № 4. — P. 304–306.

1988

493. *Александров В. В.* Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299, № 2. — С. 296–301.

494. *Барабанов Н. Е.* О проблеме абсолютной устойчивости импульсных систем автоматического управления // АиТ. — 1988. — № 8. — С. 28–37.

495. *Барабанов Н. Е.* Новые критерии абсолютной устойчивости систем автоматического управления с одной дифференцируемой нелинейностью // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299, № 3. — С. 570–572.

496. *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений I, II // АиТ. — 1988. — № 2. — С. 40–47, № 5. — С. 17–24.

497. *Барабанов Н. Е.* О проблеме Калмана // Сиб. матем. ж. — 1988. — № 3. — С. 3–11.

498. *Каменецкий В. А.* Градиентный метод построения функций Ляпунова для нелинейных динамических систем // Вопросы кибернетики. Оптимизация в сложных системах. — М.: Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1988. — С. 55–72.

499. *Левин А. Ю.* Критерий абсолютной неосцилляционной устойчивости для уравнений n-го порядка // УМН. — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 203–204.

500. *Либерзон М. Р.* К вопросу об устойчивости движения осесимметричного вращающегося летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. — 1988. — № 5. — С. 9–14.

501. *Молчанов А. П.* Об эквивалентности двух определений абсолютной устойчивости для нестационарных систем управления // АиТ. — 1988. — № 10. — С. 187–189.

502. *Рапопорт Л. Б.* Знакоопределенность квадратичной формы при квадратичных ограничениях и абсолютная устойчивость нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 4. — С. 822–826.

503. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных систем с периодически нестационарной линейной частью // ДАН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 299–303.

504. *Bar-Kana I.* On the Lur'e problem and stability of nonlinear controllers // J. of the Franklin Institute. — 1988. — V. 325, № 6. — P. 687–693.

505. *da Cruz J.J., Geromel J.C.* Absolute stability analysis of multivariable regulators through the Popov criterion // Proc. 27th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1988. — V. 3. — P. 2194–2198.

506. *de la Sen M.* Guaranteed absolute stability in the presence of unmodelled dynamics // Int. J. of Systems Science. — 1988. — V. 19, № 1. — P. 77–96.

507. *Grujic L.T.* Algebraic conditions for absolute tracking control of Lurie systems // Int. J. of Cont. — 1988. — V. 48, № 2. — P. 729–754.

508. *Liberzon M.R.* About absolute stability of the follow-up systems // Automatica. — 1988. — P. 1555–1558.

509. *Yakubovich V.A.* Dichotomy and absolute stability of nonlinear systems with periodically nonstationary linear part // Systems & Control Letters. — 1988. — V. 11, № 3. — P. 221–228.

1989

510. *Барабанов Н. Е.* Новые частотные критерии абсолютной устойчивости и неустойчивости систем автоматического управления с нестационарной нелинейностью // Диф. ур. — 1989. — Т. 25, № 4. — С. 555–563.

511. *Каменецкий В. А.* Метод свертывания матричных неравенств и критерий абсолютной устойчивости стационарных систем управления // АиТ. — 1989. — № 5. — С. 28–39.

512. *Кореневский Д. Г.* Абсолютная устойчивость непрерывных и дискретных нелинейныхь стохастических систем управления // ДАН СССР. — 1989. — Т. 306, № 4–6. — С. 1316–1319.

513. *Либерзон М. Р.* Иннорный критерий абсолютной устойчивости нестационарных систем // АиТ. — 1989. — № 5. — С. 40–46.

514. *Либерзон М. Р.* Иннорный критерий абсолютной устойчивости нестационарных систем управления // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 5. — С. 1060–1064.

515. *Пакшин П. В.* Алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных стохастических систем с мультипликативными белыми шумами // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. — 1989. — № 14. — С. 115–123.

516. *Рапопорт Л. Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с суперпозицией нелинейных элементов // АиТ. — 1989. — № 12. — С. 166–168.

517. *Рапопорт Л. Б.* Об одном частотном условии абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // АиТ. — 1989. — № 5. — С. 34–42.

518. *Цыкунов А. М.* Квадратичный критерий абсолютной устойчивости в теории адаптивных систем // АиТ. — 1989. — № 1. — С. 122–130.

519. *Юнгер И. Б.* Критерий абсолютной устойчивости автоматических систем с нелинейными векторными элементами // АиТ. — 1989. — № 2. — С. 71–86.

520. *Bar-Kana I.* Absolute stability and robust discrete adaptive control // Robust Adaptive Control. Proc. of the IFAC Workshop. Pergamon, 1989. — P. 171–175.

521. *Farotimi O., Dembo A., Kailath T.* Absolute stability and optimal training for dynamic neural networks // Proc. Twenty-Third Asilomar Conf. on Signals, 1989. — V. 1. — P. 133–137.

522. *Siljak D.D.* Polytopes of nonnegative polynomials // Proc. American Control Conference. — 1989. — V. 1. — P. 193–199.

1990

523. *Алексеев Ф. Ф.* К исследованию систем автоматического регулирования с несколькими нестационарными блоками // Устойчивость и управление. — Казань, 1990. — С. 7–14.

524. *Козякин В. С.* Абсолютная устойчивость дискретных рассинхронизированных систем // ДАН СССР. — 1990. — Т. 312, № 4–6. — С. 1066–1070.

525. *Козякин В. С.* Абсолютная устойчивость систем с асинхронными дискретными элементами // АиТ. — 1990. — № 10. — С. 56–63.

526. *Рапопорт Л. Б.* Граница абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем и ее связь с построением инвариантных функций // АиТ. — 1990. — Т. 51, № 10. — С. 78–86.

527. *Савкин А. В.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных систем управления с периодичной нестационарной линейной частью // АиТ. — 1990. — Т. 51, № 8. — С. 50–55

528. *Юнгер И. Б., Герасимов О. И.* Алгебраический критерий абсолютной устойчивости // Автоматика. — 1990. — Т. 23, № 2. — С. 42–45.

529. *Якубович В. А.* Методы теории абсолютной устойчивости в задачах инвариантности // Кибер. и вычисл. техн. — 1990. — № 85. — С. 1–13.

530. *Cheng Yu.* Absolute stability of multi-regular control system in infinite Hurwitz angle // Acta Math. Sin. — 1990. — V. 33, № 3. — P. 289–294.

531. *da Cruz J.J., Geromel J.C.* Frequency-domain approach to the absolute stability analysis of discrete-time linear-quadratic regulators // IEE Proc. -D Control Theory & Applications. — 1990. — V. 137, № 2. — P. 104–106.

532. *Halanay A., Rasvan V.* Absolute stability of discrete systems with slope restricted nonlinearity // Revue Roumaine des Sciences Techniques. — 1990. — V. 35, № 1. — P. 101–111.

533. *Liberzon M.R.* Adaptive control systems of electromagnetic field influence on materials // Evalution of Adaptive Control Strategies. — Pergamon Press, 1990. — № 7. — P. 267–270.

534. *Lu Qilong.* The conditions of absolute stability of some large-scale control systems // Advances in Modelling & Simulation. — 1990. — V. 22, № 1. — P. 31–42.

535. *Singh V.* A generalized approach for the absolute stability of discrete-time systems utilizing the saturation nonlinearity based on passivity properties // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1990. — V. 37, № 3. — P. 444–447.

536. *Voronov A.A.* On absolute stability criteria improvement and absolute stability regions construction // Nonlinear Control Systems Design, Selected Papers from the IFAC Symposium. — Pergamon, 1990. — P. 219–223.

537. *Wu Yongxian, Zhao Suxia.* Necessary and sufficient conditions for the existence of Liapunov function of Lur'e form // Acta Mathemat. Appl. Sinica. — 1990. — V. 6, № 3. — C. 245–250.

538. *Yunger I.B., Gerasimov O.I.* New improved criteria of absolute stability for nonlinear dynamical systems // Proc. IFAC World Congress. — Tallin, 1990. — V. 6. — P. 31–35.

1991

539. *Айсагалиев С. А., Маговин М. М.* К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем в критических случаях // Казан. гос. техн. ун-т. — Казань, 1991. — № 3. — С. 89–92.

540. *Александрова О. В.* Обобщенный резонанс в колебательной системе // Вестник МГУ. Матем. и мех. — 1991. — № 3. — С. 89–92.

541. *Воронов А. А.* О построении областей абсолютной устойчивости систем с секторными ограничениями на нелинейность // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. — 1991. — № 14. — С. 28–37.

542. *Воронов А. А.* Об улучшении критерия абсолютной устойчивости систем с дифференцируемыми монотонными нелинейностями // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. — 1991. — № 14. — С. 22–28.

543. *Воронова В. В.* Исследование абсолютной устойчивости дискретных систем управления с помощью векторных функций Ляпунова // Пробл. анал. мех., устойчивости и упр. движением: Матер. 5 Всес. Четаев. конф. Казань, сент., 1987/Иркут. ВЦ, ВЦ АН СССР. — Новосибирск, 1991. — С. 58–62.

544. *Ионсиан У., Чжао Суся.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами в случае бесконечного сектора // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 1. — С. 34–42.
545. *Карслян Е.В., Чимишкян С.Е.* Синтез класса абсолютно устойчивых нелинейных многосвязных систем автоматического управления при случайных воздействиях // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1991. — № 1. — С. 74–78.
546. *Кучеев З.Ш., Герасимов О.И.* Обзор и сравнительная характеристика методов численного анализа абсолютной устойчивости нелинейных автоматических систем // Изв. Ленингр. электротехн. ин-та. — 1991. — № 441. — С. 58–62.
547. *Левин А.Г.* Декомпозиция частотных критериев устойчивости многоагрегатных линейных систем // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 3. — С. 47–59.
548. *Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г.* Достаточные условия абсолютной устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях // Автоматика. — 1991. — Т. 24, № 5. — С. 31–38.
549. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техн. Сер. техн. кибернет. ВИНИТИ. — 1991. — № 32. — С. 3–31.
550. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 8. — С. 45–55.
551. *Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б.* Периодические движения и граница асимптотической устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // ДАН СССР. — 1991. — Т. 321, № 4. — С. 687–691.
552. *Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б.* Периодические движения и критерии абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 10. — С. 63–73.
553. *Пятницкий Е.С., Рапопорт Л.Б.* Существование периодических движений и критерии абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 5. — С. 68–79.
554. *Савкин А.В.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем управления с нестационарной линейной частью // АиТ. — 1991. — Т. 52, № 3. — С. 78–84.
555. *Скородинский В.И.* Итерационные методы проверки частотных критериев абсолютной устойчивости непрерывных систем управления I, II // АиТ. — 1991. — № 7. — С. 68–74, № 8. — С. 63–71.
556. *Цыпкин Я.З.* Стабилизация нелинейных дискретных систем в условиях непараметрической неопределенности // Автоматика. — 1991. — Т. 24, № 4. — С. 3–7.
557. *Chapellat H., Dahleh M., Bhattacharyya S.P.* On robust stability of interval control systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1991. — V. 36, № 1. — P. 59–67.
558. *Fruchter G.* Generalized zero sets location and absolute robust stabilization of continuous nonlinear control systems // Automatica. — 1991. — V. 27, № 3. — P. 501–512.
559. *Halanay A., Rasvan V.* Absolute stability of feedback systems with several differentiable nonlinerities // Int. J. of Systems Science. — 1991. — V. 22, № 10. — P. 1911–1927.

560. *Kitamura S.* A stability condition for fuzzy ruled control systems – an extension of the circle criterion // Trans. Society of Instrument and Control Engineers. — 1991. — V. 27, № 5. — P. 532–537.

561. *Lee S., Meerkov S.M.* Vibrational feedback control in the problem of acoustic stability // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1991. — V. 36, № 4. — P. 482–485.

562. *Liao Xiao Xin.* Absolute stability of general Lurie control systems // Acta Math. Sci. Engl. Ed. — 1991. — V. 11, № 1. — P. 1–12.

563. *Matsuoka K.* On absolute stability of neural networks // Trans. of the Institute of Electronics & Communication Engineers of Japan. — 1991. — V. J74D-II, № 4. — P. 536–542.

564. *Mori T., Kokame H.* Robust absolute stability for Lure systems with interval plants // Trans. Institute of Electronics & Communication Engineers of Japan. — 1991. — V. J74-A, № 11. — P. 1677–1679.

565. *Sun Geng.* A class of single step methods with a large interval of absolute stability // J. of Comp. Math. — 1991. — V. 9, № 2. — P. 185–193.

566. *Tesi A., Vicino A.* Robust absolute stability of Lur'e control systems in parameter space // Automatica. — 1991. — V. 27, № 1. — P. 147–151.

567. *Wei Bing Gao, Yi Xiong* Absolute stability of asymmetric Hopfield neural network // 1991 IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks. — 1991. — V. 3. — P. 2195–2198.

568. *Xiao Shuxian* On Lur'e functions for nonlinear systems // Contr. Theory and Appl. — 1991. — V. 8, № 3. — P. 268–274.

569. *Zhao Keyou* Robust absolute stability for a class of uncertain systems // Contr. Theory and Appl. — 1991. — V. 8, № 3. — P. 353–356.

1992

570. *Герасимов О. И., Юнгер И. Б.* Частотно-алгебраический анализ абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического управления // Изв. РАН. Техн. киберн. — 1992. — № 1. — С. 213–217.

571. *Левин А. Г.* Точная оценка показателя колебательности класса многосвязных линейных систем // АиТ. — 1992. — Т. 53, № 9. — С. 65–72.

572. *Молчанов А. П., Морозов М. В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. — 1992. — Т. 53, № 2. — С. 49–59.

573. *Молчанов А. П., Морозов М. В.* Функции Ляпунова для нелинейных нестационарных дискретных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. — 1992. — Т. 53, № 10. — С. 37–45.

574. *Морозов М. В.* Об эквивалентности двух определений абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. — 1992. — Т. 53, № 8. — С. 46–53.

575. *Наджафов Э. М., Хаскельберг Л. Г.* Алгебраические условия абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1992. — № 3. — С. 202–204.

576. *Савкин А. В.* Нестационарный аналог леммы Калмана-Якубовича и его пременения в теории управления // Автоматика. — 1992. — Т. 25, № 3. — С. 47–51.

577. *Спасский Р. А.* Об одной задаче стабилизации ЛА // Соврем. вопр. мех. косм. полета: Тр. 26 Чтений, посвящ. разраб. науч. наследия и развитию идей К. Э. Циолковского, Калуга, 17–20 сент., 1991. — М., 1992. — С. 107–109.

578. *Хусаинов Д. Я.* Абсолютная устойчивость систем управления нейтрального типа // Автоматика. — 1992. — Т. 25, № 2. — С. 15–22.

579. *Чурилов А. Н.* Частотный критерий устойчивости нелинейных импульсных систем с четным законом импульсации // АиТ. — 1992. — Т. 53, № 4. — С. 93–100.

580. *Dahleh M., Tesi A., Vicino A.* On the robust Popov criterion for interval Lur'e systems // Proc. of the 31st IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1992. — V. 3. — P. 2808–2809.

581. *de la Sen M.* Absolute stability and hyperstability of a class of hereditary systems // Proc. of the 31st IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1992. — V. 1. — P. 725–730.

582. *Haddad W.M., Bernstein D.S.* New absolute stability criteria for robust stability and performance with locally slope-restricted monotonic nonlinearities // Proc. of the 31st IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1992. — V. 3. — P. 2611–2616.

583. *Haddad W.M., How J.P., Hall S.R., Bernstein D.S.* Extensions of mixed-mu bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory, I, II // Proc. of the 31st IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1992. — V. 3. — P. 2813–2823.

584. *Kitamura S., Kurozumi T.* Extended circle criterion and stability analysis of fuzzy control systems // Fuzzy Engineering Toward Human Friendly Systems, IOS Press. — 1992. — P. 634–643.

585. *Lim J-T.* Absolute stability of class of nonlinear plants with fuzzy logic controllers // Electronics Letters. — 1992. — V. 28, № 21. — P. 1968–1970.

586. *Savkin A.V.* The Kalman-Yakubovich lemma for non-stationary systems and its applications // Int. J. of Adaptive Control & Signal Processing. — 1992. — V. 6, № 3. — P. 253–257.

587. *Tesi A., Vicino A., Zappa G.* Clockwise property of the Nyquist plot with implications for absolute stability // Automatica. — 1992. — V. 28, № 1. — P. 71–80.

1993

588. *Александров В. В., Красильникова И. Е., Торрес А.* Абсолютная устойчивость одномерных колебательных систем // Задача Булгакова о максимал. отклонении и ее применение. — М.: МГУ, 1993. — С. 48–57.

589. *Герасимов О. И., Юнгер И. Б.* Матричный критерий абсолютной устойчивости импульсных систем автоматического управления // АиТ. — 1993. — Т. 54, № 2. — С. 134–139.

590. *Жермоленко В. Н., Хинг Кортон Р., Гонсалес Г.* Абсолютная устойчивость двумерных систем // Задача Булгакова о максимал. отклонении и ее применение. — М.: МГУ, 1993. — С. 57–80.

591. *Зеленцовский А. Л.* О необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем // АиТ. — 1993. — Т. 54, № 3. — С. 187–190.

592. *Козякин В. С., Кузнецов Н. А.* Устойчивость дискретных рассинхронизированных систем (задачи, методы и состояние) // Юбил. сб. тр. ин-тов Отд-ния информат., вычисл. техн. и автоматиз. — РАН, 1993. — Т. 1. — С. 94–114.
593. *Рапопорт Л. Б.* Антипериодические движения и алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем в трехмерном случае // АиТ. — 1993. — Т. 54, № 7. — С. 38–54.
594. *Рапопорт Л. Б.* Существование негладких инвариантных функций на границе области абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем // АиТ. — 1993. — Т. 54, № 3. — С. 109–114.
595. *Савкин А. В.* Аналог частотной теоремы для нестационарных систем // Изв. РАН. Техн. киберн. — 1993. — № 2. — С. 26–30.
596. *Серков В. И., Целигоров Н. А.* Анализ абсолютной устойчивости многомерных нелинейных импульсных автоматических систем на основе алгебраической модификации критериев, полученных с использованием билинейного преобразования // Изв. РАН. Техн. киберн. — 1993. — № 4. — С. 21–28.
597. *Beklemishev N.N., Liberzon M.R.* The use of inner method in stability analysis of control systems for special technological processes // Proc. of the Int. Symp. of Fundamentals of Discrete-Time Systems, Chicago, USA, June, 1992, Albuquerque, New Mexico. — TSI Press, 1993. — P. 189–194.
598. *Gao Guo-cheng.* Explicit criteria of absolute stability for the real second canonical form of control system // Applied Mathematics & Mechanics. — 1993. — V. 14, № 5. — C. 445–454.
599. *Haddad W.M., Bernstein D.S.* Off-axis absolute stability criteria and mu-bounds involving non-positive-real plant-dependent multipliers for robust stability and performance with lo // Proc. of the 1993 American Control Conference. — 1993. — V. 3. — P. 2790–2794.
600. *Halanay A., Ionescu V.* Generalized discrete-time Popov-Yakubovich theory // Systems & Control Letters. — 1993. — № 1. — P. 1–6.
601. *How J.P., Haddad W.M., Hall S.R.* Robust control synthesis examples with real parameter uncertainty using the Popov criterion // Proc. of the American Control Conference. — 1993. — V. 2. — P. 1090–1095.
602. *How J.P., Hall S.R.* Connections between the Popov stability criterion and bounds for real parameter uncertainty // Proc. American Control Conference. — 1993. — V. 2. — P. 1084–1089.
603. *Liao Fucheng.* Absolute stability for a class of indirect control systems // Acta sci. natur. Univ. Neimenggu. — 1993. — V. 24, № 3. — P. 235–241.
604. *Liberzon M.R.* Inner indication of absolute stability for discrete systems // Proc. of the Int. Symp. of Fundamentals of Discrete-Time Systems, Chicago, USA, June, 1992, Albuquerque, New Mexico. — TSI Press, 1993. — P. 333–338.
605. *Liberzon M.R.* Test of absolute stability for nonlinear dynamic systems // Proc. of 1st European Nonlinear Oscillations Conf. (EUROMECH). — Hamburg, Germany, 1993. — P. 91.
606. *Megretski A.* Necessary and sufficient conditions of stability: a multi-loop generalization of the circle criterion // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1993. — V. 38, № 5. — P. 753–756.

607. *Minyue Fu., Tsypkin Ya. Z.* Modified Mikhailov plots for robust absolute stability with non-parametric perturbations and uncertain nonlinearity // Int. J. of Cont. — 1993. — V. 58, № 4. — P. 925–932.

608. *Nishimura T., Mori T., Kuroe Y., Kokame H.* On application of Popov's theorem for Lur'e systems with interval plants // Trans. Institute of Systems. — 1993. — V. 6, № 4. — P. 165–170.

609. *Rongdong Wang*. Algebraic criteria for absolute stability // Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1993. — V. 4. — P. 3200–3205.

610. *Rongdong Wang*. Symbolic computation approach for absolute stability // Int. J. of Cont. — 1993. — V. 58, № 2. — P. 495–502.

611. *Tsypkin Ya. Z., Kerbelev A.M.* Robust stable, unstable and auto-oscillatory nonlinear systems under nonparametric uncertainty // Proc. 1993 Int. Conf. on Systems. — 1993. — V. 1. — P. 66–68.

612. *Tsypkin Ya.Z., Polyak B.T.* Robust absolute stability of continuous systems // Int. J. of Rob. Nonlin. Cont. — 1993. — V. 3, № 3. — P. 231–239.

613. *Wang Lian, Zhang Yi, Zhang Yi.* On absolute stability for a class of nonlinear control systems with delay // Chinese Science Bulletin. — 1993. — V. 38, № 20. — P. 1673–1677.

614. *Worland P.B.* Parallel methods for ODEs with improved absolute stability boundaries // J. of Parallel & Distributed Computing. — 1993. — V. 18, № 1. — P. 25–32.

615. *Yuanji Cheng, Lina Wang*. On the absolute stability of multi-nonlinear control systems in the critical cases // IMA J. of Mathematical Control & Information (Institute of Mathematics & its Applications). — 1993. — V. 10, № 1. — P. 1–10.

616. *Yunger I.B, Gerasimov O.I* Algebraic analysis of absolute stability for uncertain dynamical systems with nonlinear time-varying properties // Automatica. — 1993. — V. 29, № 3. — P. 763–766.

617. *Zhao Keyou*. An extended Popov criterion for a class of uncertain systems // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1993. — V. 10, № 1. — P. 108–112.

1994

618. *Александрова О. В.* Об оценке колебаний постоянно возмущаемых систем // Вестник МГУ. Матем. и мех. — 1994. — № 5. — С. 54–58.

619. *Бабичев А. А., Целигоров Н. А.* Полиномиальная форма критерия абсолютной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем // Изв. ВУЗов. Приборостроение. — 1994. — Т. 37, № 5–6. — С. 21–22.

620. *Дьяченко И. В., Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Численный метод построения функций Ляпунова и анализ устойчивости нелинейных динамических систем на ЭВМ // АиТ. — 1994. — Т. 55, № 4. — С. 23–38.

621. *Alexandrov V.V., Liberzon M.R., Rozov N.Kh.* On the absolute stability of monomeasurable control systems // Syst. Networks: Math. Theory and Applications. Berlin: Academie Verlag, 1994. — V. 2. — P. 39–41.

622. *Barabanov N.E.* The possible directions method in the theory of robust stability // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Dec. Cont., 1994. — V. 3. — P. 2979–2980.

623. *Bernstein D.S., Haddad W.M., Sparks A.G.* A simplified proof of the multivariable Popov criterion and an upper bound for the structured singular value with real parameter uncertainty // Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1994. — V. 3. — P. 2139–2140.

624. *Brusin V.A., Ugrinovsky V.A.* Absolute stability approach to stochastic stability of non-linear infinite dimensional feedback evolution equations // Proc. of the 12th Triennial World Congress IFAC. — 1994. — P. 59–62.

625. *Cessac B.* Absolute stability criterion for discrete time neural networks // J. of Physics A-Mathematical & General. — 1994. — V. 27, № 24. — P. L927-L930.

626. *Forti M., Liberatore A., Manetti S., Marini M.* On absolute stability of neural networks // 1994 IEEE Int. Symp. on Circ. & Syst. — 1994. — V. 6. — P. 241–244.

627. *Forti M., Manetti S., Marini M.* Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1994. — V. 41, № 7. — P. 491–494.

628. *Gil M.I.* Class of absolutely stable multivariable systems // Int. J. of Systems Science. — 1994. — V. 25, № 3. — P. 613–617.

629. *Gil M.I.* On absolute stability of differential-delay systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1994. — V. 39, № 12. — P. 2481–2484.

630. *Haddad W.M., How J.P., Hall S.R., Bernstein D.S.* Extensions of mixed-mu bounds to monotonic and odd monotonic nonlinearities using absolute stability theory // Int. J. of Cont. — 1994. — V. 60, № 5. — P. 905–951.

631. *Haddad W.M., Kapila V.* Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities // Proc. of the 1994 American Control Conference. — 1994. — V. 1. — P. 1020–1021.

632. *How J.P., Haddad W.M., Hall S.R.* Application of Popov controller synthesis to benchmark problems with real parameter uncertainty // J. of Guidance Control & Dynamics. — 1994. — V. 17, № 4. — P. 759–768.

633. *How J.P., Hall S.R., Haddad W.M.* Robust controllers for the Middeck Active Control Experiment using Popov controller synthesis // IEEE Trans. on Control Systems Technology. — 1994. — V. 2, № 2. — P. 73–87.

634. *Liang Jin, Nikiforuk P.N., Gupta M.M.* Absolute stability conditions for discrete-time recurrent neural networks // IEEE Trans. on Neural Networks. — 1994. — V. 5, № 6. — P. 954–964.

635. *Liberzon M.R.* Adaptive control systems for new technological processes // Proc. of the IAC'94. — Moscow, Russia, 1994. — V. 2. — P. 163–167.

636. *Liberzon M.R.* Control systems for special technological processes of metal production // Proc. of the ISTS. — Yokohama, Japan, 1994. — P. 16.

637. *Liberzon M.R.* Inner approach for the absolute stability of time-lag dynamical systems // Proc. of the ICM'94. — Zürich, Switzerland, 1994. — P. 795.

638. *Liberzon M.R.* On the absolute stability of monomeasurable control systems // Proc. of the MTNS'93. — Regensburg, Germany, Academie Verlag GmbH, 1994. — V. 2. — P. 39–41.

639. *Liberzon M.R.* Stability of rolling mill processes // Proc. of the IFAC Conf. on ISE. — Baden-Baden, Germany, 1994.

640. *Marquez H.J., Diduch C.P.* Absolute stability of systems with parametric uncertainty and nonlinear feedback // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1994. — V. 39, № 3. — P. 664–668.

641. *Nishimura T., Mori T., Kuroe Y., Kokame H.* Robust absolute stability of Lur'e systems with interval plants and general sector-type nonlinearities // Trans. of the Institute of Electronics & Communication Engineers of Japan. — 1994. — V. 114-C, № 2. — P. 239–244.

642. *Premarante K., Jury E.I.* Discrete-time positive-real lemma revisited: the discrete-time counter part of the Kalman-Yakubovitch lemma // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1994. — V. 41, № 11. — P. 747–750.

643. *Savkin A.V., Petersen I.R.* A connection between H/sup infinity / control and the absolute stabilizability of uncertain systems // Systems & Control Letters. — 1994. — V. 23, № 3. — P. 197–203.

644. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of Lur'e systems // Trans. of the Institute of Systems. — 1994. — V. 7, № 4. — P. 142–149.

645. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of nonlinear control systems // Trans. of the Institute of Systems. — 1994. — V. 7, № 7. — P. 255–264.

646. *Zhang Jiye., Shu Zhong-zhou.* Necessary and sufficient criteria for absolute stability of the direct control system // Applied Mathematics & Mechanics. — 1994. — V. 15, № 3. — P. 245–251.

1995

647. *Бегмуратов К.А., Мартынюк А.А.* К теории абсолютной устойчивости нестационарных систем // Прикладная механика. — Киев, 1995. — Т. 31, № 10. — С. 77–80.

648. *Елхимова Ю.В.* Устойчивость нестационарных импульсных систем управления // Выч. техн. и вопр. кибернет. — 1995. — № 27. — С. 115–122.

649. *Молчанов А.П., Морозов М.В.*, Робастная абсолютная устойчивость нестационарных дискретных систем управления с периодическими ограничениями // АиТ. — 1995. — Т. 56, № 10. — С. 93–100

650. *Пакшин П.В., Гущин О.Г., Троицкий А.В.* Робастная устойчивость, абсолютная устойчивость и стабилизация дискретных стохастических систем // 3 Междунар. семин. «Негладк. и разрыв. задачи упр., оптимиз. и их прил.». — Санкт-Петербург, 1995. — С. 107–110.

651. *Рапопорт Л.Б.* Антипериодические движения и алгебраический критерий асимптотической устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений в двумерном случае // АиТ. — 1995. — Т. 56, № 1. — С. 56–63.

652. *Чурилова М.Ю.* Аналог кругового критерия абсолютной устойчивости для систем с переменным запаздыванием // АиТ. — 1995. — Т. 56, № 2. — С. 52–56.

653. *Arik S., Tavsanoglu V.* Absolute stability of neural networks // Proc. 12th European Conf. on Circuit Theory and Design, Istanbul Tech. Univ. — 1995. — V. 1. — P. 207–210.

654. *Barabanov N.E.* Stability of inclusions of linear type // Proc. of the 1995 American Control Conference. — 1995. — V. 5. — P. 3366–3370.

655. *Bernstein D.S., Haddad W.M., Sparks A.G.* A Popov criterion for uncertain linear multivariable systems // Automatica. — 1995. — V. 31, № 7. — P. 1061–1064.
656. *Brusin V.A., Ugrinovskii V.A.* Absolute stability approach to stochastic stability of infinit-dimensional nonlinear syatems // Automatica — 1995. — V. 31, № 10. — P. 1453–1458.
657. *Curran P.F.* Absolute stability, passivity and the generalized circle criterion // Proc. of the 3rd International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, NDES '95. — Univ. College, Dublin, 1995. — P. 135–138.
658. *Feng-Hsiag Hsiao, Jer-Guang Hsieh, Jaion-Shea Chang.* New algebraic criteria for absolute stability of nonlinear systems // Int. J. of Robust & Nonlinear Contr. — 1995. — V. 5, № 6. — P. 591–607.
659. *Gelig A.Kh., Churilov A.N.* Frequency-domain criteria for absolute stability of nonlinear systems with various types of pulse modulation // Proc. of the Third European Control Conference, ECC 95. — 1995. — V. 3. — P. 2251–2255.
660. *Haddad W.M., Kapila V.* Absolute stability criteria for multiple slope-restricted monotonic nonlinearities // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1995. — V. 40, № 2. — P. 361–365.
661. *Kaining Wang, Michel A.N.* Stability analysis of differential inclusions in Banach space with applications to nonlinear systems with time delays // Proc. of the 1995 American Control Conference. — 1995. — V. 4. — P. 2468–2472.
662. *Kaiqi Xiong.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a G-type Lyapunov function // Automatica. — 1995. — V. 31, № 5. — P. 787–791.
663. *Kaszkurewicz E., Bhaya A.* Comments on «Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks» // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1995. — V. 42, № 8. — P. 497–499.
664. *Keqin Gu.* Absolute stability of systems under block diagonal memoryless uncertainties // Automatica. — 1995. — V. 31, № 4. — P. 581–584.
665. *Liberzon M.R.* Stability of control systems for new technological processes of special metal production // Proc. 3 Int. Congr. Industrial Appl. Math. — Hamburg, Germany, 1995. — P. 167–171.
666. *Lin W., Byrnes C.I.* Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems // Automatica. — 1995. — V. 31, № 2. — P. 263–267.
667. *Louisell J.* Absolute stability in linear delay-differential systems: ill-posedness and robustness // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1995. — V. 40, № 7. — P. 1288–1291.
668. *Megretski A.* Combining L1 and L2 methods in the robust stability and performance analysis of nonlinear systems // Proc. 34th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1995. — V. 3. — P. 3176–3181.
669. *Reza Moheimani S.O., Savkin A.V., Petersen I.R.* A connection between H/sub infinity / control and the absolute stabilizability of discrete-time uncertain linear systems // Automatica. — 1995. — V. 31, № 8. — P. 1193–1195.
670. *Savkin A.V., Petersen I.R.* A method for robust stabilization related to the Popov stability criterion // Int. J. of Cont. — 1995. — V. 62, № 5. — P. 1105–1115.

671. *Savkin A.V., Petersen I.R.* Nonlinear versus linear control in the absolute stabilizability of uncertain systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1995. — V. 40, № 1. — P. 122–127.

672. *Savkin A.V., Petersen I.R.* Structured dissipativeness and absolute stability of nonlinear systems // Int. J. of Cont. — 1995. — V. 62, № 2. — P. 443–460.

673. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of Lur'e systems // Proc. of the 34th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1995. — V. 2. — P. 1449–1454.

674. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of multivariable Lur'e systems-a Popov-type condition and application of polygon interval arithmetic // Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers. — 1995. — V. 31, № 9. — P. 1329–1335.

675. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of multivariable Lur'e systems-linear matrix inequalities and an application to polytopic systems // Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers. — 1995. — V. 31, № 8. — P. 1061–1069.

676. *Zhang Jiye.* Necessary and sufficient conditions for the absolute stability of discrete type Lurie control system // Applied Mathematics & Mechanics. — 1995. — V. 16, № 10. — P. 995–1001.

1996

677. *Бадмаева С.В., Барабанов Н.Е.* Новый частотный критерий абсолютной устойчивости систем управления с запаздывающим аргументом // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 4. — С. 8–9.

678. *Бадмаева С.В., Барабанов Н.Е.* Усиление критериев абсолютной устойчивости систем автоматического управления с несколькими нестационарными нелинейностями // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 1. — С. 5–9.

679. *Баркин А.И.* О двух критериях абсолютной устойчивости дискретных систем // АиТ. — 1996. — Т. 57, № 1. — С. 21–26.

680. *Брусин В.А.* Частотные условия в задачах H{e}-управления и абсолютной стабилизации // АиТ. — 1996. — Т. 57, № 5. — С. 17–25.

681. *Бургин Б.Ш.* Анализ абсолютной устойчивости равновесия нелинейной астатической ДЭМС стабилизации скорости // Автоматизир. электромех. системы. — Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 1996. — С. 54–60.

682. *Дружинина М.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // АиТ. — 1996. — № 2. — С. 3–33.

683. *Маликов А.И.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем со случайными изменениями структуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 3. — С. 19–30.

684. *Харитонова Е.Б.* Критерий абсолютной устойчивости электроприводов в условиях неопределенности // Автомат. упр. и интеллект. системы, Моск. гос. ин-т радиотехн., электрон. и автомат. (техн. ун-т). — 1996. — С. 92–96.

685. *Arik S., Tavsanoglu V.* Absolute stability of nonsymmetric neural networks // IEEE Int. Symposium on Circ. & Syst., 1996. — V. 3. — P. 441–444.

686. *Bajic V.B.* Necessary and sufficient algebraic conditions for a variant of exponential absolute stability of a class of nonlinear systems // Symposium on Modelling, 1996. — V. 2. — P. 927–931.

687. *Bin Suleiman M., Baok S., Hall G.* Varying the component wise order of the multi-step methods in solving ODEs and its absolute stability // Appl. Mathematics & Computation. — 1996. — V. 74, № 2–3. — P. 209–222.

688. *Hagiwara T., Araki M.* Absolute stability of sampled-data systems with a sector nonlinearity // Systems & Control Letters. — 1996. — V. 27, № 5. — P. 293–304.

689. *How J.P., Collins E.G., Haddad W.M.* Optimal Popov controller analysis and synthesis for systems with real parameter uncertainties // IEEE Trans. on Control Systems Technology. — 1996. — V. 4, № 2. — P. 200–207.

690. *Kaiqi Xiong.* Necessary and sufficient conditions for the existence of a Lyapunov function with 'a quadratic form plus an integral term' // Int. J. of Control. — 1996. — V. 64, № 4. — P. 707–719.

691. *Kaiqi Xiong.* The solution of the generalized Lurie problem for direct control systems // Proc. of the 35th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1996. — V. 2. — P. 2139–2144.

692. *Liberzon M.R.* Improvement of plasticity and other properties of metals by electromagnetic field // Proc. 19th Int. Congress of Theoretical and Appl. Mechanics. — Kyoto, Japan. 1996. — P. 1178.

693. *Pyatnitsky E.S., Rapoport L.B.* Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1996. — V. 43, № 3. — P. 219–229.

694. *Rasvan V.* Stabilization and decoupling control applied in vehicle dynamics // Control Applications of Optimization, 10^{th} IFAC Workshop. — Pergamon, 1996. — P. 97–102.

695. *Savkin A.V., Evans R.J.* Robust output feedback stabilizability via controller switching // Proc. 35th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1996. — V. 3. — P. 2654–2658.

696. *Xue-Bin Liang, Yamaguchi T.* Necessary and sufficient condition for absolute exponential stability of Hopfield-type neural networks // IEICE Trans. on Information & Systems. — 1996. — V. E79-D, № 7. — P. 990–993.

697. *Yakubovich V.A., Fradkov A.L., Hill D.J.* Dissipativity of T-periodic linear systems // Proc. 35th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1996. — V. 4. — P. 3953–3957.

698. *Zhang Wei.* The criteria for absolute stability of Lurie system with delay // Differential Equations and Control Theory. Proc. Int. Conference. — Marcel Dekker, 1996. — P. 455–457.

1997

699. *Молчанов А. П., Морозов М. В.* Алгоритмы анализа робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями // АиТ. — 1997. — № 5. — С. 100–111.

700. *Молчанов А. П., Морозов М. В.* Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими ограничениями // АиТ. — 1997. — № 1. — С. 100–107.

701. *Arik S., Tavsanoglu V.* Absolute stability of a larger class of dynamical neural networks // ECCTD '97, Proc. European Conf. on Circuit Theory and Design. — Budapest: Tech. Univ., 1997. — V. 3. — P. 1104–1107.
702. *Curran P.F., Chua L.O.* Absolute stability theory and the synchronization problem // Int. J. of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering. — 1997. — V. 7, № 6. — P. 1375–1382.
703. *Curran P.F., Suykens J.A.K., Chua L.O.* Absolute stability theory and master-slave synchronization // Int. J. of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences &Engineering. — 1997. — V. 7, № 2. — P. 2891–2896.
704. *Grajic L.T.* New Lyapunov methodology: absolute stability of Lurie-Postnykov systems // Control of Industrial Systems, Proc. IFAC Conference. — Pergamon, 1997. — V. 1. — P. 409–414.
705. *Liang X-B., Yamaguchi T.* Absolute exponential stability of neural networks with asymmetric connection matrices // IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences. — 1997. — V. E80-A, № 8. — P. 1531–1534.
706. *Liberzon M.R.* New technological process for preparation of sandwich from metals // Proc. of EUROMECH 360. — France, 1997. — P. 135–136.
707. *Moheimani S.O.R., Savkin A.V., Petersen I.R.* Minimax optimal control of discrete-time uncertain systems with structured uncertainty // Dynamics & Control. — 1997. — V. 7, № 1. — P. 5–24.
708. *Pakshin P.V.* Robust absolute stability of jumping stochastic systems // Proc. IFAC Sympos. Robust Control Design, (ROCOND'97). — 1997. — P. 159–164.
709. *Poogyeon Park.* A revisited Popov criterion for nonlinear Lur'e systems with sector-restrictions // Int. J. of Cont. — 1997. — V. 68, № 3. — P. 461–469.
710. *Rapoport L.B.* New frequency criteria for analysis of multivariable Lure systems // Proc. of the 13th World Congress. — 1997. — P. 25–30.
711. *Suykens J.A.K., Vandewalle J.* Absolute stability and dissipativity of continuous time multilayer recurrent neural networks // Proc. of 1997 IEEE Int. Symp. on Circ. & Syst., ISCAS '97. — 1997. — V. 1. — P. 517–520.
712. *Tielong Shen, Tamura K.* Absolute stabilization with disturbance attenuation of multivariable systems // Trans. Society of Instr. and Cont. Engineers. — 1997. — V. 33, № 1. — P. 51–53.
713. *Ugrinovsky V.A., Petersen I.R.* Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty // Robust Control Design, (ROCOND'97), Proc. IFAC Symposium. — Pergamon, 1997. — P. 125–130.
714. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of multivariable Lure systems: an LMI condition and application to polytopic systems // Proc. 13^{th} IFAC World Congress. — 1997. — P. 19–24.
715. *Xue-Bin Liang, Yamaguchi T.* Necessary and sufficient condition for absolute exponential stability of a class of nonsymmetric neural networks // IEICE Trans. on Information & Systems. — 1997. — V. E80-D, № 8. — P. 802–807.
716. *Zhao Zhengrong, Zhao Suxia.* Absolute stability of control systems of Lurie-type functional equations with multiple nonlinear gains // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1997. — V. 14, № 3. — P. 358–364.

1998

717. *Блиман П. А., Красносельский М. А.* Критерий Попова в задаче о вынужденных колебаниях в системах управления // АиТ. — 1998. — Т. 59, № 4. — С. 3–14.

718. *Кайзер К., Кореневский Д. Г.* Алгебраические коэффициентные признаки абсолютной устойчивости линейных разностных систем с непрерывным временем и запаздыванием // АиТ. — 1998. — Т. 59, № 1. — С. 22–27.

719. *Либерзон М. Р.* Расширение иннорного метода теории абсолютной устойчивости на системы с запаздыванием // Науч. труды Моск. авиац. технол. ин-та – Росс. гос. технол. ун-та им. К. Э. Циолковского. — М.: Изд-во МАТИ, 1998. — Т. 1 (73). — С. 336–340.

720. *Родионов А. М.* О достаточных условиях абсолютной устойчивости дискретных уравнений // АиТ. — 1998. — Т. 59, № 12. — С. 127–131.

721. *Фрадков А. Л., Полушин И. Г.* Квазидиссипативность и L-диссипативность нелинейных систем // ДАН. — 1998. — Т. 362, № 3. — С. 319–322.

722. *Целигоров Н. А.* Методика графоаналитического исследования абсолютной устойчивости многомерных нелинейных импульсных автоматических систем // Изв. ВУЗов. Электромеханика. — 1998. — № 4. — С. 72–75.

723. *Якубович В. А.* Квадратичный критерий абсолютной устойчивости // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361, № 5. — С. 608–611.

724. *Brusin V.A.* Absolute stabilization of infinite dimensional systems with nonlinear uncertain blocks // Preprints 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, NOLCOS ’98. — Elsevier Science, 1998. — V. 2. — P. 332–335.

725. *Bucci F.* Absolute stability of feedback systems in Hilbert spaces // Optimal Control Theory. — 1998. — P. 24–39.

726. *Chen Yangzhou, Chen Shanben, Liu Jiaqi.* Frequency theorem (Kalman-Yakubovich lemma) in control theory // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1998. — V. 15, № 4. — P. 477–488.

727. *Chen Yangzhou, Xu Xiaoming, Yang Yupu.* Necessary and sufficient condition for absolute stability of a class of continuous Hopfield neural network // Acta Electronica Sinica. — 1998. — V. 26, № 8. — P. 32–36.

728. *Chengshan Xiao, Hill D.J.* Concepts of strict positive realness and the absolute stability problem of continuous-time systems // Automatica. — 1998. — V. 34, № 9. — P. 1071–1082.

729. *Curran P.F.* An overview of absolute stability theory // NDES ’98, Proc. 6th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems. Budapest: Tech. Univ., 1998. — P. 63–72.

730. *de la Sen M., Jugo J.* Absolute stability and hyperstability of a class of hereditary systems // Informatica (Ljubljana). — 1998. — V. 9, № 2. — P. 195–208.

731. *Hagiwara T., Kuroda G., Araki M.* Popov-type criterion for stability of nonlinear sampled-data systems // Automatica. — 1998. — V. 34, № 6. — P. 671–682.

732. *Liberzon M.R.* Inners and absolute stability of time-lag systems // Proc. Int. Congr. Mathematicians. — Berlin, 1998. — P. 181.

733. *Liu Fei.* The sufficient conditions for robust absolute stability of Lurie control systems // J. of Southwest Jiaotong University (English Edition). — 1998. — V. 6, № 2. — P. 167–175.

734. *Poogyeon Park, Sang Woo Kim.* A revisited Tsypkin criterion for discrete-time nonlinear Lur'e systems with monotonic sector-restrictions // Automatica. — 1998. — V. 34, № 11. — P. 1417–1420.

735. *Savkin A.V., Petersen I.R.* Robust stabilization of discrete-time uncertain nonlinear systems // J. of Optimization Theory & Applications. — 1998. — V. 96, № 1. — P. 87–107.

736. *Silva G., Dzul F.A.* Parametric absolute stability of a class of singularly perturbed systems // Proc. 37th IEEE Conf. on Dec. Cont. — 1998. — V. 2. — P. 1422–1427.

737. *Suykens J.A.K., Vandewalle J., De Moor B.* An absolute stability criterion for the Lur'e problem with sector and slope restricted nonlinearities // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1998. — V. 45, № 9. — P. 1007–1009.

738. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of Lur'e systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1998. — V. 43, № 11. — P. 1649–1653.

739. *Xue-Bin Liang, Li-De Wu.* New sufficient conditions for absolute stability of neural networks // IEEE Trans. Circ. Syst. — 1998. — V. 45, № 5. — P. 584–586.

740. *Yang Bin, Pan Dehui.* Absolute stability of a class of nonlinear time-varying control systems // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1998. — V. 15, № 6. — P. 859–864.

1999

741. *Джури Э.И., Премаратне К., Эканайаке М.М.* Робастная абсолютная устойчивость дискретных систем // АиТ. — 1999. — Т. 60, № 3. — С. 97–118.

742. *Дудников Е.Е.* Стабилизация однослойных нейронных сетей с обратными связями // Нейрокомпьютеры: разраб., применение. — 1999. — № 1. — С. 38–46.

743. *Дудников Е.Е., Рыбашов М.В.* Об абсолютной устойчивости одного класса нейросетей с обратными связями // АиТ. — 1999. — № 12. — С. 33–40.

744. *Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу абсолютно стабилизирующих регуляторов для нелинейных систем Лурье // АиТ. — 1999. — № 5. — С. 78–91.

745. *Рапопорт Л.Б.* Оценка области притяжения нелинейных многомерных систем управления // Междунар. конф. по пробл. упр. Москва, 29 июня – 2 июля, 1999. — Т. 1. — С. 217–219.

746. *Целигоров Н.А.* Условия абсолютной устойчивости интервальных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1999. — № 2. — С. 10–13.

747. *Bliman P.A.* Absolute stability of nonautonomous delay systems: delay-dependent and delay-independent criteria // Proc. 38th IEEE Conf. Dec. Cont. — 1999. — V. 2. — P. 2005–2010.

748. *Bliman P.A.* Extension of Popov criterion to time-varying nonlinearities: LMI, frequential and grafical conditions // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. Springer, London, № 246. Stability and stabilization of nonlinear systems. — Ghent, 1999. — P. 95–114.

749. *Guo Lei, Zang Minglei, Feng Chunbo.* Nonlinear controller design for absolute stabilization control problems // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1999. — V. 16, № 6. — P. 788–792.

750. *Haddad W.M., Chellaboina V.S., Kablar N.A.* Nonlinear impulsive dynamical systems. I. Stability and dissipativity // Proc. 38th IEEE Conf. Dec. & Cont. — 1999. — V. 5. — P. 4404–4422.

751. *Liberzon M.R.* On the stability of controlled flight of an axisymmetric rotating vehicle with incomplete model information // Proc. American Control Conference. — San Diego, USA, 1999. — V. 5. — P. 3530–3533.

752. *Liberzon M.R.* Stability of dynamic systems with parameter perturbations Proc. of Int. Conf. MET. — Haifa, Israel, 1999. — P. 139–141.

753. *Mei Hong.* The absolute stability of direct control system with second-order // J. of Changsha University of Electric Power (Natural Science Edition). — 1999. — V. 14, № 2. — P. 104–106.

754. *Nian Xiaohong.* Robust absolute stability for Lurie control systems with several independent stationary components // Kong Zhi Li Lun Yu Ying Yong/Control Theory & Applications. — 1999. — V. 16, № 1. — P. 43–46.

755. *Rapoport L.B.* Estimation of an attraction domain for multivariable Lur'e systems using looseless extension of the S-procedure // Proc. American Control Conference. — San Diego, USA, 1999. — V. 4. — P. 2395–2396.

756. *Wang Changhong, Jing Tao, Ma Guangcheng, Zhuang Xianyi, Xu Lixin, LiNaihong, Jiang Changli.* New criterion for absolute stability of continuous Hopfield neural networks // J. of the Harbin Institute of Technology. — 1999. — V. 31, № 1. — P. 22–25.

757. *Zhang Jiye., Wu Pingbo, Zeng Jing.* The absolute stability of several classes of nonlinear control systems // J. Southwest Jiaotong University (English Edition). — 1999. — V. 7, № 1. — P. 79–86.

2000

758. *Якубович В. А., Якубович Д. В.* Локальный аналог частотного критерия Попова абсолютной устойчивости нелинейной системы // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 462–465.

759. *Banos A., Barreiro A.* Stability of non-linear QFT designs based on robust absolute stability criteria // Int. J. of Cont. — 2000. — V. 73, № 1. — P. 74–88.

760. *Bliman P.A.* Extension of Popov absolute stability criterion to non-autonomous systems with delays // Int. J. of Cont. — 2000. — V. 73, № 15. — P.1349–1361.

761. *Brockett R.W., Liberzon D.M.* Quantized feedback stabilization of linear systems // IEEE Trans. Aut. Cont. — 2000. — V. 45, № 7. — P. 1279–1289.

762. *Diamond P., Opoitsev V.* Absolute stability of positive systems with differential constraints // Int. J. of Cont. — 2000. — V. 73, № 3. — P. 210–218.

763. *Liang X-B., Jun Wang.* A proof of Kaszkurewicz and Bhaya's conjecture on absolute stability of neural networks in two-neuron case // IEEE Trans. Circ. Syst. — 2000. — V. 47, № 4. — P. 609–611.

764. *Liberzon M.R., Matveev A.E.* Calculations method of absolute stability analysis of dynamic systems with use of inner approach // Proc. Int. Conference. — Karlsruhe, Germany, 2000. — P. 72–73.

765. *Logemann H., Curtain R.F.* Absolute stability results for well-posed infinite-dimentional systems with applications to low-gain integral control // ESAIM Control, Optim. Calculus of Variations. — 2000. — № 5. — P. 395–424.

766. *Polanski A.* On absolute stability analysis bypolyhedral Lyapunov functions // Automatica. — 2000. — V. 36, № 4. — P. 573–578.

767. *Wada T., Ikeda M., Ohta Y., Siljak D.D.* Parametric absolute stability of multivariable Lur'e systems // Automatica. — 2000. — V. 36, № 9. — P. 1365–1372.

768. *Yakubovich V.A.* Necessity in quadratic criterion for absolute stability // Int. J. of Rob. Nonlin. Cont. — 2000. — V. 10, № 11. — P. 889–907.

769. *Yang Bin, Chen Mianyun.* New criteria on the absolute robust stability of Lurie control systems // J. Huazhong (Central China) Univ. Science & Technology. — 2000. — V. 28, № 2. — P. 5–7.

2001

770. *Жермоленко В. Н.* Робастная стабилизация параметрически возмущаемой системы // АиТ. — 2001. — № 2. — С. 122–135.

771. *Bliman P.A.* Lyapunov-Krasovskii functionals and frequency domain: delay-independent absolute stability criteria for delay systems // Int. J. of Rob. Nonlin. Cont. — 2001. — V. 11, № 8. — P. 771–778.

772. *Chu T., Huang L., Wang L.* Absolute stability and guaranteed domain of attraction for MIMO discrete-time Lur'e systems // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2001. — V. 2. — P. 1711–1716.

773. *Chu T., Huang L., Wang L.* Guaranteed absolute stability and robustness of a class of delay systems with local sector nonlinearities via piesewize linear Lyapunov function // Proc. Amer. Control Conf. — 2001. — V. 6. — P. 4212–4217.

774. *Gan Z.* The robust absolute stability of discrete-time interval Lurie system // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2001. — V. 2. — P. 1991–1992.

775. *Molchnov A., Liu D.* Necessary and sufficient conditions for robust absolute stability of time-varying nonlinear continuous-time systems // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2001. — V. 1. — P. 45–50.

776. *Pandolfi L.* The Lur'e problem for a distributed system: the multivariable case // J. inverse and Ill-Posed Problems. — 2001. — V. 9, № 2. — P. 163–175.

777. *Ruan S.* Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays // Quarterly of applied mathematics. — 2001. — V. 59, № 1. — P. 159–173.

778. *Sun J.,Deng F., Liy Y.* Robust absolute stability of general interval Lur'e type nonlinear control systems // J. Syst. Engineering and Electronics. — 2001. — V. 12, № 4. — P. 46–52.

779. *Yasinskaya O.A.* Absolute stability in the mean square of stochastic systems of automatic control with nonlinear feedback // J. Automation Inform. Sciences. — 2001. — V. 33, № 3. — P. 27–33.

2002

780. *Atherton D.P., Tan N.* The absolute stability of uncertain nonlinear systems using new formulations of the circle criteria // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2002. — V. 2. — P. 2284–2285.
781. *Bliman P.A.* Absolute stability criteria with prescribed decay rate for finite-dimensional and delay systems // Automatica. — 2002. — V. 38, № 11. — P. 2015–2019.
782. *Hsu L., De Oliveira M.C., Geromel J.C.* A new absolute stability test for systems with state-dependent perturbations // Int. J. Robust & Nonlinear Control. — 2002. — V. 12, № 14. — P. 1209–1226.
783. *Liu D., Molchanov A.* Criteria for robust absolute stability of time-varying nonlinear continuous-time systems // Automatica. — 2002. — V. 38, № 4. — P. 627–637.
784. *Liu D., Molchanov A.* Robust absolute stability of time-varying nonlinear discrete-time systems // IEEE Trans. Circ. Syst. — 2002. — V. 49, № 8. — P. 1129–1137.
785. *Wang R.* Algebraic criteria for absolute stability // Systems & Control Letters. — 2002. — V. 47, № 5. — P. 401–416.

2003

786. *Бондарко В. А., Фрадков А.Л* Необходимые и достаточные условия пассифицируемости линейных распределенных систем // АиТ. — 2003. — № 4. — С. 3–17.
787. *Fabbri R., Impram S.T., Johnson R.* On a criterion of Yakubovich type for the absolute stability of nonautonomous control processes // Int. J. Math. Sci. — 2003. — № 16. — P. 1027–1041.
788. *Guo S., Yan S., Wen S.* Absolute stability criteria of Lurie-type nonlinear systems with MIMO bounded time-delays // Amer. Society Mech. Engineers. — 2003. — V. 116, № 2. — P. 695–700.
789. *He Y., Wu M.* Absolute stability for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities // J. Comput. Appl. Math. — 2003. — V. 159, № 2. — P. 241–248.
790. *Hu T., Huang B, Lin Z.* Absolute stability with a generalized sector condition // Amer. Control. Conf., 2003. — V. 3. — P. 1855–1860.
791. *Lee L., Chen J.L.* Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor systems // IEEE Trans. Circ. Syst. — 2003. — V. 50, № 6. — P. 778–794.
792. *Lu R.Q., Zhou W.N., Su H.Y., Chu J.* A new absolute stability and stabilization conditions for a class of Lurie uncertain time-delay systems // Proc. IEEE Int. Conf. Syst. — 2003. — V. 2. — P. 1916–1921.
793. *Margaliot M., Langholz G.* Necessary and sufficient conditions for absolute stability: the case of second-order systems // IEEE Trans. Circ. Syst. — 2003. — V. 50, № 2. — P. 227–234.
794. *Wulff K., Foy J., Shorten R.* Comments on periodic and absolute stability for switched linear systems // Proc. Amer. Cont. Conf. — 2003. — V. 4. — P. 3226–3227.

795. *Yu L., Han Q.L., Yu S., Gao J.* Delay-dependent conditions for robust absolute stability of uncertain time-delay systems // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2003. — V. 6. — P. 6033–6037.

796. *Zevin A.A., Pinsky M.A.* A new approach to the Lur'e problem in the theory of absolute stability // SIAM J. Cont. and Optim. — 2003. — V. 42, № 5. — P. 1895–1904.

2004

797. *Альтшуллер Д., Проскурников А. В., Якубович В. А.* Частотные критерии дихотомии и абсолютной устойчивости для интегральных уравнений с квадратичными связями, содержащими запаздывания // Докл. РАН. — 2004. — Т. 339, № 6. — С. 747–752.

798. *Спасский Р. А.* Инвариантность и абсолютная устойчивость одного класса систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 5–9.

799. *Bochev P., Gunburger M.* An absolutely stable pressure-poisson stabilized finite element method for the Stokes equations // SIAM J. Numerical Analysis. — 2004. — V. 42, № 3. — P. 1189–1207.

800. *Brogliato B.* Absolute stability and the Lagrange-Dirichlet theorem with monotone multivalued mappings // Systems & Control Letters. — 2004. — V. 51, № 5. — P. 343–353.

801. *Gao J., Pan H., Dai W.* A delay-dependent criterion for robust absolutely stability of uncertain Lurie type control systems // Proc. World Congr. Intelligent Control And Automation (WCICA). — 2004. — V. 1. — P. 928–930.

802. *Hagen G.* Absolute stability of a heterogeneous semilinear dissipative parabolic PDE // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2004. — V. 3. — P. 2429–2434.

803. *Hu T., Huang B, Lin Z.* Absolute stability with a generalized sector condition only // IEEE Trans. Aut. Cont. — 2004. — V. 49, № 4. — P. 535–548.

804. *Hu T., Lin Z.* Absolute stability analysis through a connection to saturation nonlinearities // Proc. IEEE Conf. Dec. Cont. — 2004. — V. 5. — P. 5487–5492.

805. *Impram S.T., Munro N.* Absolute stability of nonlinear systems with disc and norm-bounded perturbations // Int. J. of Rob. Nonlin. Cont. — 2004. — V. 14, № 1. — P. 61–78.

806. *Margaliot M., Gitizadeh R.* The problem of absolute stability: a dynamic programming approach // Automatica. — 2004. — V. 40, № 7. — P. 1247–1252.

807. *Xu B., Liu X., Liao X.* Absolute stability of Lurie systems with impulsive effects // Computers & Mathematics with Applications. — 2004. — V. 47, № 2–3. — P. 419–425.

808. *Yang Y., Duan Z.S., Lin H.*, Absolute stabilization based on circle criterion: $H_{infinity}$ and LMI approach // Proc. Asian Control Conf. — 2004. — V. 1. — P. 215–221.

809. *Zhang M., Hu D.W., Xie H.W.* Absolute stability of the discrete system // J. National University of Defense Technology. — 2004. — V. 26. — P. 99–102.

2005

810. *Афонин С. М.* Абсолютная устойчивость системы управления деформацией пьезопреобразователя // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 2. — С. 112–119.
811. *Жермоленко В. Н.* Колебательность двумерных билинейных систем // АиТ. — 2005. — № 9. — С. 27–39.
812. *Зевин А. А.* Решение обобщенной задачи Лурье для двух классов управляемых систем // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 1. — С. 25–28.
813. *Леонов Г. А.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем // АиТ. — 2005. — № 7. — С. 43–53.
814. *Пакшин П. В., Поздяев В. В.* Критерий существования общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем второго порядка // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 4. — С. 22–27.
815. *Рапопорт Л. Б.* Расширение S-процедуры и анализ многомерных систем управления с помощью линейных матричных неравенств // АиТ. — 2005. — № 1. — С. 37–48.
816. *He Y., Wu M.* Delay-dependent conditions for absolute stability of Lurie control systems with time-varying delay // Acta Automatica Sinica. — 2005. — V. 31, № 3. — P. 475–478.
817. *Hu T., Lin Z.* Absolute stability analysis of discrete-time systems with composite quadratic Lyapunov functions // IEEE Trans. Aut. Cont. — 2005. — V. 50, № 6. — P. 781–797.
818. *Liu X., Lay T.K., Zhang Y.* Absolute stability of impulsive control systems with time delay // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. — 2005. — V. 62, № 3. — P. 429–453.

2006

819. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Фрадков А. Л.* В. А. Якубович. Биография и список трудов. (К 80-летию со дня рождения) // АиТ. — 2006. — № 10. — С. 4–19.
820. *Гусев С. В.* Двойственность Фенхеля, S-процедура и лемма Якубовича–Калмана // АиТ. — 2006. — № 2. — С. 135–153.
821. *Жермоленко В. Н.* Траекторные воронки двумерных билинейных систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 2. — С. 29–42.
822. *Жермоленко В. Н.* Фазовые портреты двумерных билинейных систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 3. — С. 13–23.
823. *Жермоленко В. Н.* Периодические движения и критерии абсолютной устойчивости, неустойчивости и управляемости двумерных билинейных систем // АиТ. — 2006. — № 8. — С. 12–35.
824. *Ивлев Р. С.* Абсолютная устойчивость интервального семейства нелинейных динамических систем с нелинейной обратной связью // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 2. — С. 51–55.
825. *Кореневский Д. Г.* Дестабилизирующий эффект параметрических случайных возмущений типа «белого» шума в некоторых квазилинейных непрерывных динамических системах // Докл. РАН. — 2006. — Т. 408, № 1. — С. 22–24.

П. В. Пакшин[†], *В. А. Угриновский*[††]

Стохастические задачи абсолютной устойчивости[*]

Аннотация: дается обзор работ, связанных с развитием теории абсолютной устойчивости стохастических систем. Излагаются избранные критерии абсолютной стохастической устойчивости, основанные на применении частотной теоремы В. А. Якубовича и на алгебраических подходах, не использующих частотную теорему. Формулируется стохастический аналог частотной теоремы и обсуждаются особенности его применения. Устанавливается связь задач абсолютной стохастической устойчивости и оптимального стохастического управления. Рассматриваются результаты решения ряда задач стохастической стабилизации на основе идей частотной теоремы. Приводятся некоторые критерии стохастической устойчивости импульсных систем, полученные на основе идей частотной теоремы. Обсуждаются задачи пассивности и диссипативности нелинейных стохастических систем. В заключение дается краткая характеристика текущего состояния теории.

1. Введение

Теория стохастической устойчивости начала формироваться значительно позднее других разделов теории устойчивости. Ранние этапы подробно отражены в обзорной статье Ф. Козина [79]. Существенное влияние на развитие этой теории оказали пионерские работы Дж. Бертрама и П. Сарачика [64], И. Я. Каца и Н.Н. Красовского [26].

В первых работах исследовались, в основном, системы вида

$$\dot{x} = f(x,t) + \sigma(x,t)\xi(t), \quad f(0,t) \equiv 0, \quad \sigma(0,t) \equiv 0 \tag{1}$$

в пространстве R^n, где к случайному процессу $\xi(t)$ предъявлялись обычно минимальные требования. С одной стороны это оправдано тем, что свойства процесса $\xi(t)$ на практике часто неизвестны, с другой стороны, в этом случае довольно трудно получить конструктивные результаты, позволяющие раскрыть «механизмы» влияния случайных факторов на устойчивость. Результаты здесь выражались либо в

†) Арзамасский политехнический институт Нижегородского государственного технического университета, Арзамас.

††) Университет Нового Южного Уэльса, Канберра.

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке первого автора Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 05-01-00132а). Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 11. — С. 122–159.

терминах существования функции Ляпунова $V(x,t) \geqslant 0$, для которой математическое ожидание производной $\mathrm{E}\dot{V}(x,t)$ в силу системы (1) является неотрицательно определенной функцией, либо в терминах существования функций Ляпунова «укороченной» системы [53, 79]:

$$\dot{x} = f(x,t). \tag{2}$$

В первом случае возникают весьма существенные трудности, поскольку вычислить или оценить величину $\mathrm{E}\dot{V}(x,t)$ можно лишь зная решение или оценку решения нелинейной системы (1). Во втором случае результаты оказываются чрезмерно консервативными и дают довольно грубую оценку условий устойчивости. Достаточно полное представление о подходах раннего периода к анализу устойчивости случайных процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (1), дает обзор [79] и гл. 1 монографии [53].

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2) характерно отсутствие последействия. Если предположить, что и стохастическая система сохраняет это свойство, процесс $\xi(t)$ необходимо считать белым шумом. Поскольку такое предположение достаточно реалистично, модели с белыми шумами получили широкое распространение. Определенную техническую трудность представляет то, что процесс белого шума может трактоваться по-разному, следовательно, и уравнение (1) можно понимать в различных смыслах. Уравнение (1), в котором $\xi(t)$ понимается как процесс с бесконечно малым временем корреляции в принятом масштабе времени, называется уравнением Ланжевена. Другие, математически строгие определения решения (1), получившие широкое распространение, были даны К. Ито и Р. Л. Стратоновичем. Связь различных форм стохастических уравнений изучалась в [95, 100], где установлены соотношения, позволяющие перейти от одной формы к другой. Стохастические уравнения в форме Стратоновича более адекватно описывают физические явления и поэтому часто используются для строгого анализа уравнений Ланжевена наряду с уравнениями Ито.

Когда (1) рассматривается как стохастическое дифференциальное уравнение Ито, его решение представляет собой марковский процесс. Это свойство дает большие преимущества при анализе решений уравнений Ито, поскольку для марковских процессов имеется хорошо развитый математический аппарат. Применение этого аппарата и аппарата теории мартингалов позволяет сформулировать эффективные аналоги теорем Ляпунова. Оказывается, что в этом случае условия устойчивости удается сформулировать в терминах стохастических функций Ляпунова, аналогичных обычным функциям Ляпунова. При этом вместо оператора Ляпунова — производной вдоль траекторий системы — рассматривается производящий дифференциальный оператор соответствующего марковского процесса. Сама стохастическая функция Ляпунова (СФЛ), рассматриваемая в силу системы, обладает свойствами супермартингала [31, 53], что делает возможным применение теории сходимости супермартингалов к анализу асимптотических свойств СФЛ при $t \to \infty$. Для удобства читателя необходимые понятия и определения из области стохастических дифференциальных уравнений Ито и теории стохастической устойчивости в краткой форме даны в приложении. Подробное изложение теории можно найти в [31, 53].

В теории абсолютной устойчивости стохастических систем полностью отразилась тенденция развития общей теории стохастической устойчивости. Первые работы по абсолютной устойчивости стохастических систем появились спустя очень короткое время после публикации знаменитого критерия В. М. Попова. Эти работы сразу же внесли существенное разнообразие моделей и определений, что, впрочем, характерно для всей теории стохастической устойчивости. Разнообразие моделей отражает разнообразие характера случайных воздействий, а в зависимости от этого более адекватными могут быть и разные определения устойчивости. Например, определения устойчивости для систем с мультипликативным характером случайных воздействий не всегда можно использовать в случае аддитивных случайных воздействий.

Из наиболее ранних работ отметим работы Т. Морозана, В. А. Брусина и М. Л. Тая [5, 9, 88] как немногие, где развивался метод априорных оценок В. М. Попова. Остальные работы так или иначе связаны с построением функции Ляпунова в виде квадратичной формы или типа Лурье–Постникова и последующим переходом в частотную область на основе леммы Калмана–Якубовича [17], обобщенный и расширенный вариант которой на русском языке чаще называется частотной теоремой В.А Якубовича [17, 58–60].

Пик исследований на базе указанной техники пришелся на 70–80-е годы и был в значительной степени обусловлен пионерскими работами В.А. Якубовича по разрешимости квадратных матричных неравенств [55, 56, 58]. Не вдаваясь пока в детали отдельных работ, можно сказать, что основная задача, которая изначально решалась здесь, состояла в нахождении условий разрешимости уравнений Лурье–Риккати при дополнительных ограничениях. В работах [32, 42] эта задача решается полностью в частотной области: в дополнение к частотному неравенству типа В. М. Попова должно выполняться неравенство для коэффициентов полинома, определяемого из соотношения факторизации. Частотные критерии, полученные в работах [81, 93], выглядят так же, как и критерий В. М. Попова, но формулируются в терминах смещенной частотной характеристики $W(s - \frac{1}{2}d^2)$ при требовании дополнительного запаса устойчивости для матрицы A линейной части системы, при этом для определения величины смещения нужно знать либо точное значение, либо оценку функционала от решения уравнений Лурье–Риккати.

Результаты этих работ как консервативны, так и далеки от систематического обобщения частотной теории абсолютной устойчивости применительно к классу стохастических систем, поскольку они в значительной степени опирались на алгебраические свойства уравнений Лурье–Риккати, вытекающие из обычной частотной теоремы. Хотя такой подход был до некоторой степени применим для стохастических систем, он неполностью отражал математические свойства стохастических систем. В частности, этот подход не учитывал тот факт, что устойчивые стохастические системы описывают эволюцию марковского процесса в бесконечномерном пространстве квадратично интегрируемых или существенно ограниченных случайных величин. Поэтому ряд свойств стохастических систем таких, например, как структура квадратических функционалов, заданных на состояниях стохастической системы, оставался вне поля зрения. Помимо этого результаты теории, основанной на детерминировнном частотном подходе, не допускали обобщения на случай бесконечномерных систем.

В этот период начала активно развиваться теория абсолютной устойчивости в гильбертовых пространствах [3, 7, 35, 36, 76]. Распространение частотной теоремы на случай гильбертовых пространств [3, 7, 35, 59, 60] произошло благодаря активному использованию идей оптимального управления [34] и привело к формированию нового подхода к задачам абсолютной стохастической устойчивости [8, 10, 11, 51, 67]. Правильнее было бы сказать, что эти результаты имеют существенные отличия от обычных частотных условий, гарантирующих абсолютную устойчивость. В отличие от предыдущих исследований частотное неравенство здесь заменяется специальным условием коэрцитивности. В [8, 11, 67] получены некоторые оценки, которые в ряде случаев позволяют получить достаточные частотные условия, гарантирующие выполнение свойства коэрцитивности. Позже в [102] получены точные соотношения для перехода в частотную область, но чтобы выполнить этот переход, нужно найти решение некоторого специального матричного уравнения в частотной области, впервые полученного в [23], или эквивалентного ему алгебраического уравнения Сильвестра, а затем выполнить еще целый ряд сложных вычислений. Кроме этого, отметим [27–30], где также предлагается уход от традиционной техники частотных условий, вместо которых предлагаются чисто алгебраические условия, основанные на разрешимости уравнений Лурье–Риккати. Последующее развитие техники полуопределенного программирования [66] позволило в [61, 62, 103] получить методы решения обобщенного уравнения Риккати для стохастических систем. Эти результаты во многих случаях позволяют построить стохастическую функцию Ляпунова, гарантирующую абсолютную стохастическую устойчивость. Таким образом, необходимость в чисто частотной формулировке условий устойчивости отошла на второй план.

Параллельно с анализом устойчивости идеи частотной теоремы нашли эффективное применение при решении задач стохастической стабилизации [24, 25, 52].

Некоторую самостоятельную группу представляют работы, посвященные исследованию стохастической устойчивости импульсных систем. В [48] такие исследования проводились на основе развития подхода [42, 44]. Работы [13–16] используют разработанный в [18] метод усреднения и частотную теорему В.А. Якубовича.

Следует отметить, что в современном контексте задачи абсолютной устойчивости должны рассматриваться как один из возможных видов задач робастной устойчивости [89, 97, 104]. Более того, идеи, изначально развитые в теории абсолютной стохастической устойчивости, получили непосредственное развитие в так называемой теории стохастического H_∞-управления [74, 96]. Для более широкого знакомства с задачами стохастической устойчивости и управления можно рекомендовать обзорные статьи [12, 39, 40, 86, 87] и монографии [2, 45, 71, 89].

Статья организована следующим образом. Во втором разделе даются избранные результаты раннего периода, основанные на развитии метода априорных интегральных оценок В. М. Попова. Третий раздел посвящен результатам, основанным на построении стохастической функции Ляпунова с последующим применением частотной теоремы Якубовича. В следующем разделе описываются алгебраические подходы также связанные с построением стохастической функции Ляпунова, но не использующие частотную теорему. В пятом разделе формулируется конечномерный и бесконечномерный стохастические аналоги частотной теоремы и обсуждаются связанные с данным направлением исследований задачи стохастического оптимального управления. В разделе 6 рассматривается решение некоторых задач стабилизации стохастических систем на основе идей частотной теоремы. Задачи стохастической устойчивости импульсных систем рассматриваются в разделе 7. В заключительном разделе кратко обсуждается ряд недавних результатов, связанных с исследованием пассивности и диссипативности стохастических систем, в которых идеи частотной теоремы В. А. Якубовича получили новое развитие. В этом же разделе приводится краткое обсуждение изложенных результатов. В Приложении в краткой форме приводится необходимый минимум сведений из теории стохастических дифференциальных уравнений и теории стохастической устойчивости.

2. Ранний этап. Применение метода априорных интегральных оценок В. М. Попова к задачам абсолютной стохастической устойчивости

Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ — вероятностное пространство, $\mathcal{X}$ — пространство n-мерных случайных векторов и $\mathcal{L}^2(\Omega)$ — множество элементов $\mathcal{X}$, интегрируемых с квадратом. Для $x(\omega) \in \mathcal{X}$ обозначим

$$\|x(\omega)\|_2 = \left(\int\limits_{\Omega} |x(\omega)|^2 \mathrm{P}(d\omega) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В [88] рассматривалась система вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega)x + B(\omega)f(\sigma), \quad \sigma = c(\omega)'x. \tag{3}$$

Определение 1. Начальное условие $x_0(\omega)$ системы (3) называется *существенно ограниченным*, если существуют $M > 0$ и $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ такие, что $\mathrm{P}(\mathcal{S}) = 1$ и $|x_0(\omega)| \leqslant M$ для всех $\omega \in \mathcal{S}$.

Для системы (3) предполагаются выполненными следующие допущения:

a) существуют $L > 0$ и $\mathcal{S} \subseteq \Omega$ такие, что $\mathrm{P}(\mathcal{S}) = 1$ и

$$|A(\omega)| \leqslant L, \quad |B(\omega)| \leqslant L, \quad |c(\omega)| \leqslant L$$

для $\omega \in \mathcal{S}$;

b) функция $f(\sigma)$ удовлетворяет ограничениям $h_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant h_2\sigma^2$ для $\sigma \neq 0$, $f(0) = 0$, $0 < h_1 \leqslant h_2 < h$;

c) для некоторой монотонно возрастающей функции $h(r)$ выполняется неравенство $|f(\sigma_1) - f(\sigma_2)| \leqslant h(r)|\sigma_1 - \sigma_2|$ при $|\sigma_1| \leqslant r$, $|\sigma_2| \leqslant r$;

d) матрица $A(\omega)$ P-устойчива, т. е. существует такое $\alpha > 0$, что

$$\mathrm{P}\{\omega, \max_{s\in\sigma(A(\omega))} \mathrm{Re}\, s < -2\alpha\} = 1.$$

Для уравнения (3) вводятся понятия решения почти всюду (п.в.-решение) и его продолжения $\overline{x}(t,\omega)$ на полуось $[t_0, \infty)$. Устойчивость системы определяется следующим образом.

Определение 2. Тривиальное решение системы (3) называется *асимптотически устойчивым в среднем* относительно ограниченных возмущений, если:

a) для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathrm{R}^+$ существует такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что при существенно ограниченных $x_0(\omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|x_0(\omega)\|_2 < \delta$, каждое п.в.-решение, соответствующее начальному условию $x_0(\omega)$, может быть продолжено на полуось $[t_0, \infty)$ и для любого продолжения $\overline{x}(t,\omega)$ на $[t_0, \infty)$ $\|\overline{x}(t,\omega\|_2 < \delta$ при всех $t \geqslant t_0$;

b) для всех $t_0 \in \mathrm{R}^+$ существует такое $\delta(t_0) > 0$, что при существенно ограниченных $x_0(\omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|x_0(\omega)\|_2 < \delta(t_0)$,

$$\lim_{t\to\infty} \|\overline{x}(t,\omega)\|_2 = 0.$$

Пусть

$$\mathcal{D} = \{\omega, \max_{s\in\sigma(A(\omega))} \mathrm{Re}\, s < -2\alpha\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия a)–d) и существуют множество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$, для которого $\mathrm{P}(\mathcal{B}) = 1$ и $0 < \beta \leqslant q(\omega) \leqslant \delta$ такие, что для всех $\omega \in \mathcal{B}$ и всех вещественных λ*

$$h^{-1} + \mathrm{Re}\,\{(1 + i\lambda q(\omega))c(\omega)'(A(\omega) - i\lambda I)^{-1}B(\omega)\} \geqslant 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (3) *асимптотически устойчиво в среднем относительно ограниченных возмущений.*

При доказательстве теоремы использовалось развитие техники В. М. Попова, основанной на априорных интегральных оценках.

Другое направление исследований на основе априорных интегральных оценок связано с анализом устойчивости детерминированных систем при постоянно действующих случайных возмущениях. Эти возмущения в среднем могут быть малыми, но могут допускать достаточно продолжительные большие выбросы, начинающиеся в случайные моменты времени. Устойчивость здесь естественно понимать в том смысле, что в любой момент времени траектории системы находятся в некоторой окрестности состояния равновесия с достаточно большой вероятностью, или в смысле ограниченности моментов вектора состояния или выхода. Результаты такого типа для класса систем Лурье были получены в [5, 9]. Уравнения таких систем задавались в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int\limits_0^t w(t-\tau)y(\tau)\,d\tau + f(t), && (4)\\ y(t) &= \varphi(x(t)) + h(t), && (5)\end{aligned}$$

где $f(t)$ — функция, описывающая влияние начального состояния системы, $h(t)$ — случайная функция, характеризующая возмущение на входе системы.

Относительно входящих в эту систему функций предполагается следующее.

a. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет ограничениям $\varphi(0) = 0$ и

$$0 \leqslant \varphi(x)/x \leqslant k < \infty, \tag{6}$$

если $x \neq 0$.

b. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема, причем существуют такие числа μ_-, μ_+, что

$$-\infty < \mu_- \leqslant 0 < \mu_+ < \infty, \;\; \mu_- \leqslant \frac{d\varphi}{dx} \leqslant \mu_+. \tag{7}$$

c. Существуют такие числа $C > 0$ и b, что

$$|\varphi(x) - bx| \leqslant C. \tag{8}$$

d. Имеет место неравенство

$$\int_0^\infty (|w(t)| + |\dot{w}(t)| + |f(t)| + |\dot{f}(t)|)\, dt \quad + $$
$$+ \sup_t (|w(t)|, |\dot{w}(t)|, |f(t)|, |\dot{f}(t)|) \;\; < \;\; \infty. \tag{9}$$

e. Существует такое $\tau^* > 0$, что

$$w(t) = 0 \;\; (t \leqslant \tau^*). \tag{10}$$

f. Выполняется неравенство

$$\int_0^\infty (|w_b(t)| + |\dot{w}_b(t)| + |f_b(t)| + |\dot{f}_b(t)|)\, dt \quad + $$
$$+ \sup_t (|w_b(t)|, |\dot{w}_b(t)|, |f_b(t)|, |\dot{f}_b(t)|) \;\; < \;\; \infty, \tag{11}$$

где $w_b(t), f_b(t)$ — оригиналы от $W_b(s) = W(s)(1 + bW(s))^{-1}$ и $F_b(s) = F(s)(1 + bW(s))^{-1}$, а $W(s)$ и $F(s)$ — изображения по Лапласу соответственно от $w(t)$ и $f(t)$.

Случайный процесс на входе системы принадлежит классу процессов $\mathcal{H}(\beta, \overline{\tau})$, зависящих от двух параметров $\beta > 0$, $\overline{\tau} > 0$ и определяемых формулой

$$h(t) = h(t, \omega) = \int_0^t \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-\tau/\beta} \xi(t - \tau, \omega)\, d\tau, \quad \omega \in \Omega, \tag{12}$$

где $\xi(t, \omega)$ — случайный процесс такой, что для некоторого класса борелевских функций $\mu(t)$, заданных на отрезке $[0, t - \overline{\tau}]$, с вероятностью 1

$$\mathrm{E}\{\xi(t, \omega) | \xi(s) = \mu(s);\; s \in [0, t - \overline{\tau}]\} = 0.$$

Кроме того,

$$\mathrm{E}\{\xi^2(t, \omega)\} \leqslant \sigma^2 < \infty,$$

E — оператор математического ожидания.

Теорема 2. *Класс систем* (4)–(11) *абсолютно стохастически устойчив по отношению к классу* $\mathcal{H}(\beta, \overline{\tau})$ *стохастических возмущений с* $\beta > 0$, $0 < \overline{\tau} \leqslant \tau^*$, *если существует число* $q \geqslant \beta \max(k, \mu_+ + \mu_-)$ *и положительное число* α *такие, что при всех* $\lambda \in [-\infty, +\infty]$

$$(1 + q\beta\lambda^2) \mathrm{Re}\, W(i\lambda) + (\beta k - q)\lambda\, \mathrm{Im}\, W(i\lambda) \quad - $$
$$-(\beta^2 \mu_-^2 - q\beta\mu_-)\lambda^2 |W(i\lambda)|^2 + \beta^2\lambda^2 + 1 - \alpha k \;\; \geqslant \;\; 0. \tag{13}$$

При этом справедлива оценка

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathrm{E}y^2(t)\,dt \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha k}. \tag{14}$$

Эти результаты были обобщены и распространены на дискретные системы [6].

Как демонстрируют приведенные результаты, получение частотных условий устойчивости методом В. М. Попова требует детального анализа свойств системы и возможно только в случае, когда случайные возмущения обладают регулярными свойствами интегрируемости. С развитием идей Ито и Стратоновича необходимость в подобных предположениях отпала, и в дальнейшем метод В. М. Попова для стохастических систем не получил существенного развития.

3. Применение частотной теоремы В. А. Якубовича к задачам абсолютной стохастической устойчивости

В. А. Якубович в исключительно выдающейся работе [58] определил частотную теорему как утверждение, позволяющее определить в частотной области условия разрешимости уравнений А. И. Лурье вместе с процедурой нахождения решения этих уравнений при самых общих предположениях. В зарубежной литературе неполные версии этой теоремы известны также как лемма Калмана–Якубовича, или как лемма Калмана–Якубовича–Попова, реже — лемма Калмана–Якубовича–Майера. Вариант для дискретных систем известен как лемма Сегё–Калмана. История частотной теоремы подробно представлена в работе [22]. Одной из первых работ, где к исследованию стохастических систем начали привлекаться ранние версии частотной теоремы [82], была по-видимому работа [101], где рассматривалась система, описываемая стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dx = Fx\,dt + b\phi(\sigma)\,dt + G(x)\,dw, \quad \sigma = c'x, \ t \geqslant 0, \tag{15}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния; F — постоянная матрица; ϕ — скалярная функция σ; b, c — постоянные n-мерные векторы; $w(t)$, $t \geqslant 0$, — винеровский процесс в евклидовом пространстве R^n; $G(x)$ — матрица размера $n \times n$, $x(0)$ — случайная переменная, не зависящая от приращений винеровского процесса. Знак $'$ означает трнспонирование.

Определение 3. Стохастический процесс $x(t)$, заданный уравнением (15), называется *положительно возвратным*, если существует единственная инвариантная вероятностная мера μ, определенная на борелевских множествах $\mathcal{B} \subset \mathrm{R}^n$, т. е. такая мера, что из условия

$$\mathrm{P}(x_0 \in \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B})$$

следует

$$\mathrm{P}(x(t) \in \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B}), \quad t > 0.$$

В [101] доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для системы* (15) *выполнены следующие условия.*

1. *Матрица F является гурвицевой.*
2. *Функция $\phi(\sigma)$ непрерывно дифференцируема, ее производная ограничена для всех $\sigma \in (-\infty, \infty)$ и для достаточно больших $|\sigma|$ выполняется неравенство $\phi(\sigma)\sigma > 0$.*
3. *Существуют две неотрицательные константы α и β такие, что $\alpha + \beta > 0$ и для всех вещественных λ выполняется неравенство*
$$\mathrm{Re}\,(\alpha + i\lambda\beta)c'(F - i\lambda I)^{-1}b > 0. \tag{16}$$
4. *Матрица $G(x)$ ограничена по норме ($|G(x)| < M < \infty$, $x \in \mathrm{R}^n$) и существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что*
$$y'G(x)G(x)'y \geqslant \varepsilon |y|^2, \quad x, y \in \mathrm{R}^n. \tag{17}$$

Тогда стохастический процесс $x(t)$, определяемый уравнениями (15) *является положительно возвратным и для любого $\nu > 0$*

$$\mathcal{E}\{|x|^\nu\} < \infty,$$

где $\mathcal{E}$ — оператор математического ожидания относительно указанной инвариантной вероятностной меры.

Доказательство основано на использовании функции Ляпунова вида Лурье–Постникова

$$V(x) = x'Px + \int\limits_o^{c'x} \phi(\sigma)\,d\sigma$$

с переходом в частотную область на основе результата [82].

Поскольку в частотное неравенство (16) не входят характеристики случайного возмущения, то очевидно, что условия теоремы являются довольно консервативными. Кроме частотных ограничений консервативность здесь вызвана жесткими ограничениями, наложенными на $G(x)$, что заставляет систему вести себя подобно процессу Гаусса–Маркова. В связи с этим в большинстве работ делались попытки более точно учесть характеристики случайных возмущений при формулировке условий устойчивости.

Далее под абсолютной устойчивостью будем понимать стохастическую устойчивость в смысле того или иного из принятых определений (см. приложение) при заданных ограничениях на нелинейную функцию в уравнениях состояния системы. Для краткости абсолютную экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом будем называть просто абсолютной устойчивостью в среднем квадратическом. Заметим, что в современном контексте эти понятия характеризуют возможные виды робастной устойчивости [89, 97].

В [80] рассматривалась дискретная система описываемая уравнениями

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \tag{18}$$

$$u_k = a_k\varphi(c'x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{19}$$

где a_n — последовательность независимых случайных величин с математическим ожиданием $a > 0$ и дисперсией σ^2, $\varphi(y)$ — нелинейная функция, удовлетворяющая обычным секторным ограничениям:

$$0 < \frac{\varphi(y)}{y} < k, \quad y \neq 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad k > 0. \tag{20}$$

Собственные значения матрицы A располагаются внутри единичного круга на комплексной плоскости, и тройка (A, b, c) полностью управляема и наблюдаема.

Характер случайного возмущения позволяет здесь свести задачу к нахождению условий разрешимости *дискретных уравнений Лурье*

$$\begin{aligned} A'PA - \rho P &= -qq', \\ A'PB - \frac{1}{2}c &= \gamma q, \\ \frac{1}{k\left(\frac{\sigma^2}{a} + a\right)} - b'Pb &= \gamma^2 \end{aligned} \tag{21}$$

относительно неизвестной матрицы $P = P^T > 0$, вектора q и скаляра γ, где $0 < \rho < 1$. Это позволяет сформулировать и доказать с учетом леммы Сегё–Калмана следующее утверждение.

Теорема 4 ([80]). *Пусть для всех* $\theta \in [0, \pi]$ *и произвольного* $0 < \varkappa = \rho^{1/2} < 1$ *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{k\left(\frac{\sigma^2}{a} + a\right)} + \operatorname{Re} W(\varkappa e^{i\theta}) \geqslant 0. \tag{22}$$

Тогда система (18), (19) *абсолютно устойчива в среднем квадратическом.*

Распространение результатов В. А. Якубовича [57] на стохастический случай позволило в [37, 50] обобщить этот результат для многомерных дискретных систем. Позднее результат [80] был с незначительными изменениями независимо повторен в [84].

В [32, 42–44, 81, 83–85, 90, 91, 94] изучались системы, описываемые уравнениями Ито, с шумами, зависящими от состояния и управления.

В [32, 42, 44] рассматривалась система, описываемая уравнениями

$$\begin{aligned} dx &= [Ax(t)+bu(t)]\,dt + \sum_{l=1}^{N} A_l x(t)\,dw_l, && (23)\\ u(t) &= \varphi(c'x(t),t), && (24) \end{aligned}$$

где функция $\varphi(y,t)$ удовлетворяет условию $\varphi(0,t)=0$ при любом t и секторным ограничениям (20).

Если для исследования абсолютной устойчивости в среднем квадратическом выбрать стохастическую функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V(x) = x'Hx, \quad H = H' > 0, \tag{25}$$

то, вычисляя ее производящий дифференциальный оператор (см. приложение) в силу системы (23)–(24) и применяя S-процедуру [22], приходим к алгебраической задаче нахождения условий разрешимости следующих алгебраических уравнений, являющихся стохастическими аналогами уравнений Лурье–Риккати:

$$\begin{aligned} A'H + HA + \sum_{l=1}^{N} A_l' H A_l &= hh' - M,\\ Hb + \frac{1}{2}c &= h\varkappa,\\ \varkappa^2 &= k^{-1}. \end{aligned} \tag{26}$$

В уравнениях (26) неизвестными являются матрица $H = H'$, вектор h и скаляр $\varkappa$; $M = M'$ — заданная положительно определенная матрица, характеризующая показатель затухания экспоненты.

Последнее слагаемое в левой части первого уравнения в (26) не позволяет применить технику частотной теоремы и получить частотные условия разрешимости этих уравнений. Для преодоления этой трудности во многих работах использовались априорные оценки, позволяющие свести задачу к нахождению условий разрешимости обычных уравнений Лурье–Риккати при дополнительных ограничениях. Этот прием использовался, например, в [32, 42–44].

Рассмотрим случай, когда A_l является матрицей ранга 1:

$$A_l = br_l', \quad l = 1,\ldots,N, \tag{27}$$

где r_l — постоянные n-мерные векторы. В результате использования указанного приема задача может быть сведена к нахождению условий разрешимости уравнений Лурье–Риккати:

$$\begin{aligned} A'H + HA + \alpha\sum_{l=1}^{N} r_l r_l' &= -hh' - \varepsilon D,\\ Hb + \frac{1}{2}c &= h\varkappa,\\ \varkappa^2 &= k^{-1} \end{aligned} \tag{28}$$

при дополнительном ограничении

$$b'Hb < \alpha, \tag{29}$$

где $\alpha > 0$ и $\varkappa$ — скаляры, $D = D'$ — положительно определенная матрица, ε — сколь угодно малое положительное число. Специальная структура матриц A_l, указанная в (27), позволяет эффективно использовать для нахождения этих условий некоторые соотношения, получаемые при выводе частотной теоремы. Будем считать, что матрица A гурвицева и тройка (A, b, c) полностью управляема и наблюдаема. Обозначим

$$\begin{aligned} W(s) &= c'(A - sI)b, && (30)\\ \delta(s) = \det(sI - A) &= s^n + \delta_1 s^{n-1} + \delta_2 s^{n-2} + \ldots + \delta_n, && (31)\\ W_l(s) &= r_l'(A - sI)b. && (32) \end{aligned}$$

Теорема 5 ([42]). *Для абсолютной устойчивости в среднем квадратическом системы* (23)–(27) *достаточно, чтобы при всех вещественных λ выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} \Pi(i\lambda) = k^{-1} + \operatorname{Re} W(i\lambda) - \alpha \sum_{l=1}^{N} |W_l(i\lambda)|^2 &> 0, && (33)\\ \alpha - \frac{1}{2}\beta_1 + k^{-1/2}\varkappa_1 - k^{-1}\delta_1 &> 0, && (34) \end{aligned}$$

где β_1 — коэффициент при степени $n-1$ числителя передаточной функции (30), *$\varkappa_1$ — коэффициент при степени $n-1$ гурвицева многочлена $\Psi(s)$ с коэффициентом при старшей степени, равным $\varkappa$. Этот многочлен однозначно определяется из соотношения факторизации*

$$\Psi(-i\lambda)\Psi(i\lambda) = \Phi(i\lambda) = \Pi(i\lambda)\delta(-i\lambda)\delta(i\lambda).$$

Неравенства (33), (34) *являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнений Лурье–Риккати* (28) *при ограничениях* (29).

Этот результат распространен в [42, 44] на более широкий класс систем, в которых действуют мультипликативные шумы, зависящие от нелинейной функции. При других ограничениях на нелинейность ряд критериев подобного типа получен в [32]. Аналог предыдущей теоремы для систем с дискретным временем и мультипликативными шумами, зависящими от состояния и нелинейности, получен в [43]. Наиболее сложным моментом в применении теоремы 5 является выбор константы α, удовлетворяющей условиям (33), (34). Именно эта константа в значительной степени определяет насколько консервативен результат теоремы 5. Интересные результаты, связанные с этой проблемой, получены в [33, 54], где строятся различные оценки левой части неравенства (29) и других функционалов от решений матричных неравенств, соответствующих (28), для систем с непрерывным и дискретным временем.

В [81] рассматривается система, описываемая уравнением Ито

$$dx(t) = [Ax(t) + b\varphi(y(t))]\,dt + D[x(t)]\,dw(t), \quad y(t) = c'x(t), \tag{35}$$

где $D(x)$ — матрица размера $n \times n$ с элементами $D_{ij}(x) = d_i x_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $w(t)$ — стандартный n-мерный винеровский процесс. Изучаются случаи, когда стационарная нелинейность удовлетворяет секторным ограничениям (20) и одновременно секторным ограничениям (20) и ограничениям на производную

$$-k_1 \leqslant \frac{d\varphi(y)}{dy} \leqslant k_2 \quad (k_1, k_2 > 0).$$

Теорема 6 ([81]). *Пусть A — гурвицева матрица, собственные значения которой имеют вещественные части не превышающие $-\frac{1}{2}d^2$, тройка (A, b, c) полностью управляема и наблюдаема. Тогда для абсолютной асимптотической устойчивости с вероятностью 1 системы* (35), (20) *достаточно, чтобы для всех s с $\operatorname{Re} s \geqslant -\frac{1}{2}d^2$ выполнялось неравенство*

$$k^{-1} + \operatorname{Re} W\left(s - \frac{1}{2}d^2\right) > 0, \tag{36}$$

где d^2 — постоянное число, такое что

$$\operatorname{trace}[D(x)D'(x)H] \leqslant d^2 x'Hx, \quad x \in \mathrm{R}^n, \tag{37}$$

и H — положительно определенная матрица, удовлетворяющая уравнениям Лурье–Риккати

$$\begin{aligned} A'H + HA + d^2H &= -hh', \\ Hb + \frac{1}{2}c &= h\varkappa, \\ \varkappa^2 &= k^{-1}. \end{aligned} \tag{38}$$

Аналогичный результат для дискретных систем получен в [83]. В [91] подобный критерий получен для системы рассматриваемого вида с двумя нелинейностями, удовлетворяющими секторным ограничениям. Наиболее общий результат для систем (35) получен в [94], где рассматривается случай произвольного числа нелинейностей, входы и выходы которых удовлетворяют квадратичным связям. Матрица A является гурвицевой с $\operatorname{Re}\lambda_i(A) < -\alpha_0 < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Показано, что для асимптотической устойчивости с вероятностью 1 достаточно, чтобы выполнялся квадратичный критерий Якубовича [17, 57, 58] при дополнительных ограничениях (37) и

$$\alpha_0 > \frac{1}{2}d^2.$$

Существенной трудностью применения критериев этих работ, а также [84, 85, 90, 93] являлась необходимость находить или оценивать величину d. Для этого было необходимо решать уравнения Лурье–Риккати (38) при ограничениях (37), но тогда терялся смысл перехода к частотному неравенству (36). Напомним, что эти результаты были опубликованы до появления эффективных алгоритмов решения стандартных и нестандартных линейных матричных уравнений и неравенств. Другой сложностью применения упомянутых критериев являлось то, что в лабораторных экспериментах не всегда удается измерить передаточную функцию системы вне мнимой оси. Эти объективные трудности постоянно побуждали исследователей уходить от традиционного перехода в частотную область и искать эффективные алгебраические и другие методы. Следует отметить, что понимание неэффективности традиционных частотных методов позднее появилось и в ряде других задач [1, 47]. Алгебраический подход привел в конечном итоге к активному применению методов выпуклого анализа, в частности линейных матричных неравенств. Другое направление, связанное с привлечением идей функционального анализа, ознаменовалось появлением стохастического аналога частотной теоремы. Рассмотрим оба подхода более детально.

4. Подходы к анализу абсолютной стохастической устойчивости, не использующие частотную теорему

Предположим что в уравнениях (23), (24) $\varphi(y,t)$ — векторная нелинейная функция. Для простоты формулировок рассмотрим случай, когда $\varphi_i(y,t)=\varphi_i(y_i,t)$, $\varphi(0,t)=0$ $(i=1,\ldots,m)$ и $\varphi_i(y_i,t)$ удовлетворяют ограничениям секторного типа:

$$0<\frac{\varphi(y_i)}{y_i}<k_i,\quad y_i\neq 0,\ \ \varphi_i(0)=0,\ \ k_i>0. \tag{39}$$

Обозначим $K=\operatorname{diag}[k_i]_1^m$, $T=\operatorname{diag}[\tau_i]_1^m$ $(\tau_i>0)$. Матрица T связана с применением S-процедуры и по выбору ее элементов можно дать лишь те же самые общие рекомендации, что и в теории для детерминированных систем: нужно стремиться выбирать эти параметры так, чтобы область устойчивости в пространстве параметров была наибольшей.

Пусть далее α — положительное число такое, что матрица $A+\frac{1}{2}\alpha I$ гурвицева и гамильтонова матрица

$$H_\alpha=\begin{bmatrix} A_\alpha+\frac{1}{2}bKc' & bKT^{-1}b' \\ -\frac{1}{4}cTc' & -(A_\alpha+\frac{1}{2}bKc')' \end{bmatrix}$$

не имеет чисто мнимых собственных значений. Определим многочлен $p(\lambda)$ степени n из соотношения факторизации

$$p(\lambda)(-1)^n p(-\lambda)=\det(\lambda I-H_\alpha)$$

и построим матрицу $p(H_\alpha)$, заменяя скалярную величину λ на H_α.

Теорема 7 ([2]). *Пусть для некоторого $\alpha > 0$ такого, что матрица $A + \frac{1}{2}\alpha I$ гурвицева, существует решение P_* линейного алгебраического уравнения*

$$p(H_\alpha)\begin{bmatrix} I_n \\ P_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и при этом матрица

$$\alpha P_* - \sum_{i=1}^{N} A_i' P_* A_i$$

является положительно определенной. Тогда система (23), (24) *абсолютно устойчива в среднем квадратическом.*

Параметр α здесь можно рассматривать как характеристику дополнительного запаса устойчивости для компенсации случайных возмущений. Хотя этот параметр, как и в теореме 5, заранее не известен, здесь нетрудно организовать итерационную процедуру его вычисления.

Используя степенное преобразование координат, предложенное в [4], результат теоремы 7 можно обобщить для анализа абсолютной стохастической $2p$-устойчивости с произвольным $p > 0$ [2]. Для этого введем вектор $x^{[p]}$ с координатами

$$\left[\frac{p!}{p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_n!}\right]^{1/2} \cdot x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{p_n}, \quad p = p_1 + \ldots + p_n,$$

элементы которого упорядочим лексикографически. Заметим, что если вектор x удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = Ax,$$

то вектор $x^{[p]}$ тоже удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению. Исходя из этого свойства, определим $A_{[p]}$ как матрицу, удовлетворяющую импликации

$$\dot{x} = Ax \Rightarrow \dot{x}^{[p]} = A_{[p]} x^{[p]}.$$

Аналогично определим $b_{(p)}$ как матрицу, удовлетворяющую импликации

$$\dot{x} = b\xi \Rightarrow \dot{x}^{[p]} = b_{(p)}(\xi \otimes x^{[p-1]}),$$

где $\otimes$ — символ кронекеровского произведения. Тогда, если x удовлетворяет уравнению (23), в котором векторная функция $\varphi(y)$ удовлетворяет секторным ограничениям (39), то для $x^{[p]}$ получим

$$dx^{[p]} = [A_p x^{[p]}(t) + b_{(p)}\eta(t)]\,dt + \sum_{l=1}^{N} A_{l[p]} x(t)\,dw_l, \tag{40}$$

где

$$A_p = A_{[p]} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}(A_{l[p]})^2 - (A_l)^2_{[p]},$$

η — функция, удовлетворяющая неравенству

$$\eta' Q\left[\frac{1}{p}c'_{(p)}x^{[p]} - (K^{-1}\otimes I)\eta\right] \geqslant 0, \tag{41}$$

здесь $Q = \mathrm{diag}[\tau_i Q_i]_1^m$, τ_i, Q_i $(i = 1,\ldots,m)$ — соответственно произвольные положительные числа и положительно определенные матрицы. Из способа построения вектора $x^{[p]}$ следует, что абсолютная устойчивость в среднем квадратическом системы (40) эквивалентна абсолютной $2p$-устойчивости исходной системы. Для системы (40), (41) достаточные условия абсолютной устойчивости в среднем квадратическом могут быть сформулированы в виде, аналогичном предыдущей теореме.

Другой алгебраический подход развивался в работах Кореневского [27–30]. В них удалось наиболее близко подойти к идее применения линейных матричных неравенств, но, к сожалению, эти работы не получили широкой известности, поскольку в период их появления теория линейных матричных неравенств только начинала развиваться. В этих работах рассматривалась система (23), (24) со скалярной стационарной нелинейностью, удовлетворяющей секторным ограничениям (20) и дополнительным условиям монотонности:

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} \geqslant 0.$$

Кроме того, $c'b > 0$. Дадим формулировку условий устойчивости в терминах линейных матричных неравенств, что несколько отличается от авторской формулировки. [1)]

Теорема 8. *Для абсолютной устойчивости в среднем квадратическом системы* (23), (24) *при сделанных допущениях достаточно, чтобы была разрешима система линейных матричных неравенств*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A'H + HA + \sum\limits_{l=1}^{N} A_l' H A_l & Hb + \frac{1}{2}\vartheta A'c \\ (Hb + \frac{1}{2}\vartheta A'c)' & \vartheta c'b \end{bmatrix} &< 0,\\
H + \frac{1}{2}\,\vartheta\, k\, c\, c' &> 0,\\
\vartheta &< 0.
\end{aligned}$$

[1)] Заметим, что полученные условия не являются необходимыми и достаточными условиями абсолютной устойчивости в среднем квадратическом. На самом деле, они являются только достаточными.

При этом функция

$$V = x'Hx + \vartheta \int\limits_0^y \varphi(v)\, dv \tag{42}$$

является стохастической функцией Ляпунова.

В [30] приведены многие другие результаты подобного типа, включая обобщения на случай систем с запаздыванием.

5. Стохастическая частотная теорема

5.1. Конечномерные системы

Достижения в теории глобальных функций Ляпунова и теории стохастического оптимального управления [3, 7, 35, 36, 59, 60, 65, 75] позволили в [8, 10, 11, 51] предложить новый подход к исследованию глобальной асимптотики стохастических дифференциальных систем, в частности, к исследованию абсолютной стохастической устойчивости. Идейную основу этого подхода составили некоторая вспомогательная стохастическая вариационная задача и принцип динамического программирования. При этом эффективно используется аппарат функционального анализа в гильбертовом пространстве. Отмеченный подход наиболее полно развивает идеи теории для детерминированных систем, основанной на частотной теореме, хотя и не приводит, строго говоря, к точным частотным неравенствам. С появлением техники линейных матричных неравенств именно он получил дальнейшее развитие. Изложим основу этого подхода, следуя, в основном, [51]. Рассмотрим линейную систему управления, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dx = (Ax + bu)\, dt + (Cx + Du)\, dw, \tag{43}$$

где, как обычно, x — n-мерный вектор состояния, u — m-мерный вектор управления, w — одномерный винеровский процесс, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Обозначим через $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ поток σ-алгебр, порожденных процессом $w(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, и введем в рассмотрение пространство $L_2(s)$ n-мерных $\mathcal{F}_s$-измеримых случайных векторов h, имеющих конечный второй момент $\mathrm{E}\,|h|^2$, и пространство $L_{22}^n(s)$ вещественных случайных процессов $z(t, \omega)$, заданных при $t \geqslant s$, согласованных с потоком $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant s\}$ и имеющих конечный интеграл $\int_s^\infty \mathrm{E}\,|z(t)|^2 dt$. Пространства $L_2(s)$ и $L_{22}^n(s)$ являются гильбертовыми. При этом скалярное произведение в $L_2(s)$ задается выражением $\langle .,. \rangle = \mathrm{E}\langle .,. \rangle$, а в $L_{22}^n(s)$ — выражением $\langle .,. \rangle = \int_s^\infty \mathrm{E}\langle .,. \rangle\, dt$, где $\langle .,. \rangle$ и $|\,.\,|$ — скалярное произведение и норма в R^n. Когда нужно подчеркнуть, о каком значении s идет речь, будем писать $\langle .,. \rangle_{2s}$.

Определение 4. Система (43) называется *стабилизируемой в среднем квадратическом*, если существует такая матрица k, что замкнутая система

$$dx = A_1 x\,dt + C_1 x\,dw, \quad A_1 = A + bk', \; C_1 = C + Dk' \tag{44}$$

экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

Обозначим через $x^{shu}(t)$ решение уравнения (43), соответствующее управлению $u(t)$ и начальному условию $x^{shu}(s) = h$. Управление $u \in L_{22}^m(s)$ при данных $s, h \in L_2(s)$ будем называть допустимым и писать $u \in \mathcal{U}(s,h)$, если $x^{shu} \in L_{22}^n(s)$. Как показано в [51], при каждом $s, h \in L_2(s)$ множество $\mathcal{U}(s,h)$ выпукло и замкнуто. Пусть $F(x,u)$ — вещественная квадратичная форма вида

$$F(x,u) = x'Qx + 2x'Su + u'Ru, \tag{45}$$

где $Q = Q'$, S и $R = R'$ — матрицы соответствующих размерностей. Оказывается, что функционал

$$J^{sh}(u) = \int_s^\infty \mathrm{E}F(x^{shu}(t), u(t))\,dt, \quad u \in \mathcal{U}(s,h), \; h \in L_2(s), \; s \geqslant 0, \tag{46}$$

непрерывен на $\mathcal{U}(s,h)$ и может быть представлен в виде

$$J^{sh}(u) = \pi(Pu, Pu) - 2L^{sh}(Pu) + J^{sh}(Th), \tag{47}$$

где T — линейный непрерывный оператор $T : L_2(s) \to L_{22}^m(s)$ такой, что при любом $h \in L_2(s)$ $Th \in \mathcal{U}(s,h)$ и Th ортогонально подпространству $\mathcal{U}(0,0)$ пространства $L_{22}^m(0)$; P — проектор $L_{22}^m(0)$ на $\mathcal{U}(0,0)$;

$$\begin{aligned}
\pi(u,v) &= \langle x^{00u}, Qx^{00v}\rangle_{20} + \langle x^{00u}, Sv\rangle_{20} + \langle x^{00v}, Su\rangle_{20} + \langle u, Rv\rangle_{20}, \\
u, v &\in \mathcal{U}(0,0); \\
L^{sh}(u) &= \langle x^{shTh}, Qx^{s0u}\rangle_{2s} + \langle x^{shTh}, Su\rangle_{2s} + \langle x^{s0u}, STh\rangle_{2s} + \\
&\quad + \langle u, RTh\rangle_{2s}, \\
u &\in \mathcal{U}(s,0).
\end{aligned}$$

Билинейная форма $\pi(u,v)$ и линейный функционал $L^{sh}(u)$ непрерывны. Форма $\pi(u,v)$ играет в дальнейшем центральную роль.

Теорема 9 (стохастическая частотная теорема). *Пусть система* (43) *экспоненциально стабилизируема в среднем квадратическом. Для существования матрицы $H = H'$ такой, что справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}
&x'H(Ax + bu) + (Ax + bu)'Hx + \\
&\quad + (Cx + Du)'H(Cx + Du) + F(x,u) \geqslant 0, \; x \in \mathrm{R}^n, \; u \in \mathrm{R}^m,
\end{aligned} \tag{48}$$

необходимо, чтобы для любых $\mathcal{F}_0$-измеримых u, и достаточно, чтобы для любых $u \in \mathcal{U}(0,0)$ выполнялось неравенство

$$\pi(u,u) \geqslant 0. \tag{49}$$

Выполнение неравенства (49) одновременно является критерием разрешимости стохастических матричных уравнений Лурье:

$$\begin{aligned} A'H + HA + C'HC + Q &= LL', \\ Hb + C'HD + S &= LK, \\ D'HD + R &= K'K \end{aligned} \tag{50}$$

относительно неизвестных матриц $H = H'$, L и K.

Отметим, что в теореме 9 частотное неравенство заменено условием коэрцитивности (выпуклости) функционала (46). Для получения на основе этой теоремы частотных условий разрешимости стохастических уравнений Лурье необходимы дополнительные оценки типа тех, что были получены в [8, 10, 11]. В результате, хотя теорема дает необходимые, а также достаточные условия разрешимости стохастических уравнений Лурье–Риккати, соответствующие частотные условия, полученные на основе таких оценок, являются лишь достаточными, причем неясно, насколько они близки к необходимым. В работе [102] получено точное выражение для билинейной формы $\pi(u,u)$ в частотной области. Чтобы записать это выражение, нужно найти решение следующего линейного алгебраического уравнения относительно неизвестной симметричной матрицы Θ:

$$\Theta = Q + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} C'(-i\lambda I - A')^{-1}\Theta(i\lambda I - A)^{-1}C\,d\lambda. \tag{51}$$

Уравнение (51) впервые введено в рассмотрение в работе Докучаева [23]. Оно эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} \Theta &= -(A'H + HA), \\ A'H &+ HA + C'HC + Q = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

После этого вычисляется комплексная матричная функция, которая названа в [102] частотной характеристикой:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}(\lambda) &= R + \frac{1}{2\pi}D'\int\limits_{-\infty}^{\infty} g'(-\lambda)\Theta g(\lambda)\,d\lambda\, D + B'g'(-\lambda)\Theta g(\lambda)B + \\ &+ B'g'(-\lambda)\left[S' + \frac{1}{2\pi}C'\int\limits_{-\infty}^{\infty} g'(-\lambda)\Theta g(\lambda)\,d\lambda\, D\right] + \end{aligned}$$

$$+ \left[S + \frac{1}{2\pi} D' \int\limits_{-\infty}^{\infty} g'(-\lambda)\Theta g(\lambda)\, d\lambda\, C \right] g(\lambda)B, \quad \lambda \in \mathrm{R},$$

и величина $\pi(u,u)$ определяется выражением

$$\pi(u,u) = \mathrm{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{u}^*(\lambda)\widehat{\Phi}(\lambda)\widetilde{u}(\lambda)\, d\lambda, \tag{53}$$

где $\widetilde{u}$ — преобразование Фурье от $u(t)$, а символ $*$ означает эрмитово сопряжение. Очевидно, что в общем случае такая процедура анализа устойчивости в частотной области достаточно сложна. Проще находить решение стохастических уравнений Лурье–Риккати с нужными свойствами, что эффективно позволяют сделать методы на основе линейных матричных неравенств [61, 62, 66].

5.2. Бесконечномерные системы [67]

Несмотря на отмеченные проблемы применения стохастической частотной теоремы, описанный в предыдущем разделе подход оказался, по-видимому, единственным, позволяющим построить теорию абсолютной устойчивости для стохастических систем в бесконечномерных пространствах. Рассмотрим систему, описываемую нелинейным эволюционным уравнением в гильбертовом пространстве:

$$\begin{aligned} dx = (Ax + b\varphi(x))\, dt + (Cx + D\varphi(x))\, dw(t),\\ x(s) = h, \end{aligned} \tag{54}$$

и поставим задачу исследования ее устойчивости при условии, что нелинейная функция φ принадлежит некоторому множеству.

Пусть W, H, U — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathcal{L}(W,H)$ — пространство ограниченных линейных операторов $W \to H$ и $C([s,T];H)$ — пространство ограниченных непрерывных на $[s,T]$ функций в пространстве H. Будем писать $\mathcal{L}(H)$ для $\mathcal{L}(H,H)$. Символы $\|\cdot\|$ и $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ обозначают соответственно нормы векторов и операторов и скалярное произведение векторов соответственно. Введем в рассмотрение полное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ и предположим, что $w(t)$ — винеровский процесс в пространстве W с ковариационным оператором K, $\mathcal{F}_t = \sigma(w(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$.

Пусть оператор A с областью определения $\mathcal{D}(A) \subseteq H$ является производящим дифференциальным оператором строго непрерывной полугруппы e^{At} на H, $b \in \mathcal{L}(U,H)$, $C \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(W,H))$ и $D \in \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(W,H))$. Пусть, далее, $\varphi\colon H \to U$ является непрерывной липшицевой функцией с $\varphi(0) = 0$, такой, что для каждого $0 \leqslant s < T < +\infty$ и $h \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathcal{P}, H)$ существует единственное слабое решение (54) в $C([s,T]; L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, H))$ в смысле [77].

Введем в рассмотрение следующую функцию Ляпунова вида Лурье–Постникова:

$$V(x) = \langle x, Mx \rangle - 2V_{\varphi}(x), \quad x \in H, \ M = M^* \in \mathcal{L}(H). \tag{55}$$

Слагаемое $V_{\varphi}(x)$ аналогично интегралу от нелинейности в функции Лурье–Постникова. Будем предполагать, что $V_{\varphi}(x)$ дважды дифференцируема по Фреше и существует оператор θ такой, что

$$V'_{\varphi}(x) = \theta\varphi(x). \tag{56}$$

Оператор θ играет ту же самую роль, что и соответствующий числовой множитель в критерии Попова. Однако в отличие от предыдущих работ в наиболее общем случае, рассмотренном в [67], такой оператор вводится в определении класса допустимых нелинейностей. Предполагается, что нелинейная характеристика системы (которую можно рассматривать как неопределенность) удовлетворяет *локальным* ограничениям

$$F_1\left(x, \varphi(x), (\theta\varphi)'(x)\right) \leqslant -\varepsilon\|x\|^2 \quad \forall x \in H, \tag{57}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x, u, \Psi) &:= \langle x, Q_1 x + S_1 u \rangle + \langle S_1^* x + R_1 u, u \rangle - \\ &- \operatorname{tr}\left\{(Cx + Du)K(Cx + Du)^*\Psi\right\}, \quad x \in H, \ u \in U, \ \Psi \in \mathcal{L}(H), \end{aligned} \tag{58}$$

$Q_1 = Q_1^* \in \mathcal{L}(H)$, $R_1 = R_1^* \in \mathcal{L}(U)$, $K_1 \in \mathcal{L}(U, H)$ — заданные операторы. В конечномерном случае рассматривались также интегральные квадратичные связи [97].

Сформулируем определение стохастической устойчивости.

Определение 5. Система (54) называется *абсолютно экспоненциально устойчивой*, если существуют числа $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in \mathcal{K}$ выполняется условие

$$\mathrm{E}\|x(t)\|^2 \leqslant \gamma e^{-\alpha(t-s)}\mathrm{E}\|h\|^2. \tag{59}$$

По аналогии с детерминированной теорией, основанной на частотной теореме и функции Ляпунова в форме Лурье–Постникова, выберем функцию $V(x)$ вида (55) в качестве кандидата на стохастическую функцию Ляпунова для рассматриваемой задачи. Тогда при соответствующих условиях непрерывности и дифференцируемости $V(x)$ для установления факта устойчивости нужно доказать, что существует оператор M такой, что V является положительно определенной и $L_{\varphi(x)}V = L_u V\big|_{u=\varphi(x)}$ отрицательно определенной в области $\mathcal{D}(A)$, где L_u означает производящий дифференциальный оператор в силу системы (54) при $\varphi(x) = u$.

Поскольку $\varphi \in \mathcal{K}$, то согласно (57) требуемое свойство

$$L_{\varphi(x)}V \leqslant -\varepsilon\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \tag{60}$$

может быть выведено из неравенства

$$L_{\varphi(x)}V - F_1(x, \varphi(x), (\theta\varphi)'(x)) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \tag{61}$$

В этом случае для выполнения неравенства (60) нужно найти оператор M такой, что справедливо (61).

Левая часть (61) может быть переписана как

$$(-L_u\langle x, Mx\rangle + F(x,u))\big|_{u=\varphi(x)},$$

$$F(x,u)\colon = \langle x, Qx + Su\rangle + \langle S^*x + Ru, u\rangle, \tag{62}$$

$$Q = Q_1, \quad S = S_1 + A^*\theta, \quad R = R_1 + \theta^*b + b^*\theta. \tag{63}$$

Тогда задача нахождения условий существования M сводится к следующей: *найти условия, при которых существует самосопряженный оператор $M \in \mathcal{L}(H)$, удовлетворяющий неравенству*

$$-L_u\langle x, Mx\rangle + F(x,u) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),\ u \in U. \tag{64}$$

При таком M функция $V(x)$ представляется конструктивным кандидатом на стохастическую функцию Ляпунова.

Неравенство (64) можно рассматривать как неравенство Беллмана для определенной задачи управления. Рассмотрим этот факт более детально.

5.3. Связь с задачами стохастического линейно-квадратичного оптимального управления

Связь между задачами линейно-квадратичного управления и задачами абсолютной устойчивости была отмечена в теории для детерминированных систем [3, 7, 35, 59, 60]. С переходом к стохастическим задачам эта связь позволила предложить удобный инструмент для исследований. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{U}$ обозначают гильбертовы L_2-пространства, порожденные (t,w)-измеримыми процессами $x(t,\varnothing)$, $u(t,\varnothing)$, задающими отображение $[s,+\infty]\times\Omega$ в H, U соответственно, согласованными с $\mathcal{F}_t$, с нормой $|||\cdot||| = \left(\int_s^T \mathrm{E}\|\cdot\|^2 dt\right)^{1/2}$. Пусть $\|\cdot\| = (\mathrm{E}\|\cdot\|)^{1/2}$ — норма в $L_2(s) = L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathcal{P}; H)$.

Рассмотрим линейную управляемую систему, связанную с (54):

$$dx = (Ax + bu)\,dt + (Cx + Du)\,dw(t), \quad x(s) = h, \tag{65}$$

где $h \in L_2(s)$, $u \in \mathcal{U}(s)$. Обозначим слабое решение (65) через $x(h,u)(t,\omega)$ или, более кратко, $x(h,u)$.

Предположение 1. *Для каждого $s \geqslant 0$, $h \in L_2(s)$ существует по крайней мере одна функция $u \in \mathcal{U}(s)$ такая, что $x(h,u) \in \mathcal{H}(s)$ и*

$$|||x(h,u)||| \leqslant c\,(\|h\| + |||u|||)\,, \tag{66}$$

постоянная $c > 0$ не зависит от h, u.

Предположение 1 означает, что разомкнутая система (65) имеет определенное свойство устойчивости от входа к состоянию на $[s,+\infty)$. В [60] подобное свойство было названо L_2-управляемостью на $[s,+\infty)$. Обозначим множество процессов u, удовлетворяющих предположению 1, через $U(s,h)$.

С системой (65) свяжем квадратичный критерий качества

$$J^{s,h}(u) = \mathrm{E}\int\limits_s^\infty F(x(h,u)(\tau),u(\tau))\,d\tau, \quad u \in U(s,h), \tag{67}$$

где F дается формулой (62), и рассмотрим задачу минимизации функционала (67) на множестве $U(s,h)$.

В отличие от классической стохастической задачи линейно-квадратичного регулятора (ЛКР) коэффициенты подынтегрального выражения в (67) определяются параметрами локальных ограничений. С учетом этого в общем случае коэффициенты формы F не обязательно следует полагать знакоопределенными, как это часто делается в задачах стохастического оптимального управления. Более того, условие коэрцитивности, требующееся для обеспечения единственного минимума (67), может выполняться, даже когда некоторые коэффициенты не являются знакоопределенными и даже когда Q или R являются отрицательно определенными. В стохастических задачах этот факт был впервые отмечен в [67], где условие коэрцитивности вводилось для обеспечения выпуклости функционала (67). Ранее Джонсон [78], изучая зависимость размещения полюсов замкнутой системы от весовых матриц функционала в детерминированной ЛКР-задаче, показал, что в зависимости от характера размещения (в левой полуплоскости) матрица Q может быть знаконеопределенной и даже отрицательно определенной. Позже в [69] задача со знаконеопределенными весовыми матрицами исследовалась на основе прямого анализа алгебраических уравнений Риккати, возникающих в задаче синтеза управления, минимизирующего функционал (67) с использованием теории линейных матричных неравенств. К сожалению, работа [78] осталась незамеченной для [67], также как и [67, 78] не были упомянуты в [69]. Факт возможной знаконеопределенности матрицы Q в задачах стабилизации по выходу был установлен в [46]. Теория линейно-квадратичного регулятора для стохастических систем с мультипликативными шумами при знаконеопределенных весовых матрицах на основе прямого подхода и с применением методов полуопределенного программирования развивалась в [62, 69, 103], хотя, по-видимому, требование строгой выпуклости (или коэрцитивности) функционала J, по-прежнему, осталось в силе в этих работах.

Теорема 10. *Пусть выполняется предположение* 1. *Если существует такое* $\varepsilon > 0$, *что выполняется условие коэрцитивности:*

$$J^{0,0}(u) \geqslant \varepsilon |||u|||^2 \quad \forall u \in U(0,0), \tag{68}$$

то

a) *для каждого* $s \geqslant 0$, $h \in L_2(s)$ *существует единственный процесс* $u(s,h) \in U(s,h)$, *минимизирующий* (67);

b) *существует самосопряженный оператор* $M \in \mathcal{L}(H)$ *такой, что*

$$\inf_{U(s,h)} J^{s,h}(u) = -\mathrm{E}\langle h, Mh\rangle.$$

В частности, в конечномерном случае теорема 10 утверждает, что M является симметричной матрицей. Этот факт дает возможность использовать M в качестве матрицы соответствующей функции Ляпунова.

Предположение 1 является довольно трудным для проверки. Достаточным условием для выполнения предположения 1 является экспоненциальная стабилизируемость пары (A, C) [75].

5.4. Стохастическая частотная теорема для бесконечномерных систем

Сформулируем достаточные условия разрешимости неравенства Беллмана (64).

В бесконечномерном случае потребуется следующее предположение технического характера. Оно автоматически выполняется в конечномерном случае.

Предположение 2. *Существует плотное и непрерывное гильбертово пространство* U_A, $U_A \subseteq U$, *такое, что для каждых* $h \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathcal{P}; \mathcal{D}(A))$, $u \in L_2(\Omega \times [s,T], U_A)$ *слабое решение* (65) *является сильным* [76].

Грубо говоря, предположение 2 означает, что для «более гладких» начальных данных и управления система генерирует «более гладкие» траектории.

Следующие две теоремы представляют два варианта бесконечномерного стохастического аналога частотной теоремы.

Теорема 11. *Пусть справедливы предположения* 1, 2. *Тогда при выполнении условия коэрцитивности* (68) *существует число* $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ *и самосопряженный оператор* $M \in \mathcal{L}(H)$ *такие, что*

$$-L_u\langle x, Mx\rangle + F(x,u) \geqslant \varepsilon_1(\|x\|^2 + \|u\|^2) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A),\ u \in U.$$

Теорема 12. *Пусть справедливы предположения* 1, 2. *Тогда если*

$$J^{0,0}(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in U(0,0), \tag{69}$$

то существует такой самосопряженный оператор $M \in \mathcal{L}(H)$, *что выполняется неравенство* (64).

Теорема 11 соответствует версии частотной теоремы со строгим частотным неравенством. Точно так же условие (69) теоремы 12 соответствует нестрогому частотному неравенству. Фактически эта теорема обобщает теорему 9 на случай бесконечномерных систем. В отличие от ряда других результатов, упомянутых в предыдущих разделах, параллель между результатами теорем 9, 11, 12 и соответствующими результатами детерминированной теории, основанными на частотной теореме В. А. Якубовича, наиболее полна в том смысле, что результат частотной теоремы получается из них как предел в случае малого шума, т. е. когда $C \to 0$, $D \to 0$. С другой стороны, для того чтобы аналогия между частотной теоремой и теоремами 11, 12 стала окончательно ясной, необходимо перейти от условий (68), (69) в частотную область. Как уже отмечалось, такой переход не удается сделать столь эффективно, как в детерминированном случае. Последние результаты в этом направлении представлены в [102].

Представленный в этом разделе подход послужил в дальнейшем основой для построения теории стохастической робастной устойчивости и управления, в частности стохастической теории H_∞-управления, где получили развитие результаты о связи между разрешимостью линейно-квадратичной задачи управления и коэрцитивностью соответствующего функционала, позволив решить подобные задачи для стохастических линейно-квадратичных игр, связанных с оценкой L_2-нормы оператора системы. Более подробно об этом можно узнать из [74, 89, 96, 97].

6. Задачи стабилизации стохастических систем

Идеи частотной теоремы позволили получить ряд изящных результатов в задачах стабилизации стохастических систем [24, 25, 52].

В [24] рассматривается система, описываемая стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dx = Ax + bu + qr'x\,dw, \tag{70}$$

где b, q — постоянные n-мерные векторы, $w(t)$ — скалярный винеровский процесс, u — скалярное управление, формируемое в виде линейной обратной связи по состоянию:

$$u = k'x. \tag{71}$$

Требуется найти такой вектор k, при котором замкнутая система будет экспоненциально устойчива в среднем квадратическом.

Обозначим

$$\begin{gathered} \delta(\lambda) = \det(\lambda I - A), \quad \chi(\lambda) = r'(\lambda I - A)^{-1}b, \\ \theta(\lambda) = \delta(\lambda)\chi(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = \theta(\lambda)\theta(-\lambda), \\ Q(\lambda) = \delta(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}. \end{gathered} \tag{72}$$

Пусть $\zeta(\lambda)$ — многочлен степени $k \leqslant n-1$ со старшим коэффициентом $\varkappa > 0$, удовлетворяющий соотношению $\zeta(\lambda)\zeta(-\lambda) = \Phi(\lambda)$ и не имеющий корней в правой полуплоскости. Определим матрицу H и вектор d из системы уравнений

$$\begin{aligned} d'Q(\lambda)b &= \zeta(\lambda), \\ A'H + HA &= -rr' + dd', \\ Hb &= 0. \end{aligned} \tag{73}$$

Теорема 13. *Пусть пара* (A, b) *полностью управляема. Тогда для существования вектора* k, *стабилизирующего систему* (70)–(71), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$q'Hq < 1. \tag{74}$$

Из этой теоремы вытекает два очень эффектных следствия.

Следствие 1. *Пусть в системе выполняется соотношение* $q = b$. *Тогда система* (70) *стабилизируема.*

Следствие 2. *Пусть многочлен* $\theta(\lambda)$, *определенный в* (72), *не имеет корней в правой полуплоскости. Тогда система* (70) *стабилизируема при любом векторе* q.

Подобные выводы другим методом получены в [99]. Последнее утверждение имеет следующую интерпретацию. Функция $\chi(\lambda)$ имеет смысл передаточной функции от входа u к выходу $r'x$. Тогда согласно следствию 2, если эта передаточная функция является минимально-фазовой, то систему (70) можно стабилизировать при любой интенсивности шума. В [25] дается обобщение этих результатов для системы вида

$$dx = Ax + bu + \sum_{l=1}^{\nu} q_l r_l' x\, dw_l.$$

В [52] рассматривается более общая задача стабилизации нелинейной системы, описываемой уравнением вида

$$dx = (Ax + bu + q\varphi(y))\, dt + \sum_{j=1}^{s} (A_j x + b_j u + q_j \varphi(y))\, dw_j, \;\; y = c'x, \tag{75}$$

где $w_j(t)$ $(j = 1, \dots, s)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $\varphi(y)$ — m-мерная нелинейная функция, удовлетворяющая квадратичной связи вида

$$F_1\left(y, x, \varphi(y), \frac{\varphi(y)}{dy}\right) \leqslant 0, \quad \varphi(0) = 0, \tag{76}$$

детальное описание которой аналогично представленному в разделе 5.2 (соотношения (58)). Ставится задача стабилизировать систему (75) управлением с динамической обратной связью по выходу, описываемым уравнениями

$$\dot z = (Az + qhc')z + bu + G(y - c'z), \quad u = k'z. \tag{77}$$

По параметрам системы (75), регулятора (77) и квадратичной связи (76) строится квадратичная форма переменных $\xi \in \mathrm{R}^{2n}$ и $v \in \mathrm{R}^m$

$$F(\xi, v) = \xi' Q\xi + 2\xi' Sv + v' Rv \tag{78}$$

(детали построения заинтересованный читатель может найти в [52]). В системе (75) с динамическим регулятором (77) разомкнем нелинейную обратную связь и положим $v(t) = \varphi(y(t))$. Функцию $v(t)$ назовем допустимой, если она согласована с потоком σ-алгебр, порожденных винеровским процессом $w(t) = [w_1(t), \ldots, w_s(t)]$ и

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{E}\,|v(t)|^2 dt < \infty, \qquad \int\limits_0^\infty \mathrm{E}\,|\xi(t)|^2 dt < \infty.$$

Здесь ξ обозначает траектории расширенной разомкнутой системы, состоящей из системы (75) и регулятора (77). Состояние этой системы есть вектор (x, z), а управление — процесс $v(t)$. Множество таких функций обозначим через $\mathcal{V}$. Следующее утверждение дает общую форму полученных в [52] достаточных условий экспоненциальной стабилизации.

Теорема 14. *Пусть динамический регулятор* (77) *экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует линейную систему, получающуюся из* (75) *подстановкой* $\varphi(y) = hy$. *Кроме того, существует такое* $\varepsilon > 0$, *что*

$$\mathrm{E}\int\limits_0^\infty F(\xi(t), v(t))\, dt \geqslant \varepsilon \int\limits_0^\infty \mathrm{E}\,|v(t)|^2 dt, \quad v(t) \in \mathcal{V}. \tag{79}$$

Тогда этот же регулятор экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует нелинейную систему (75) *при любой нелинейности* $\varphi(y)$, *удовлетворяющей квадратичной связи* (76).

Условие (79) фактически представляет собой строгую форму условия коэрцитивности (68). В ряде важных частных случаев из этой теоремы удается получить условия стабилизации в частотной форме. Рассмотрим систему со скалярным выходом:

$$dx = [Ax + bu + q\varphi(y)]\, dt + q_1\varphi(y)\, dw_1, \quad y = c'x, \tag{80}$$

где скалярная нелинейность $\varphi(y)$ является монотонной и ограниченной в секторе

$$0 \leqslant \varphi(y)y \leqslant hy^2, \qquad \frac{d\varphi(y)}{dy} \geqslant 0. \tag{81}$$

Обозначим

$$\overline{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{q} = \begin{bmatrix} q \\ q \end{bmatrix}, \quad \overline{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} A + bk' & -bk' \\ -qhc' & A + qhc' - Gc' \end{bmatrix},$$

$$\varkappa(p) = (pI - \overline{A})^{-1} q, \quad \varkappa_1(p) = (pI - \overline{A})^{-1} q_1, \quad \chi(p) = \overline{c}'\varkappa(p),$$

$$\chi_1(p) = \overline{c}'\varkappa_1(p), \quad Q = -\frac{1}{2}\overline{c} + \theta\overline{A}\overline{c},$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |Q'\varkappa_1(i\lambda)|^2 d\lambda,\ \theta \geqslant 0.$$

Наряду с (80) рассмотрим линейную систему

$$dx = (Ax + qhc' + bu)\,dt + q_1hc'x\,dw_1. \tag{82}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15. *Пусть тройка* (A, b, c) *полностью управляема и наблюдаема, динамический регулятор* (77) *экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует систему* (82), *матрица* $\overline{A}$ — *гурвицева и существуют такие* $\varepsilon > 0$, $\theta \geqslant 0$, *что при всех* $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{h} - 2\beta^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Re}(1 - 2i\lambda\theta)\chi(i\lambda) \geqslant \varepsilon. \tag{83}$$

Тогда этот же регулятор экспоненциально в среднем квадратическом стабилизирует нелинейную систему (80) *при любой нелинейности* $\varphi(y)$, *удовлетворяющей* (81).

7. Стохастическая устойчивость нелинейных импульсных систем

Стохастическая устойчивость систем с динамической частотно импульсной модуляцией изучалась в [48] на основе развития подхода [42, 44]. Более поздние исследования проводились в [13–16] на основе развитого в [18] метода усреднения и частотной теоремы. Приведем выборочные результаты этих работ для систем с одним импульсным элементом. Модели многих импульсных систем при случайных возмущениях параметров с различными видами импульсной модуляции (амплитудной, широтной, частотной, фазовой и др.) имеют вид

$$dx = [Ax + bf(t)]\,dt + bx'R\,dw, \quad \sigma = c'x, \tag{84}$$

где A, R — постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times l$; b, c — постоянные n-мерные векторы, $w(t)$ — l-мерный винеровский процесс с матрицей интенсивностей B. Отображение $\sigma \to f$ задается оператором $\mathcal{M}$, который каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции ставит в соответствие функцию $f(t)$ и последовательность $\{t_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, обладающие следующими свойствами:

$$\delta T \leqslant t_{k+1} - t_k \leqslant T, \quad t_0 = 0,\ 0 < \delta < 1, \tag{85}$$

моменты t_k зависят только от значений $\sigma(t)$ при $t \leqslant t_k$, величина $f(t)$ зависит только от значений $\sigma(\tau)$ при $\tau \leqslant t$, функция $f(t)$ на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ является кусочно-непрерывной и сохраняет знак при $t_k < t < t_{k+1}$. Основное свойство оператора $\mathcal{M}$ заключается в том, что при каждом n существует такое $\widetilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$, что величина

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\, dt$$

удовлетворяет квадратичной связи

$$(\sigma \widetilde{t}_k - \sigma_* v_n) v_n \geqslant 0, \quad \sigma_* = \mathrm{const} > 0; \tag{86}$$

при этом функция $f(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$ описывает форму k-го импульса, а положительный параметр σ_* характеризует зону насыщения модулятора.

Будем считать, что полином числителя передаточной функции

$$W(s) = c'(A - sI)^{-1} b$$

не имеет общих корней с характеристическим полиномом матрицы A и выполняется условие

$$\lim_{s \to \infty} sW(s) = 0. \tag{87}$$

Обозначим

$$G(s) = R'(A - sI)^{-1} b, \quad \varepsilon_1 = \frac{T^2}{\pi^2 \varepsilon},$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{\tau(\sigma_* - \tau - \varepsilon\,)}}{q}, \quad \beta(\lambda) = \alpha G'(-i\lambda) B G(i\lambda).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 16 (некритический случай). *Пусть матрица* A *гурвицева, выполняются условия* (85)–(87), *существуют такие* $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$, $q \geqslant T/\sqrt{3}$, *что*

$$\sigma_* - \tau - \varepsilon > 0 \tag{88}$$

и при всех $-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty$ *выполняется частотное неравенство*

$$\sigma_* - \tau - \varepsilon + \operatorname{Re} W(i\lambda) - \lambda^2 |W(i\lambda)|^2 \left[\frac{\varepsilon_1 q^2}{\tau} (\sigma_* - \tau - \varepsilon) \lambda^2 + \frac{q^2}{4\tau} \right] - \\ - \beta(\lambda) \left[1 + \frac{\lambda^2 q^2}{\tau} (\sigma_* - \tau - \varepsilon) \right] > 0. \tag{89}$$

Тогда для любых $x(0)$

$$\lim_{k \to \infty} \mathrm{E} v_k^2 = 0, \ \lim_{t \to \infty} \mathrm{E}\, |x(t)|^2 = 0. \tag{90}$$

Теорема 17 (критический случай). *Предположим, что матрица* A *имеет одно нулевое собственное значение, вещественные части остальных собственных значений отрицательны, а матрица* $G(s)$

не имеет полюсов $s = 0$. *Пусть существуют* $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$, $q \geqslant T/\sqrt{3}$, *удовлетворяющие* (88), *выполняются условия* (85)–(87),

$$\rho = \lim_{s\to 0} sW(s) > 0$$

и при всех $-\infty \leqslant \lambda \leqslant \infty$ *выполняется частотное неравенство* (89) *с* $\beta(\lambda) = (\alpha + \frac{\varrho}{2})G'(-i\lambda)BG(i\lambda)$. *Тогда для любых* $x(0)$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}v_k^2 = 0.$$

Наиболее общие результаты в этом направлении получены в [14], где рассматривались системы со многими импульсными элементами, функционирующими асинхронно. Более подробно с частотным подходом и его развитием в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией можно ознакомиться в обзорной статье [19].

8. Заключительные замечания

В данном обзоре рассмотрены некоторые направления развития теории абсолютной устойчивости стохастических систем. Здесь не были отражены работы по абсолютной устойчивости систем со случайной структурой в силу того, что в них используются те же идеи нахождения условий разрешимости уравнений Лурье при дополнительных ограничениях. Заинтересованный читатель может подробно ознакомиться с соответствующими результатами в [2, 38, 45].

Техника линейных матричных неравенств, развитая в [61, 62, 66, 103], позволяет находить решение стохастических уравнений Лурье вида (50) и более общего вида во всех тех случаях, когда их можно свести к эквивалентному обобщенному уравнению Риккати. В частности, уравнения (50) легко сводятся к обобщенному уравнению Риккати относительно симметричной матрицы H, если $D'HD + R > 0$. Это привело к некоторому снижению интереса к чисто частотным методам, основанным на анализе частотных характеристик системы. Сравнительно недавние попытки ввести частотные характеристики стохастических систем [102] скорее представляют чисто академический интерес, поскольку переходу в частотную область должно предшествовать решение уравнения Докучаева (51) или эквивалентного ему уравнения Сильвестра (52) и последующие сложные вычисления.

Таким образом, в стохастическом случае формулировка частотной теоремы отличается от привычной для детерминированных систем. Одна из причин, возможно, в том, что место класса систем, рассматриваемого в детерминированных задачах абсолютной устойчивости, здесь должен занимать более узкий класс систем, для которого должны выполняться некоторые дополнительные ограничения, позволяющие эффективно переходить в частотную область. Убедительным доказательством тому служат представленные в предыдущем разделе условия стохастической устойчивости импульсных систем, которые полностью формулируются в частотной форме. Такие формулировки удаются благодаря специфической структуре случайных возмущений в этих системах. С другой стороны, логика развития теории, настойчиво приводящая к уходу от частотных неравенств к неравенствам во временной области (в частности, к неравенству коэрцитивности), наводит на мысль о том, что здесь могут быть перспективными подходы на базе понятий пассивности и диссипативности (по Виллемсу) [47, 98].

О сказанном убедительно свидетельствует ряд недавних работ, в которых теория пассивности и диссипативности начала развиваться для стохастических систем и в которых идеи частотной теоремы обрели иное звучание [63, 70, 92, 105]. По-видимому, впервые на этом было заострено внимание еще в ранних работах по диссипативности нелинейных детерминированных систем [72, 73], где отмечалось, что полученные результаты в линейном случае соответствуют теории Калмана–Якубовича–Попова. Дальнейший шаг был сделан в [68], где вводится нелинейная версия частотной теоремы (леммы Калмана–Якубовича–Попова) и вводится понятие свойства Калмана–Якубовича–Попова (KYP-property). Все эти результаты формулируются во временной области, поскольку рассматриваются нелинейные системы, для которых частотные характеристики не определены. Таким образом, традиционный вариант частотной теоремы становится линейной версией более общего результата для нелинейных систем во временной области. С этой точки зрения логично объясняются и трудности формулировки в частотной области критериев абсолютной устойчивости стохастических систем с мультипликативными шумами. Ведь для них нет сложившегося определения частотных характеристик. С другой стороны, успешное развитие стохастической теории H_∞-управления показало, что отсутствие частотных условий не является серьезным препятствием.

Соображения, которые делают привлекательной теорию диссипативности, состоят в том, что общее понятие диссипативности включает в себя семейство свойств систем. Выделить то или иное конкретное свойство можно заданием так называемой функции запаса. Более подробно с тенденциями развития этой теории для детерминированных систем можно ознакомиться в обзорных статьях [1, 47]. Для стохастических систем число публикаций в этом направлении пока не столь велико.

Начнем с рассмотрения свойства пассивности стохастических систем, следуя результатам [70]. Пусть нелинейная стохастическая система задается уравнениями

$$dx(t) = f(x(t), u(t))\, dt + g(x(t))\, dw(t), \quad y(t) = h(x(t), u(t)), \tag{91}$$

где f, g и h — гладкие функции, обращающиеся в нуль при $x = 0$ и удовлетворяющие условиям Липшица и роста.

Определение 6. Система называется *пассивной*, если существует стохастическая функция Ляпунова $V(x)$, определенная на R^n, называемая функцией накопления, такая что

$$LV(x) \leqslant \langle h(x,u), u\rangle \tag{92}$$

для любых пар $(x,u) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m$, где L — производящий дифференциальный оператор процесса $x(t)$.

Рассмотрим частный случай системы (91):

$$dx(t) = \Big[\widehat{f}(x(t)) + \overline{f}(x(t))u(t)\Big]\, dt + g(x(t))\, dw(t), \quad y(t) = h(x(t)). \tag{93}$$

Определение 7. *Система* (93) *удовлетворяет свойству Калмана–Якубовича–Попова*, если существует стохастическая функция Ляпунова $V(x)$ $(x \in \mathrm{R}^n)$ такая, что

$$L_0 V(x) \leqslant 0, \quad \nabla V(x)\overline{f} = h'(x), \qquad x \in \mathrm{R}^n,$$

где L_0 означает производящий дифференциальный оператор системы (93) при $u \equiv 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 18. *Стохастическая система* (93) *пассивна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет свойству Калмана–Якубовича–Попова.*

Если выполнены условия пассивности и некоторые дополнительные условия система (91) может быть стабилизирована управлением с обратной связью по выходу вида

$$u = -s(y),$$

где $s(y)$ — гладкая функция такая, что $s(0) = 0$ и $y's(y) > 0$, $y \neq 0$.

Остановимся далее на результатах недавней работы [105], где предлагаются нелинейные аналоги стохастических уравнений Лурье.

Рассмотрим стохастическую систему, описываемую уравнениями

$$dx = (f(x) + g(x)u)\, dt + (h(x) + l(x)u)\, dw, \quad z = m(x), \tag{94}$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$, $u(t) \in \mathrm{R}^m$, $z(t) \in \mathrm{R}^k$, $w(t)$ — скалярный стандартный винеровский процесс, определенный на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$; функции в правой части удовлетворяют условиям Липшица и роста (см. приложение), гарантирующим существование и единственность решения (94), кроме того, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$, $m(0) = 0$.

Управление $u(t)$ будем называть допустимым, если функция $u(t)$ согласована с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденных процессом $w(t)$, $t \geqslant 0$, и

$$\mathrm{E}\int_s^T \|u\|^2 dt < \infty, \qquad s \geqslant 0.$$

В соответствии с терминологией, впервые введенной Виллемсом, функцию, $W(.,.) : \mathrm{R}^m \times \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}$, связанную с системой (94), будем называть функцией запаса (supply rate) на $[0, \infty)$, если для любых допустимых u и x, удовлетворяющих (94), выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\int_s^T |W(u(t), x(t))|\, dt < \infty \quad \forall\, T \geqslant s \geqslant 0.$$

Определение 8. Система (94) с функцией запаса W называется *диссипативной* на $[s, \infty)$, если существует неотрицательная непрерывная функция $V : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^+$, называемая функцией накопления, такая что для всех $t \geqslant s \geqslant 0,\ x(s) \in \mathrm{R}^n$

$$\mathrm{E}V(x(t)) - V(s) \leqslant \mathrm{E}\int_s^T W(u(\tau), z(\tau))\, d\tau. \tag{95}$$

Пусть функция запаса имеет вид $W(u, z) = z'Qz + 2z'Su + u'Ru$. В этом случае условия диссипативности дает следующая теорема.

Теорема 19. *Необходимыми и достаточными условиями диссипативности системы* (94) *на* $[s, \infty)$ *с функцией запаса* $W(.,.)$ *является существование* $V_s \in C^2(\mathrm{R}^n) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^+,\ V_s(0) = 0;\ \bar{l} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^q$ *и* $\overline{v} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{q\times m}$ *для некоторого числа* $q > 0$ *таких, что*

$$\begin{aligned} m'Qm - \left[\frac{\partial V_s}{\partial x}\right]' f - \frac{1}{2}h'\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}h &= \bar{l}'\bar{l}, \\ 2S'm - g'\left[\frac{\partial V_s}{\partial x}\right] - l'\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}h &= 2\overline{v}'\bar{l}, \\ R - \frac{1}{2}l'\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}l &= \overline{v}'\overline{v}. \end{aligned} \tag{96}$$

Уравнения (96) являются нелинейным обобщением стохастических уравнений Лурье (50). Авторы [105] считают данную теорему одним из главных инструментов своих будущих исследований. В [105] подробно изучается специальный случай, когда $W(u, z) = \gamma^2 u'u - z'z$ соответствующий обобщению стохастической H_∞-теории [71, 89] на нелинейные системы.

Таким образом, на современном этапе идеи частотной теоремы В. А. Якубовича, получая новое развитие, играют исключительно важную роль в развитии теории стохастической устойчивости и управления. По нашему мнению, проделанный обзор подтверждает перспективность дальнейших исследований в изложенных направлениях.

Приложение

Далее приводятся краткие сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений и теории стохастической устойчивости. Для более углубленного изучения читателю последовательно рекомендуются [41, 53] и [20, 21].

Стохастическое дифференциальное уравнение Ито. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)] + G[t, x(t)]\zeta(t), \tag{П1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния, $w(t)$ — m-мерный нормальный случайный процесс, f и G — n-мерная векторная и $n \times m$-матричная функции соответственно.

Будем считать, что $\zeta(t)$ — нормальный «физический» белый шум, т. е. компоненты вектора $\zeta(t)$ представляют собой нормальные случайные процессы с конечным временем корреляции, пренебрежимо малым в масштабе времени, принятом для «укороченной» системы (П1):

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)]. \tag{П2}$$

Такая нестрогая модель получила название *уравнения Ланжевена*. Она приобретает точный математический смысл при замене физического белого шума абстрактным. Такая замена, как отмечалось во введении, не является однозначной. Наибольшее распространение получили модели в виде *стохастического дифференциального уравнения Ито*:

$$dx(t) = f[t, x(t)]\, dt + G[t, x(t)]\, dw(t), \tag{П3}$$

здесь $w(t)$ — m-мерный стандартный винеровский процесс над вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Стохастический процесс $X = \{x(t),\ t \in I\}$ удовлетворяет уравнению (П3) на интервале $I = [t_0, T]$, $(T < \infty)$ либо $I = [t_0, \infty]$, если для всех $t \in I$ справедливо интегральное уравнение

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f[\tau, x(\tau)]\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} G[\tau, x(\tau)]\, dw(\tau), \tag{П4}$$

где первый интеграл в правой части обычный среднеквадратический интеграл, второй — так называемый *стохастический интеграл Ито*:

$$J(t) = \int\limits_{t_0}^{t} G[\tau, x(\tau)]\, dw(\tau) = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=0}^{\nu} G[t_i, x(t_i][w(t_{i+1}) - w(t_i)]. \tag{П5}$$

Здесь предел в правой части понимается в среднем квадратическом, $t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_\nu \leqslant t$, и максимальный интервал разбиения стремится к нулю, когда $\nu \to \infty$. Этот предел однозначно определен, если значения $G[t_i, x(t_i)]$ не зависят от приращений винеровского процесса под знаком суммы.

Обозначим через $\mathcal{F}_t$, $t \geqslant 0$, поток σ-алгебр, порожденный винеровским процессом $w(t, \omega)$, $t \geqslant 0$. Предположим, что функции f и G измеримы по (t, x) при $t \in I$, $x \in \mathrm{R}^n$ и удовлетворяют для некоторых постоянных k_1, k_2 условию роста

$$|f(t,x)| + |G(t,x)| \leqslant k_1(1 + |x|), \quad t \in I, \quad x \in \mathrm{R}^n, \tag{П6}$$

и равномерному условию Липшица

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |G(t,x) - G(t,y)| \leqslant k_2|x - y|, \quad t \in I,\ x, y \in \mathrm{R}^n, \tag{П7}$$

$x(t_0)$ — произвольная конечная случайная величина, не зависящая от приращений винеровского процесса. При этих условиях уравнение (П4) однозначно определяет случайный процесс (сильное решение) со следующими свойствами:

a) траектории $x(t)$ (выборочные функции) процесса X непрерывны на I с вероятностью 1;

b) если $\mathrm{E}|\mathrm{x}(\mathrm{t}_0)|^2 < \infty$, то

$$\mathrm{E}[\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} |x(t)|^2] < \infty, \quad t_1 \in I;$$

c) процесс X является $\mathcal{F}_t$-измеримым;

d) при любом t случайная величина $x(t)$ не зависит от приращений винеровского процесса $w(t_1) - w(s)$, $t \leqslant s < t_1 \in I$;

e) для каждого $t \in I$ равенство (П4) выполняется с вероятностью 1;

f) случайный процесс X является марковским.

Последнее свойство открывает возможность эффективного использования мощного математического аппарата теории марковских процессов. Важным является также тот факт, что процесс является $\mathcal{F}_t$ — мартингалом, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[J(t)] &= 0, \\ \mathrm{E}[J(t)J'(t)] &= \int_{t_0}^{t} \mathrm{E}\{G[s, x(s)]G'[s, x(s)]\}\, dt. \end{aligned}$$

Последнее соотношение часто называют *свойством изометрии Ито.*

Производящий дифференциальный оператор и формула интегрирования Ито. Уравнение (П3) определяет семейство марковских процессов, соответствующих различным выборам случайного вектора $x(t_0)$. Пусть $P(t, x; s, B) = \mathrm{P}[x(s) \in B | x(t) = x]$ — переходная функция процесса X, определенная для $t \leqslant s$; $t, s \in I$; $x \in \mathrm{R}^n$; $B \in \mathcal{B}(\mathrm{R}^n)$, где $\mathcal{B}(\mathrm{R}^n)$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства R^n. Связь между величиной $P(t,x;s,B)$ и коэффициентами f,G уравнения (П3) выражается следующим образом: для любой функции $\varphi \in C_1^{(2)}(\mathrm{R}^n)$ с компактным носителем

$$\lim_{s\to t}(s-t)^{-1}\left[\int\limits_{\mathrm{R}^n} P(t,x;s,dy)\varphi(y)-\varphi(x)\right] = L\varphi(x), \tag{П8}$$

где

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}[G'(t,x)\varphi_{xx}G(t,x)] + \langle f(t,x),\varphi_x(x)\rangle.$$

Оператор L называется производящим дифференциальным оператором марковского процесса X. При дополнительных условиях гладкости и равномерной эллиптичности оператора L переходную функцию $P(t,x;s,B)$ можно определить как единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t + Lu(t,x) &= 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant s,\ x\in\mathrm{R}^n,\\ u(s,x) &= 1, \quad x\in B,\\ u(s,x) &= 0, \quad x\notin B. \end{aligned}$$

Важным и часто применяемым является следующее правило вычисления стохастического дифференциала сложной функции вдоль траекторий процесса X. Если $\varphi=\varphi(t,x(t))$ и $\varphi,\varphi_t,\varphi_x,\varphi_{xx}$ непрерывны, то случайная величина $\varphi(t,x(t))$ может быть представлена в виде

$$\varphi(t,x(t)) = \varphi(s,x(s)) + \int\limits_s^t d\varphi(\tau,x(\tau)), \quad t\geqslant s,$$

где $d\varphi$ — *стохастический дифференциал Ито*:

$$d\varphi(\tau,x(\tau)) = [L\varphi(\tau,x(\tau))+\varphi_\tau(\tau,x(\tau))]\,d\tau + \\ + \varphi_x(\tau,x(\tau))G(\tau,x(\tau))\,dw(\tau). \tag{П9}$$

Это означает, что при вычислении интеграла от правой части (П9) интеграл от последнего слагаемого следует рассматривать как интеграл Ито. Предположим, что функция φ равна нулю вне некоторого компакта из R^n. Используя тот факт, что стохастический интеграл является мартингалом, получим *формулу интегрирования Ито*:

$$\mathrm{E}[\varphi(t,x(t))] = \varphi(s,x) + \mathrm{E}_{s,x}\int\limits_s^t [L\varphi(\tau,x(\tau))+\varphi_\tau(\tau,x(\tau))]\,d\tau. \tag{П10}$$

Равенство (П10) в силу условий роста (П6), Липшица (П7) и b) выполняется и в более общем случае, когда $\varphi, \varphi_t, \varphi_x, \varphi_{xx}$ непрерывны и для некоторой постоянной k справедливо неравенство

$$|\varphi| + |\varphi_\tau| + |x| \cdot |\varphi_x| + |x|^2 |\varphi_{xx}| \leqslant k(1 + |x|^2)$$

при $(\tau, x) \in [s, t] \times \mathrm{R}^n$.

Связь уравнений Ито и Ланжевена. В ранних работах, посвященных исследованию стохастических систем полагалось, что функции f и G в уравнениях Ито и Ланжевена одинаковы. В то же время такая формальная замена не очевидна и здесь возникает по крайней мере два принципиальных вопроса.

а. Существует ли в каком либо смысле предельный случайный процесс X, удовлетворяющий (П1), когда время корреляции процесса $\zeta(t)$ стремится к нулю?

б. Если такой процесс существует, то можно ли его представить как решение некоторого стохастического дифференциального уравнения Ито?

Эти вопросы подробно изучались в [95, 100]. Один из полученных в [100] результатов состоит в следующем. Пусть уравнение (П3) определяет скалярный процесс X, и при этом функции $f, G, G_x G$ непрерывны при $(t, x) \in I \times \mathrm{R}^1$ и удовлетворяют равномерному условию Липшица по x. Рассмотрим разбиение $\{t_\nu^{(k)}\}$ отрезка I такое, что $\max_\nu \{|t_{\nu+1}^k - t_\nu^k|\} \to 0$ при $k \to \infty$. Определим последовательность аппроксимаций w с помощью ломаных $w^{(k)}$ следующим образом: график $w^{(k)}$ на интервале $[t_\nu^{(k)}\ t_{\nu+1}^{(k)}]$ есть отрезок прямой, соединяющей точки $w(t_\nu^{(k)})$ и $w(t_{\nu+1}^{(k)})$. Пусть X_k — процесс, определяемый уравнением

$$\dot{x}_k = f(t, x_k) + G(t, x_k) \dot{w}^{(k)}(t), \quad t \in I,$$

с начальным условием $x_n(t_0) = x(t_0) = \xi$, где $\mathrm{E}[\xi^4] < \infty$. Доказано, что при этом

$$\lim_{k \to \infty} x_k(t) = y(t), \quad t \in I,$$

где $y(t)$ — процесс, описываемый уравнением Ито

$$dy = \left[f(t, y) + \frac{1}{2} G_y(t, y) G(t, y) \right] dt + G(t, y)\, dw(t) \tag{П11}$$

с начальным условием $y(t_0) = \xi$ и предел понимается в среднем квадратическом.

Это уравнение отличается от (П3), получаемого формальным переписыванием уравнения Ланжевена (П1) в дифференциалах. Таким образом, в этом и значительно более общем случае [12, 95], если за решение стохастического дифференциального уравнения принимать предел, к которому стремится последовательность решений обыкновенных дифференциальных уравнений при условии, что время корреляции нормальных случайных функций в правой части стремится к нулю, то такое решение следует понимать в смысле Стратоновича [49, 53]. Тогда уравнение (П3) нужно заменить на следующее:

$$dx(t) = f[t, x(t)]\,dt + G[t, x(t)]\,d \circ w(t), \tag{П12}$$

где $d \circ w(t)$ — дифференциал в смысле Стратоновича. Оказывается, что уравнение (П12) эквивалентно следующему уравнению Ито:

$$dx(t) = \Big[f(t, x(t) + \frac{1}{2}\overline{f}(t, x(t))\Big]dt + G(t, x(t))\,dw(t), \tag{П13}$$

где $\overline{f}$ — вектор, компоненты которого вычисляются по формуле

$$f_i = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_{ij}(t,x)}{\partial x_k} G_{kj}(t,x), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{П14}$$

Стохастическая устойчивость и стохастическая функция Ляпунова Как обычно принято в теории устойчивости, будем считать, что $f(t,0) \equiv 0$, $G(t,0) \equiv 0$. В этом случае (П3) допускает тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, которое будем отождествлять с невозмущенным (по Ляпунову) движением. Уже для детерминированных систем возникают различные виды устойчивости по Ляпунову. Еще большее разнообразие таких видов возникает в теории устойчивости стохастических систем.

Определение 9. Тривиальное решение уравнения (П3) называется:

1) *устойчивым по вероятности* при $t \geqslant 0$, если для любых $s \geqslant 0$, и $\varepsilon > 0$
$$\lim_{\xi\to 0} \mathrm{P}\{\sup_{t>s} |x^{s,\xi}(t)| > \varepsilon\} = 0; \tag{П15}$$

2) *асимптотически устойчивым по вероятности*, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, справедливо соотношение
$$\lim_{\xi\to 0} \mathrm{P}\{\lim_{t\to\infty} x^{s,\xi}(t) = 0\} = 1; \tag{П16}$$

3) *p-устойчивым* $(p > 0)$ при $t \geqslant 0$, если при $\delta \to 0$
$$\sup_{|\xi|\leqslant\delta,\ t\geqslant s} \mathrm{E}\,|x^{s,\xi}|^p \to 0,\ s \geqslant 0; \tag{П17}$$

4) *асимптотически p-устойчивым*, если оно p-устойчиво и, кроме того, $\mathrm{E}\,|\,x^{s,\xi}|^p \to 0$ при $t \to \infty$;

5) *экспоненциально p-устойчивым*, если при некоторых положительных постоянных A и α
$$\mathrm{E}\,|x^{s,\xi}|^p \leqslant A|\xi|^p \exp[-\alpha(t-s)]; \tag{П18}$$

6) *устойчивым с вероятностью* 1 в том или ином смысле, если все траектории, кроме, быть может, множества траекторий вероятностной меры 0, устойчивы в соответствующем смысле.

Когда говорят об устойчивости системы (П3), имеют в виду устойчивость ее тривиального решения в том или ином смысле.

Для задач абсолютной устойчивости стохастических систем обычно требуется построить функцию Ляпунова, гарантирующую экспоненциальную p-устойчивость. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 20. *Для экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения системы* (П3) *при* $t \geqslant 0$ *достаточно, чтобы существовала функция* $V(t,x)$ *из класса* $C_2^0(\mathrm{R}^n)$, *удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных* k_1, k_2, k_3 *неравенствам*

$$\begin{aligned} k_1|x|^p \leqslant V(t,x) &\leqslant k_2|x|^p, \\ LV(t,x) &\leqslant -k_3|x|^p. \end{aligned}$$

В литературе в основном рассматривается случай $p = 2$ (устойчивость в среднем квадратическом).

Список литературы

1. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 3–37. [1)]
2. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Пакшин П. В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
3. *Барсук Л. О., Брусин В. А.* Бесконечномерное обобщение леммы Калмана–Якубовича // Динамика систем. — 1975. — № 8.
4. *Брокетт Р. У.* Алгебры Ли и группы Ли в теории управления / Математические методы в теории систем / Под ред. Ю. И. Журавлева. — М.: Мир, 1979.
5. *Брусин В. А.* Об абсолютной стохастической устойчивости по отношению к одному классу возмущений // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1968. — Т. 11, № 7. — С. 1003–1018.
6. *Брусин В. А.* Некоторые результаты исследований нелинейных дискретных стохастических систем управления // АиТ. — 1970. — № 6. — С. 82–87.
7. *Брусин В. А.* Уравнения Лурье в гиьбертовом пространстве и их разрешимость // Прикл. мат. и механика. — 1976. — Т. 40, № 5. — С. 947–956.
8. *Брусин В. А.* Глобальная устойчивость и дихотомия класса нелинейных систем со случайными параметрами // Сиб. матем. ж. — 1981. — Т. 22, № 2. — С. 57–73.
9. *Брусин В. А., Тай М. Л.* Абсолютная стохастическая устойчивость // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1967. — Т. 10, № 7.

[1)] См. также настоящий сборник, с. 452.

10. *Брусин В. А., Угриновский В. А.* О глобальной асимптотической устойчивости дифференциальных уравнений со случайным векторным возмущением // Препринт НИРФИ. № 177. — Горький, 1984.
11. *Брусин В. А., Угриновский В. А.* Исследование стохастической устойчивости некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений типа Ито // Сиб. матем. ж. — 1987. — Т. 28, № 3. — С. 35–50.
12. *Вонэм В. М.* Стохастические дифференциальные уравнения в теории управления // Математика. — 1973. — № 4–5. — С. 129–162, 82–114.
13. *Гелиг А.Х., Елхимова Ю. В.* Устойчивость нелинейных импульсных систем при случайных возмущениях параметров // АиТ. — 1995. — № 11. — С. 140–147.
14. *Гелиг А. Х.* Устойчивость асинхронных импульсных систем со случайными возмущениями параметров // АиТ. — 1998. — № 5. — С. 181–185.
15. *Гелиг А.Х., Елхимова Ю. В.* Устойчивость функционально-дифференциального уравнения Ито с монотонной нелинейной характеристикой // Вестн. С.-Петербургского гос. ун-та. Серия 1. — 1995. — Вып. 4. — С. 3–7.
16. *Гелиг А.Х., Елхимова Ю. В. Чурилов А. Н.* Устойчивость одного класса функционально-дифференциальных уравнений Ито // Вестн. С.-Петербургского гос. ун-та. Серия 1. — 1994. — Вып. 2. – № 8. — С.3–9.
17. *Гелиг А. Х.., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.
18. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — СПб.: Изд-во С.-Петербургского гос. ун-та, 1993.
19. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // АиТ. — 2006. — № 10. — С. 60–76. [1)]
20. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
21. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982.
22. *Гусев С. В., Лихтарников А. Л.* Очерк истории леммы Калмана-Попова-Якубовича и S-процедуры // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 77–121. [2)]
23. *Докучаев Н. Г.* Частотный критерий существования оптимального управления для уравнения Ито // Вестник С.-Петербургского гос. университета. Сер. матем., механ., астр. — 1983. — Вып. 1. — С. 38–43.
24. *Казаринов Ю. Ф.* О стабилизации линейной стохастической системы, испытывающей параметрическое воздействие типа «белый шум» // Прикл. матем. и мех. — 1977. — Т. 41, № .2. — С. 245–250.
25. *Казаринов Ю. Ф.* Стабилизация линейной стохастической системы, испытывающей параметрическое возмущение векторным белым шумом // Вопросы механики и процессов управления. — Л.: Изд-во.ЛГУ, 1982. — № 5. — С.64–75.

[1)] См. также настоящий сборник, с. 155.

[2)] См. также настоящий сборник, с. 77.

26. *Кац И. Я., Красовский Н. Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 27, № 5. — С. 809–823.
27. *Кореневский Д. Г.* Алгебраический критерий абсолютной (по нелинейности) устойчивости стохастических систем автоматического регулирования с нелинейной обратной связью // Укр. мат. журн. — 1988. — Т. 40, № 6. — С. 731–736.
28. *Кореневский Д. Г.* Алгебраический критерий абсолютной (по нелинейности) устойчивости стохастических дискретных систем автоматического регулирования с нелинейной обратной связью // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 1. — С. 42–48.
29. *Кореневский Д. Г.* Абсолютная устойчивость в среднем квадратичном непрерывных и дискретных нелинейных стохастических систем автоматического регулирования. Алгебраические коэффициентные критерии // ДАН СССР. — 1989. — Т. 306, № 6. — С. 1316–1319.
30. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — Киев: Наук. думка, 1989.
31. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. — М: Мир, 1969.
32. *Левит М. В.* Частотный критерий абсолютной стохастической устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравненнй Ито // УМН. — 1972. — Т. 27, № 4(166). — С. 215–216.
33. *Левит М. В., Чурилов А. Н.* Об оценках некоторых функционалов от решений матричных неравенств, встречающихся в теории управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1983. — № 5. — С. 53–59.
34. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1989.
35. *Лихтарников В. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1069–1085.
36. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для непрерывных однопараметрических полугрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — Т. 41. — С. 896–911.
37. *Личак М. М., Тунiк А. А.* Частотнi умови стохастичнної стiйкости нелинейных iмпульсних систем керування // Автоматика. — 1971. — № 4. — С. 81–84.
38. *Маликов А. И.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем со случайными изменениями структуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 2. — С. 19–30.
39. *Малышев В. В., Пакшин П. В.* Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления (обзор). I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 42–66.
40. *Малышев В. В., Пакшин П. В.* Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления (обзор). II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1990. — № 2. — С. 97–120.
41. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения.Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.

42. *Пакшин П. В.* Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // АиТ. — 1977. — № 4. — С. 27–36.
43. *Пакшин П. В.* Устойчивость нелинейных дискретных систем со случайными параметрами // Пробл. управления и теории информации. — 1978. — Т. 7, № 4. — С. 73–81.
44. *Пакшин П. В.* Экспоненциальная устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // АиТ. — 1980. — № 2. — С. 65–71.
45. *Пакшин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. — М.: Физматлит, 1994.
46. *Пакшин П.В, Ретинский Д. М.* Робастная стабилизация систем случайной структуры с переключаемой обратной связью по выходу объекта // АиТ. — 2005. — № 7. — С. 144–153.
47. *Полушин И. Г., Фрадков А. Л., Хилл Д. В.* Пассивность и пассификация нелинейных систем // АиТ. — 2000. — № 3. — С. 3–37.
48. *Попков Ю. С., Ашимов А. А., Асаубаев К. Ш.* Статистическая теория автоматических систем с динамической частотно-импульсной модуляцией. — М.: Наука, 1988.
49. *Стратонович Р. Л.* Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений // Вестн. МГУ. — 1964. — Сер.1, № 1. — С. 3–12
50. *Туник А. А., Лычак М. М.* Анализ стохастической устойчивости импульсных систем управления в частотной области // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1973. — № 1. — С. 172–179.
51. *Угриновский В. А.* Стохастический аналог частотной теоремы // Изв. ВУЗов. Математика. — 1987. — № .10. — С. 37–43.
52. *Угриновский В. А.* Экспоненциальная стабилизация нелинейных стохастических систем // Прикл. мат. и механика. — 1988. — Т. 52, № .2. — С. 16–24.
53. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
54. *Чурилов А. Н.* Об оценках функционала , встречающегося при исследовании дискретных систем управления // Изв. ВУЗов. Математика. — 1984. — № 9. — С. 59–65.
55. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
56. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в нелинейной теории регулирования // ДАН СССР. — 1964. — Т. 156, № 2. — С. 278–281.
57. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — № 6. — С. 5–30.
58. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. матем. ж. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 384–420.
59. *Якубович В. А.* Частотная теорема для случая, когда пространства состояния и управления — гильбертовы и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления. I // Сиб. матем. ж. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 639–668.

60. Якубович В. А. Частотная теорема для случая, когда пространство состояний и управлений гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления. II // Сиб. матем. ж. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1083–1102.
61. *Ait Rami M., El Ghaoui L.* LMI optimization for nonstandard Riccati equation arising in stochastic control // IEEE Trans. Automat. Control. — 1996. — V. 41. — P. 1666–1671.
62. *Ait Rami M., Zhou X. Y.* Linear matrix inequalities, Riccati equations, an indefinite stochastic linear quadratic controls // IEEE Trans. Automat. Control. — 2000. — V. 45. — P. 1131–1143.
63. *Aliyu M. D. S.* Dissipative analysis and stability of nonlinear stochastic state-delayed systems // Nonlinear Dynam. and Syst. Theory. — 2004. — V. 4. — P. 243–256.
64. *Bertram J. E and Sarachik P. E.* Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Trans.IRE. Special Supplement. — 1959. — V. PGIT-5. — P. 260.
65. *Bismut J. M.* Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients // SIAM J. Control Optim. — 1976. — V. 14, № 3. — P.419–444.
66. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E. and Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in control and system theory. — Philadelphia.: SIAM, 1994.
67. *Brusin V. A., Ugrinovskii V. A.* Absolute stability approach to stochastic stability of infinite-dimensional nonlinear systems // Automatica. — 1995. — V. 31, № 10. — P. 1453–1458.
68. *Byrnes C. I., Isidori A. and Willems J. C.* Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1991. — V. 36. — P. 1228–1240.
69. *Chen L., Li X. and Zhou X.* Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs // SIAM J. Control Optim. — 1998. — V. 36. — P. 1685–1702.
70. *Florchinger P.* A passive system approach to feedback stabilization of nonlinear control stochastic systems // SIAM J. Control Optim. — 1999. — V. 37. — P. 1848–1864.
71. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems Series. — N. Y.: Springer Verlag, 2005.
72. *Hill D. J. and Moylan P. J.* The stability of nonlinear dissipative systems// IEEE Trans. Automat. Control. — 1976. — V. 21. — P. 708–711.
73. *Hill D. J. and Moylan P. J.* Connection between finite-gain and asymptotic stability // IEEE Trans. Automat. Control. — 1980. — V. 25. — P. 931–936.
74. *Hinrichsen D. and Pritchard A. J.*, Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. — 1998. — V. 36. — P. 1504–1538.
75. *Ichikawa A.* Dynamic programming approach to stochastic evolution equations // SIAM J. Control Optim. — 1979. — V. 17. — P. 152–174.
76. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations // J. Math. Anal. Appl. — 1982. — V. 90. — P.12–44.
77. *Ichikawa A.* Semilinear stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures // Stochastics. — 1984. — V. 12. — P. 1–39.
78. Johnson C. D. The ‘unreachable poles’ defect in LQR theory: analysis and remedy // Int. J. Control. — 1988. — V. 47. — P. 697–709.

79. *Kozin F.* A survey of stability of stochastic systems // Automatica. — 1969. — V. 5. — P. 95–112.
80. *Lorenz J.* Czestotliwościowy warunek stochasticznej stabilności jednowymiarowych dyskretnych ukladów regulacji // Archiwum Automatiki i Telemechaniki. — 1969. — T. 14, Z.3. — P. 243–250.
81. *Mahalanabis A. K., Purkayastha S.* Frequency-Domain Criteria for Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1973. — V. 18, No 3. — P. 266–270.
82. *Meyer K. R.* On the existence of Liapunov functions for the problem of Lur'e // J. SIAM Control. — 1966. — Ser. A, V. 3. — P. 373–383.
83. *Mishra M. K. P and Mahalanabis A. K.* On the Stability of Discrete Nonlinear Feedback systems with state-dependent noise // Int. J. Syst. Sci. — 1975. — V. 6, № 5. — P. 479–490.
84. *Mishra M. K. P and Mahalanabis A. K.* On the Stability of Non-linear Feedback systems with control-dependent noise // Int. J. Syst. Sci. — 1975. — V. 6, № 10. — P. 945–949.
85. *Mishra M. K. P and Mahalanabis A. K.* On the Stability of linear time-varying feedback systems with random parameters // Int. J. Systems Sci. — 1976. — V. 7, № 11. — P. 1315–1322.
86. *Mohler R. R., Kolodziej W. J.* An overview of bilinear systems theory and applications // IEEE Trans. Syst., Man Cybernet. — 1980. — V. 10. — P. 683–688.
87. *Mohler R. R., Kolodziej W. J.* An overview of stochastic bilinear control processes // IEEE Trans. Syst., Man Cybernet. — 1980. — V. 10. — P. 913–918.
88. *Morozan T.* The method of V. M. Popov for control systems with random parameters // J. Math. Anal. Appl. — 1966. — V. 16. — P. 201–215.
89. *Petersen I. R., Ugrinovskii V. A. Savkin A. V.* Robust control design using H^∞ methods. — N. Y.: Springer Verlag, 2000.
90. *Rootenberg J. and Ghozati S-A.* Improved stability for linear stochastic systems // Int. J. Syst. Sci. — 1977. — V. 8, № 4. — P. 413–422.
91. *Rootenberg J. and Ghozati S-A.* Cross-coupling and stability of nonlinear stochastic control systems // Int. J. Syst. Sci. — 1977. — V. 8, № 5. — P. 539–546.
92. *Shaked U. and Berman N.* H_∞ control for nonlinear stochastic systems: The output-feedback case // Prepr. 16th IFAC World Congr. Prague. Czech Republic. July 3–8. 2005. — P. 1–6 (CD-ROM).
93. *Shibata H. and Hata S.* Stochastic stability for a multiloop nonlinear system // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1976. — V. 21. — P. 600–601.
94. *Socha L.* Application of Yakubovich criterion for stability of nonlinear stochastic systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1980. — V. 25, № 2. — P. 330–332.
95. *Sussmann H.* On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations // Ann. Probability. — 1978. — V. 60. — P. 19–41.
96. *Ugrinovskii V. A.* Robust H_∞ control in the presence of stochastic uncertainty // Int.J. Control. — 1998. — V. 71. — P. 219–237.

97. *Ugrinovskii V. A. and Petersen I. R.* Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty // SIAM J. Control Optim. — 1999. — V. 37. — P. 1089–1122.
98. *Willems J. C.* Dissipative dynamic systems Part I: General theory // Arch. Rational Mechan. Anal. — 1972. — V. 45. — P. 321–351.
99. *Willems J. L. and Willems J. C.* Feedback stabilizability of stochastic systems with state and control dependent noise // Automatica. — 1976. — V. 12. — P. 277–283.
100. *Wong E. Zakai M.* On the relation between ordinary and stochastic differential equations // International J. Engin. Sci. — 1965. — V. 3. — P. 213–229.
101. *Wonham W. M.* A Liapunov method for the estimation of stftistical averages // J. Differential Equations. — 1966. — V. 2. — P. 365–377.
102. *Wu H., Zhou X. Y.* Stochastic frequency characteristics // SIAM J. Control Optim. — 2001. — V. 40, № 2. — P. 557–576.
103. *Yao D. D., Zhang S., Zhou X. Y.* Stochastic linear-quadratic control via semidefinite programming // SIAM J. Control Optim. — 2001. — V. 40. — P. 801–823.
104. *Yaz E. and Yildizbayrak N.* Robustness of feedback-stabilized systems in the presence of nonlinear and random perturbation // Int. J. Control. — 1985. — V. 41. — P. 345–353.
105. *Zhang W. and Chen B. S.* State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems // SIAM J. Control Optim. — 2006. — V. 44. — P. 1973–1991.

Глава 3

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Х. Гелиг[†]

Неклассические дифференциальные уравнения[*]

Аннотация: в обзоре рассматриваются дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями, гистерезисными функциями и импульсными элементами.

1. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями

Для ознакомления со спецификой дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \sigma = c^* x, \quad \varphi(\sigma) = \operatorname{sign}\sigma, \tag{1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, b и c — постоянные n-мерные столбцы, все величины вещественные, $*$ — знак транспонирования. Из (1) вытекает равенство

$$\dot{\sigma} = c^* A x + c^* b \varphi(\sigma). \tag{2}$$

Предположим, что $c^* b < 0$ и рассмотрим задачу Коши при $x(0) = x_0$ и $c^* x_0 = 0$. Если $c^* A x_0 + c^* b > 0$, то из (2) следует неравенство $\dot{\sigma}(0) > 0$

[†]) Санкт-Петербургский Государственный Университет.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. матем., мех., астр.». — 2006. — № 4. — С. 17–18.

и из точки x_0 выходит траектория в полупространство $c^*x > 0$ в силу системы

$$\dot{x} = Ax + b. \tag{3}$$

Аналогично, если $c^*Ax_0 - c^*b < 0$, то из точки x_0 можно выпустить траекторию в полупространство $c^*x < 0$ в силу системы

$$\dot{x} = Ax - b. \tag{4}$$

Если x_0 принадлежит полосе

$$-c^*b > c^*Ax_0 > c^*b, \qquad c^*x_0 = 0, \tag{5}$$

то из точки x_0 нельзя выпустить траекторию ни в силу системы (3), ни в силу системы (4), так как траектории этих систем «стыкуются» в точках полосы (5). Таким образом, классическое решение в этом случае не существует, каким бы числом мы ни доопределили функцию $\varphi(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$.

Потребуем теперь, чтобы траектория, выпущенная из точки x_0, принадлежащей полосе (5), оставалась на гиперплоскости $c^*x = 0$. Очевидно, чтобы удовлетворить равенству $\dot{\sigma} = 0$, нужно в силу (2) доопределить $\varphi(0)$ не числом, а функцией $\xi(t) = -\dfrac{c^*Ax(t)}{c^*b}$. В этом случае решение $x(t, x_0)$ будет определяться системой

$$\dot{x} = Ax - \frac{bc^*A}{c^*b}x$$

и «скользить» по гиперплоскости $\sigma = 0$. Многообразие $c^*x = 0$, $-c^*b \geqslant c^*Ax \geqslant c^*b$ называют «пластинкой» скользящих режимов. Предложенное доопределение нелинейности в системе (1) имеет следующий физический смысл. Если $\varphi(\sigma)$ — сила сухого трения, то $\xi(t)$ — сила трения покоя. Когда разность скоростей трущихся элементов равна нулю, то сила трения может принимать любое значение от -1 до $+1$.

Если

$$c^*b = c^*Ab = \ldots = c^*A^{k-1}b = 0, \quad c^*A^kb < 0, \quad (k < n),$$

то многообразие скользящих режимов описывается соотношениями

$$c^*x = c^*Ax = \ldots = c^*A^kx = 0, \quad -c^*A^kb \geqslant c^*A^{k+1}x \geqslant c^*A^kb.$$

Отметим полезную связь между свойствами скользящего режима и «передаточной функцией», являющейся основным инструментом теории линейных систем автоматического регулирования. Сделав в (1) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим соотношения

$$p\widetilde{x} = A\widetilde{x} + b\widetilde{\varphi}, \qquad \widetilde{\sigma} = c^*\widetilde{x}.$$

Исключая из них $\widetilde{x}$, приходим к равенству

$$\widetilde{\sigma} = W(p)\widetilde{\varphi},$$

где $W(p) = c^*(pI - A)^{-1}b$ — передаточная функция (от «входа» φ к «выходу» σ), I— единичная матрица. Пусть $W(p) = \dfrac{\pi_m(p)}{\det(pI - A)}$, где $\pi_m(p)$ — многочлен степени m, не имеющий общих корней с многочленом $\det(pI - A)$. Тогда оказывается, что m — размерность многообразия скользящих режимов, а $\pi_m(p)$ — характеристический полином системы дифференциальных уравнений, определенной на многообразии скользящих режимов и описывающей этот режим.

Изучим состояние равновесия x_∞ системы (1) в случае $\det A \neq 0$. Очевидно, что x_∞ удовлетворяет уравнению

$$Ax_\infty + b\varphi_\infty = 0,$$

где φ_∞ — стационарное значение нелинейности. Отсюда получаем выражения:

$$x_\infty = -A^{-1}b\varphi_\infty, \qquad \sigma_\infty = -c^*A^{-1}b\varphi_\infty.$$

Если $c^*A^{-1}b = 0$, то $\sigma_\infty = 0$ и, следовательно, стационарное множество системы (1) представляет собой «отрезок покоя»

$$x_\infty = -A^{-1}b\varphi_\infty, \qquad -1 \leqslant \varphi_\infty \leqslant 1,$$

лежащий в гиперплоскости $c^*x = 0$.

Отметим, что у систем с неединственным состоянием равновесия различают два вида устойчивости в целом стационарного множества. Стационарное множество называется *устойчивым в целом*, если оно устойчиво по Ляпунову и все решения стремятся к нему при $t \to +\infty$. При этом каждое решение может не стремиться к какому-либо состоянию равновесия. Такая ситуация имеет место, например, в изученной в [2] задаче Вышнеградского, где траектории «наматываются» на отрезок покоя, каждая точка которого неустойчива по Ляпунову. Если стационарное множество устойчиво в целом и, кроме того, каждое решение при $t \to +\infty$ стремится к некоторому состоянию равновесия, то такое стационарное множество называется *точечно устойчивым в целом* [7, 41]. Примером системы с точечно устойчивым в целом отрезком покоя может служить изученная в [23] система регулирования турбины.

Среди различных понятий решений систем с разрывными нелинейностями [5, 14, 36] наиболее популярно следующее определение, предложенное А. Ф. Филипповым [19].

Определение 1. *Вектор-функция* $x(t)$, определенная на интервале (t_1, t_2), называется *решением уравнения*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

если она абсолютно непрерывна и при почти всех $t \in (t_1, t_2)$ вектор $\dot{x}(t)$ принадлежит наименьшему выпуклому замкнутому множеству, содержащему все значения $f(t,x')$, когда x' пробегает почти всю δ-окрестность точки $x(t)$ в $\mathbb{R}^n$ (при фиксированном t), т. е.

$$\dot{x} \in \prod_{\delta>0} \prod_{\mu N=0} \operatorname{konv} f(t, U(x(t),\delta) - N).$$

Рассмотрим случай, когда система (6) автономна и вектор-функция $f(x)$ претерпевает разрыв на некоторой гладкой поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^n$, непрерывна в некоторой окрестности этой поверхности и существуют предельные значения $f_+(x)$ и $f_-(x)$ вектор-функции $f(x)$, когда точка x приближается к S с той или другой стороны.

Предположим, что поля направлений $f_-(x)$ и $f_+(x)$ «стыкуются» на поверхности S. Тогда, согласно определению 1, поле направлений скользящего режима на поверхности разрыва определяется следующим образом. Построим касательную плоскость к поверхности S в точке x и отрезок l, соединяющий концы векторов $f_-(x)$ и $f_+(x)$. Построим вектор f_0, имеющий начало в точке x и конец в точке пересечения отрезка с касательной плоскостью. Тогда, согласно определению 1, вектор f_0 определяет поле направлений в точке x.

Очевидно, что построенное выше для системы (1) решение удовлетворяет определению 1. Однако имеются важные прикладные задачи, для которых определение 1 не годится. В качестве примера рассмотрим задачу синтеза управлений u_1 и u_2, подчиненных ограничениям $|u_1| \leqslant 1$, $|u_2| \leqslant 1$, которые переводят любую точку $(x_1(0), x_2(0))$ системы

$$\dot{x}_1 = x_2 u_1, \qquad \dot{x}_2 = u_2 \tag{7}$$

в начало координат оптимальным по быстродействию способом. Известно [4, 17], что синтез таких управлений осуществлен на всей плоскости x_1, x_2 и, например, для первого квадранта оптимальные управления имеют вид

$$u_1 = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad x_1 < 0.5\,x_2^2, \\ -1 & \text{при} \quad x_1 \geqslant 0.5\,x_2^2, \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x_1 \leqslant 0.5\,x_2^2, \\ +1 & \text{при} \quad x_1 > 0.5\,x_2^2. \end{cases}$$

В частности, оптимальной является траектория $x_1 = 0.5\,x_2^2$ и на ней система (7) имеет вид $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = -1$. Возьмем точку $x = (x_1, x_2)$ на этой траектории и будем к ней приближаться со стороны $x_1 < 0.5\,x_2^2$. Предельное значение правых частей системы (7) при этом будет $f_+(x) = (x_2, -1)$. Если приближаться со стороны, где $x_1 > 0.5\,x_2^2$, то для предельного значения получим $f_-(x) = (-x_2, +1)$. Так как $f_+(x) = -f_-(x)$, то в данном случае отрезок l проходит через точку x, т. е. $f_0(x) = 0$ и решением скользящего режима по определению 1 является состояние равновесия. В то же время на оптимальной траектории вектор скорости есть $(-x_2, -1)$. Таким образом, оптимальная траектория не является решением в смысле определения 1.

М. А. Айзерман и Е. С. Пятницкий [1] предложили другое описание решений уравнений с разрывными правыми частями. Рассмотрим их подход для частного случая, когда $f(t,x)$ имеет разрыв на некоторой поверхности Σ. Рассмотрим последовательность непрерывных вектор-функций $f_\varepsilon(t,x)$, которые вне ε-окрестности поверхности Σ совпадают с $f(t,x)$ и при $\varepsilon \to 0$ стремятся к $f(t,x)$ в каждой точке, не принадлежащей Σ. Пусть $x_\varepsilon(t)$ — решение системы

$$\dot{x} = f_\varepsilon(t,x).$$

Тогда под решением системы (6) понимается предел любой сходящейся подпоследовательности решений $x_{\varepsilon_k}(t)$. Очевидно, что рассмотренная выше оптимальная траектория является решением в смысле [1]. Однако и введенное в [1] понятие решения не полностью обслуживает приложения. Например, пусть в системе (1) $\varphi(\sigma)$ является характеристикой силы сухого трения и в покое сила трения может принимать значения больше, чем при движении, т. е. трение носит срывной характер. В этом случае график функции $\varphi(\sigma)$ имеет вид, представленный на рис. 1.

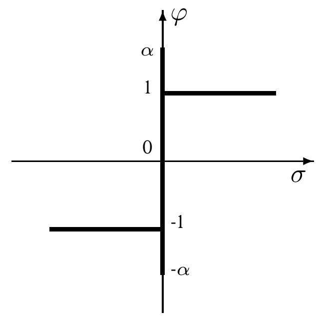

Рис. 1

Очевидно, что при описанных выше подходах как А. Ф. Филиппова, так и М. А. Айзермана и Е. С. Пятницкого, решения системы (1) со срывным и несрывным трением совпадают, что не соответствует физике явления.

Наиболее адекватным приложениям является рассмотрение систем с разрывными правыми частями как систем с многозначными правыми частями (дифференциальных включений). При таком подходе $\varphi(\sigma)$, соответствующие несрывному и срывному сухому трению, имеют соответственно вид

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma & \text{при} \quad \sigma \neq 0, \\ [-1,+1] & \text{при} \quad \sigma = 0, \end{cases} \qquad \varphi(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma & \text{при} \quad \sigma \neq 0, \\ [-\alpha,+\alpha] & \text{при} \quad \sigma = 0. \end{cases}$$

Теория дифференциальных включений с многозначными правыми частями была впервые развита в работах Маршо [34, 35] и Зарембы [42, 43]. Под решением дифференциального включения $Dx(t) \in f(t,x)$ Маршо понимал непрерывную кривую $x(t)$, контингенция которой D в каждой точке t принадлежит множеству $f(t,x(t))$. Заремба пользовался аналогичным определением с заменой термина «контингенция» на «паратингенция». При этом *контингенцией* D кривой $x(t)$ в точке t называется множество всех пределов $\lim\limits_{t_k \to t} \dfrac{x(t_k)-x(t)}{t_k - t}$, а *паратингенцией* — множество всех пределов $\lim\limits_{t_k, t_i \to t} \dfrac{x(t_k)-x(t_i)}{t_k - t_i}$. Важевский [43] показал, что если $x(t)$ является решением дифференциального включения

$Dx \in f(t,x)$ в смысле Маршо, то вектор-функция $x(t)$ абсолютно непрерывна и при почти всех t справедливо включение $\dot{x}(t) \in f(t,x(t))$.

Теория дифференциальных включений изложена в работах [7, 18, 21, 41]. Приведем основные понятия этой теории.

Рассмотрим вектор-функцию $f(t,x)$ $(t \in \mathbb{R}^1,\ x \in \mathbb{R}^n)$, отображающую каждую точку (t,x) некоторой области $\mathcal{D}$ из $\mathbb{R}^{n+1}$ в множество $f(t,x)$ точек из $\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Функция $f(t,x)$ называется *полунепрерывной* [1)] *в точке* (t_0,x_0), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon,t,x)$, что множество $f(t,x)$ принадлежит ε-окрестности множества $f(t_0,x_0)$, если точка (t,x) находится в δ-окрестности точки (t_0,x_0).

Определение 3. Функция $f(t,x)$ называется *непрерывной в точке* (t_0,x_0), если она полунепрерывна и, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon,t_0,x_0)$, что множество $f(t_0,x_0)$ содержится в ε-окрестности множества $f(t_1,x_1)$, если точка (t_0,x_0) принадлежит δ-окрестности точки (t_1,x_1).

Очевидно, что функция, изображенная на рис. 1, является полунепрерывной, но не является непрерывной.

Определение 4. Вектор-функция $x(t)$ называется *решением дифференциального включения*

$$\dot{x} \in f(t,x), \tag{8}$$

если она абсолютно непрерывна и для тех значений t, для которых существует производная $\dot{x}(t)$, выполняется включение

$$\dot{x} \in f(t,x(t)).$$

Имеет место следующая локальная теорема существования решения дифференциального включения [7, 41].

Теорема 1. *Пусть многозначная вектор-функция $f(t,x)$ в каждой точке (t_1,x_1) области*

$$\mathcal{D}: \quad |t_1 - t_0| \leqslant \alpha, \quad |x_1 - a| \leqslant \rho$$

является полунепрерывной, а множество $f(t_1,x_1)$ замкнуто, ограничено и выпукло, причем

$$\sup |y| = c \quad \text{для} \quad y \in f(t_1,x_1), \quad (t_1,x_1) \in \mathcal{D}.$$

Тогда при $|t-t_0| \leqslant \tau = \min(\alpha, \rho/c)$ существует по крайней мере одно решение $x(t)$, удовлетворяющее включению (8) и начальному условию $x(t_0) = a$.

[1)] В литературе это свойство принято называть полунепрерывностью сверху либо β-непрерывностью.

Для дифференциального включения (8) справедлива теорема о продолжимости решения, остающегося в ограниченной области, теорема о том, что через каждую ω-предельную точку траектории $x(t)$ проходит траектория, целиком состоящая из ω-предельных точек, и ряд других теорем качественной теории [7, 18, 21, 41].

В [20] для дифференциальных включений с непрерывной $f(t, x)$ доказана теорема существования решения без предположения о выпуклости множества $f(t, x)$. На дифференциальные включения перенесена теория абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных систем [7, 41].

При исследовании дифференциальных включений важную роль играет следующая теорема Б. М. Макарова о существовании доопределенной нелинейности, которая позволяет заменить дифференциальное включение дифференциальным равенством. Пусть $F(t, x, \xi)$ — вектор-функция, определенная при $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Пусть далее $\sigma(t, x)$ — определенная на $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ непрерывная вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^l$ и пусть $\varphi(t, \sigma)$ — определенная на $[a, b] \times \mathbb{R}^l$ многозначная функция, значения которой суть подмножества в $\mathbb{R}^n$. Справедлива следующая

Теорема 2 ([7, 41]). *Предположим, что фунция F непрерывна, а функция φ полунепрерывна и ее значения — компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_0(t)$ — абсолютно непрерывная на $[a, b]$ вектор-функция, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a, b]$ соотношению*

$$\dot{x}_0(t) \in \{F[t, x_0(t), \xi] \bigm| \xi \in \mathcal{A}(t)\},$$

где $\mathcal{A}(t) = \varphi[t, \sigma(t, x_0(t))]$.

Тогда на $[a, b]$ существует такая измеримая по Лебегу вектор-функция $\xi_0(t)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы соотношения

$$\dot{x}_0(t) = F[t, x_0(t), \xi_0(t)], \qquad \xi_0(t) \in \mathcal{A}(t).$$

2. Системы с гистерезисными функциями.

Важным для приложений классом нелинейностей являются нелинейности операторного типа, названные в [25] «гистерезисными функциями». Типичным представителем такой нелинейности является люфт, представленный на рис. 2. Поскольку точка с координатами $\sigma(t)$, $\varphi(t)$ может находиться в любой точке заштрихованной полосы, то можно считать, что люфт является многозначной функцией $\varphi(\sigma) = [\sigma, \sigma + \Delta]$. Однако при таком описании люфт не различим с «обратным гистерезисом» $\varphi = \frac{\Delta}{2} + \sigma + \frac{\Delta}{2}\operatorname{sign}\dot{\sigma}$, изображенным на рис. 3. Динамические свойства систем с нелинейностями, изображенными на рисунках 2 и 3, существенно различны. Поэтому необходимо было дать такое математическое описание нелинейностей, которое учитывало бы направление обхода петли гистерезиса. Такое описание было предложено В. А. Якубовичем [25, 26] и заключается в следующем.

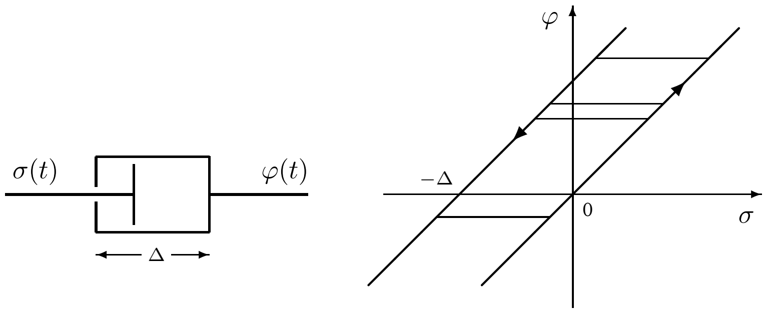

Рис. 2

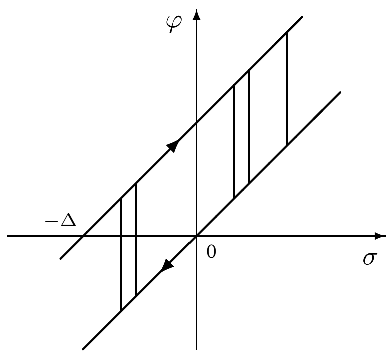

Рис. 3

Пусть $\mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_1)$ — множество непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $\sigma(t)$, удовлетворяющих условию $\sigma(t_0) = \sigma_0$. Предположим, что имеют место следующие соотношения.

1. Любому σ_0 поставлено в соответствие некоторое множество $\mathfrak{N}(\sigma_0)$ «начальных значений гистерезисной функции».
2. Для любых $t_1 > t_0$ и $\varphi_0 \in \mathfrak{N}(\sigma_0)$ указан оператор $\varphi[\cdot \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$, отображающий $\mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_1)$ в $\mathbb{C}[t_0, t_1]$.
3. Справедливы соотношения
$$\varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_{t_0} = \varphi_0, \qquad \varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t \in \mathfrak{N}(\sigma(t)),$$
где $\varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t$ — значение в точке $t \in [t_0, t_1]$ функции $\varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$.
4. Если
$$\sigma(t) = \sigma_1(t) \in \mathfrak{M}_{\sigma_0}(t_0, t_*) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*,$$
$$\sigma(t) = \sigma_2(t) \in \mathfrak{M}_{\sigma_*}(t_*, t_1) \quad \text{при} \quad t_* \leqslant t \leqslant t_1,$$
где $\sigma_* = \sigma_1(t_*)$, то
$$\varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t = \varphi[\sigma_1 \,\big|_{t_0}^{t_*}, \varphi_0]_t \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_*,$$
$$\varphi[\sigma \,\big|_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]_t = \varphi[\sigma_2 \,\big|_{t_*}^{t_1}, \varphi_*]_t \quad \text{при} \quad t_* \leqslant t \leqslant t_1,$$
где $\varphi_* = \varphi[\sigma_1 \,\big|_{t_0}^{t_*}, \varphi_0]_{t_*}$.

При выполнении этих условий семейство отображений $\varphi[\cdot\, |_{t_0}^{t_1}, \varphi_0]$ называется *непрерывной гистерезисной функцией.* Если все эти отображения непрерывны, то гистерезисная функция называется *сильно непрерывной*. Если в приведенном определении $\mathbb{C}[t_0, t_1]$ заменено на $L[t_0, t_1]$, то гистерезисная функция называется *релейно-гистерезисной.* Примером такой функции может служить релейная характеристика, изображенная на рис. 4.

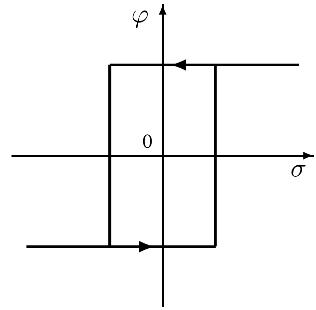

Рис. 4

В работах [3, 25–27] исследована абсолютная устойчивость систем с гистерезисными функциями. Развернутая теория систем с гистерезисными функциями, встречающимися не только в системах управления, но и в различных разделах механики, была развита в монографии [12].

3. Системы с импульсной модуляцией

В системах управления и связи используются импульсные модуляторы — устройства, которые преобразуют сигнал $\sigma(t)$ на входе в сигнал $\xi(t)$ на выходе, являющийся последовательностью импульсов. Импульсы бывают как мгновенные, описываемые δ-функциями, так и конечной длительности, описываемые кусочно-непрерывными функциями. Системы с мгновенными импульсами будут рассмотрены в следующем разделе. Здесь же мы остановимся на случае, когда $\xi(t)$ является кусочно-непрерывной функцией. При этом оператор $\mathcal{M}$, описывающий импульсный модулятор, преобразует заданную на $[t_0, +\infty)$ непрерывную функцию $\sigma(t)$ в последовательность $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, не имеющую конечных точек сгущения, и функцию $\xi(t)$, кусочно-непрерывную на каждом промежутке $[t_n, t_{n+1})$.

Простейшим примером может служить двухполярная широтно-импульсная модуляция [13] (рис. 5), при которой $t_n = nT$,

$$\xi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(nT) & \text{при} \quad nT \leqslant t < nT + \tau_n, \qquad \text{если} \quad \sigma(nT) \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad nT \leqslant t < (n+1)T, \qquad \text{если} \quad \sigma(nT) = 0, \\ 0 & \text{при} \quad nT + \tau_n \leqslant t < (n+1)T. \end{cases}$$

Ширина n-го импульса τ_n в случае широтно-импульсной модуляции первого рода (ШИМ-1) определяется формулой

$$\tau_n = F(|\sigma(nT)|). \tag{9}$$

При широтно-импульсной модуляции второго рода (ШИМ-2) τ_n является первым положительным корнем уравнения

$$\tau_n = F(|\sigma(nT + \tau_n)|), \tag{10}$$

если таковой имеется на интервале $(0, T)$. В противном случае $\tau_n = T$. В формулах (9), (10) функция F задана на $[0, +\infty)$, непрерывна, $F(0) = 0,\ 0 < F(\lambda) \leqslant T$ при $\lambda > 0$.

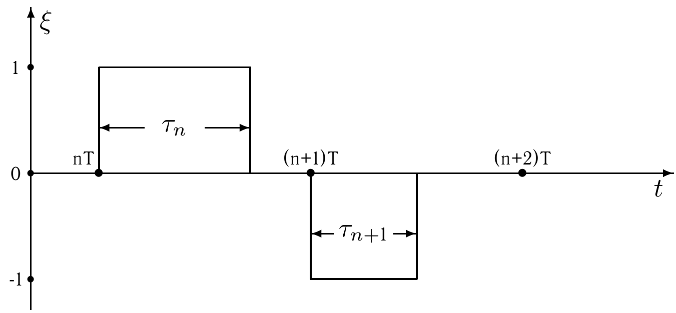

Рис. 5

Отметим, что если в случае ШИМ-1 оператор $\mathcal{M}$, действующий из $\mathbb{C}$ в L, непрерывен, то при ШИМ-2 он, вообще говоря, этим свойством не обладает. Последнее обстоятельство приводит иногда к тому, что при достижении параметром T некоторого бифуркационного значения периодическое решение исчезает. Модулируемыми параметрами, кроме ширины импульсов, могут являться амплитуда импульсов, их частота и фаза. Применяются и импульсы непрямоугольной формы [15].

Важной характеристикой оператора $\mathcal{M}$ является *эквивалентная нелинейность*, под которой понимается функция $\varphi(\sigma)$, обладающая следующим свойством: для каждого n существует такое $\widetilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1})$, что среднее значение n-го импульса

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t)\, dt$$

удовлетворяет соотношению

$$v_n = \varphi(\sigma(\widetilde{t}_n)).$$

Будем говорить, что оператор $\mathcal{M}$ принадлежит классу G, если выполнены следующие условия:

1. Оператор $\mathcal{M}$ физически реализуем. На неформальном языке это означает, что $\xi(t)$ зависит только от $\sigma(\tau)$ при $\tau \leqslant t$, t_n зависит только от $\sigma(\tau)$ при $\tau \leqslant t_n$.
2. На любом промежутке $[t_n, t_{n+1})$ функция $\xi(t)$ сохраняет знак.
3. При всех n справедлива оценка
$$\delta_0 T \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant T,$$
где T и δ_0 — положительные числа, т. е. частота импульсации ограничена сверху и снизу.
4. Для оператора $\mathcal{M}$ существует эквивалентная нелинейность.

Класс G описывает большинство из известных видов импульсной модуляции. На импульсные системы, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями с оператором $\mathcal{M}$ класса G, распространены многие результаты теории абсолютной устойчивости [8, 31] и колебательности непрерывных нелинейных систем (см. обзоры [9, 10, 32]).

4. Системы со скачками

В предыдущих разделах рассматривались системы, у которых правые части разрывны, но сами траектории непрерывны. Здесь речь пойдет о системах с разрывными траекториями, которые иногда называют дифференциальными уравнениями с импульсным воздействием. Эти системы описываются следующим образом.

Даны последовательность поверхностей в $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$

$$S_k : \quad t = \tau_k(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

обладающая свойствами

$$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x), \qquad \lim_{k\to\infty} \tau_k(x) = \infty,$$

система

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{11}$$

с непрерывной правой частью и последовательность непрерывных вектор-функций $b_k(x)$ $(k = 1, 2 \dots)$. Под решением системы с импульсным воздействием понимается вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая системе (11) при $t \neq \tau_k(x)$ и претерпевающая скачки $x(t + 0) - x(t - 0) = b(x(t - 0))$ в моменты $t = \tau_k(x(t - 0))$. При этом множество моментов времени встречи траектории с некоторой поверхностью S_k может быть как конечным, так и бесконечным. В работах [16, 30, 33, 37, 38] для систем с импульсным воздействием развиты основные разделы качественной теории: теоремы существования, единственности и продолжимости решения, теория локальной и глобальной устойчивости, включая системы сравнения и векторные функции Ляпунова и др.

Теория дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в правых частях рассматривалась в [11, 22]. Одним из простейших примеров таких систем может служить импульсная система автоматического регулирования с мгновенными импульсами и частотной модуляцией [13], описываемая уравнениями

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = c^* x, \tag{12}$$

$$\xi(t) = \sum_k \lambda_k \delta(t - t_k), \tag{13}$$

где A — постоянная $m \times m$-матрица, b и c — постоянные m-мерные столбцы, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака,

$$\lambda_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad |\sigma(t_k - 0)| \leqslant \Delta, \\ \operatorname{sign} \sigma(t_k - 0), & \text{если} \quad |\sigma(t_k - 0)| > \Delta \end{cases}$$

(Δ — величина нечувствительности импульсного модулятора), $t_{k+1} = t_k + T_k$,

$$T_k = F(|\sigma(t_k)|) \tag{14}$$

в случае частотно-импульсной модуляции первого рода. При частотно-импульсной модуляции второго рода T_k является первым положительным корнем уравнения

$$T_k = F(|\sigma(t_{k-1} + T_k)|). \tag{15}$$

В (14) и (15) функция F — положительная, непрерывная и монотонно убывающая на $[0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{\lambda \to \infty} F(\lambda) > 0$.

Другим примером является весьма распространенная амплитудная модуляция, при которой в (13) $t_n = nT$, $\lambda_n = a(\sigma(nT - 0))$. В этом случае система (12), (13) сводится к дискретной системе

$$x_{n+1} = e^{AT} x_n + e^{AT} b a(\sigma_n), \tag{16}$$

где $x_n = x(nT - 0)$, $\sigma_n = c^* x(nT - 0)$. Абсолютная устойчивость и колебания систем вида (12), (13) изучались в [6]. Аналогичные вопросы для системы (16) и других видов дискретных систем рассматривались в [24, 28, 29, 40].

Список литературы

1. *Айзерман М. А., Пятницкий Е. С.* Основы теории разрывных систем // АиТ. — 1974. — № 7. — С. 33–37; 1974. — № 8. — С. 39–61.
2. *Андронов А. А., Майер А. Г.* Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования // Известия АН СССР. Сер. техн. наук. — 1955. — № 3. — С. 3–32; 1955. — № 6. — С. 54–71.
3. *Барабанов Н. Е., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 5–11.
4. *Болтянский Б. Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука. 1969.
5. *Викторовский Е. Е.* Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений // Матем. сб. — 1954. — Т. 34(76). — С. 213–248.

6. *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. — Л.: Изд-во ЛГУ. 1982.
7. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука. 1978. — 400с.
8. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1993.
9. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Динамика систем с импульсной модуляцией // Нелинейная теория управления и ее приложения. Динамика, управление, стабилизация / Под ред. В. М. Матросова, С. Н. Васильева, А. И. Москаленко. — М. : Физматлит. 2003. — С. 313–339.
10. *Гелиг А. Х., Чурилов А. Н.* Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // АиТ. — 2006. — № 10. [1)]
11. *Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991. — 255 с.
12. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983. — 271 с.
13. *Кунцевич В. М., Чеховой Ю. Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. — Киев: Техника, 1970.
14. *Матросов В. М.* О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями // Диф. уравн. — 1967. — Т. 3. — № 3. — С. 395–409; № 5. — С. 869–878.
15. *Морговский Ю. Я.* Импульсные системы управляемой структуры с тиристорными преобразователями. — М.: Энергия. 1976.
16. *Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Высшая школа. 1987.
17. *Понтрягин Л. С., Болтянский Б. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Р.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз. 1961.
18. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296с.
19. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. — 1960. — Т. 51(93). — № 1. — С. 93–128.
20. *Филиппов А. Ф.* О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Матем. заметки. — 1971. — Т. 10. — № 3.
21. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 223с.
22. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 312 с.
23. *Хейфец М. З., Гелиг А. Х.* Об одном виде нечувствительности систем регулирования // Энергомашиностроение. — 1964. — № 1.
24. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. — М.: Наука, 1973.
25. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисными нелинейностями // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 2. — С. 288–291.

[1)] См. также настоящий сборник, с. 155.

26. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость систем с гистерезисными нелинейностями // АиТ. — 1965. — № 5. — С. 753–768.
27. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. // АиТ. — 1967. — № 6. — С. 5–30.
28. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными и линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1967. — № 9. — С. 59–72.
29. *Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными и линейными нестационарными блоками // АиТ. — 1968. — № 2. — С. 81–101.
30. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with Impulse Effect: Stability, Theory and Applications. — New York: Halsted Press, 1989.
31. *Gelig A. Kh., Churilov A. N.* Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. — Boston: Birkhäuser, 1998.
32. *Gelig A. Kh., Churilov A. N.* Stability and oscillations in pulse-modulated systems: a review of mathematical approaches // Functional Differential Equations. — 1996. — V. 3, № 3–4. — P. 287–320.
33. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1989.
34. *Marchaud A.* Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1934. — V.199. — 1278–1280.
35. *Marchaud A.* Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales // Compositio Math. — 1936. — V.3. — P. 89–127.
36. *Rosenthal A.* Über die Existence der Lősungen von Systemen gewőhnlicher Differentialgleichungen // Sitzungsber. Heidelberger Acad. Math.-naturw. Klasse. 19. Abhandl. — 1929. — S. 3–10.
37. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1995.
38. *Tao Yang.* Impulsive Control Theory // Lecture Notes in Control and Information Sciences. — Berlin: Springer-Verlag, 2001. — V. 272.
39. *Wazewski T.* Sur une condition èquvalente à l'èquatione au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci, Ser. Sci. Math., Astronom., Phys. — 1961. — V.9. — P. 865–867.
40. *Yakubovich V. A.* Absolute stability of nonlinear discrete systems // Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées. — 1994. — V. 39, № 4. — P. 385–389.
41. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A. Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. — Singapore: World Scientific, 2004. — 234 p.
42. *Zaremba S. Ch.* Sur une extension de la notion d'equation differentielle // C.R. Acad. Sci. Paris. — 1934. — V. 199. — 545–548.
43. *Zaremba S. Ch.* Sur les equations au paratingent // Bull. Sci. Math. Ser. II. — 1936. — V. 60, № 5. — P. 139–160.

Д. В. Ефимов[†], *А. Л. Фрадков*[†]

Условия колебательности по Якубовичу для нелинейных систем[*]

Аннотация: в работе рассмотрено свойство колебательности по Якубовичу. Уточняются известные результаты и формулируются необходимые и достаточные условия равномерной колебательности по Якубовичу для нелинейных систем. Приводятся оценки области колебаний для нелинейных динамических систем со статической нелинейностью в цепи обратной связи.

1. Введение

Понятие колебания как процесса, обладающего той или иной степенью повторяемости, претерпело со временем значительные изменения. На рубеже XIX–XX веков выяснилось, что линейных моделей колебаний недостаточно для описания новых явлений и процессов в физике и технике. Потребовалось развитие соответствующего математического аппарата — теории нелинейных колебаний, основы которого были заложены в работах А. Пуанкаре, Б. Ван дер Поля, А. А. Андронова, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, [1, 2, 9]. Важнейшим в теории нелинейных колебаний является понятие устойчивого предельного цикла — периодической траектории, к которой сходятся все другие траектории (по крайней мере, траектории с близкими начальными условиями).

В прикладных задачах, однако, периодичность часто оказывается слишком сильным требованием и возникает необходимость в разработке удобной для практики теории непериодических колебаний. Этапами развития такой теории явились теория почти-периодических функций Х.Бора и теория рекуррентных функций Дж. Биркгофа и А. Пуанкаре. Еще более широкое определение колебательности было предложено В. В. Немыцким в 1963 г. [11]. Однако эффективных критериев существования колебаний в смысле Немыцкого до сих пор получено не было [9].

Удобный и практически полезный подход к изучению сложных колебательных режимов основан на понятии колебательности (автоколебательности), введенном в 1973 г. В. А. Якубовичем [15]. В рамках этого подхода получены частотные условия колебательности для класса так называемых систем Лурье, состоящих из номинальной линейной

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет. Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург.

[*]) Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00869. Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. матем., мех., астр.». — 2006. — № 4. — С. 28–40.

части и нелинейности в цепи обратной связи [3, 9, 12, 15, 16]. Для исследования системы использовались функции Ляпунова на основе квадратичной формы переменных состояния линейной части системы. Полученные критерии колебательности были распространены на импульсные системы [4, 5], системы с неограниченными решениями [3]. Среди применений можно отметить задачи анализа колебаний в системах регулирования [16], фазовых системах [3, 9], хаотических системах [19]. Хотя в первых работах свойство колебательности понималось как нежелательная альтернатива устойчивости, в дальнейшем область применений расширилась. Например, развитый аппарат был применен В.А.Якубовичем к интересной задаче Смейла: исследованию возможности возникновения колебаний при соединении нескольких неколебательных (асимптотически устойчивых) систем (клеток) [12, 13, 21].

При изучении многих физических и механических процессов более естественной является декомпозиция системы не на линейную и нелинейную части, а на две или несколько нелинейных частей. При этом функции Ляпунова при исследовании систем строятся на основе функций энергии подсистем, которые, вообще говоря не являются квадратичными. Условия колебательности и методы синтеза колебательных режимов для такого класса систем были предложены в работах [6, 7, 17]; в настоящей работе усиливаются некоторые результаты этих работ [6, 7, 17].

2. Колебательность по Якубовичу

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ — вектор состояния; $\mathbf{f}$ — непрерывная и локально липшицевая вектор-функция. Для начальных условий $\mathbf{x}_0 \in R^n$ пусть $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ — единственное максимальное решение системы (1), определенное на интервале $[0, T)$. Если для всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ выполнено $T = +\infty$, то говорят, что система (1) наделена свойством продолжимости решений.

Напомним, что непрерывная функция $\sigma : R_+ \to R_+$ принадлежит классу K, если она строго возрастает и $\sigma(0) = 0$; она принадлежит классу K_∞, если она принадлежит классу K и радиально неограничена; говорят, что непрерывная функция $\beta : R_+ \times R_+ \to R_+$ принадлежит классу KL, если она принадлежит классу K по первому аргументу для любого фиксированного значения второго и строго убывает до нуля для возрастающего второго аргумента при любом фиксированном значении первого.

Определение 1. Для $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha < \beta$ функция $\psi : R \to R$ называется (α, β)-*колебательной* при $t \to +\infty$, если $\psi(t)$ ограничена и выполнены следующие соотношения:

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \psi(t) \geqslant \beta, \quad \varliminf_{t \to +\infty} \psi(t) \leqslant \alpha.$$

Функция $\psi : R \to R$ называется *колебательной по Якубовичу* для $t \to \to +\infty$, если существуют некоторые константы α и β такие, что $\psi(t)$ является (α, β)-колебательной при $t \to +\infty$.

Система (1) называется *колебательной по Якубовичу по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$, если для почти всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы ограничены и для почти всех начальных условий выполнено

$$\varliminf_{t \to +\infty} \psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) < \varlimsup_{t \to +\infty} \psi(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)). \tag{2}$$

Для векторной функции выхода ψ система (1) называется колебательной, если колебательным является хотя бы один компонент вектора выхода. Аналогичным образом вводится колебательность при $t \to -\infty$. Выполнение свойства (2) требуется для почти всех решений, поскольку в прикладных задачах возможно наличие исключительного множества начальных условий нулевой меры, для которых соответствующее решение системы (1) не будет колебательным.

Отметим, что в первоначальных формулировках [12, 15] вместо условия ограниченности траекторий требовалась диссипативность системы (существование ограниченного множества, в которое сходятся все траектории системы). Следующее утверждение является вариантом «простейших критериев колебательности» [12, 15], возникающим при замене диссипативности по Левинсону на ограниченность. Оно доказывается аналогично [15].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\varphi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ (*здесь* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — *матрицы соответствующих размерностей*, $\varphi : R^p \to R^m$ — *непрерывно дифференцируемая функция*) *и все решения системы* (1) *ограничены. Пусть все матрицы* $\mathbf{Q}_j = \mathbf{A} + \mathbf{B}\frac{\partial \varphi(\mathbf{C}\overline{\mathbf{x}}_j)}{\partial y}\mathbf{C}$, *где* $\overline{\mathbf{x}}_j$ — *решения уравнения* $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\varphi(\mathbf{C}\overline{\mathbf{x}}) = 0$, *имеют хотя бы одно собственное число с положительной вещественной частью и не имеют чисто мнимых собственных чисел. Тогда система является колебательной по Якубовичу. Если все собственные числа матриц* $\mathbf{Q}_j$ *имеют положительные вещественные части, то множество начальных условий* R, *для которых решения не являются колебаниями по выходу* $\mathbf{y}$ *при* $t \to +\infty$, *имеет вид* $R = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}_j\}$.

Свойство колебательности по Якубовичу для системы (1) означает, что вспомогательный выход $\psi = \eta(\mathbf{x})$ ограничен, но не стремится ни к какому постоянному значению. Например, для систем Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2\,; \\ &\dot{x}_2 = \varepsilon(1 - x_1^2)\,x_2 - x_1, \quad \varepsilon > 0\,, \end{aligned}$$

или Лоренца

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \sigma > 0\,; \\ &\dot{x}_2 = r\,x_1 - x_2 - x_1 x_3\,, \quad r > 0\,; \\ &\dot{x}_3 = -b\,x_3 + x_1 x_2, \quad b > 0\,, \end{aligned}$$

в качестве $\eta(\mathbf{x})$ можно выбрать любую из координат вектора состояния x_i ($i = 1, 2$ для системы Ван-дер-Поля и $i = 1, 2, 3$ для системы Лоренца). В этом случае почти для всех начальных условий (за исключением единственного положения равновесия этих систем) решения стремятся либо к предельному циклу, либо к странному аттрактору. Для системы Ван-дер-Поля константы α и β будут соответствовать размаху предельного цикла по координате x_i, а для системы Лоренца эти константы будут определять геометрический размер странного аттрактора.

Для маятника без трения

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2\,; \\ &\dot{x}_2 = -\omega^2 \sin(x_1)\,, \ \omega \in R\,, \end{aligned}$$

любая из координат также может быть выбрана в качестве колебательного выхода при следующем ограничении на множество начальных условий:

$$H(x_1(0), x_2(0)) \leqslant 2\,\omega^2,$$

где $H(x_1, x_2) = 0.5\,x_2^2 + \omega^2(1 - \cos(x_1))$ — функция энергии (гамильтониан) этой системы. Данное ограничение охватывает множество положений равновесия, задаваемое уравнениями $H(x_1(0), x_2(0)) = 0$, $H(x_1(0), x_2(0)) = 2\,\omega^2$ и имеющее нулевую лебегову меру, начинающиеся в котором решения не являются колебательными. Для $H(x_1(0), x_2(0)) > 2\,\omega^2$ решения этой системы являются неограниченными и, следовательно, система не удовлетворяет требованиям определения 1.

Отметим, что в теореме есть ограничительные условия. В частности, требование неустойчивости положений равновесия не позволяет применить теорему 1 к системам с особыми точками типа «центр», например, к классическому осциллятору Дуффинга $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 - x_1^3$, имеющему три равновесия, для двух из которых матрица Якоби имеет чисто мнимые собственные числа.

3. Условия колебательности для нелинейных систем общего вида

Результаты, предложенные в работах [9, 15, 16] и ряде других позволяют получить частотные условия колебательности для класса систем Лурье, состоящих из номинальной линейной части и нелинейной обратной связи по выходу. Однако при изучении многих физических и механических процессов возникает необходимость анализа систем, допускающих декомпозицию на две нелинейные части (например, механические системы с функцией энергии, выполняющей роль функции Ляпунова одной из подсистем). Требование существования единого колебательного выхода для всех начальных условий также сужает возможность данного подхода для анализа колебаний в сложных нелинейных системах. Представляет интерес развитие методов анализа и синтеза колебаний на такой класс систем. Один из вариантов такого развития [6, 7, 17] представлен ниже.

Определение 2. *Решение* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, 0)$ с $\mathbf{x}_0 \in R^n$ системы (1) называется $[\pi^-, \pi^+]$*-колебанием по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$, где $\eta : R^n \to R$ — непрерывная функция, если решение определено для всех $t \geqslant 0$ и выполнено условие $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \psi(t) = \pi^-$; $\overline{\lim}_{t\to+\infty} \psi(t) = \pi^+$; $-\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty$. *Решение* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ для $\mathbf{x}_0 \in R^n$ системы (1) называется *колебательным*, если для него существует выход ψ такой, что это *решение* является $[\pi^-, \pi^+]$*-колебанием по выходу* ψ для некоторых $-\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty$. *Система* (1) называется *колебательной*, если для почти всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ решения системы $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ — колебательные. *Система* (1) $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, $t \geqslant 0$, называется *равномерно колебательной*, если существуют непрерывная функция $\eta : R^n \to R$ и константы $-\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty$ такие, что для почти всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ являются $[\pi^-, \pi^+]$-колебаниями по выходу $\psi = \eta(\mathbf{x})$.

Отметим, что константы π^- и π^+ являются точными минимальным и максимальным значениями выхода $\psi(t)$ в асимптотике. Следовательно, для вычисления этих величин необходимы точные оценки на решения системы, получение которых затруднительно для системы общего вида. Однако информации о границах величин π^- и π^+ достаточно для получения оценок на амплитуду колебаний в системе. Отметим также, что для равномерно колебательных систем величины π^- и π^+ не зависят от начальных условий.

Как и в случае определения 1, для систем Ван-дер-Поля и Лоренца в качестве колебательного по определению 2 выхода $\psi = \eta(\mathbf{x})$ можно выбрать любую координату вектора состояний. Для маятника координата x_2 будет являться колебательным выходом системы для почти всех начальных условий. Действительно, при ограничении $H(x_1(0), x_2(0)) \leqslant 2\omega^2$, как и ранее, координаты x_1 и x_2 являются колебательными выходами системы. При $H(x_1(0), x_2(0)) > 2\omega^2$ неограниченно возрастает только координата x_1, а координата x_2 удовлетворяет всем условиям колебательности. Кроме того, системы Лоренца и Ван-дер-Поля являются равномерно колебательными в смысле определения 2, а маятник — просто колебательной. Действительно, для первых двух систем для всех начальных условий любая из координат вектора состояния будет являться колебательным выходом системы с общими верхним и нижним пределами, не зависящими от начальных условий. Для маятника координата x_2 также является общим выходом для всех начальных условий, но значения констант π^- и π^+ по этому выходу зависят от начальных условий.

Условия существования колебаний в системе (1) сформулированы в следующей теореме, уточняющей результат [7].

Теорема 2. *Пусть существуют две непрерывные и локально липшицевые функции Ляпунова* $V_1 : R^{n+1} \to R_+$, $V_2 : R^{n+1} \to R_+$, *удовлетворяющие для всех* $\mathbf{x} \in R^n$, $t \in R_+$ *неравенствам*

$$\upsilon_1(|\mathbf{x}|) \leqslant V_1(\mathbf{x}, t) \leqslant \upsilon_2(|\mathbf{x}|), \ \upsilon_3(|\mathbf{x}|) \leqslant V_2(\mathbf{x}, t) \leqslant \upsilon_4(|\mathbf{x}|),$$
$$\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4 \in K_\infty;$$
$$\partial V_1/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_1(\mathbf{x}, t) > 0 \quad \text{для} \quad 0 < |\mathbf{x}| < X_1, \quad \mathbf{x} \notin \Xi, t \geqslant 0;$$
$$\partial V_2/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_2(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \text{для} \quad |\mathbf{x}| > X_2, \quad \mathbf{x} \notin \Xi,$$
$$X_1 < \upsilon_1^{-1} \circ \upsilon_2 \circ \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2) \ t \geqslant 0,$$

где $\Xi \subset R^n$ *— некоторое множество нулевой меры, не содержащее целых траекторий системы. Если множество*

$$\Omega = \{\mathbf{x} : \ \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1) < |\mathbf{x}| < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2)\}$$

не содержит положений равновесия системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, *область притяжения которых имеет положительную меру, то система* (1) *является колебательной.*

Подчеркнем, что для непрерывных и локально липшицевых функций V_1 и V_2 соответствующие производные определены почти всех $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 2. Ограничимся при анализе свойств системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ множеством начальных значений вектора состояния, не содержащим положения равновесия системы (которые образуют множество Ξ). Тогда согласно условиям теоремы решения системы определены как минимум локально и из условия $\dot{V}_2 < 0$ для $|\mathbf{x}| > X_2$ следует глобальная ограниченность решений системы (определенных в этом случае для всех $t \geqslant 0$). В силу ограниченности траектории $\mathbf{x}(t)$, $t \geqslant 0$, для нее существует непустое компактное и замкнутое ω-предельное множество, содержащееся в множестве Ω. Действительно, функция $V_2(t)$ асимптотически удовлетворяет неравенству $V_2(t) < \upsilon_4(X_2)$ при $|\mathbf{x}(t)| < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2)$. Используя аналогичные рассуждения, можно показать что функция $V_1(t)$ ограничена сверху и ее значения удовлетворяют оценке $V_1(t) > \upsilon_1(X_1)$, откуда $|\mathbf{x}(t)| > \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1)$. По предположению множество Ω не содержит положений равновесия замкнутой системы с областью притяжения, имеющей ненулевую меру. Следовательно, ω-предельное множество траектории $\mathbf{x}(t)$ также не включает в себя таких инвариантных подмножеств. Тогда существует индекс i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что решение является $[\pi^-, \pi^+]$-колебанием по выходу $\psi = |x_i|$ для $\upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1) < \pi^- < \pi^+ < \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2)$. Предположим, что не существует такого выхода. Это означает, что для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ для $\psi = |x_i|$ выполнено равенство $\pi^- = \pi^+$. Однако подобное может быть выполнено только для положений равновесия, которые по предположению исключены из множества Ω, что является противоречием. Следовательно, для почти всех начальных условий существует колебательный выход, что по определению 2 означает колебательность системы (1). Теорема доказана. □

Как и в работе [16], можно использовать функцию Ляпунова линеаризованной в окрестности начала координат системы в качестве функции V_1 для определения свойства локальной неустойчивости системы в нуле. Далее, требование существования функции Ляпунова V_2 может быть сведено к свойству ограниченности решений системы $\mathbf{x}(t)$ с известной верхней границей, которая может быть оценена с использованием других подходов, не касающихся анализа свойств производной по времени функций Ляпунова. В этом случае утверждение теоремы 2 может быть приближено к результату теоремы 1. Дополнительно, условиям теоремы 2 удовлетворяют такие системы, как осциллятор Дуффинга. Действительно, решения системы ограничены, ее линеаризация в начале координат имеет собственное число с положительной вещественной частью, а два других положения равновесия не имеют областей притяжения, т. е. система колебательна по Якубовичу в смысле определения 2.

В теореме 2 формулируются достаточные условия колебательности системы (1). Оказывается, что для равномерно колебательной системы эти условия являются также и необходимыми.

Теорема 3. *Пусть система* (1) *является равномерно колебательной по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$, *где* $\eta : R^n \to R$ — *монотонная по всем аргументам непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам*

$$\chi_1(|\mathbf{x}|) \leqslant \eta(\mathbf{x}) \leqslant \chi_2(|\mathbf{x}|), \quad \chi_1, \chi_2 \in K_\infty,$$

а множество начальных условий, для которых система не колебательная, $\Xi = \{0\}$. *Тогда существуют две непрерывные и локально липшицевые функции Ляпунова* $V_1 : R^{n+1} \to R_+$ *и* $V_2 : R^{n+1} \to R_+$, *для всех* $\mathbf{x} \in R^n$ *и* $t \in R_+$ *удовлетворяющие неравенствам*:

$$v_1(|\mathbf{x}|) \leqslant V_1(\mathbf{x}, t) \leqslant v_2(|\mathbf{x}|), \quad v_3(|\mathbf{x}|) \leqslant V_2(\mathbf{x}, t) \leqslant v_4(|\mathbf{x}|),$$
$$v_1, v_2, v_3, v_4 \in K_\infty;$$

$$\partial V_1/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},0)} V_1(\mathbf{x}, t) > 0 \quad \text{для} \quad 0 < |\mathbf{x}| < \chi_2^{-1}(\pi^-);$$

$$\partial V_2/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x},0)} V_2(\mathbf{x}, t) < 0 \quad \text{для} \quad |\mathbf{x}| > \chi_1^{-1}(\pi^+).$$

Доказательство основано на применении следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть существует константа* $r > 0$ *такая, что для решений системы* (1) *выполнено свойство*:

$$0 < |\mathbf{x}_0| < r \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| > r, \ t \geqslant T_{\mathbf{x}_0}, \ 0 < T_{\mathbf{x}_0} < +\infty.$$

Тогда существует функция $V_1(\mathbf{x}, t)$, *непрерывная и локально липшицевая по первому аргументу и непрерывно дифференцируемая* *по второму аргументу, такая, что для всех* $\mathbf{x} \in R^n$, $t \geqslant 0$,

$$v_1(|\mathbf{x}|) \leqslant V_1(\mathbf{x}, t) \leqslant v_2(|\mathbf{x}|), \quad v_1, v_2 \in K_\infty,$$

и для всех $t \geqslant 0$, $0 < |\mathbf{x}| < r$ *выполнено*

$$\partial V_1/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_1(\mathbf{x}, t) > 0.$$

По условиям леммы 1 для всех начальных условий $\mathbf{x}_0$, удовлетворяющих ограничению $0 < |\mathbf{x}_0| < r$, решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ системы (1) локально неустойчивы. В этом случае, согласно результату леммы, у системы (1) необходимо существует функция Ляпунова с положительно определенной полной производной по времени.

Доказательство леммы 1. Для $|\mathbf{x}_0| < r$ введем в рассмотрение следующую функцию:

$$v(\mathbf{x}_0) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant T_{\mathbf{x}_0}} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)|.$$

По условиям леммы будет выполнено $v(0) = 0$ и $v(\mathbf{x}) > 0$ при $0 < |\mathbf{x}| < r$. Кроме того, для $0 < |\mathbf{x}| < r$ верно неравенство $|v(0) - v(\mathbf{x})| \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}| = |0 - \mathbf{x}|$, означающее непрерывность функции v в нуле. Для функции v на множестве $|\mathbf{x}| < r$ также верно соотношение

$$\delta(|\mathbf{x}|) \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|,$$

где $\delta(s) = s(1+s)^{-1} \inf\limits_{|\mathbf{x}| \geqslant s} v(\mathbf{x})$ — непрерывная и строго возрастающая функция, $\delta(0) = 0$. Отметим, что по построению

$$v(\mathbf{x}_0) = \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)|, \quad T \geqslant T_{\mathbf{x}_0}.$$

Тогда свойство локальной липшицевости функции v на множестве $0 < |\mathbf{x}| < r$ следует из выполнения следующих неравенств для любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ из этого множества и некоторых $L > 0$, $M > 0$, $T = \max\{T_{\mathbf{x}_1}, T_{\mathbf{x}_2}\}$:

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \leqslant M|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \qquad \Big| |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big| \leqslant L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|,$$
$$t \leqslant T;$$

$$\Big| \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Big| |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big|;$$

$$|v(\mathbf{x}_1) - v(\mathbf{x}_2)| = \Big| \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \Big| |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big| \leqslant L\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|.$$

Для $|\mathbf{x}| \geqslant r$ доопределим функцию v так, чтобы для всех $\mathbf{x} \in R^n$ функция $v : R^n \to R_+$ была непрерывна и локально липшицева и для всех $\mathbf{x} \in R^n$ удовлетворяла неравенствам

$$\widetilde{v}_1(|\mathbf{x}|) \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant \widetilde{v}_2(|\mathbf{x}|),$$

где $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2 \in K_\infty$ и $\widetilde{v}_1(s) \leqslant \delta(s)$, $s \leqslant \widetilde{v}_2(s)$ для $s < r$. По построению для начальных условий $|\mathbf{x}_0| < r$ выполнено

$$v(t) = v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \geqslant v(\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0)) = v(0),$$

тогда $D\,v(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для $|\mathbf{x}| < r$. Выберем $V_1(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x})\,k(t)$, где $k : R_+ \to R_+$ — непрерывно дифференцируемая функция со следующими свойствами для всех :

$$\varkappa_1 \leqslant k(t) \leqslant \varkappa_2, \quad 0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < +\infty; \quad dk/dt > 0.$$

Например, в качестве функции $k(t)$ можно выбрать следующую:

$$k(t) = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 t}{1 + t}, \quad \dot{k}(t) = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{(1 + t)^2}.$$

Тогда для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $t \geqslant 0$ выполнено

$$v_1(|\mathbf{x}|) \leqslant V_1(\mathbf{x}, t) \leqslant v_2(|\mathbf{x}|), \quad v_1(s) = \varkappa_1 \widetilde{v}_1(s), \quad v_2(s) = \varkappa_2 \widetilde{v}_2(s);$$

$$\partial V_1/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_1(\mathbf{x}, t) > 0 \text{ для } 0 < |\mathbf{x}| < r,\ t \geqslant 0. \qquad \square$$

Лемма 2. *Пусть существуют константы* $R > 0$, $T_{R,\mathbf{x}_0} > 0$ *такие, что для решений системы* (1) *выполнено*

$$|\mathbf{x}_0| > R \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)| < R \quad \textit{при} \quad t \geqslant T_{R,\mathbf{x}_0}.$$

Тогда существует функция $V_2(\mathbf{x}, t)$ — непрерывная и локально липшицевая по первому аргументу и непрерывно дифференцируемая по второму аргументу, такая, что для всех $\mathbf{x} \in R^n$, $t \geqslant 0$,

$$v_3(|\mathbf{x}|) \leqslant V_2(\mathbf{x}, t) \leqslant v_4(|\mathbf{x}|), \quad v_3, v_4 \in K_\infty,$$

и для всех $t \geqslant 0, |\mathbf{x}| > R$ выполнено

$$\partial V_2/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_2(\mathbf{x}, t) < 0.$$

По условию леммы 2 множество $A = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < R\}$ — глобально притягивающее и инвариантное для решений системы (1) при нулевом входе.

Доказательство леммы 2. Для $|\mathbf{x}_0| > R$ введем в рассмотрение следующую функцию

$$v(\mathbf{x}_0) = \sup_{t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)|.$$

По условию леммы будет выполнено $v(\mathbf{x}) > R$ при $|\mathbf{x}| > R$. Кроме того, в силу непрерывности решений системы (1) по начальным условиям для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для

$t_{\max} = \max\{ T_{R,\mathbf{x}_1}, T_{R,\mathbf{x}_2} \}$ справедливо соотношение $\mathbf{x}_1 \in R^n$, $\mathbf{x}_2 \in R^n$, $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leqslant \delta \;\Rightarrow |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \leqslant \varepsilon$, $t \leqslant t_{\max}$.

Очевидно, что $\sup\limits_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_i)| = \sup\limits_{t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_i)|$, $i = 1, 2$. Тогда для любых таких начальных условий $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leqslant \delta$, $|\mathbf{x}_1| > R$, $|\mathbf{x}_2| > R$ выполнено

$$|v(\mathbf{x}_1) - v(\mathbf{x}_2)| = \left| \sup_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - \sup_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \right| \leqslant 2\,\varepsilon,$$

что означает непрерывность функции v для $|\mathbf{x}| > R$. На множестве $|\mathbf{x}| > R$ для функции v также верно соотношение

$$|\mathbf{x}| \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant \delta(|\mathbf{x}|),$$

где $\delta(s) = s + \sup\limits_{|\mathbf{x}| \leqslant s} v(\mathbf{x})$ — непрерывная и строго возрастающая функция. Свойство локальной липшицевости функции v на множестве $|\mathbf{x}| > R$ следует из выполнения следующих неравенств для любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ из этого множества и некоторого $L > 0$:

$$\Big| |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \Big| \leqslant L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, \quad t \leqslant t_{\max},$$

$$|v(\mathbf{x}_1) - v(\mathbf{x}_2)| = \left| \sup_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - \sup_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sup_{t_{\max} \geqslant t \geqslant 0} \{ |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_1)| - |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2)| \} \right| \leqslant L\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|\,.$$

Для $|\mathbf{x}| \leqslant R$ доопределим функцию v так, чтобы для всех $\mathbf{x} \in R^n$ функция $v : R^n \to R_+$ была непрерывна и локально липшицева и для всех $\mathbf{x} \in R^n$ удовлетворяла неравенствам

$$\widetilde{v}_3(|\mathbf{x}|) \leqslant v(\mathbf{x}) \leqslant \widetilde{v}_4(|\mathbf{x}|),$$

где $\widetilde{v}_3, \widetilde{v}_4 \in K_\infty$ и $s \leqslant \widetilde{v}_3(s)$, $\widetilde{v}_4(s) \leqslant \delta(s)$ для $s > R$. По построению для начальных условий $|\mathbf{x}_0| > R$ выполнено

$$v(t) = v(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \leqslant v(\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0)) = v(0).$$

Следовательно, $D\,v(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для $|\mathbf{x}| > R$. Выберем $V_2(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{x})\,k(t)$, где $k : R_+ \to R_+$ — непрерывно дифференцируемая функция со следующими свойствами:

$$\varkappa_3 \leqslant k(t) \leqslant \varkappa_4, \quad 0 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < +\infty; \quad \partial k/\partial t < 0.$$

Например, в качестве функции $k(t)$ можно выбрать $k(t) = \varkappa_3 + (\varkappa_4 - \varkappa_3)\,e^{-t}$, $\dot{k}(t) = (\varkappa_3 - \varkappa_4)\,e^{-t}$. Тогда для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $t \geqslant 0$ выполнено

$$v_3(|\mathbf{x}|) \leqslant V_2(\mathbf{x}, t) \leqslant v_4(|\mathbf{x}|), \quad v_3(s) = \varkappa_3 \widetilde{v}_3(s), \quad v_4(s) = \varkappa_4 \widetilde{v}_4(s);$$

$\partial V_2/\partial t + L_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} V_2(\mathbf{x}, t) < 0$ для $|\mathbf{x}| > R$, $t \geqslant 0$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Равномерная колебательность системы (1) по выходу $\psi = \eta(\mathbf{x})$ означает, что почти для всех начальных условий существуют такие константы $-\infty < \pi^- < \pi^+ < +\infty$, что

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} \eta(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \underline{\lim}_{t \to +\infty} \psi(t) = \pi^-;$$
$$\overline{\lim}_{t \to +\infty} \eta(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = \overline{\lim}_{t \to +\infty} \psi(t) = \pi^+.$$

В силу свойств функции η это означает, что все регулярные решения системы стремятся в область $\Omega = \{\mathbf{x} : \chi_2^{-1}(\pi^-) \leqslant \mathbf{x} \leqslant \chi_1^{-1}(\pi^+)\}$. Тогда существуют постоянные $X_1 < \chi_2^{-1}(\pi^-)$ и $X_2 > \chi_1^{-1}(\pi^+)$ такие, что выполнены условия лемм 1 и 2 для $r = X_1$ и $R = X_2$, откуда следует существование функций Ляпунова V_1 и V_2.

Для равномерно колебательных систем с единственным положением равновесия в начале координат теоремы 2 и 3 дают необходимые и достаточные условия колебательности. Как уже отмечалось, примерами равномерно колебательных систем с единственным положением равновесия служат системы Ван-дер-Поля и Лоренца. Продемонстрируем на этих примерах применимость предложенного подхода.

4. Примеры

1. Рассмотрим систему Ван-дер-Поля. Согласно теореме 2 для проверки этой системы на наличие свойства колебательности необходимо построить две функции Ляпунова, позволяющие установить локальную неустойчивость и глобальную ограниченность решений системы. Так как данная система имеет только одно положение равновесия в начале координат, то множество Ω не будет содержать данное положение равновесия. Проанализируем свойства следующих функций Ляпунова:

$$V_1(\mathbf{x}) = 0.5\left(x_1^2 + x_2^2\right); \quad V_2(\mathbf{x}) = 0.5\left(\varepsilon^{-1}x_2 - 2x_1 + 1/3x_1^3\right)^2 + 1/12x_1^4,$$

чьи полные производные по времени, взятые в силу уравнений системы, имеют вид

$$\dot V_1 = \varepsilon x_2^2 - \varepsilon x_2^2 x_1^2;$$
$$\dot V_2 = -\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{\varepsilon}}\right]^2 - \frac{x_1^4}{3\varepsilon} + \left[\frac{\varepsilon}{4}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{2}{\varepsilon}\right]x_1^2.$$

Функция $\dot V_1$ является строго положительной для всех $0 < |x_1| < 1$ и $x_2 \neq 0$, однако подмногообразие $x_2 = 0$ не содержит инвариантных решений системы вне положения равновесия в начале координат, следовательно, $\dot V_1(t) > 0$ для почти всех $t \geqslant 0$, таких, что $0 < |x_1(t)| < 1$ и $|\mathbf{x}| < X_1 \quad \Rightarrow \quad \dot V_1 \geqslant 0$, где $X_1 = 1$. Отметим, что схожие выводы были получены в [20] для $X_1 = \sqrt{3}$. Локальная неустойчивость также может быть обоснована с использованием свойств линеаризованной системы, чьи собственные числа всегда имеют положительную вещественную часть для $\varepsilon > 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}.$$

Исследуя функцию $\dot{V}_2$, можно получить неравенство

$$X_2 \leqslant \sqrt{3\left[\frac{\varepsilon^2}{4}\left(2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 + 2\right]}.$$

В этом примере функции $v_1(s) = v_2(s) = 0.5\,s^2$, функции $v_3(s)$ и $v_4(s)$ могут быть построены численно для данного значения ε. Отметим, что функция Ляпунова, аналогичная V_2, для доказательства ограниченности решений уравнения Ван дер Поля была предложена также в [8], где, однако, она не является гладкой.

2. Рассмотрим модель системы Лоренца, где параметры $\sigma = 10$, $r = 97$ и $b = 8/3$. Известно что у выбранной модели при заданных значениях параметров наблюдается хаотический режим движения. Проверим условия теоремы для этой системы. С этой целью отметим, что матрица линеаризованной в начале координат системы

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

имеет при выбранных значениях параметров одно собственное число с положительной вещественной частью. Следовательно, система локально неустойчива. Оценивая полную производную по времени от функции

$$V(x, y, z) = 0.5\left(\sigma^{-1}x^2 + y^2 + (z - r)^2\right),$$

имеем

$$\dot{V} = -x^2 + x\,y - y^2 - b\,z^2 + r\,b\,z \leqslant -0.5\,x^2 - 0.5\,y^2 - 0.5\,b\,z^2 + 0.5\,b\,r^2,$$

откуда следует глобальная ограниченность траекторий системы Лоренца. Поскольку все условия теоремы 2 выполнены, система является равномерно колебательной в смысле определения 2.

5. Индексы возбудимости

Свойство колебательности, сформулированное в определении 2, представлено для нулевого входа и произвольных начальных условий в системе (1). Нижеследующее определение развивает свойство колебательности на случай ненулевого входа для заданных начальных условий [7, 14, 17].

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{3}$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^m$, $\mathbf{y} \in R^p$ — векторы состояния, входа и выхода соответственно; $\mathbf{f}$ — непрерывная и локально липшицевая равномерно по $\mathbf{u}$ векторная функция. Пусть вход $\mathbf{u}(t)$ является измеримой по Лебегу и локально ограниченной почти везде функцией $\mathbf{u} : R_+ \to R^m$. Символом $||\mathbf{u}||_{[t_0,t]}$ обозначим L^m_∞ обозначим норму $\mathbf{u}(t)$:

$$||\mathbf{u}||_{[t_0,t]} = \text{ess sup}\,\{\,|\,\mathbf{u}(t)\,|\,,\ t \in [\,t_0, T\,]\,\}\,.$$

Если $T = +\infty$, то будем просто писать $\|\,\mathbf{u}\,\|$. Обозначим через M_{R^m} множество всех таких измеримых по Лебегу входов $\mathbf{u}$ со свойством $\|\,\mathbf{u}\,\| < +\infty$. Для начальных условий $\mathbf{x}_0 \in R^n$ и входа $\mathbf{u} \in M_{R^m}$ пусть $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ — единственное максимальное решение системы (1), определенное на интервале $[\,0, T\,)$. Если для всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ и $\mathbf{u} \in M_{R^m}$ выполнено $T = +\infty$, то говорят, что система (3) наделена свойством продолжимости решений.

Определение 3. Пусть $\mathbf{u} \in M_{R^m}$, $\mathbf{x}_0 \in R^n$ — такие, что решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ системы (3) определено для всех $t \geqslant 0$. Тогда функции $\chi^-_\psi(\gamma), \chi^+_\psi(\gamma)$, называемые *нижним и верхним индексами возбудимости системы* (1) *в точке* $\mathbf{x}_0$ *по выходу* $\psi = \eta(\mathbf{x})$, где $\eta : R^n \to$ $\to R$ — некоторая непрерывная функция, определяются для $0 \leqslant \gamma < +$ $+\infty$ следующим образом:

$$E(\gamma) = \Big\{ \Big(\chi^-_{\psi,\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) = \varliminf_{t\to+\infty} \eta\left(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})\right), \\ \chi^+_{\psi,\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) = \varlimsup_{t\to+\infty} \eta\left(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})\right) \Big) \Big\}_{\|\mathbf{u}\| \leqslant \gamma},$$

$$\Big(\chi^-_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma), \chi^+_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma) \Big) = \underset{(a,b)\in E(\gamma)}{\arg\sup}\, \{b - a\}\,.$$

Нижний и верхний индексы возбудимости по выходу ψ для системы (3), наделенной свойством продолжимости решений, определяются как

$$\chi^-_\psi(\gamma) = \inf_{\mathbf{x}_0 \in R^n} \chi^-_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma), \quad \chi^+_\psi(\gamma) = \sup_{\mathbf{x}_0 \in R^n} \chi^+_{\psi,\mathbf{x}_0}(\gamma).$$

Аналогичным способом можно ввести индексы возбудимости по произвольному векторному выходу $\psi = \eta(\mathbf{x})$. При этом индексы будут векторами той же размерности. Последнее свойство было введено только для фиксированных начальных условий в силу того, что для произвольных начальных условий индексы возбудимости могут иметь сложную форму зависимости от нормы входа.

Для ненулевого входа значение $\chi^+_\psi(\gamma) - \chi^-_\psi(\gamma)$ соответствует максимальной (на заданном множестве входов $\|\,\mathbf{u}\,\| \leqslant \gamma$) асимптотической амплитуде колебаний сигнала $\psi(x(t))$. Следовательно, индексы возбудимости характеризуют способность системы к возбуждению управляемых колебаний, вызванных входом, ограниченным величиной γ.

Стоит подчеркнуть целесообразность вычисления оценок значений $\chi_{\psi}^{-}(\gamma)$ и $\chi_{\psi}^{+}(\gamma)$ для всех величин $0 \leqslant \gamma < +\infty$. Действительно, пусть для данной системы максимальная амплитуда колебаний достигается для некоторого уровня входного сигнала $\gamma*$ и для всех $\gamma \geqslant \gamma*$ амплитуда колебаний убывает. Индексы $\chi_{\psi}^{-}(\gamma)$ и $\chi_{\psi}^{+}(\gamma)$ в этом случае для $\gamma \geqslant \gamma*$ сохранят свои значения. Следовательно, для определения критического уровня $\gamma*$ входного воздействия необходимо построить полные графики функций $\chi_{\psi}^{-}(\gamma)$ и $\chi_{\psi}^{+}(\gamma)$. Полученная характеристика оказывается тесно связана с исследованным недавно в работе [22] (для задачи подавления колебаний) коэффициентом Коши (Cauchy gain). Действительно, $\pi^{+} - \pi^{-}$ или $\chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^{+}(\mathbf{u}) - \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^{-}(\mathbf{u})$ являются асимптотическими амплитудами сигнала $\psi(t)$ в смысле [22] для случаев нулевого и отличного от нуля входа $\mathbf{u}$, в то время как $\chi_{\psi}^{+}(\gamma)$ служит оценкой коэффициента Коши для системы (3).

С другой стороны индексы возбудимости характеризуют робастность свойства колебательности, введенного в определении 2. Действительно, если для некоторых $0 < \gamma* \leqslant \gamma < +\infty$ выполнено $\chi_{\psi}^{-}(\gamma) = \chi_{\psi}^{+}$ $+(\gamma)$, то это означает потерю системой свойства колебательности для входных сигналов с амплитудой большей $\gamma*$. Однако отсюда не следует, что любой вход (с амплитудой большей $\gamma*$) разрушает колебания в системе в силу того, что в определении 3 ищется максимум по всем входам. Аналогичный вывод верен для случая $\chi_{\psi}^{+}(\gamma) = +\infty$.

Продемонстрируем связь между колебательностью и индексами возбудимости системы.

Следствие 1. *Пусть для системы* (3) *при* $u = k(x)$ *выполнены все условия теоремы* 2 *и решение* $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$, $\mathbf{x}_0 \in R^n$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ ($k : R^n \to R^m$ *— непрерывная функция*) *является* $[\pi^{-}, \pi^{+}]$-*колебанием относительно некоторого выхода* $\psi = \eta(\mathbf{x})$ *в смысле определения* 2. *Тогда* $[\pi^{+} - \pi^{-} \leqslant \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(X_2) - \upsilon_2^{-1} \circ \upsilon_1(X_1)$, $\pi^{+} - \pi^{-} \leqslant \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^{+}(\gamma) - \chi_{\psi,\mathbf{x}_0}^{-}(\gamma)]$, *где* $\gamma \geqslant \gamma*$, $\gamma* = \sup\limits_{|\mathbf{x}| \leqslant \Gamma} |\mathbf{k}(\mathbf{x})|$, $\Gamma = \upsilon_3^{-1} \circ \upsilon_4(\max\{X_2, |\mathbf{x}_0|\})$.

Таким образом, для вычисления оценок индексов возбудимости достаточно найти некоторое управление $\mathbf{k}$ для системы (3), гарантирующее колебательность в замкнутой системе. Для построения «возбуждающей» обратной связи $k(x)$ можно использовать, например, метод скоростного градиента [10].

Доказательство следствия 1. Согласно результатам теоремы 2 решение системы (3) с обратной связью $\mathbf{k}$ удовлетворяет ограничению $|\mathbf{x}(t)| \leqslant \Gamma$ для всех $\mathbf{x}_0 \in R^n$ и $t \geqslant 0$. Тогда вход $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ ограничен сверху величиной $\gamma*$ и результат следует из определений 2 и 3.

Развитие результатов этого раздела на случай динамических нелинейных систем с запаздыванием получено в работе [18].

Следствие 1 дает верхнюю оценку предельного размаха колебаний через разность индексов возбудимости. Однако в задачах управления возбуждением колебаний может оказаться необходимым оценить предельное отклонение заданного выхода от заданного фиксированного уровня, например, соответствующего равновесию системы в отсутствии возбуждающего воздействия. В этом случае могут оказаться полезными верхние и нижние оценки индексов возбудимости. Приведем здесь один из таких результатов [14], справдливый для систем с диссипацией.

Теорема 4 ([14]). *Пусть для системы* (3) *существует функция* $V(x)$ *(функция запаса), удовлетворяющая условию пассивности*

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t (y(s)^{\mathrm{T}} u(s) - \varrho(x(s)))\, ds, \tag{4}$$

причем функция запаса $V(x)$ *и скорость диссипации* $\varrho(x)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha_0 |y|^2 \leqslant V(x) \leqslant \alpha_1 |y|^2 + d, \tag{5}$$

$$\varrho_0 |y|^2 \leqslant \varrho(x) \leqslant \varrho_1 |y|^2 \tag{6}$$

для некоторых положительных $\alpha_0, \alpha_1, \varrho_0, \varrho_1, d$. *Пусть множество*

$$\Omega^- = \left\{ x : h(x) = 0,\ V(x) < \alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1}\right)^2 \right\}$$

не содержит целых траекторий свободной системы $\dot{x} = f(x, 0)$.

Тогда индексы возбудимости $\chi_V^+(\gamma)$*,* $\chi_V^-(\gamma)$ *по отношению к* $V(x)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha_0 \left(\frac{\gamma}{\varrho_1}\right)^2 \leqslant \chi_V^-(\gamma) \leqslant \chi_V^+(\gamma) \leqslant m\alpha_1 \left(\frac{\gamma}{\varrho_0}\right)^2 + d, \tag{7}$$

а индексы возбудимости $\chi_y^+(\gamma)$*,* $\chi_y^-(\gamma)$ *по отношению к* y *удовлетворяют неравенствам*

$$\sqrt{\alpha}_0 \frac{\gamma}{\varrho_1} \leqslant \chi_y^-(\gamma) \leqslant \chi_y^+(\gamma) \leqslant (m\alpha_1)^{1/2} \frac{\gamma}{\varrho_0} + \sqrt{d}\,. \tag{8}$$

При этом нижняя оценка реализуется для управления

$$u(t) = \gamma \operatorname{sign} y(t), \tag{9}$$

соответствующего методу скоростного градиента.

Важным условием теоремы является второе неравенство (5), означающее для лагранжевых и гамильтоновых систем ограниченность потенциальной энергии. Чтобы получить аналогичный результат для систем с неограниченным потенциалом, можно использовать прием введения малых перекрестных членов в функцию запаса. В частности, для нелинейных осцилляторов с одной степенью свободы, описываемых системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = y, \dot{y} = -\varrho y + \Pi'(\varphi) + u(t), \tag{10}$$

с потенциалом $\Pi(\varphi)$ можно воспользоваться модифицированной функцией запаса
$$V(\varphi, \dot\varphi) = \dot\varphi^2/2 + \Pi(\varphi) + \varepsilon\varphi\dot\varphi, \tag{11}$$

где ε — достаточно малое число. Оценивая скорость изменения функции (11), можно показать, что если потенциал удовлетворяет неравенствам
$$\Pi(\varphi) \geqslant c_0|\varphi|^2 - d_0, \qquad \varphi\Pi'(\varphi) \geqslant c_1\Pi(\varphi) - d_1. \tag{12}$$

то решения системы (10) ограничены при ограниченных управлениях и справедлива верхняя оценка для индекса возбудимости, имеющая вид

$$\chi^+(\gamma) \leqslant R_1\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^2 + R_0, \tag{13}$$

где $R_1 = \max\{2c_1, c_1^2\}$, $R_0 > 0$. Поскольку нижняя оценка

$$\chi^-(\gamma) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^2$$

также справедлива, приходим к тому же порядку асимптотики при малых ϱ. Эти оценки применимы, в частности, к системе Дуффинга, потенциал которой $\Pi(\varphi) = \varphi^2/2 - \varphi^4/4$ удовлетворяет условиям (12).

6. Заключение

Работа посвящена рассмотрению свойства колебательности по Якубовичу для нелинейных систем. Уточняются известные результаты и формулируются необходимые и достаточные условия равномерной колебательности по Якубовичу. Приводятся оценки области колебаний для нелинейных динамических систем со статической нелинейностью в цепи обратной связи. Для управляемых систем наряду с оценками предлагается и алгоритм управления, обеспечивающий в системе выполнение оценок, что позволяет применять полученные результаты как к анализу, так и к синтезу колебательных систем. Важно, что на основе понятия колебательности по Якубовичу удается решать задачи анализа и синтеза сложных систем, в которых колебательные режимы не обязательно являются периодическими.

Список литературы

1. *Андронов А. А., Витт А., Хайкин С. Е.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1959.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.

3. *Буркин И. М., Леонов Г. А.* Неограниченная колебательность нелинейных регулируемых систем // Вестник Ленингр. ун-та. — 1975. — №7. — С. 23–28.
4. *Гелиг А. Х.* Условия автоколебательности нелинейных систем // Вестник Ленингр. ун-та. — 1985. — № 1. — С.10–15.
5. *Гелиг А. Х. Чурилов А. Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1993. 268с.
6. *Ефимов Д. В.* Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. — СПб.: Наука, 2005. — 314с.
7. *Ефимов Д. В., Фрадков А. Л.* Условия колебательности нелинейных систем со статической обратной связью // АиТ. — 2005. — № 2. — С. 92–107.
8. *Ласалль Дж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
9. *Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И.* Частотные методы в теории колебаний. — Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1992.
10. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. Сер. «Анализ и синтез нелинейных систем». — СПб.: Наука, 2000.
11. *Немыцкий В. В.* Колебательные режимы многомерных динамических систем // Труды Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. — Киев, 1963. — Т. 2. — С.308–314.
12. *Томберг Э. А., Якубович В. А.* Условия автоколебаний в нелинейных системах // Сиб. матем. ж. — 1989. — Т. 30, № 4. — С. 180–195.
13. *Томберг Э. А., Якубович В. А.* Об одной задаче Смейла // Сиб. матем. ж. — 2000. — Т. 41, № 4. — С. 926–928.
14. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика. — СПб: Наука, 2003.
15. *Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. матем. ж. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 1100–1129.
16. *Якубович В. А.* Частотные условия колебаний в нелинейных регулируемых системах с одной однозначной или гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1975. — № 12. — С. 51–65.
17. *Efimov D. V., Fradkov A. L.* Excitation of Oscillations in Nonlinear Systems under Static Feedback // Proc. IEEE CDC 2004. — Bahamas, 2004. — P. 2521–2526.
18. *Efimov D. V., Fradkov A. L.* Oscillatority Conditions for Nonlinear Systems with Delay // Proc. IEEE DCD — ECC 2005. — Seville, 2005. — P. 6245–6249.
19. *Fradkov A. L., Pogromsky A. Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. — Singapore: World Scientific, 1998.
20. *Hayachi C.* Nonlinear Ooscillations In Physical Systems. — New York: McGraw-Hill Book Company, 1964.
21. *Pogromsky A., Glad T., Nijmeijer H.* On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems // Intern. J. Bifurcation and Chaos. — 1999. — V. 9, № 4. — P. 629–644.
22. *Sontag E. D.* Asymptotic amplitudes and Cauchy gains: A small gain principle and an application to inhibitory biological feedback // Systems and Control Letters. — 2002. — V. 47. — P. 167—179.

И. Е. Зубер[†]

Инвариантная стабилизация и задача слежения[*]

1. Введение

Под инвариантностью понимается независимость данного выхода системы от возмущения, постоянно действующего на систему через один из ее входов. Первой работой в этой области явилась статья [6], в которой было предложено решение задачи инвариантности для линейной стационарной системы шестого порядка. Эта работа явилась предметом оживленной дискусии, описанной в книге [3], и стимулировала многочисленные иследования, обзор которых приведен в [4]. В большинстве работ по проблеме инвариантности изучались линейные системы (из последних работ см., например, [7–9]). Инвариантности нелинейных систем посвящено значительно меньше работ (см. обзор [4]), в которых использовались либо различные методы линеаризации, либо подходы, близкие к теории чувствительности. В этой статье будет построено инвариантное управление нелинейной гладкой системой, а также осуществлен синтез управления, решающего задачу слежения.

2. Инвариантная стабилизация линейных нестационарных систем

Рассматривается линейная нестационарная система управления с произвольным возмущением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + b_1(t)u_1 + b_2(t)u_2 + \varphi(t)g, \\ \sigma &= c^*x, \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \geqslant t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ — заданная равномерно ограниченная вместе со своими производными порядка до $n-1$ включительно матрица, $b_1(t)$, $b_2(t)$ — заданные равномерно ограниченные вместе со своими производными порядка до $n-2$ включительно векторы, вектор наблюдения c и вектор распределения возмущения g заданы и постоянны, $\varphi(t)$ — произвольная ограниченная скалярная функция.

Допустимыми будем называть управления

$$\begin{aligned} u_1(t) &= s_1^*(t)x(t), \\ u_2(t) &= s_2^*(t)x(t) + \varphi(t)\alpha(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где векторы $s_1(t)$, $s_2(t)$ и скаляр $\alpha(t)$ равномерно ограничены при $t \geqslant t_0$.

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. матем., мех., астр.». — 2006. — № 4. — С. 41–47.

Задача заключается в построении допустимых управлений, обеспечивающих выполнение условий: для произвольно задаваемого $\beta > 0$

$$\sigma(t) = Ce^{-\beta t}, \quad C = \mathrm{const}, \tag{3}$$

$$\exists M < \infty : \quad \|x(t)\| \leqslant M, \quad t \geqslant t_0. \tag{4}$$

Решение задачи. Сформируем

$$\dot{\sigma}(t) = (c^* A(t) + c^* b_1(t) s_1^*(t) + c^* b_2(t) s_2^*(t))\, x + \\ +(c^* b_2(t)\alpha(t) + c^* g)\, \varphi(t).$$

Положим

$$\alpha_2(t) = -\frac{c^* g}{c^* b_2(t)}.$$

Тогда

$$\dot{\sigma}(t) = c^*(D(t) + b_2(t) s_2^*(t))\, x,$$

где

$$D(t) = A(t) + b_1(t) s_1^*(t). \tag{5}$$

Зададимся числом $\beta > 0$ и определим $s_2(t)$ из условия

$$c^*(D(t) + b_2 s_2^*)\, x = \beta c^* x,$$

т. е. положим

$$s_2^*(t) = -\frac{c^*(D(t) - \beta I)}{c^* b_2(t)}. \tag{6}$$

Таким образом, выбором $s_2(t)$ вида (6) обеспечивается выполнение условия (3).

Теперь определим вектор $s_1(t)$, при котором система

$$\dot{x} = D(t)\, x - \frac{b_2 c^*(D(t) - \beta I)}{c^* b_2(t)}\, x$$

асимптотически устойчива. Перепишем эту систему в виде

$$\dot{x} = D_1(t)\, x,$$

где с учетом (5)

$$D_1(t) = P(t) D(t) + \beta\, \frac{b_2(t) c^*}{c^* b_2(t)}, \quad P(t) = I - \frac{b_2(t) c^*}{c^* b_2(t)}$$

или

$$\dot{x} = (A_1(t) + b(t) s_1^*) x, \tag{7}$$

где

$$A_1 = P(t) A(t) + \beta\, \frac{b_2(t) c^*}{c^* b_2(t)}, \quad b(t) = P(t) b_1(t).$$

Решение задачи стабилизации системы (7) содержится, например, в работах [1, 5] и базируется на преобразованиях подобия, приводящих систему к каноническому виду.

Замечание. Предположим, что функция возмущения $\varphi(t)$ не измеряема, но вектор наблюдения c подлежит выбору. Тогда решение рассматриваемой задачи, т. е. определение допустимого управления, обеспечивающего выполнение условий (3) и (4), проводится несколько иначе.

Полагаем $c^*g = 0$, тогда

$$\dot\sigma = (c^*A + c^*b_1 s_1^* + c^*b_2 s_2^*)\,x.$$

Выбираем $s_2 = -\dfrac{c^*g}{c^*b_2(x)}$, тогда $\dot\sigma(t) = 0$. Отсюда при $\sigma_0 = c^*x_0 = 0$ имеем $\sigma(t) \equiv 0$. Если $c^*x_0 \neq 0$, то выбором $s_2^* = \dfrac{c^*(D(t) - \beta I)}{c^*b_2(t)}$ обеспечиваем выполнение условия (3), а искомый вектор s_1 ищем как стабилизирующий вектор обратной связи для системы (7).

Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $c^*b_2(t) \neq 0$ *при* $t \geqslant t_0$ *и либо измеряемо возмущение, либо* $c^*g = 0$. *Тогда существует и определяется в явном виде двумерное управление, обеспечивающее инвариантную стабилизацию системы.*

3. Инвариантная стабилизация нелинейных систем

Рассмотрим при $t \geqslant 0$ систему

$$\dot x = A(x)x + b_1(x)u_1 + b_2(x)u_2 + g(x)\psi(t), \tag{8}$$

$$\sigma = c^*x, \tag{9}$$

где $A(x)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}^m$ матрица-функция размерности $m \times m$, $b_1(x), b_2(x)$ и $g(x)$ — непрерывные ограниченные m-мерные столбцы-функции, c — постоянный m-мерный столбец, $\psi(t)$ — скалярная непрерывная ограниченная функция, описывающая постоянно действующее возмущение.

Задача заключается в построении скалярных непрерывных управлений $u_1(x)$ и $u_2(x)$, обеспечивающих при любом $x(0)$ выполнение следующих свойств:

$$\sigma(t) = \sigma(0)\exp(-\varepsilon t), \quad \varepsilon > 0, \tag{10}$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \|x(t)\| \leqslant \gamma_0 \varlimsup_{t\to+\infty} |\psi(t)|. \tag{11}$$

Будем искать управления $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в виде

$$u_1 = s_1^*(x)x, \tag{12}$$

$$u_2 = s_2^*(x)x + \alpha(t,x), \tag{13}$$

где $s_1(x)$ и $s_2(x)$ — m-мерные столбцы-функции, $\alpha(t,x)$ — скалярная функция.

Выберем сначала $s_2(x)$ и $\alpha(t,x)$ таким образом, чтобы выполнялось свойство инвариантности (10). Очевидно, соотношение (10) равносильно уравнению

$$\dot{\sigma} + \varepsilon\sigma = 0. \tag{14}$$

Вычислим производную $\dot{\sigma}$ в силу системы (8) и подставим в нее функции (12) и (13):

$$\begin{gathered}\dot{\sigma} = \left(c^*A(x) + c^*b_1(x)s_1^*(x) + c^*b_2(x)s_2^*(x)\right)x+ \\ +c^*b_2(x)\alpha(t,x) + c^*g(x)\psi(t).\end{gathered} \tag{15}$$

Подставив выражения (9) и (15) в уравнение (14), придем к соотношению

$$\begin{gathered}\left(c^*A(x) + c^*b_1(x)s_1^*(x) + c^*b_2(x)s_2^*(x) + c^*\right)x+ \\ +c^*b_2(x)\alpha(t,x) + c^*g(x)\psi(t) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Предположим, что

$$c^*b_2(x) \neq 0. \tag{17}$$

Тогда соотношение (14) будет выполнено, если положить

$$\begin{aligned}\alpha(t,x) &= -\frac{c^*g(x)}{c^*b_2(x)}\psi(t), \\ s_2^*(x) &= -\frac{c^*\left(A(x) + b_1(x)s_1^*(x) + \varepsilon c^*\right)}{c^*b_2(x)}.\end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что если $c^*g = 0$, то управление u_2 не зависит от ψ.

После подстановки выражений (18) в уравнение (8) последнее примет вид

$$\dot{x} = \left(A_1(x) + b(x)s_1^*(x)\right)x + f(x)\psi(t), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}A_1(x) &= \left(I - \frac{b_2(x)c^*}{c^*b_2(x)}\right)A(x) - \varepsilon\,\frac{b_2(x)c^*}{c^*b_2(x)}, \\ b(x) &= \left(I - \frac{b_2(x)c^*}{c^*b_2(x)}\right)b_1(x), \\ f(x) &= g(x) - \frac{c^*g(x)}{c^*b_2(x)}\,b_2(x).\end{aligned}$$

Задача свелась к такому выбору $s_1(x)$, при котором выполняется свойство (11).

Предположим, что однородная система

$$\dot{z} = \left(A_1(z) + b(z)s_1^*(z)\right)z = 0 \tag{20}$$

принадлежит классу, для которого в [2] было найдено робастное стабилизирующее управление $u = s_1^*z$, $s_1 = \lambda He_m$. При этом была построена функция Ляпунова $V(z) = z^*H^{-1}z$, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{V} + \beta V < 0$$

при всех векторах z с $\|z\| \neq 0$. Это неравенство эквивалентно матричному неравенству

$$\big(A_1(z) + b(z)s_1^*\big)^* H^{-1} + H^{-1}\big(A_1(z) + b(z)s_1^*\big) + \beta H^{-1} < 0, \tag{21}$$

которое выполняется при всех $z \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим для системы (19) функцию Ляпунова $V(x) = x^* H^{-1} x$. Ввиду (21) ее производная, взятая в силу системы (19), удовлетворяет неравенству

$$\dot V \leqslant -\beta V + 2x^* H^{-1} f(x)\psi(t). \tag{22}$$

При любом $\mu > 0$ очевидно соотношение

$$\big|2x^* H^{-1}\psi f\big| \leqslant \mu\|x\|^2 + \frac{1}{\mu}\left\|H^{-1} f\right\|^2 \psi^2(t). \tag{23}$$

Поскольку $\|x\|^2 \leqslant \dfrac{1}{\lambda_-}V$, где λ_- — минимальное собственное число матрицы H^{-1}, то из (22) и (23) вытекает оценка

$$\dot V \leqslant -\delta V + \gamma(t), \tag{24}$$

где

$$\gamma(t) = \mu^{-1}\psi^2(t) \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|H^{-1} f(x)\|^2, \quad \delta = \beta - \frac{\mu}{\lambda_-}.$$

Из неравенства (24) после умножения его на $\exp \delta t$ и интегрирования получаем соотношение

$$V\big(x(t)\big) \leqslant V\big(x(0)\big)e^{-\delta t} + e^{-\delta t}\int_0^t e^{\delta\lambda}\gamma(\lambda)\,d\lambda. \tag{25}$$

Введем обозначение $\gamma_* = \varlimsup\limits_{t \to +\infty} \gamma(t)$ и рассмотрим функцию

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{если } \gamma(t) > \gamma_*, \\ \gamma_*, & \text{если } \gamma(t) \leqslant \gamma_*, \end{cases}$$

которая обладает свойствами $\gamma(t) \leqslant \gamma_1(t)$ и

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_1(t) = \gamma_*. \tag{26}$$

Из (25) вытекает оценка

$$V\big(x(t)\big) \leqslant V\big(x(0)\big)e^{-\delta t} + e^{-\delta t}\int_0^t e^{\delta\lambda}[\gamma_1(t) - \gamma_*]\,d\lambda + e^{-\delta t}\int_0^t e^{\delta\lambda}\gamma_*\,d\lambda. \tag{27}$$

Пусть введенный выше положительный параметр μ удовлетворяет неравенству $\mu < \beta\lambda_-$. Тогда $\delta > 0$. Ввиду (26) первые два слагаемые в правой части соотношения (27) при $t \to +\infty$ стремятся к нулю, а последнее слагаемое стремится к величине γ_*/δ. Таким образом, доказана оценка

$$\varlimsup_{t\to+\infty} V\bigl(x(t)\bigr) \leqslant \frac{\gamma_*}{\delta},$$

из которой вытекает неравенство (11), в котором

$$\gamma_0 = \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|H^{-1}f(x)\|}{\sqrt{\delta\lambda_-\mu}}.$$

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие* (17) *и управления* u_1 *и* u_2 *выбраны по формулам* (12), (13). *Тогда любое решение системы* (8) *обладает свойствами* (10), (11).

4. Задача слежения

Рассмотрим теперь *задачу слежения*. Пусть дана система

$$\dot{x} = A(x)x + b_1(x)u_1 + b_2(x)u_2, \tag{28}$$

$$\sigma = c^*x, \tag{29}$$

где A, b_1, b_2 и c такие же, как в системе (8), (9), и скалярная функция $\beta(t)$, ограниченная вместе со своей производной на $[0, +\infty)$. Требуется построить скалярные управления u_1 и u_2 таким образом, чтобы при любом $x(0)$ ошибка слежения

$$\zeta(t) = \sigma(t) - \beta(t) \tag{30}$$

обладала свойством

$$\zeta(t) = \zeta(0)\exp(-\varepsilon t), \quad \varepsilon > 0, \tag{31}$$

и решение $x(t)$ было ограничено:

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \|x(t)\| \leqslant \gamma_0.$$

Покажем, как эта задача сводится к рассмотренной выше задаче инвариантной стабилизации. Очевидно, свойство (31) равносильно равенству

$$\dot{\zeta} + \varepsilon\zeta = 0.$$

Подставив в него выражение (30), получим в силу (28), (29) соотношение

$$c^*\bigl(A(x)x + b_1(x)u_1 + b_2(x)u_2\bigr) + \varepsilon c^*x - \psi(t) = 0, \tag{32}$$

где $\psi(t) = \dot\beta(t) + \varepsilon\beta(t)$. Предположим, что имеет место свойство (10) и положим в (28)

$$u_2 = \frac{\psi(t) - \varepsilon c^* x - c^* A(x)x - c^* b_1(x)u_1}{c^* b_2(x)}, \quad u_1 = s_1^*(x)x.$$

Тогда соотношение (32) будет удовлетворено, а уравнение (28) примет вид

$$\dot x = \left(A_1(x) + b(x)s_1^*(x)\right) x + f(x)\psi(t), \tag{33}$$

где

$$A_1(x) = \left(I - \frac{b_2(x)c^*}{c^* b_2(x)}\right) A(x) - \varepsilon \frac{b_2(x)c^*}{c^* b_2(x)},$$

$$b(x) = \left(I - \frac{b_2(x)c^*}{c^* b_2(x)}\right) b_1(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{c^* b_2(x)} b_2(x).$$

Уравнение (33) имеет такой же вид, что и уравнение (19) в рассмотренной выше задаче инвариантной стабилизации.

Список литературы

1. *Зубер И.Е.* Стабилизация линейных нестационарных систем на основе специального преобразования подобия // Кибернетика и системный анализ. — Киев, 1998. — С. 27–32.
2. *Зубер И.Е.* Квазиканонические преобразования подобия и стабилизируемость нелинейных систем управления // Вестник СПбГУ. — 2006. — Сер.1.
3. *Левина З.М.*, *Левин В.И.* Г.В.Щипанов и теория инвариантности. — М.: Физматлит. 2004.
4. *Кухтенко А.И.* Обзор по теории инвариантности // Автоматика. — 1984. — № 2. — С. 3–13; 1985. — № 2. — С. 3–14. № 6. — С. 3–14.
5. *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. — С.-Пб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.
6. *Щипанов Г.В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // АиТ. — 1939. — № 1. — С. 4–37.
7. *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // ДАН СССР. — 1995. — Т. 343, № 2. — С. 172–175.
8. *Якубович В.А.* Синтез стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих независимость выходной переменной системы управления от внешнего воздействия // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 25–30.
9. *Якубович В.А.*, *Проскурников А.В.* Задача об инвариантности системы управления //Докл. РАН. — 2003. — Т. 343, № 6. — С. 742–746.

Г. А. Леонов[†]

Фазовая синхронизация. Теория и приложения[*]

Аннотация: дается обзор современного состояния теории фазовой синхронизации. Рассматриваются приложения этой теории для синхронных и асинхронных электрических машин, систем фазовой автоматической подстройки частоты, самосинхронизации неуравновешенных роторов. При исследовании глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации широко применяется частотная теорема Якубовича–Калмана.

1. Введение

Можно часто наблюдать проявление эффекта фазовой синхронизации. Электрический ток в энергосети вырабатывается синхронными электрическими генераторами, действие которых основано на принципе фазовой синхронизации. Одновременно с включением телевизора запускается специальная система фазовой синхронизации, управляющая генератором развертки электронного луча. В настоящее время астатические системы фазовой синхронизации применяются для управления распределенными системами тактовых генераторов в многопроцессорных кластерах (синхронизация часов в многопроцессорной системе).

С широким спектром применения систем фазовой синхронизации связано разнообразие их механических, электромеханических и электронных реализаций. Однако универсален сам принцип фазовой синхронизации: разность фаз колебаний трансформируется в управляющее воздействие на частоту генератора — и происходит синхронизация колебаний.

Общая теория фазовой синхронизации сформировалась во второй половине XX в. в результате обобщения методов, развитых в рамках трех самостоятельных теорий:

1) теории синхронных и асинхронных электрических машин;
2) теории систем фазовой автоподстройки частоты (phase locked loops);
3) теории самосинхронизации неуравновешенных роторов.

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет. Институт проблем машиноведения РАН.

[*]) Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04–01–00250А), Программы русско-голландского сотрудничества NOW. Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 10. — С. 47–86.

В настоящем обзоре рассматриваются те разделы этих теорий, внутри которых создавались понятия и методы, развивавшиеся в дальнейшем в общую теорию фазовой синхронизации. Описываются три уровня рассмотрения задач фазовой синхронизации: на уровне механических, электромеханических или электронных реализаций, на уровне фазовых и частотных соотношений и на уровне дифференциальных, разностных, интегральных или интегродифференциальных уравнений. Приводятся основные понятия теории фазовой синхронизации. Описываются методы глобального исследования систем фазовой синхронизации: метод периодических функций Ляпунова, метод положительно инвариантных конусных сеток, метод нелокального сведения.

Здесь сделана попытка изложить основные понятия и методы теории фазовой синхронизации на самом простом уровне — для как можно более широкого круга специалистов в тех областях, где возможно применение этой теории. С этой целью существенно модернизировано описание известных методов, многие результаты снабжены новыми, более простыми доказательствами. Кроме того, показано взаимопроникновение методов и идей резличных конкретных теорий, использующих принципы фазовой синхронизации.

2. Синхронные и асинхронные электрические машины

Пионерской работой, в которой были заложены многие принципы общей теории фазовой синхронизации, была статья Ф. Трикоми [76]. Она была посвящена глобальному анализу дифференциальных уравнений синхронной электрической машины. Это исследование было сразу замечено и изложено в известной книге [3]. В дальнейшем методы Ф. Трикоми развивались и модернизировались его многочисленными последователями [7, 9, 17, 48, 52, 57, 72].

Здесь рассмотрим наиболее простые математические модели синхронных и асинхронных электродвигателей, обсудим их с точки зрения теории фазовой синхронизации и опишем основные идеи Ф. Трикоми.

Опишем здесь следующую электромеханическую модель, которая позволяет рассмотреть динамику синхронных и асинхронных электродвигателей с общих позиций.

Основные элементы этих электродвигателей — неподвижный статор и вращающийся ротор. На статоре имеются обмотки, по которым проходит переменный электрический ток, создающий переменное магнитное поле. Примем здесь, что обмотки статора устроены так, что при прохождении через них переменного тока вектор напряженности магнитного поля является постоянным по величине и вращается с постоянной угловой скоростью [19, 41, 47] (рис. 1).

Такое вращающееся магнитное поле впервые было получено Г. Феррарисом и Н. Теслой в 1888 г. [19]. Ясно, что частота его вращения совпадает с частотой переменного тока, проходящего через обмотки статора.

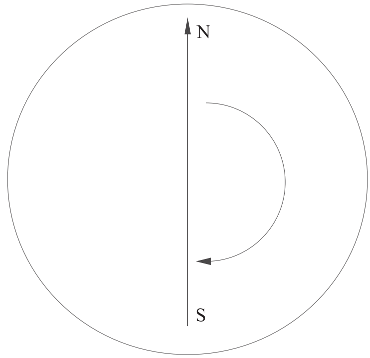

Рис. 1. Вращающееся магнитное поле

Примем здесь, что электромагнитные процессы в обмотках ротора не влияют на параметры вращающегося магнитного поля (т. е. пренебрегаем влиянием этих процессов на токи в обмотках статора).

Предположим теперь, что в пазах ротора располагаются две перпендикулярные по отношению друг к другу обмотки. Схематично они изображены на рис. 2. Здесь показан в виде рамки с током i_1 (или i_2) один из витков такой обмотки.

Для синхронной машины одна из рамок замкнута (так называемая демпферная обмотка), к другой подводится (обычно через щетки электродвигателя) постоянное напряжение e. Эту обмотку называют обмоткой возбуждения.

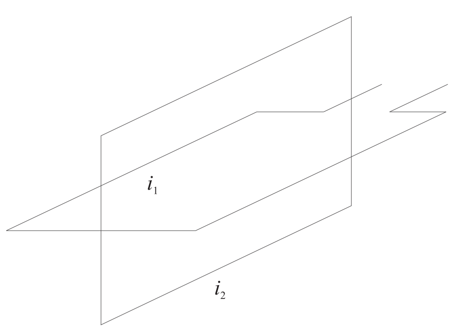

Рис. 2. Схема обмоток

Для асинхронной машины обе рамки замкнуты. В этом случае говорят, что обмотки короткозамкнуты. Ясно, что здесь $e = 0$.

Будем рассматривать движение рамок во вращающейся системе координат, жестко связанной с вектором напряженности магнитного поля. В этом случае токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ в рамках определяются с учетом закона электромагнитной индукции и закона Ома:

$$L\,\frac{di_1(t)}{dt}+Ri_1(t)=e+SB(\sin\theta(t))\,\dot\theta(t),$$
$$L\,\frac{di_2(t)}{dt}+Ri_2(t)=SB(\cos\theta(t))\,\dot\theta(t). \tag{2.1}$$

Здесь R и L — соответственно сопротивление и индуктивность каждой из рамок, которые будем предполагать одинаковыми. Величина B — напряженность магнитного поля, S — площадь каждой из рамок, $\theta(t)$ — угол между плоскостью рамки с током i_1 и плоскостью, перпендикулярной вектору напряженности магнитного поля.

Движение ротора с расположенными на нем рамками относительно вращающегося магнитного поля имеет вид

$$I\ddot\theta=-\beta SB(i_1(t)\sin\theta+i_2(t)\cos\theta)-M. \tag{2.2}$$

Здесь I — момент инерции ротора, β — коэффициент пропорциональности, M — момент сил сопротивления (так называемый момент нагрузки).

Предположим вначале, что $L=0$. В этом случае, подставляя (2.1) в уравнение (2.2), получим

$$I\ddot\theta=-\frac{\beta S^2B^2}{R}\,\dot\theta-\frac{\beta SBe}{R}\sin\theta-M. \tag{2.3}$$

Введя переобозначение $\theta\to-\theta$, это уравнение можно записать в виде

$$\ddot\theta+\alpha\dot\theta+b\sin\theta=\gamma. \tag{2.4}$$

Здесь

$$\alpha=\frac{\beta S^2B^2}{IR},\quad b=\frac{\beta SBe}{IR},\ \ \gamma=\frac{M}{I}.$$

В дальнейшем для синхронной машины ($e>0$), не умаляя общности, примем, что $b=1$. К уравнению такого вида можно привести уравнение (2.4), используя замену времени $\tau=t\sqrt{b}$.

Синхронному рабочему режиму синхронной машины соответствует состояние равновесия уравнения (2.4):

$$\theta(t)\equiv\theta_0,\quad \dot\theta\equiv0, \tag{2.5}$$

где θ_0 удовлетворяет соотношениям

$$\sin\theta_0=\gamma,\quad \cos\theta_0>0.$$

Этот режим возможен, когда $\gamma<1$. В этом случае он является локально асимптотически устойчивым. Состояния равновесия (2.5) с $\cos\theta_0<0$ являются неустойчивыми седловыми особыми точками. Заметим, что стационарные множества системы (2.1), (2.2) при $L=0$ и при $L>0$ совпадают. Сохраняется также локальная устойчивость и неустойчивость стационарных решений при переходе от уравнения (2.4) (случай $L = 0$) к системе (2.1), (2.2) (случай $L \geqslant 0$).

Проведенный Ф. Трикоми глобальный анализ уравнения (2.4) показал, что существует некоторое число $\alpha(\gamma)$, для которого при $\alpha > \alpha(\gamma)$ все решения уравнения (2.4) стремятся при $t \to +\infty$ к состояниям равновесия. При $\alpha < \alpha(\gamma)$ имеются так называемые круговые решения, для которых $\dot{\theta}(t) \geqslant \varepsilon \ \forall t \geqslant t_0$. Здесь $\varepsilon > 0$, t_0 — некоторые числа.

В первом случае имеет место глобальное затягивание в синхронный режим (особые решения, стремящиеся к неустойчивым седлам, физически не наблюдаемы). Во втором — при некоторых начальных условиях $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ имеет место рассинхронизация.

Рабочему режиму асинхронного электродвигателя соответствует решение

$$\theta(t) \equiv -s_0 t + \theta_0, \quad \dot{\theta}(t) \equiv -s_0,$$

где θ_0 — некоторое число. Число s_0 зависит от L и поэтому формулы для его вычисления являются разными для (2.4) (при $L = 0$) и для (2.1), (2.2) (при $L > 0$).

При $e = 0$ система (2.1), (2.2) может быть преобразована к системе третьего порядка. Для этого введем в рассмотрение следующие преобразования: $\theta_1 = -\theta$,

$$s = \dot{\theta}_1, \quad x = \frac{L}{SB}\left(i_1 \cos\theta_1 + i_2 \sin\theta_1\right), \quad y = \frac{L}{SB}\left(-i_1 \sin\theta_1 + i_2 \cos\theta_1\right).$$

Система (2.1), (2.2) запишется в новых переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= ay + \gamma, \\ \dot{y} &= -cy - s - xs, \\ \dot{x} &= -cx + ys, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$a = \frac{\beta(SB)^2}{IL}, \quad c = \frac{R}{L}.$$

Заметим, что величина s_0 для уравнения (2.4) определяется из соотношения $s_0 = \gamma/\alpha$, а для системы (2.6) — из соотношения

$$\frac{acs_0}{c^2 + s_0^2} = \gamma. \tag{2.7}$$

Таким образом, в отличие от синхронной машины уравнение (2.4) неадекватно описывает асинхронную машину. Наиболее простым адекватным описанием динамики асинхронной машины является система (2.6). Функция

$$\varphi(s_0) = \frac{acs_0}{c^2 + s_0^2}$$

называется статической характеристикой асинхронной машины.

Матрица Якоби правой части системы (2.6) в стационарной точке $s = s_0,\ y_0 = -\gamma/a,\ x_0 = -\gamma s_0/ac$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 - x_0 & -c & -s_0 \\ y_0 & s_0 & -c \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический полином, учитывая (2.7), можно записать в виде

$$p^3 + 2cp^2 + \left(c^2 + s_0^2 + \frac{ac^2}{c^2 + s_0^2}\right) p + ac\,\frac{c^2 - s_0^2}{c^2 + s_0^2}.$$

Отсюда следует, что стационарная точка s_0, y_0, x_0 локально асимптотически устойчива при $s_0 < c$ и неустойчива при $s_0 > c$.

При отсутствии нагрузки ($\gamma = 0$) при любых начальных данных осуществляется захват в синхронизм:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} s(t) = 0.$$

Такая глобальная устойчивость нулевого решения системы (2.6) легко доказывается с помощью функции Ляпунова

$$V(x, y, s) = x^2 + y^2 + \frac{s^2}{a}.$$

Далее происходит наброс нагрузки (это типично, если асинхронный электродвигатель используется в приводе металлорежущего станка). И здесь важно, чтобы в новом переходном режиме решение системы (2.6) с ненулевым γ и начальными условиями $x = y = s = 0$ стремилось при $t \to +\infty$ к стационарной точке x_0, y_0, s_0.

Здесь наблюдается весьма специальный тип синхронизма «с вычетом частотной составляющей s_0». Условия, при которых возможны такие переходные процессы, будут описаны далее.

Приведем здесь основные результаты, полученные Ф. Трикоми, перейдя от уравнения (2.4) к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} &\dot\theta = \eta, \\ &\dot\eta = -\alpha\eta - \varphi(\theta), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\varphi(\theta) = \sin\theta - \gamma$.

Теорема 1. *Любое ограниченное при $t \geqslant 0$ решение системы* (2.8) *стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.*

Доказательство этой теоремы легко провести, построив функцию ляпуновского типа

$$V(\eta, \theta) = \frac{1}{2}\eta^2 + \int\limits_0^\theta \varphi(\theta)\, d\theta$$

и применив стандартные рассуждения в рамках прямого метода Ляпунова [5, 16].

Ясно, что для системы (2.8) необходимым условием существования асимптотически устойчивого (в малом) состояния равновесия (которое соответствует устойчивому синхронному рабочему режиму электродвигателя) является условие $\gamma < 1$. В этом случае система (2.8) имеет седловое состояние равновесия $\eta = 0,\ \ \theta = \theta_0 + 2k\pi$, где число θ_0 удовлетворяет условиям

$$\sin\theta_0 = \gamma, \quad \cos\theta_0 < 0, \quad \theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

и асимптотически устойчивое (в малом) состояние равновесия $\eta = 0,\ \theta = \theta_1 + 2k\pi$, где число θ_1 удовлетворяет условиям

$$\sin\theta_1 = \gamma, \quad \cos\theta_1 > 0, \quad \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Зафиксируем параметр $\gamma \in (0,1)$ и будем варьировать параметр $\alpha \in [0, +\infty)$.

При $\alpha = 0$ система (2.8) интегрируема и легко видеть, что для сепаратрисы $\theta(t)^+, \eta(t)^+$ седла $\theta = \theta_0,\ \eta = 0$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} \eta(t)^+ = 0, \ \ \lim_{t\to+\infty} \theta(t)^+ = \theta_0, \\
&\eta(t) > 0 \quad \forall\, t \in (T, +\infty)
\end{aligned}$$

(здесь T — некоторое число), существует некоторое число τ такое, что

$$\begin{aligned}
&\eta(\tau)^+ = 0, \ \ \theta^+(\tau) \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0), \\
&\eta(t)^+ > 0 \quad \forall\, t > \tau.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

(рис. 3).

Рассмотрим теперь отрезок прямой

$$\eta = -K(\theta - \theta_0), \quad \theta \in [\theta_0 - 2\pi, \theta_0].$$

Легко видеть, что на этом отрезке выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&(\eta + K(\theta - \theta_0))^\bullet = -\alpha\eta + K\eta - \sin\theta + \gamma = \\
&= (\theta - \theta_0)\left(-K(K - \alpha) + \frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right).
\end{aligned}$$

Используя очевидное неравенство

$$\left|\frac{\gamma - \sin\theta}{\theta - \theta_0}\right| \leqslant 1 \quad \forall\, \theta \neq \theta_0$$

и предполагая, что

$$\alpha > 2, \quad \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} < K < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1},$$

получим оценку

$$(\eta + K(\theta - \theta_0))^\bullet < 0 \tag{2.10}$$

при $\eta = -K(\theta - \theta_0),\ \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)$.

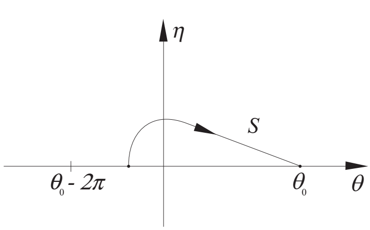

Рис. 3. Сепаратриса седла

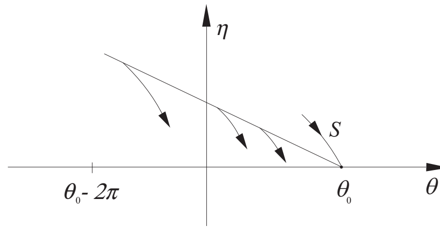

Рис. 4. Нижняя оценка сепаратрисы

Из оценки (2.10) следует (рис. 4), что сепаратриса $\theta(t)^+$, $\eta(t)^+$ в полосе $\{\eta, \theta \,|\, \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$ будет располагаться выше отрезка прямой $\{\eta, \theta \,|\, \eta = -K(\theta - \theta_0),\ \ \theta \in (\theta_0 - 2\pi, \theta_0)\}$. Отсюда следует, что при $\alpha > 2$ не существует числа τ, для которого выполнены соотношения (2.9).

Хорошо известно, что кусок траектории S : $\{\eta(t)^+, \theta(t)^+ \,|\, t \geqslant \tau\}$ непрерывно зависит от параметра α. Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает следующий известный результат.

Теорема 2 ([76]). *Для любого $\gamma > 0$ существует число $\alpha(\gamma) \in (0, 2]$ такое, что система* (2.8) *с такими параметрами γ, $\alpha(\gamma)$ имеет в цилиндрическом фазовом пространстве $\{\eta, \theta \bmod 2\pi\}$ гомоклиническую траекторию*:

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = \lim_{t \to -\infty} \eta(t) = 0,$$

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = \theta_0, \ \lim_{t \to -\infty} \theta(t) = \theta_0 - 2\pi.$$

Легко также показать, что $\alpha(\gamma)$ однозначно определяется по γ и что $\alpha(\gamma)$ является монотонно возрастающей функцией.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее расположение траекторий в фазовом пространстве системы (2.8).

1. При $\alpha > \alpha(\gamma)$ сепаратрисы, стремящиеся при $t \to +\infty$ к седловым состояниям равновесия системы (2.8), являются границами областей притяжения асимптотически устойчивых состояний равновесия. Можно показать [7], что все фазовое пространство разбито на такие области притяжения (рис. 5).

2. При $\alpha = \alpha(\gamma)$ области притяжения устойчивых состояний равновесия также ограничены такими сепаратрисами. Однако эти области уже не заполняют все фазовое пространство.

В области, расположенной над гомоклиническими орбитами, все траектории стремятся при $t \to +\infty$ к бесконечности, приближаясь к множеству, состоящему из гомоклинических орбит (рис. 6).

3. При $\alpha < \alpha(\gamma)$ между сепаратрисами возникают коридоры неустойчивости (рис. 7).

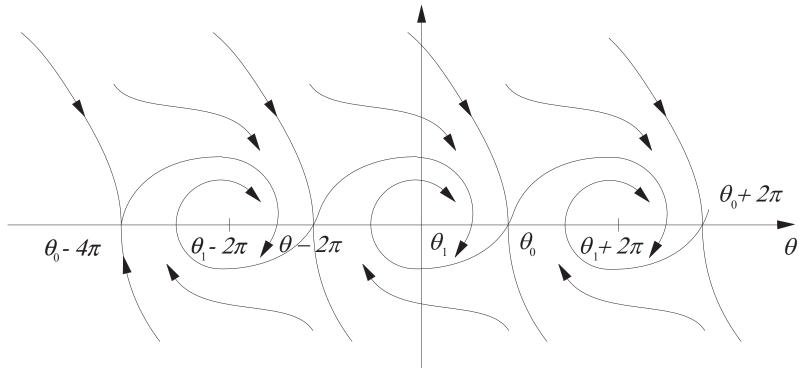

Рис. 5. Глобальная устойчивость

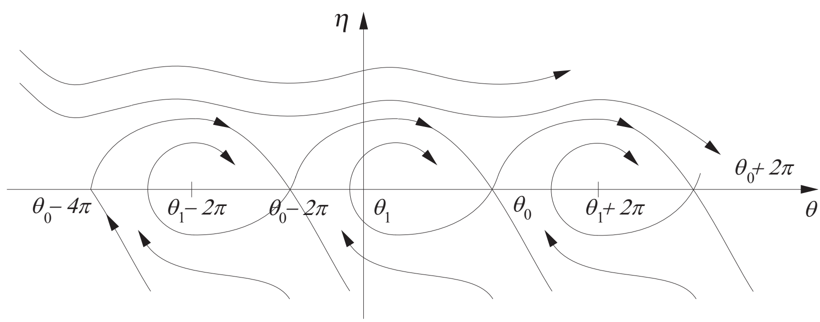

Рис. 6. Гомоклиническая бифуркация

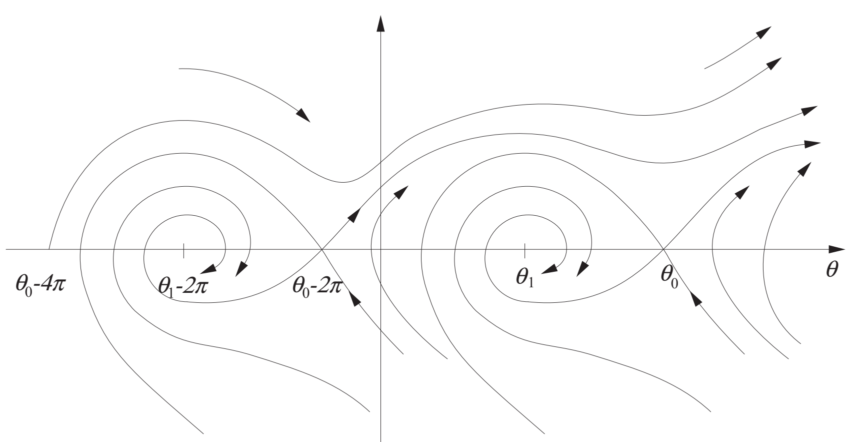

Рис. 7. Случай $\alpha < \alpha(\gamma)$

В этих коридорах все траектории стремятся при $t \to +\infty$ к бесконечности. Все фазовое пространство разбивается на такие коридоры и области притяжения устойчивых состояний равновесия.

Таким образом, случай 1 соответствует глобальной устойчивости: все траектории стремятся при $t \to +\infty$ к состояниям равновесия. Для синхронной машины это соответствует тому, что при любом переходном режиме качания ротора демпфируются и в результате машина выходит на рабочий синхронный режим.

В случае 3 возможен как переход к синхронному режиму, так и выпадение машины из синхронизма. Это зависит от начальных условий $\theta(0)$, $\eta(0)$.

Приведем здесь наиболее известные аналитические оценки величины $\alpha(\gamma)$.

Теорема 3 ([52, 57]).

$$\alpha(\gamma) < 2\sin\left(\frac{1}{2}\theta_1\right).$$

Заметим, что при малых γ эта оценка принимает вид

$$\alpha(\gamma) < \gamma. \tag{2.11}$$

Теорема 4 ([57]).

$$\alpha(\gamma)^2 > \sqrt{3(\cos\theta_1)^2 + 1} - 2\cos\theta_1.$$

Вычисление величины $\alpha(\gamma)$ с помощью численных методов обсуждается в [26, 43].

Обобщение приведенных здесь методов и результатов на более сложные модели синхронных машин изложено в [16, 62].

Другие бифуркации в системах фазовой синхронизации: удвоения периода, Андронова–Хопфа, полуустойчивого цикла — изучались и обсуждались в [8, 9, 17, 26, 43, 44, 46, 59, 62–64, 69].

3. Системы фазовой автоподстройки частоты

Системы фазовой автоподстройки (ФАП, phase locked loops, PLL) широко распространены в радиотехнике и электросвязи. После их изобретения в 30–40-х гг. XX в. стала интенсивно развиваться как практика применения, так и теория систем ФАП [15, 18, 26, 29, 32, 34, 35, 43, 45, 53, 54, 59, 61–63, 66, 67]. В последнее десятилетие системы ФАП стали широко применяться для управления тактовыми генераторами цифровых сигнальных процессоров, многопроцессорных кластеров и других устройств цифровой обработки информации [26–28, 36, 37, 39, 58, 64, 65, 74].

Опишем здесь основные принципы синтеза и анализа систем автоподстройки. Здесь с 60-х гг. стало традиционным использование трех уровней описания систем ФАП: 1) первый уровень — описание электронной реализации системы, 2) второй уровень — описание блок-схемы, содержащей фазовые соотношения, 3) третий уровень — описание дифференциальными, интегральными или разностными уравнениями.

Приведем здесь такое, ставшее классическим, описание системы ФАП с генераторами, вырабатывающими гармонические колебания [15, 32].

Рассмотрим систему ФАП на первом уровне (рис. 8)

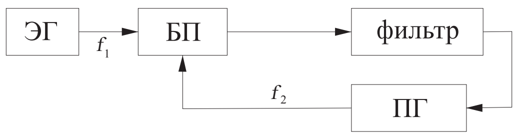

Рис. 8. Электронная схема системы ФАП

Здесь ЭГ — эталонный генератор, ПГ — подстраиваемый генератор, вырабатывающие высокочастотные «почти гармонические колебания»

$$f_j(t) = A_j \sin(\omega_j(t)t + \psi_j).$$

Блок БП является перемножителем колебаний $f_1(t)$ и $f_2(t)$. На его выходе появляется сигнал $f_1(t)f_2(t)$. Соотношения между входом $\xi(t)$ и выходом $\sigma(t)$ линейного фильтра имеют вид

$$\sigma(t) = \alpha_0(t) + \int\limits_0^t \gamma(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $\gamma(t)$ — импульсная переходная функция фильтра, $\alpha_0(t)$ — экспоненциально затухающая функция, зависящая от начального состояния фильтра в момент $t = 0$.

Электронные реализации генераторов, перемножителей и фильтров имеются в [2, 39].

Переформулируем теперь свойство высокочастотности колебаний $f_j(t)$ в следующее условие.

Рассмотрим большой фиксированный промежуток времени $[0, T]$, который можно разбить на малые промежутки вида $[\tau, \tau + \delta]$, $(\tau \in \in [0, T])$, где выполняются соотношения

$$\begin{gathered} |\gamma(t) - \gamma(\tau)| \leqslant C\delta, \;\; |\omega_j(t) - \omega_j(\tau| \leqslant C\delta \\ \forall\, t \in [\tau, \tau+\delta], \quad \forall\, \tau \in [0, T]; \\ |\omega_1(\tau) - \omega_2(\tau)| \leqslant C_1 \;\; \forall\, \tau \in [0, T], \\ \omega_j(t) \geqslant R, \;\; \forall\, t \in [0, T]. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь будем считать, что δ — достаточно мало по отношению к фиксированным числам T, C, C_1, а число R — достаточно большое по отношению к числу δ. Последнее означает, что на малых промежутках

$[\tau, \tau+\delta]$ функции $\gamma(t)$ и $\omega_j(t)$ являются почти константами, а функции $f_j(t)$ на них быстро осциллируют, как гармонические функции. Ясно, что такие условия имеют место для высокочастотных колебаний.

Рассмотрим теперь две блок-схемы, изображенные на рисунках 9 и 10.

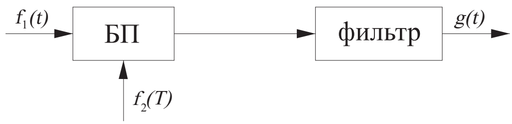

Рис. 9. Перемножитель и фильтр

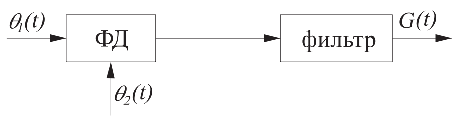

Рис. 10. Фазовый детектор и фильтр

Здесь $\theta_j(t) = \omega_j(t)t + \psi_j$, которые будем называть фазами колебаний $f_j(t)$, ФД — нелинейный блок с характеристикой $\varphi(\theta)$, называемый фазовым детектором (дискриминатором). На входы блока ФД поступают фазы $\theta_j(t)$, выходом является функция $\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t))$.

Сигналы $f_1(t)f_2(t)$ и $\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t))$ поступают на одинаковые фильтры с одинаковой импульсной переходной функцией $\gamma(t)$. Выходами фильтров являются соответственно функции $g(t)$ и $G(t)$.

Классический синтез систем ФАП основан на хорошо известном результате.

Теорема 5. *Если выполнены условия* (3.1) *и*

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos\theta,$$

то при одних и тех же начальных состояниях фильтра имеет место соотношение

$$|G(t) - g(t)| \leqslant C_3\delta, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Здесь C_3 — некоторое не зависящее от δ число.

Таким образом, выходы $g(t)$ и $G(t)$ двух блок-схем на рисунках 9 и 10 мало отличаются друг от друга и можно перейти (с точки зрения асимптотики по δ) на следующий уровень описания — на уровень фазовых соотношений 2).

В этом случае блок-схема на рис. 8 перейдет в следующую блок-схему на рис. 11.

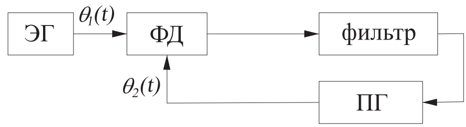

Рис. 11. Блок-схема ФАП на уровне фазовых соотношений

Доказательство теоремы 5. Очевидно, что при $t \in [0, T]$

$$g(t) - G(t) = \int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[A_1 A_2 \sin(\omega_1(s)s + \psi_1)\times$$

$$\times\ \sin(\omega_2(s)s + \psi_2) - \varphi(\omega_1(s)s - \omega_2(s)s + \psi_1 - \psi_2)]\,ds =$$

$$= -\frac{A_1 A_2}{2}\int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[\cos\left((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2\right)]\,ds.$$

Рассмотрим промежутки $[k\delta, (k+1)\delta]$, где $k = 0, \ldots, m$, а число m такое, что

$$t \in [m\delta, (m+1)\delta].$$

Из условий (3.1) следует, что на каждом из промежутков $[k\delta, (k+ +1)\delta]$ справедливы соотношения

$$\gamma(t-s) = \gamma(t-k\delta) + O(\delta), \tag{3.2}$$

$$\omega_1(s) + \omega_2(s) = \omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta) + O(\delta) \tag{3.3}$$

при любом $s \in [k\delta, (k+1)\delta]$. Но тогда из соотношения (3.3) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\cos\left((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2\right) &= \\ = \cos\left((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2\right) &+ O(\delta)\end{aligned} \tag{3.4}$$

для любого $s \in [k\delta, (k+1)\delta]$.

Из соотношений (3.2) и (3.4) следует, что

$$\int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[\cos\left((\omega_1(s) + \omega_2(s))s + \psi_1 + \psi_2\right)]\,ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \gamma(t-k\delta) \int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta} [\cos\left((\omega_1(k\delta) + \omega_2(k\delta))s + \psi_1 + \psi_2\right)]\,ds + O(\delta). \tag{3.5}$$

Из последнего неравенства (3.1) и из того факта, что R — достаточно большое по отношению к δ число, следует оценка

$$\int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta} [\cos((\omega_1(k\delta)+\omega_2(k\delta))s+\psi_1+\psi_2)]\,ds = O(\delta^2).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[\cos((\omega_1(s)+\omega_2(s))s+\psi_1+\psi_2)]\,ds = O(\delta).$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь высокочастотные импульсные генераторы, соединенные по схеме на рис. 8. Здесь

$$f_j(t) = A_j \operatorname{sign}\,\sin(\omega_j(t)t+\psi_j).$$

Колебания такого вида характерны для импульсных последовательностей тактовых генераторов [2, 27, 28, 36–39, 42, 58, 65, 74], центрированных относительно нулевого напряжения. Перемножитель колебаний здесь может выполнен на логическом элементе «исключающее или» [38, 42].

Как и ранее будем здесь предполагать, что выполнены условия (3.1).

Рассмотрим теперь 2π-периодическую функцию $\varphi(\theta)$ следующего вида:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} A_1A_2(1+2\theta/\pi) \text{ при } \theta\in[-\pi,0], \\ A_1A_2(1-2\theta/\pi) \text{ при } \theta\in[0,\pi]. \end{cases} \tag{3.6}$$

и блок-схемы на рисунках 9 и 10.

Теорема 6 ([27, 28, 65]). *Если выполнены условия* (3.1) *и характеристика фазового детектора* $\varphi(\theta)$ *имеет вид* (3.6), *то при одних и тех же начальных состояниях фильтра имеет место соотношение*

$$|G(t)-g(t)| \leqslant C_4\delta \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Здесь C_4 *— некоторое, не зависящее от* δ *число.*

Доказательство. Очевидно, что при $t\in[0,T]$

$$g(t)-G(t) = \int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[A_1A_2 \operatorname{sign}\,[\sin(\omega_1(s)s+$$

$$+\ \psi_1)\sin(\omega_2(s)s+\psi_2)] - \varphi(\omega_1(s)s-\omega_2(s)s+\psi_1-\psi_2)]\,ds.$$

Как и в доказательстве теоремы 5 рассмотрим промежутки $[k\delta, (k+1)\delta]$ и воспользуемся соотношениями (3.2)–(3.4) для того, чтобы получить оценку

$$\int\limits_0^t \gamma(t-s)\,[A_1A_2\mathrm{sign}\;[\sin(\omega_1(s)s+\psi_1)\sin(\omega_2(s)+\psi_2)] -$$

$$- \varphi(\omega_1(s)s-\omega_2(s)s+\psi_1-\psi_2)]\,ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \gamma(t-k\delta)\Bigg[\int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta} A_1A_2\mathrm{sign}\;[\cos((\omega_1(k\delta)-\omega_2(k\delta)k\delta+\psi_1-\psi_2) -$$

$$- \cos((\omega_1(k\delta)+\omega_2(k\delta))s+\psi_1+\psi_2)]\,ds -$$

$$- \varphi((\omega_1(k\delta)-\omega_2(k\delta)+\psi_1-\psi_2)\delta] + O(\delta^2)\Bigg].$$

Отсюда и из соотношения

$$A_1A_2 \int\limits_{k\delta}^{(k+1)\delta} \mathrm{sign}\;[cos\alpha - \cos(Rs+\psi_0)]\,ds = \varphi(\alpha)\delta + O(\delta^2),$$

которое выполнено при любом $\alpha \in [-\pi, \pi]$, любом ψ_0 и при достаточно большом относительно числа δ числе R, получим утверждение теоремы 6. □

Теорема 6 является основой для синтеза систем фазовой автоподстройки с импульсными генераторами. Она позволяет провести для импульсных тактовых генераторов параллельное рассмотрение двух блок-схем: на уровне электронной реализации (рис. 8) и на уровне фазовых соотношений (рис. 11), где можно применять общие принципы теории фазовой синхронизации.

Таким образом, возможно построение теории фазовой синхронизации распределенных систем тактовых генераторов в многопроцессорных кластерах [27, 28, 65].

Сделаем теперь одно замечание, необходимое для вывода дифференциальных уравнений системы ФАП.

Рассмотрим величину

$$\dot\theta_j(t) = \omega_j(t) + \dot\omega_j(t)\,t.$$

Для правильно синтезированной, а именно обладающей свойством глобальной устойчивости, системы ФАП имеет место экспоненциальное затухание величины $\dot\omega_j(t)$:

$$|\dot\omega_j(t)| \leqslant Ce^{-\alpha t}.$$

Здесь C и α — некоторые, не зависящие от t, положительные числа. Поэтому величина $\dot{\omega}_j(t)t$, как правило, достаточно мала по отношению к числу R (см. условие (3.1)).

Из приведенных выше соотношений можно сделать вывод о том, что имеет место следующее приближенное равенство:

$$\dot{\theta}_j(t) = \omega_j(t). \tag{3.7}$$

При выводе дифференциальных уравнений систем ФАП используют блок-схему на рис. 11 и соотношение (3.7), которое принимают точным.

Заметим, что закон управления подстраиваемым генератором принимается линейным:

$$\omega_2(t) = \omega_2(0) + LG(t). \tag{3.8}$$

Здесь $\omega_2(0)$ — начальная частота подстраиваемого генератора, L — некоторое число, $G(t)$ — управляющий сигнал, который является выходом фильтра (рис. 11).

Таким образом, уравнение системы ФАП имеет вид

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(0) + L\Big(\alpha_0(t) + \int\limits_0^t \gamma(t-\tau)\ \varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))\,d\tau\Big).$$

Принимая, что эталонный генератор высокостабилен, т. е. $\omega_1(t) \equiv \equiv \omega_1(0)$, отсюда получим следующие уравнения системы ФАП:

$$(\theta_1(t) - \theta_2(t))^\bullet + L\Big(\alpha_0(t) + \int\limits_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))\,d\tau\Big) = \\ = \omega_1(0) - \omega_2(0). \tag{3.9}$$

Это — уравнение типовой системы ФАП [43, 44].

Заметим, что если фильтр является интегрирующим с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

и $\varphi(\theta) = \sin\theta$, то уравнение (3.9) эквивалентно уравнению (2.4) с $\theta = = \theta_1 - \theta_2$, $b = L$, $\gamma = \omega_1(0) - \omega_2(0)$.

Используя рассуждения, проведенные при доказательствах теорем 5 и 6, можно получить соотношение

$$\int\limits_0^t [f_1(\tau)f_2(\tau) - \varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))]\,d\tau = O(\delta).$$

Это соотношение является аналогом теорем 5 и 6, когда $K(p) = p^{-1}$. Из равенств (3.4) и (3.5) следует, что подстраиваемый генератор можно рассматривать как идеальный интегратор с передаточной функцией $K(p) = Lp^{-1}$. Отсюда следует, что в системах ФАП можно применять фильтры с передаточными функциями более общего вида:

$$K(p) = a + W(p),$$

где a — некоторое число, $W(p)$ — правильная дробно-рациональная функция. В этом случае вместо уравнения (3.9) получим уравнение

$$(\theta_1(t) - \theta_2(t))^\bullet + L\Big[a(\varphi(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + \\ + \alpha_0(t) + \int\limits_0^t \gamma(t-\tau)\varphi(\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau))d\tau\Big] = \omega_1(0) - \omega_2(0). \quad (3.10)$$

4. Самосинхронизация неуравновешенных роторов

Явление самосинхронизации неуравновешенных роторов, находящихся на общем упругом основании, было открыто в середине двадцатого века [1, 10–14, 33, 73].

Рассмотрим это явление на примере двухвибраторной системы (рис. 12) [33]. Электрический привод левого вибратора создает силовой момент, который вращает вибратор с заданной угловой скоростью ω. Привод правого вибратора создает силовой момент $M \geqslant 0$.

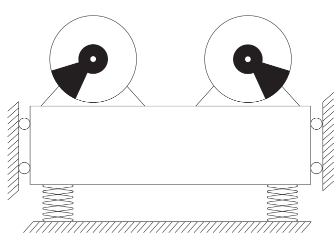

Рис. 12. Платформа с дебалансными вибраторами

Пренебрегая влиянием динамики правого вибратора на движения платформы и левого вибратора (вспомним аналогичное предположение для обмоток статора при рассмотрении модели электродвигателей), получим, что точка подвеса физического маятника, которым является правый вибратор, совершает вертикальные колебания вида $A\cos\omega t$.

Хорошо известно [33], что в этом случае динамика правого ротора описывается дифференциальным уравнением

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + meA\omega^2\cos\omega t\sin\varphi = mge\sin\varphi + M. \quad (4.1)$$

Здесь I — момент инерции ротора, m — его масса, e — эксцентриситет, k — коэффициент вязкого трения, φ — угол поворота ротора.

Введем обозначение

$$\theta = \varphi - \omega t$$

и преобразуем уравнение (4.1) к виду

$$I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{meA\omega^2}{2}(\sin\theta + \sin(\theta + 2\omega t)) - mge\sin(\theta + \omega t) = M - k\omega. \tag{4.2}$$

Примем теперь методику, развитую при анализе и синтезе систем ФАП.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{k}{I}, \quad \beta = \frac{meA\omega^2}{2I}, \quad \gamma = \frac{M - k\omega}{I}, \quad \rho = \frac{mge}{I}$$

и предположим, что величина ω достаточно большая по отношению к $\alpha, \alpha^{-1}, \beta$, γ и ρ. Кроме того, предположим, что

$$\beta > |\gamma|. \tag{4.3}$$

В этом случае уравнение

$$\ddot{\sigma} + \alpha\dot{\sigma} + \beta\sin\sigma = \gamma \tag{4.4}$$

имеет в фазовом пространстве области притяжения устойчивых положений равновесия (рис. 7)

Будем рассматривать уравнение (4.4) как уравнение сравнения для уравнения (4.2).

Покажем, что на любом конечном прометужке $[0, T]$ при достаточно больших ω разность решений $\theta(t)$ и $\sigma(t)$ уравнений (4.2) и (4.4) с одними и теми же начальными данными

$$\theta(0) = \sigma(0), \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\sigma}(0), \quad |\dot{\theta}(0)| \leqslant \frac{2\beta + |\gamma| + \rho}{\alpha} \tag{4.5}$$

достаточно мала. Для этого запишем уравнение (4.2) в интегральной форме:

$$\theta(t) = \nu(t) + \int\limits_0^t \gamma(t - \tau)\left[\sin\theta(\tau) + \sin(\theta(\tau) + 2\omega\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{\rho\sin(\theta(t) + \omega\tau)}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta}\right] d\tau.$$

Аналогичная интегральная форма для уравнения (4.4) имеет вид

$$\sigma(t) = \nu(t) + \int\limits_0^t \gamma(t - \tau)\left[\sin\sigma(\tau) - \frac{\gamma}{\beta}\right] d\tau.$$

Здесь $\theta(0) = \sigma(0)$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\sigma}(0)$,

$$\nu(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\dot{\theta}(0) + \theta(0), \tag{4.6}$$

$$\gamma(t) = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{4.7}$$

Так же, как при доказательстве теоремы 5, здесь получим соотношение

$$\int_0^t \gamma(t-\tau)\left[\sin(\theta(\tau)+2\omega\tau)-\frac{\rho}{\beta}\sin(\theta(\tau)+\omega\tau)\right]d\tau = O(\delta).$$

Здесь учитывается, что $\gamma(t)$ и $\theta(t)$ — медленно меняющиеся на интервалах $[k\delta,(k+1)\delta]$ функции.

В самом деле, для функции $\gamma(t)$ это следует из соотношения (4.7).

Хорошо известно, что для уравнения (4.2) из условий (4.5) следует оценка

$$|\dot\theta(t)| \leqslant \frac{2\beta+|\gamma|+\rho}{\alpha} \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что $\theta(t)$ медленно изменяется на $[k\delta,(k+1)\delta]$. При этом функции $\sin(\theta(t)+2\omega t)$ и $\cos(\theta(t)+\omega t)$ быстро осциллируют на $[k\delta,(k+1)\delta]$.

Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 7. *Для любых* $T>0$ *и* $\delta>0$ *существует число* $\omega>0$, *достаточно большое по отношению к* α, α^{-1}, β, $|\gamma|$ *и* ρ *и такое, что для решений* $\theta(t)$ *и* $\sigma(t)$ *уравнений* (4.1) *и* (4.4) *с начальными данными* (4.5) *выполнено неравенство*

$$|\theta(t)-\sigma(t)| \leqslant \delta \qquad \forall\, t\in[0,T]. \tag{4.8}$$

Из этой теоремы и из неравенства (4.3) следует, что для уравнения (4.1) при фиксированных значениях α,β,γ,ρ, $T>0$, удовлетворяющих (4.3), для достаточно больших ω наблюдается вращение правого ротора с частотой ω на временном промежутке $[0,T]$ при начальных условиях $\dot\varphi(0)=0$, $\sin\varphi(0)=\gamma/\beta$, $\varphi(0)\in(0,\pi/2)$. Этот же эффект наблюдается и при начальных условиях $\varphi(0)=\sigma(0)$, $\dot\varphi(0)=\dot\sigma(0)$ из области притяжения устойчивого положения равновесия $\dot\sigma(0)=0$, $\sigma(0)\in$ $\in(-\pi/2,\pi/2)$, $\sin\sigma(0)=\gamma/\beta$.

Напомним, что при $M=0$ и при некоторых значениях параметров α,β,γ,ρ для достаточно больших ω в некоторой окрестности начальных условий $\dot\varphi(0)=0$, $\varphi(0)=0$ и $\dot\varphi(0)=0$, $\varphi(0)=\pi$ наблюдается устойчивость этих состояний равновесия [20, 30, 75].

5. Уравнения систем фазовой синхронизации

Отметим вначале, что при рассмотрении и синхронных машин, и систем ФАП, и неуравновешенных роторов приходим к анализу дифференциального уравнения

$$\ddot\theta+\alpha\dot\theta+\sin\theta=\gamma. \tag{5.1}$$

Однако в более сложных случаях уравнения систем ФАП и синхронных машин имеют различную структуру.

В том случае, когда передаточная функция фильтра $a + W(p)$ невырожденна, т. е. ее числитель и знаменатель не имеют общих корней, уравнение (3.10) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot z &= Az + b\psi(\sigma), \\ \dot\sigma &= c^* z + \rho\psi(\sigma). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь A — постоянная $n \times n$-матрица, b и c — постоянные $n \times n$-векторы, $\psi(\sigma)$ — 2π-периодическая функция, удовлетворяющие соотношениям $\rho = -aL$,

$$W(p) = Lc^*(A - pI)^{-1}b,$$
$$\psi(\sigma) = \varphi(\sigma) - \frac{\omega_1(0) - \omega_2(0)}{L(a + W(0))}.$$

Заметим, что в (5.2) $\sigma = \theta_1 - \theta_2$.

Из невырожденности $a + W(p)$ следует [16, 30, 59] полная управляемость пары (A, b) и полная наблюдаемость пары (A, c). Последнее означает выполнение неравенств

$$\det(b, Ab, \cdots, A^{n-1}b) \neq 0,$$
$$\det(c, A^*c, \cdots, (A^*)^{n-1}c) \neq 0.$$

Дискретная система фазовой автоподстройки частоты описывается аналогичными уравнениями [29]:

$$\begin{aligned} z(t+1) &= Az(t) + b\psi(\sigma(t)), \\ \sigma(t+1) &= \sigma(t) + c^* z(t) + \rho\psi(\sigma(t)). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь $t \in Z$, где Z — множество целых чисел.

Уравнения (5.2) и (5.3) — это уравнения так называемых типовых систем ФАП [43].

Имеется много различных модификаций систем ФАП, уравнения которых приведены в [15, 18, 26, 29, 32, 34, 35, 43, 45, 53, 54, 59, 61–63, 66, 67].

Приведем здесь уравнения астатической системы ФАП, управляющей тактовыми генераторами в цифровых сигнальных процессорах [27, 28, 65]. Блок-схема такой системы отличается от блок-схемы на рис. 11 с характеристикой фазового детектора (3.6) лишь тем, что после фильтра включен релейный элемент с характеристикой $u(G) = \operatorname{sign} G$. В этом случае получим следующие уравнения системы ФАП:

$$\begin{aligned} \dot z &= Az + b\varphi(\sigma), \\ \dot\sigma &= g(c^* z), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\sigma = \theta_1 - \theta_2$, матрица A и векторы b и c таковы, что

$$W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b,$$
$$g(G) = -L(\operatorname{sign} G) + (\omega_1(0) - \omega_2(0)).$$

Напомним, что здесь предполагается высокостабильность эталонного генератора: $\dot{\theta}_1(t) \equiv \omega_1(t) \equiv \omega_1(0)$.

Широкий класс синхронных электрических машин описывается следующей системой дифференциальных уравнений [16, 24, 77]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -g(\eta, \sigma) + z^* C f(\sigma) - \varphi(\sigma), \\ \frac{dz}{dt} &= Az + Df(\sigma)\eta, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, D и C — $n \times m$-матрицы, $f(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая m-мерная вектор-функция, $\varphi(\sigma)$ и $g(\eta, \sigma)$ — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\mu_1 \leqslant \frac{g(\eta, \sigma)}{\eta} \leqslant \mu_2 \quad \forall\, \eta \neq 0,\ \forall\, \sigma \in R^1,$$

$$\varphi(\sigma + 2\pi) = \varphi(\sigma), \quad g(\eta, \sigma + 2\pi) = g(\eta, \sigma), \quad \forall\, \eta \in R^1,\ \forall\, \sigma \in R^1.$$

Здесь μ_1 и μ_2 — неотрицательные числа.

Заметим, что система (2.1), (2.2) может быть записана в виде (5.5) с

$$\sigma = -\theta, \quad \eta = -\dot{\theta}, \quad z = \begin{pmatrix} i_1 - e/R \\ i_2 \end{pmatrix},$$

$$g(\eta, \sigma) = 0, \quad \varphi(\sigma) = \frac{\beta S B e}{IR} \sin\sigma - \frac{M}{I}, \quad f(\sigma) = \frac{SB}{L} \begin{pmatrix} \sin\sigma \\ \cos\sigma \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = -\frac{\beta L}{I} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Синхронные двигатели с двумя демпферными обмотками, питающиеся от мощной сети, описываются уравнениями (5.5) с трехмерным вектором z, компонентами которого являются токи в обмотке возбуждения и в двух демпферных обмотках [47].

Различные обобщения и модификации приведенных здесь уравнений (5.5) имеются в [25, 62].

6. Некоторые общие понятия теории фазовой синхронизации

В предыдущих разделах были приведены уравнения систем фазовой синхронизации. Они различны, но их общей чертой является наличие угловых координат. Важным свойством всех систем, встречающихся в приложениях, является свойство устойчивости.

Наличие угловой координаты позволяет ввести цилиндрическое фазовое пространство. Для этого рассмотрим n-мерное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x \in R^n, \ t \in R^1. \tag{6.1}$$

Здесь $F(t, x)$ — вектор-функция, определенная на $R^1 \times R^n$.

Предположим, что для линейно независимых векторов $d_j \in R^n$ ($j = 1, \ldots, m$) справедливы тождества

$$F(t, x + d_j) = F(t, x) \qquad \forall\, x \in R^n, \ \forall\, t \in R^1. \tag{6.2}$$

Часто скалярную величину $d_j^* x/|d_j|$ называют угловой координатой. Для системы (2.8), например,

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \theta \\ \eta \end{pmatrix}, \qquad \frac{d_1^* x}{|d_1|} = \theta.$$

Введем в рассмотрение дискретную группу

$$\Gamma = \Big\{ x = \sum_{j=1}^{m} k_j d_j \,|\, k_j \in Z, \ j = 1, \ldots, m \Big\}.$$

Здесь Z — множество целых чисел.

Рассмотрим фактор-группу R^n/Γ, элементами которой являются классы вычетов

$$[x] = \{ x + u \,|\, \forall\, u \in \Gamma, \ x \in R^n \}.$$

Далее введем так называемую плоскую метрику

$$\rho([x], [y]) = \inf_{\substack{z \in [x] \\ v \in [y]}} |z - v|. \tag{6.3}$$

Здесь $z \in R^n, \ v \in R^n, \ | \cdot |$ — евклидова норма в R^n.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $x(t)$ — решение уравнения* (6.1)*, определенное на интервале (t_1, t_2), то $x(t) + k d_j, \ k \in Z$, также является решением уравнения* (6.1) *на интервале* (t_1, t_2).

Из предложения 1 следует, что введенное таким образом метрическое пространство R^n/Γ в автономном случае (т. е. когда $F(t, x) \equiv F(x)$) является фазовым пространством системы (6.1). Это означает, что это пространство разбивается на непересекающиеся траектории системы (6.1), если есть факт существования и единственности траекторий в R^n. Часто такое пространство удобно для исследования и в общем неавтономном случае, когда имеется зависимость правой части (6.1) от времени.

Пространство R^n/Γ часто называют цилиндрическим фазовым пространством, так как оно диффеоморфно поверхности цилиндра

$$\underbrace{C \times C \times \ldots \times C}_{m} \times \underbrace{R^1 \times \ldots \times R^1}_{n-m}.$$

Здесь C — окружность.

Часто пространство R^n/Γ с метрикой (6.3) оказывается более удобным, чем пространство R^n.

Во-первых, для R^n/Γ исчезает та многозначность, которая связана с угловыми координатами: всем значениям угловой координаты $\sigma + 2k\pi$ соответствует только одно состояние реальной системы.

Во-вторых, здесь может быть введено естественным образом понятие ограниченности решений системы (6.1) в пространстве R^n/Γ относительно метрики (6.3). Такая ограниченность означает ограниченность решений в исходном пространстве R^n только по неугловым координатам (а также, быть может, и по некоторым угловым координатам, если их число больше, чем m).

В-третьих, для автономного случая естестественным образом вводится классификация циклов. Поясним это более подробно.

Пусть правая часть уравнения (6.1) не зависит от времени (т. е. $F(t,x) \equiv F(x)$).

Как обычно, решение $x(t)$ системы (6.1) называем циклом первого рода, если $x(t)$ не является состоянием равновесия и существует число $T > 0$ такое, что

$$x(t+T) = x(t) \quad \forall\, t \in R^1. \tag{6.4}$$

Определение 1. Решение $x(t)$ будем называть *циклом второго рода*, если существуют такие числа $T > 0$ и $k \in Z$, $k \neq 0$, что выполнено соотношение

$$x(t+T) = x(t) + kd_j \quad \forall\, t \in R^1. \tag{6.5}$$

Здесь d_j — один из введенных ранее векторов из R^n.

Ясно, что циклы второго рода являются замкнутыми траекториями $[x(t)]$ в цилиндрическом фазовом пространстве и теряют свойство замкнутости при переходе к фазовому пространству R^n.

Классификация циклов второго рода может быть продолжена введением гомотопных классов циклов, число которых определяется порядком связности цилиндрического фазового пространства [7]. Однако для теории фазовой синхронизации часто бывает достаточным установления свойства (6.5).

Определение 2. Решение $x(t)$ системы (6.1) будем называть *круговым*, если существуют числа $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$d_j^* \dot{x}(t) \geqslant \varepsilon, \ \forall\, t \geqslant T. \tag{6.6}$$

Заметим, что для системы (2.8) это неравенство приобретает вид

$$\dot{\theta}(t) = \eta(t) \geqslant \varepsilon/2\pi.$$

Такие решения существуют при $\alpha < \alpha(\gamma)$ и соответствуют круговым движениям маятника вокруг точки подвеса.

Таким образом, введенное понятие кругового решения является некоторым обобщением этого понятия для системы (2.8), описывающей, в частности, движение маятника.

Перейдем теперь к определениям глобальной устойчивости системы (6.1), которые важны для систем фазовой синхронизации

Будем предполагать, что любое решение системы (6.1) $x(t, t_0, x_0)$ с начальными данными $x(t_0, t_0, x_0)$ существует и определено при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 3 ([77]). Систему (6.1) будем называть *дихотомичной (dichotomic)*, если любое ее ограниченное на $[t_0, +\infty)$ решение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному множеству.

Определение 4 ([56, 77]). Систему (6.1) будем называть *системой градиентного типа (gradient-like)*, если любое ее решение стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия.

Если в цилиндрическом фазовом пространстве R^n/Γ стационарное множество состоит из одного локально асимптотически устойчивого состояния равновесия, а остальные состояния равновесия неустойчивы по Ляпунову, то такую систему градиентного типа будем называть глобально устойчивой.

С точки зрения теории фазовой синхронизации термин «глобальная устойчивость» более приемлем, чем термин «система градиентного типа», поскольку здесь физически наблюдается только единственный глобально устойчивый синхронизм. И такая терминология наиболее распространена в инженерной практике.

В электронных системах фазовой синхронизации иногда оказывается приемлемым более слабый тип устойчивости — так называемая устойчивость по Бакаеву [29].

Для определения этого типа устойчивости предположим, что m — это максимальное число линейно независимых векторов d_j, для которых справедливо тождество (6.2), система $\{d_j\}$ — ортогональна, т. е. $d_k^* d_j = 0$, если $k \neq j$, и для векторов вида λd_j, где $\lambda \in (0, 1)$, не выполнены тождества (6.2).

Определение 5. Будем говорить, что система (6.1) *устойчива по Бакаеву*, если для любого ее решения $x(t, t_0, x_0)$ существует число $T \geqslant t_0$ такое, что выполнены неравенства

$$|d_j^*(x(t_1, t_0, x_0) - x(t_2, t_0, x_0))| \leqslant |d_j|^2 \tag{6.7}$$

при всех $t_1 \geqslant T,\ t_2 \geqslant T,\ j = 1, \ldots, m.$

Заметим, что при анализе устойчивых по Бакаеву систем ФАП необходимо проводить специальное исследование адекватности дифференциальных уравнений (6.1) тем блок-схемам, которые описывают фазовые отношения (см. рис. 11 и условие (3.7)).

В том случае, когда уравнение (6.1) глобально устойчиво, использование теории первого приближения в окрестности устойчивого состояния равновесия позволяет, как правило, сделать вывод об экспоненциальном затухании переходных процессов. Этот факт обосновывает переход к равенству (3.7) и, тем самым, обосновывает переход от блок-схемы на рис. 11 к дифференциальным уравнениям (5.2).

Отметим, что различные подходы к определению понятия «синхронизация» имеются в работах [40, 49–51, 70, 71].

Для исследования глобальной устойчивости систем фазовой синхронизации оказалось возможным провести некоторую модификацию классического прямого метода Ляпунова. Такая модификация будет описана в следующем разделе.

7. Прямой метод Ляпунова для систем фазовой синхронизации

Теорема 8. *Предположим, что существует непрерывная функция* $V(x) : R^n \to R^1$ *такая, что выполнены следующие условия:*

1) $V(x+q) = V(x)$, $\forall\, x \in R^n$, $\forall\, q \in \Gamma$,
2) $V(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} (d_j^* x)^2 \to +\infty$ *при* $x \to \infty$,
3) *для любого решения* $x(t)$ *системы* (6.1) *функция* $V(x(t))$ *является невозрастающей.*

Тогда любое решение $[x(t)]$ *системы* (6.1) *ограничено на* $[t_0, +\infty)$ *в цилиндрическом пространстве* R^n/Γ.

Доказательство. Из условия 1) теоремы следует, что можно определить функцию $V([x]) : R^n/\Gamma \to R^1$ по формуле $V([x]) = V(x)$. При этом из условия 2) следует, что

$$V([x]) \to +\infty \text{ при } [x] \to \infty. \tag{7.1}$$

Предположим теперь, что решение $[x(t)]$ не является ограниченным на $[t_0, +\infty)$. В этом случае существует последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что

$$[x(t_k)] \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Отсюда и из условия (7.1) следует, что

$$V([x(t_k)]) \to +\infty \text{ при } k \to \infty.$$

Последнее противоречит условию 3) теоремы. Полученное противоречие доказывает ограниченность $[x(t)]$ в R^n/Γ. □

Предположим теперь, что система (6.1) автономна ($F(t, x) \equiv F(x)$) и ее стационарное множество состоит из изолированных точек.

Теорема 9. *Предположим, что существует функция $V(x) : R^n \to$ $\to R^1$ такая, что выполнены условия* 1)–3) *теоремы 8 и условие*

4) *если $V(x(t)) \equiv V(x(0))$, то $x(t) \equiv const$.*

Тогда система (6.1) *является системой градиентного типа.*

Доказательство. Напомним, что точка $[p]$ называется ω-предельной для траектории $[x(t)]$, если существует последовательность $t_k \to \infty$ такая, что
$$[p] = \lim_{k\to\infty} [x(t_k)].$$

Напомним также [16, 77], что через ω-предельную точку $[p]$ проходит траектория $[y(t)]$, целиком состоящая из ω-предельных точек траектории $[x(t)]$ (этот факт обычно называют инвариантностью ω-предельного множества).

Из теоремы 8 следует ограниченность $[x(t)]$ при $t \geqslant 0$. Отсюда и из непрерывности $V([x(t)])$ следует ограниченнось при $t \geqslant 0$ функции $V[x(t)]$. Поэтому из условия 3) следует существование предела
$$\lim_{t\to+\infty} V([x(t)]) = V_0.$$

Но тогда $V([y(t)]) \equiv V_0$. В этом случае из условия 4) получим, что $y(t) \equiv \text{const}$. Из этого тождества и из изолированности точек стационарного множества системы (6.1) получим, что эта система является системой градиентного типа. □

Теорема 9 является распространением широко известных теоремы Барбашина–Красовского [6] и принципа Ла–Салля [21, 31] на системы с цилиндрическим фазовым пространством. Различные ее варианты приводились в [4, 26, 77].

Рассмотрим теперь основные особенности применения теорем 8 и 9 к системам вида (5.2). Для таких систем хорошо известна процедура построения функций ляпуновского типа вида «квадратичная форма от координат (т. е. от вектора z) и, возможно, от нелинейности (т. е. от $\psi(\sigma)$) плюс интеграл от нелинейности»:
$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int\limits_0^\sigma \psi(\sigma)\, d\sigma. \tag{7.2}$$

Здесь H — некоторая симметричная $(n+1)\times(n+1)$-матрица.

С помощью такого вида функций для систем (5.2) с угловой координатой σ можно получить условия дихотомичности. Условия градиентности могут быть получены таким методом только при условии
$$\int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

В том случае, когда это соотношение не выполнено, была разработана процедура [16, 77] построения периодических ляпуновских функций вида

$$V = \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix}^* H \begin{pmatrix} z \\ \psi \end{pmatrix} + \int\limits_0^\sigma F(\sigma)\, d\sigma, \tag{7.3}$$

где

$$F(\sigma) = \psi(\sigma) - \nu|\psi(\sigma)|. \tag{7.4}$$

Здесь число ν выбирается так, чтобы функция V была периодичной по σ:

$$\nu = \int\limits_0^{2\pi} \psi(\sigma)\, d\sigma \left(\int\limits_0^{2\pi} |\psi(\sigma)|\, d\sigma \right)^{-1}. \tag{7.5}$$

Сформулируем частотный критерий, полученный с помощью ляпуновских функций вида (7.3)–(7.5) и частотной теоремы Якубовича–Калмана [16, 29, 77] для системы (5.2).

Будем предполагать, что функция $\psi(\sigma)$ дифференцируема, имеет изолированные нули и для некоторых чисел μ_1 и μ_2 выполнены условия

$$\mu_1 \leqslant \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} \leqslant \mu_2 \qquad \forall \sigma \in R^1. \tag{7.6}$$

Введем также в рассмотрение передаточную функцию

$$K(p) = c^*(A - pI)^{-1}b - \rho.$$

Теорема 10. *Пусть матрица A устойчива и существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\tau \geqslant 0$ и $\varkappa$ такие, что выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\{\varkappa K(i\omega) - \varepsilon|K(i\omega)|^2 - \\ &\quad -\tau(K(i\omega) + \mu_1^{-1} i\omega)^*(K(i\omega) + \mu_2^{-1} i\omega)\} > \delta \qquad \forall\, \omega \in R^1, \quad (7.7) \\ &4\varepsilon\delta > (\varkappa\nu)^2. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Тогда система (5.2) *является системой градиентного типа.*

Напомним, что матрицу A называют устойчивой, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Некоторые обобщения этой теоремы и ее применение к различным системам ФАП имеются в [16, 29, 77].

Для системы (5.4) в случае $n = 1$ периодическая по σ функция Ляпунова строится очень просто:

$$V = -\int\limits_0^{c^*z} g(y)\, dy + c^*b \int\limits_0^\sigma \varphi(u)\, du.$$

Легко видеть, что

$$\dot{V} = -Ac^* z g(c^* z) < 0 \qquad \forall\, c^* z \neq 0$$

при $A < 0$ и $L > |\omega_1(0) - \omega_2(0)|$. Напомним, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(u)\, du = 0.$$

Такая конструкция и небольшие дополнительные рассуждения позволяют доказать следующую важную для синтеза систем ФАП в цифровых сигнальных процессорах теорему.

Теорема 11 ([27, 28, 65]). *Если выполнены неравенства* $A < 0$ *и*

$$|L| > |\omega_1(0) - \omega_2(0)|,$$

то система (5.4) *с* $n = 1$ *является системой градиентного типа.*

Если $|L| < |\omega_1(0) - \omega_2(0)|$, *то все решения этой системы стремятся к бесконечности при* $t \to +\infty$.

До сих пор неясно, как этот результат распространить на системы вида (5.4) большей размерности (т. е. когда $n > 1$). Актуальность этой задачи связана с возможностями применения более сложных фильтров в таких астатических системах ФАП.

Применим теперь метод построения периодических функций Ляпунова к анализу синхронных машин.

Для системы (5.5) рассмотрим функцию ляпуновского типа

$$V = z^* H z + \frac{1}{2}\eta^2 + \int\limits_0^{\sigma} \varphi(\sigma)\, d\sigma. \tag{7.9}$$

В том случае, когда отсутствует момент нагрузки ($M = 0$), имеет место равенство

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\, d\sigma = 0 \tag{7.10}$$

и функция V обладает свойством периодичности по координате σ.

Симметричная положительно определенная матрица H выбирается так, чтобы было выполнено неравенство

$$2z^* H(Az + D\xi) + z^* C\xi \leqslant -\varepsilon |z|^2 \qquad \forall\, z \in R^n,\, \forall\, \xi \in R^m \tag{7.11}$$

для некоторого числа $\varepsilon > 0$. По теореме Якубовича–Калмана [77] такая матрица существует, если A — устойчивая матрица и имеют место неравенства

$$K(i\omega) + K(i\omega)^* > 0,\ \forall \omega \in R^1; \tag{7.12}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^2 (K(i\omega) + K(i\omega)^*) > 0. \tag{7.13}$$

Здесь $K(p) = C^*(A - pI)^{-1}D$. Напомним, что неравенство $H > 0$ для симметричной матрицы H означает, что квадратичная форма z^*Hz положительно определена.

Легко видеть, что из соотношения (7.11) и неравенства $\mu_1 \geqslant 0$ следует невозрастание функции $V(z(t), \eta(t), \sigma(t))$, где $z(t), \eta(t), \sigma(t)$ — решение системы (5.5).

Таким образом, если выполнены условия (7.10), (7.12) и (7.13), то для функции V выполнены условия 1)–3) теоремы 8. Проверим, что и условие 4) теоремы 9 здесь также выполнено.

Из соотношения $V(z(t), \eta(t), \sigma(t)) \equiv \mathrm{const}$ и из неравенства (7.11) сразу следует, что $z(t) \equiv 0$. Но тогда $\dot z(t) \equiv 0$ и поэтому $Df(\sigma(t))\eta(t) \equiv$ $\equiv 0$. Легко показать, что из соотношения (7.12) следует равенство $\mathrm{rank} D = m$. Поэтому $f(\sigma(t))\eta(t) \equiv 0$. Отсюда и из равенства $\eta(t) = \dot\sigma(t)$ получим, что

$$\int\limits_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)} f(\sigma)\,d\sigma = 0 \quad \forall\, t \geqslant t_0. \tag{7.14}$$

Если в некоторой точке $t_1 > t_0$ имеем неравенство $\sigma(t_1) \neq \sigma(t_0)$, то из (7.14) получим соотношение

$$\int\limits_{\sigma(t_0)}^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma = 0 \tag{7.15}$$

при всех σ таких, что $(\sigma - \sigma(t_0))(\sigma - \sigma(t_1)) \leqslant 0$. Дифференцируя (7.15) по σ, получим равенство $f(\sigma) = 0$ при $(\sigma - \sigma(t_0))(\sigma - \sigma(t_1)) \leqslant 0$.

Последнее невозможно, если предположить, что

$$f(\sigma) \not\equiv 0 \qquad \forall\, \sigma \in (\theta_1, \theta_2),\ \forall\, \theta_1 < \theta_2. \tag{7.16}$$

Таким образом, если выполнено условие (7.16), то $\sigma(t) \equiv \sigma(t_0)$. Но тогда и $\eta(t) = \dot\sigma(t) \equiv 0$.

Итак, если $V(z(t), \eta(t), \sigma(t)) \equiv \mathrm{const}$, то решение $z(t), \eta(t), \sigma(t)$ является состоянием равновесия. Элементарный анализ системы (5.5) показывает, что состояния равновесия изолированы тогда и только тогда, когда изолированы все нули функции $\varphi(\sigma)$.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 12 ([77]). *Предположим, что* $\mu_1 \geqslant 0$ *и* A *— устойчивая матрица, все нули функции* $\varphi(\sigma)$ *изолированы и выполнены условия* (7.10), (7.12), (7.13), (7.16).

Тогда система (5.5) *является системой градиентного типа.*

По той же схеме доказывается

Теорема 13 ([77]). *Если выполнены все условия теоремы* 12, *кроме* (7.10), *то система* (5.5) *дихотомична.*

Теорема 12 позволяет установить глобальную устойчивость ненагруженной синхронной машины. Это важно в двух случаях: когда машина работает в режиме компенсатора [16] или когда машина запускается без нагрузки, в переходном процессе затягивается в синхронизм и только потом происходит наброс нагрузки. В последнем случае важной является задача определения предельного наброса нагрузки, при которой машина не выпадет из синхронизма. Эта задача может быть также решена с помощью функции Ляпунова (7.9).

Здесь предположим, что синхронному холостому (т. е. без нагрузки) режиму работы соответствует стационарное решение системы (5.5) $z(t) \equiv 0, \eta(t) \equiv 0, \sigma(t) \equiv 0$. Далее в некоторый момент времени τ происходит мгновенный наброс нагрузки M (см. уравнения (2.1), (2.2) как частный случай системы (5.5)). После этого при $t > \tau$ изменяется правая часть системы (5.5).

Здесь изменяется на константу только функция $\varphi(\sigma)$:

$$\varphi(\sigma) \to \varphi(\sigma) - \gamma,$$

а точка $z = 0,\ \eta = 0,\ \sigma = 0$ уже не является состоянием равновесия. Новое локально устойчивое состояние равновесия имеет вид $z = 0, \eta = 0, \sigma = \sigma_0$, где $\varphi(\sigma_0) = \gamma$, $\varphi'(\sigma_0) > 0$ и $\sigma_0 \in [0, 2\pi]$ (рис. 13).

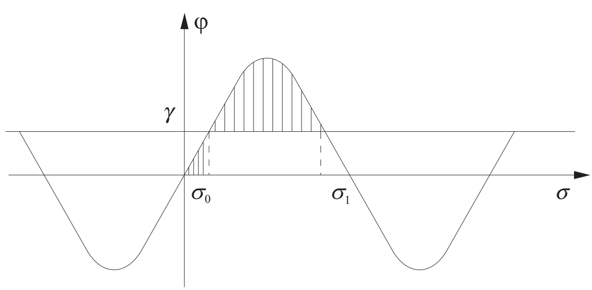

Рис. 13. Метод площадей

Здесь будем предполагать, что на $[0, 2\pi]$ существуют только два нуля функции $\varphi(\sigma) - \gamma$: σ_0 и σ_1, для которого $\varphi'(\sigma_1) < 0$.

Задача о предельной нагрузке ставится так: при каких нагрузках после переходного процесса синхронная машина затянется в новый рабочий синхронный режим $z(t) \equiv 0,\ \eta(t) = \dot\sigma(t) \equiv 0,\ \sigma(t) \equiv \sigma_0$? С математической точки зрения этот вопрос переформулируется следующим образом. Найти условия, при которых решение $z(t), \eta(t), \sigma(t)$ с начальными данными $z(\tau) = 0,\ \eta(\tau) = 0,\ \sigma(\tau) = 0$ находилось бы в области притяжения стационарного решения $z = 0, \eta = 0, \sigma = \sigma_0$:

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} \eta(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty} \sigma(t) = \sigma_0. \tag{7.17}$$

Используя функцию типа (7.9)

$$V = z^* H z + \frac{1}{2}\eta^2 + \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma} (\varphi(\sigma) - \gamma)\, d\sigma$$

(напомним, что теперь при $t > \tau$ система (5.5) изменилась так, что вместо $\varphi(\sigma)$ мы имеем $\varphi(\sigma) - \gamma$) и рассуждения, которые были использованы при доказательстве теоремы 12, можно получить следующий результат.

Теорема 14 ([77]). *Пусть выполнены все условия теоремы* 12. *Тогда для решения системы* (5.5) *с* $\varphi(\sigma) - \gamma$ *вместо* $\varphi(\sigma)$ *и с начальными данными* $z(\tau) = 0, \eta(\tau) = 0, \sigma(\tau) = 0$ *имеют место соотношения* (7.17)*, если*

$$\int\limits_{0}^{\sigma_1} (\varphi(\sigma) - \gamma)\, d\sigma \geqslant 0.$$

Теорема 14 является обоснованием широко применяемого в инженерной практике метода площадей. Он формулируется очень просто: предельно допустимая (максимальная) мгновенная нагрузка на синхронную машину γ определяется так, чтобы заштрихованные на рис. 13 площади были равны.

Часто уравнения синхронных машин рассматривают в других координатах, для которых более подходит следующая общая структура записи:

$$\begin{aligned} &\frac{d\sigma}{dt} = \eta, \\ &\frac{d\eta}{dt} = -g(\eta, \sigma) + y^* C \frac{d\widetilde{f}(\sigma)}{d\sigma} - \widetilde{\varphi}(\sigma), \\ &\frac{dy}{dt} = Ay + \widetilde{D}\widetilde{f}(\sigma) + q. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Здесь $\widetilde{f}(\sigma)$ и $\widetilde{\varphi}(\sigma)$ — 2π-периодические функции, удовлетворяющие тем же условиям, что и $f(\sigma)$ и $\varphi(\sigma)$, $\widetilde{D}$ — постоянная $n \times m$-матрица, q — постоянный n-вектор.

Эта система заменой Льенара

$$y = z - A^{-1}\widetilde{D}\widetilde{f}(\sigma) - A^{-1}q$$

может быть приведена к виду (5.5) с $D = A^{-1}\widetilde{D}$, $f(\sigma) = \frac{d\widetilde{f}(\sigma)}{d\sigma}$

$$\varphi(\sigma) = \widetilde{\varphi}(\sigma) + \left[\frac{d\widetilde{f}(\sigma)}{d\sigma}\right]^* C^* A^{-1} \left[\widetilde{D}\widetilde{f}(\sigma) + q\right].$$

Формально введенные передаточные матрицы

$$K(p) = C^*(A - pI)^{-1}D$$

и

$$\widetilde{K}(p) = C^*(A - pI)^{-1}\widetilde{D}$$

связаны соотношением

$$K(p) = p^{-1}(\widetilde{K}(p) - \widetilde{K}(0)).$$

Поэтому из теоремы 12 вытекает следующий результат.

Теорема 15. *Пусть* $\mu_1 \geqslant 0$*, все стационарные точки системы* (7.18) *изолированы и выполнены следующие условия*:

1) *матрица* $\widetilde{K}(0)$ *диагональна;*
2) $\frac{\widetilde{K}(i\omega)}{i\omega} + \left(\frac{\widetilde{K}(i\omega)}{i\omega}\right)^* > 0 \quad \forall\, \omega \in R^1$*;*
3) $\lim\limits_{\omega \to \infty} \omega^2 \left(\frac{\widetilde{K}(i\omega)}{i\omega} + \left(\frac{\widetilde{K}(i\omega)}{i\omega}\right)^*\right) > 0$*;*
4) $\frac{d\widetilde{f}(\sigma)}{d\sigma} \not\equiv 0$ *на любом* (θ_1, θ_2)*;*
5) $\int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\varphi}(\sigma)\, d\sigma = 0.$

Тогда система (7.18) *является системой градиентного типа.*

Аналогичным образом рассматривается задача о предельной нагрузке синхронной машины.

В качестве примера применения предложенных методов рассмотрим следующие уравнения синхронной машины с нулевой нагрузкой [55, 77]:

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma} = \eta, \\ &\dot{\eta} = (-\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2)\sin\sigma + (\alpha_3 y_3 \cos\sigma - \alpha_4 \sin\sigma\cos\sigma), \\ &\dot{y}_1 = \alpha_5 - \alpha_6 y_1 + \alpha_7 y_2 + \alpha_8 \cos\sigma, \\ &\dot{y}_2 = \alpha_9 y_1 - \alpha_{10} y_2 + \alpha_{11}\cos\sigma, \\ &\dot{y}_3 = -\alpha_{12} y_3 + \alpha_{13}\sin\sigma, \end{aligned} \tag{7.19}$$

где α_j $(j = 1, \ldots, 13)$ — положительные параметры такие, что

$$\alpha_6\alpha_{10} - \alpha_7\alpha_9 > 0.$$

Покажем, что выполнены все условия теоремы 15.

Здесь $g(\eta, \sigma) \equiv 0$, $\widetilde{\varphi}(\sigma) = \alpha_4 \sin\sigma\cos\sigma$

$$\widetilde{f}(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos\sigma \\ -\sin\sigma \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \alpha_5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \alpha_8 & 0 \\ \alpha_{11} & 0 \\ 0 & -\alpha_{13} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_7 & 0 \\ \alpha_9 & -\alpha_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_{12} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K}(p) = \begin{pmatrix} \widetilde{K}_1(p) & 0 \\ 0 & \widetilde{K}_2(p) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_1(p) = -\, &[(\alpha_1\alpha_8 + \alpha_2\alpha_{11})p + \alpha_1\alpha_8\alpha_{10} + \\ &+ \alpha_1\alpha_{11}\alpha_7 + \alpha_2\alpha_{11}\alpha_6 + \alpha_2\alpha_9\alpha_8] \times \\ &\times [(p+\alpha_6)(p+\alpha_{10}) - \alpha_9\alpha_7)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{K}_2(p) = -\frac{\alpha_3\alpha_{13}}{p+\alpha_{12}}.$$

Очевидно, что условия 1)–3) теоремы 15 эквивалентны соотношениям

$$\mathrm{Re}\Big[\frac{\widetilde{K}_j(i\omega)}{i\omega}\Big] > 0 \qquad \forall\,\omega\, \in R^1,\ j = 1, 2,$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\Big\{\omega^2 \mathrm{Re}\Big[\frac{\widetilde{K}_j(i\omega)}{i\omega}\Big]\Big\} > 0,\ \ j = 1, 2.$$

Нетрудно проверить, что эти условия всегда выполнены и, следовательно, система (7.19) является системой градиентного типа.

В случае наброса нагрузки из режима холостого хода можно для системы (7.19) воспользоваться описанным выше методом площадей (рис. 13).

8. Метод положительно инвариантных конусных сеток. Аналог кругового критерия

Этот метод был независимо предложен в [22, 68]. Он является достаточно универсальным и «красивым» с той точки зрения, что здесь используются только два свойства системы: наличие положительно инвариантного одномерного квадратичного конуса и инвариантность векторного поля системы (6.1) при сдвигах на вектор d_j (см. (6.2)).

Итак, предположим, что такой конус вида $\Omega = \{x^*Hx \leqslant 0\}$, где H — симметричная матрица, имеющая одно отрицательное и остальные положительные собственные значения, обладает свойством положительной инвариантности. Последнее означает, что на границе конуса $\partial\Omega = \{xHx = 0\}$ выполнено соотношение

$$\dot{V}(x(t)) < 0$$

при всех $x(t)$ таких, что $x(t) \neq 0$, $x(t) \in \partial\Omega$ (рис. 14).

Теперь за счет второго свойства — инвариантности векторного поля относительно сдвига на векторы kd_j, $k \in Z$ — размножим этот конус таким образом:

$$\Omega_k = \{(x - kd_j)H(x - kd_j) \leqslant 0\}.$$

Поскольку очевидно, что для конусов Ω_k свойство положительной инвариантности сохраняется, получаем положительно инвариантную конусную сетку, изображенную на рис. 15.

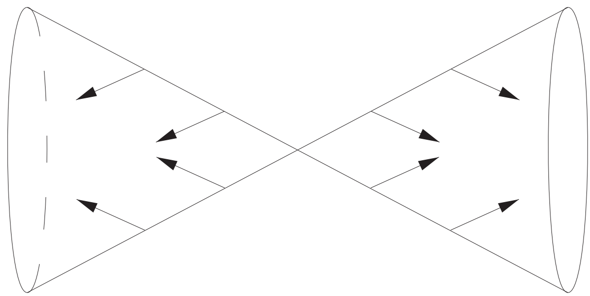

Рис. 14. Положительно инвариантный конус

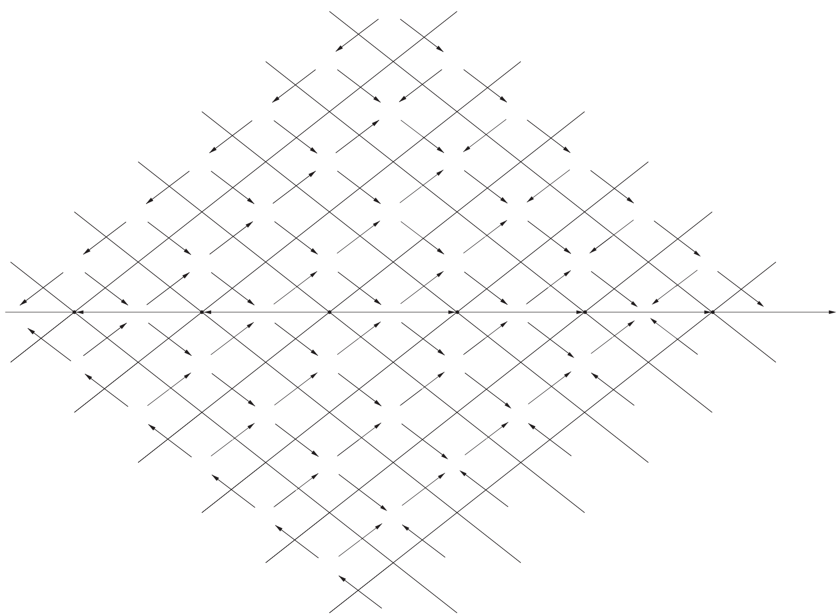

Рис. 15. Положительно инвариантная конусная сетка

Из этого рисунка сразу видно, что все решения $x(t, t_0, x_0)$ системы, которая обладает двумя указанными выше свойствами, ограничены на $[t_0, +\infty)$.

Если конус Ω таков, что он имеет только одну точку пересечения с гиперплоскостью $\{d_j^* x = 0\}$ и все решения $x(t)$, для которых в момент t выполнено неравенство

$$x(t)^* H x(t) \geqslant 0,$$

обладают свойством $\dot{V}(x(t)) \leqslant -\varepsilon |x(t)|^2$ (здесь ε — некоторое положительное число), то из рис. 15 тоже сразу ясно, что система устойчива по Бакаеву.

Таким образом, предложенный здесь метод прост и универсален. Практическую эффективность доставляет ему частотная теорема Якубовича–Калмана [16, 77].

Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(t,\sigma), \;\; \sigma = r^*x, \tag{8.1}$$

где P — постоянная особая $N \times N$-матрица, q, r — постоянные N-мерные векторы, $\varphi(t,\sigma)$ — непрерывная, 2π-периодическая по σ функция: $R^1 \times R^1 \to R^1$, удовлетворяющая соотношениям

$$\mu_1 \leqslant \frac{\varphi(t,\sigma)}{\sigma} \leqslant \mu_2 \qquad \forall\, t \in R^1, \; \forall \sigma \neq 0,$$

где μ_1 и μ_2 — некоторые числа, которые в силу периодичности $\varphi(t,\sigma)$ по σ, не умаляя общности, можно принять отрицательным: $\mu_1 < 0$, и положительным: $\mu_2 > 0$.

Введем передаточную функцию системы (8.1)

$$\chi(p) = r^*(P - pI)^{-1}q,$$

предполагая ее невырожденной.

Рассмотрим теперь квадратичные формы $V(x) = x^*Hx$ и

$$G(x,\xi) = 2x^*H[(P + \lambda I)x + q\xi] + (\mu_2^{-1}\xi - r^*x)(\mu_1^{-1}\xi - r^*x),$$

где λ — положительное число.

По теореме Якубовича–Калмана для существования симметричной матрицы H, имеющей одно отрицательное и $N-1$ положительных собственных значений, такой что выполнено неравенство $G(x,\xi) < 0$ $\forall x \in R^N, \;\xi \in R^1$, $x \neq 0$, достаточно, чтобы

1) матрица $P + \lambda I$ имела $N-1$ собственных значений с отрицательной вещественной частью,
2) выполнялось частотное неравенство

$$\mu_1^{-1}\mu_2^{-1} + (\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})\mathrm{Re}\chi(i\omega - \lambda) + |\chi(i\omega - \lambda)|^2 < 0 \quad \forall \omega \in R^1.$$

Легко видеть, что из условия $G(x,\xi) < 0$, $\forall x \neq 0, \forall \xi$ следует соотношение

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + 2\lambda V(x(t)) < 0 \quad \forall x(t) \neq 0.$$

Это неравенство и гарантирует положительную инвариантность конуса Ω, о котором шла речь в начале этого раздела.

Таким образом, здесь имеет место следующий аналог широко известного кругового критерия.

Теорема 16 ([16, 22, 29, 77]). *Если существует положительное число* λ, *для которого выполнены сформулированные выше условия* 1) *и* 2), *то любое решение* $x(t, t_0, x_0)$ *системы* (8.1) *ограничено на интервале* $(t_0, +\infty)$.

Более подробное доказательство этого факта имеется в [16, 29, 77].

Заметим также, что теорема остается справедливой при выполнении нестрогого неравенства в условии 2) и в случаях, когда $\mu_1 = -\infty$ или $\mu_2 = +\infty$ [16, 29, 77].

Покажем, как применять сформулированный здесь (с учетом сделанного выше замечания) аналог кругового критерия к самому простому случаю уравнения второго порядка

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \varphi(t, \theta) = 0, \tag{8.2}$$

где α — положительный параметр. Это уравнение можно записать в виде системы (8.1) с $N = 2$ и передаточной функцией

$$\chi(p) = \frac{1}{p(p+\alpha)}.$$

Ясно, что условие 1) теоремы примет вид $\lambda \in (0, \alpha)$, а условие 2) при $\mu_1 = -\infty$ и $\mu_2 = \alpha^2/4$ эквивалентно неравенству

$$-\omega^2 + \lambda^2 - \alpha\lambda + \alpha^2/4 \leqslant 0 \quad \forall \omega \in R^1.$$

Это неравенство выполнено при $\lambda = \alpha/2$.

Таким образом, если в уравнении (8.2) функция $\varphi(t, \sigma)$ периодична по σ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\varphi(t, \sigma)}{\sigma} \leqslant \frac{\alpha^2}{4}, \tag{8.3}$$

то любое его решение $\theta(t)$ ограничено на $(t_0, +\infty)$.

Легко показать (см. теорему 1), что при $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$ (т. е. $\varphi(t, \sigma)$ не зависит от t) уравнение (8.2) дихотомично. Отсюда следует, что в автономном случае при выполнении соотношения (8.3) любое решение (8.2) стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия.

Здесь возникает интересный аналог понятия абсолютной устойчивости для систем фазовой синхронизации. Если будем говорить, что система (8.1) абсолютно устойчива, когда для любой нелинейности φ из сектора $[\mu_1, \mu_2]$ любое ее решение стремится к некоторому состоянию равновесия, то для уравнения (8.2) с $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$ таким сектором будет $(-\infty, \alpha^2/4]$.

В то же время в классической теории абсолютной устойчивости (без предположения периодичности φ) имеем два сектора (при $\varphi(t, \sigma) \equiv \varphi(\sigma)$): сектор абсолютной устойчивости $(0, +\infty)$ и абсолютной неустойчивости $(-\infty, 0)$.

Таким образом, одна лишь периодичность φ позволяет в секторе абсолютной устойчивости охватить часть сектора абсолютной устойчивости и полностью сектор абсолютной неустойчивости: $(-\infty, \alpha^2/4] \supset \supset (-\infty, 0) \cup (0, \alpha^2/4]$ (см. рис. 16).

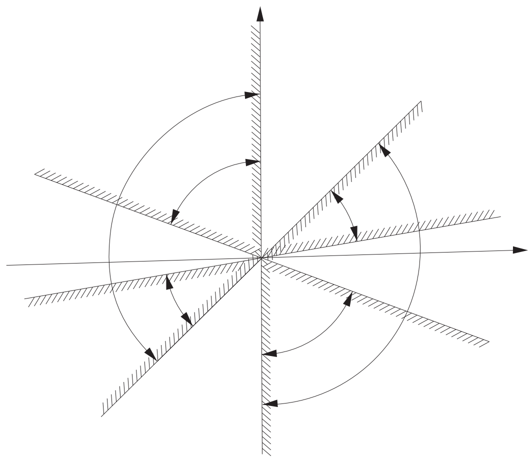

Рис. 16. Секторы устойчивости и неустойчивости

Более сложные примеры применения аналогов кругового критерия имеются в [16, 29, 77].

9. Метод нелокального сведения. Распространение результатов Трикоми на многомерные системы фазовой синхронизации

Опишем основные этапы распространения теорем Трикоми и его последователей, полученных для уравнения

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0, \tag{9.1}$$

на системы более высокой размерности.

Рассмотрим вначале систему

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Az + b\psi(\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= c^* z + \rho\psi(\sigma), \end{aligned} \tag{9.2}$$

описывающую типовую систему ФАП.

Как обычно, предположим, что $\psi(\sigma)$ — 2π-периодична, A — устойчивая $n \times n$-матрица, b и c — постоянные n-векторы, ρ — число.

Рассмотрим случай, когда уравнение (9.1) или эквивалентная ему система

$$\begin{aligned} \dot\eta &= -\alpha\eta - \psi(\theta), \\ \dot\theta &= \eta \end{aligned} \tag{9.3}$$

является системой градиентного типа. В этом случае можно показать [7] (а для $\psi(\theta) = \sin\theta - \gamma$ это было сделано в самом начале статьи), что для эквивалентного (9.3) уравнения

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{-\alpha\eta - \psi(\theta)}{\eta} \tag{9.4}$$

существует решение $\eta(\theta)$ такое, что $\eta(\theta_0) = 0$, $\eta(\theta) \neq 0$ $\forall\theta \neq \theta_0$,

$$\lim_{\theta\to+\infty} \eta(\theta) = -\infty, \quad \lim_{\theta\to-\infty} \eta(\theta) = +\infty. \tag{9.5}$$

Здесь θ_0 — некоторое число такое, что $\psi(\theta_0) = 0$, $\psi'(\theta_0) < 0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$V(z,\sigma) = z^* Hz - \frac{1}{2}\eta(\sigma)^2,$$

которая индуцирует конус $\Omega = \{V(z,\sigma) \leqslant 0\}$ в фазовом пространстве $\{z,\sigma\}$. Это будет некоторым обобщением квадратичного конуса, изображенного на рис. 14. Покажем, что при некоторых условиях такой конус будет положительно инвариантным. В самом деле, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} + 2\lambda V &= 2z^* H\left[(A+\lambda I)z + b\psi(\sigma)\right] - \\ &\qquad - \lambda\eta(\sigma)^2 - \eta(\sigma)\frac{d\eta(\sigma)}{d\sigma}(c^* z + \rho\psi(\sigma)) = \\ &= 2z^* H\left[(A+\lambda I)z + b\psi(\sigma)\right] - \\ &\qquad - \lambda\eta(\sigma)^2 + \psi(\sigma)(c^* z + \rho\psi(\sigma)) + \alpha\eta(\sigma)(c^* z + \rho\psi(\sigma)). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\eta(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (9.4).

Заметим, что если выполнены частотные неравенства

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2 > 0, \\ \lim_{\omega\to\infty} \omega^2(\operatorname{Re} K(i\omega - \lambda) - \varepsilon|K(i\omega - \lambda)|^2) > 0, \end{gathered} \tag{9.6}$$

где $K(p) = c^*(A - pI)^{-1}b - \rho$, то по частотной теореме Якубовича–Калмана существует H такая, что для всех $z \neq 0$ и ξ выполнено соотношение

$$2z^* H[(A+\lambda I)z + b\xi] + \xi(c^* z + \rho\xi) + \varepsilon|(c^* z + \rho\xi)|^2 < 0,$$

где ε — некоторое положительное число. Если же $A + \lambda I$ — устойчивая матрица, то $H > 0$.

Таким образом, если $A + \lambda I$ устойчива, выполнены (9.6) и $\alpha^2 \leqslant 4\lambda\varepsilon$, то

$$\frac{dV}{dt} + 2\lambda V < 0 \quad \forall z(t) \neq 0$$

и, следовательно, Ω — положительно инвариантный конус.

Так же, как и в предыдущем разделе, можно провести размножение конусов $\Omega_k = \{z^* H z - \frac{1}{2}\eta_k(\sigma)^2 \leqslant 0\}$ и построить из них конусную сетку (рис. 15).

Здесь $\eta_k(\sigma)$ — сдвинутое по оси σ на величину $2k\pi$ решение $\eta(\sigma)$.

Конусная сетка доказывает ограниченность решений системы (9.2) на интервале $(0, +\infty)$.

В сделанных предположениях имеет место также дихотомичность. Это легко доказывается с помощью ляпуновской функции

$$z^* H z + \int_0^\sigma \psi(\sigma)\, d\sigma.$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 17. *Если для некоторых $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ матрица $A + \lambda I$ устойчива, выполнены условия* (9.6) *и система* (9.3) *с $\alpha = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ является системой градиентного типа, то и система* (9.2) *также является системой градиентного типа.*

Различные обобщения этой теоремы и многочисленные примеры применения метода нелокального сведения, в том числе и для синхронных машин, имеются в [16, 23–25, 62, 63, 77].

В рамках этого метода получены также различные критерии существования круговых решений и циклов второго рода [16, 62, 63, 77].

Покажем, как этот метод может быть применен к оценке предельной нагрузки асинхронного электродвигателя, который описывается уравнениями (2.6).

Для этого предположим, что $\gamma < 2c^2$ и введем обозначения

$$\psi(s) = -\frac{\gamma}{c}s^2 + as - c\gamma,$$

$$\Gamma = 2 \max_{\lambda \in (0,c)} \left[\lambda \left(c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2(c-\lambda)} \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь числа a, c и γ — параметры системы (2.6). Предположим, что $\gamma < a/2$. В этом случае функция $\psi(s)$ имеет два нуля: $s_0 \in (0, c)$ и $s_1 > c$. Из неравенства $\gamma < 2c^2$ следует, что $\Gamma > 0$.

Напомним, что задача о предельном набросе нагрузки для асинхронного двигателя ставилась в первом разделе настоящего обзора. Эта задача может быть решена с помощью следующего результата.

Теорема 18 ([60]). *Пусть для решения уравнения*

$$\ddot{\theta} + \Gamma\dot{\theta} + \psi(\theta) = 0 \tag{9.7}$$

с начальными данными $\dot{\theta}(0) = \theta(0) = 0$ *выполнено условие*

$$\theta(t) \leqslant s_1 \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{9.8}$$

Тогда решение системы (2.6) *с начальными данными* $s(0) = y(0) = = x(0) = 0$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = s_0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\frac{\gamma}{a},$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\frac{\gamma s_0}{ac}.$$

Доказательство. Сделав замену $\eta = ay + \gamma$, $z = -x - \frac{\gamma}{ac}s$, приведем систему (2.6) к виду

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \eta, \\ \dot{\eta} &= -c\eta + azs - \psi(s), \\ \dot{z} &= -cz - \frac{1}{a}s\eta - \frac{\gamma}{ac}\eta. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Условие (9.8) влечет за собой существование решения $F(\theta)$ уравнения

$$F\frac{dF}{d\theta} = -\Gamma F - \psi(\theta), \tag{9.10}$$

определенного на промежутке $[s_2, s_1]$ и такого, что $F(s_2) = F(s_1) = 0$, $F(\theta) > 0\ \forall\, \theta \in (s_2, s_1)$, $s_2 < 0$.

Для функции

$$V(s,\eta,z) \doteq \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}F(s)^2, \quad s \in [s_2, s_1],$$

на решениях системы (9.9) имеем сотношения

$$\begin{aligned} \dot{V}(s(t),\eta(t),z(t)) &= -c\eta(t)^2 - \frac{a\gamma}{c}\eta(t)z(t) - \\ &\quad - a^2cz(t)^2 - F'(s(t))F(s(t))\eta - \psi(s(t))\eta \leqslant \\ &\leqslant -2\lambda V(s(t),\eta(t),z(t)) + \frac{(F'(s(t))F(s(t)) + \psi(s(t)))^2}{4\varepsilon} - \\ &\quad - \lambda F(s(t))^2 = -2\lambda V(s(t),\eta(t),z(t)), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon = c - \lambda - \frac{\gamma^2}{4c^2}(c-\lambda)^{-1}$$

и использовано равенство (9.10) с таким λ, что $\Gamma = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$.

Из соотношения

$$\dot V(s(t),\eta(t),z(t)) + 2\lambda V(s(t),\eta(t),z(t)) \leqslant 0.$$

Легко получить положительную инвариантность множества

$$\Omega = \{V(s,\eta,z) < 0,\ s \in [s_2, s_1]\},$$

а с помощью функции

$$W(s,\eta,z) = \frac{a^2}{2}z^2 + \frac{1}{2}\eta^2 + \int\limits_0^s \psi(\sigma)\,d\sigma$$

легко получить дихотомичность системы (9.9). Отсюда, из ограниченности и положительной инвариантности Ω и из включений

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \Omega, \qquad \begin{pmatrix}s_0\\0\\0\end{pmatrix} \in \Omega$$

следует утверждение теоремы.

Хорошо известно [7] (см. условие (8.19) на стр. 107), что условие (9.8) выполнено, если $\Gamma > 0$ и

$$2\int\limits_0^{s_1} \psi(\sigma)\,d\sigma + \Gamma^2(s_1 - s_0)^2 \geqslant 0. \tag{9.11}$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$2\int\limits_0^{s_1} \psi(\sigma)\,d\sigma = 2s_1\left(-\frac{\gamma}{3c}s_1^2 + \frac{a}{2}s_1 - c\gamma\right) \geqslant 0.$$

Это соотношение можно переписать следующим образом:

$$\frac{2\gamma}{3c}s_1 \geqslant \frac{a}{2}. \tag{9.12}$$

Поскольку $\varphi(s_1) = 0$ и $s_1 > c$, выполнено равенство

$$s_1 = \frac{c(a + \sqrt{a^2 - 4\gamma^2}\,)}{2\gamma}.$$

Отсюда следует, что неравенство (9.12) выполнено, если

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a \geqslant \gamma. \tag{9.13}$$

Таким образом, допустимый наброс нагрузки может быть оценен неравенствами $\gamma < 2c^2$ и (9.13).

Условие $8c^2 > \sqrt{3}\,a$ выполнено для большого класса асинхронных электродвигателей. Предполагая его выполнение, оценим предельно допустимый наброс нагрузки, используя (9.13).

Напомним, что максимальное значение статической характеристики (2.7) равно $a/2$. Если обозначить через $M_{\max}$ максимальную нагрузку, при которой система (2.6) имеет состояние равновесия (т. е. асинхронный двигатель имеет рабочие режимы), то допустимый резкопеременный наброс нагрузки на двигатель, работающий на холостом ходу, оценивается очень просто:

$$M \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} M_{\max}. \tag{9.14}$$

В случае массивного ротора, когда I — большое число по отношению к параметрам β, R, L, SB, M, можно записать параметры системы (2.6) следующим образом: $a = \delta a_0$, $\gamma = \delta\gamma_0$, где δ — достаточно малое по отношению к a_0, γ_0 и c число. Легко видеть, что $\Gamma = c + O(\delta)$ и условие (9.11) выполнено при $a_0 > 2\gamma_0$, $\delta \ll 1$. В этом случае оценка допустимого резкопеременного наброса нагрузки имеет вид

$$M < M_{\max}, \quad \delta \ll 1. \tag{9.15}$$

Эта оценка совпадает с хорошо известным результатом асимптотического анализа, когда система (2.6) с малым параметром δ сводится к уравнению первого порядка:

$$\dot{s} = -\frac{a_0 c s}{c^2 + s^2} + \gamma_0.$$

Оценки (9.14) и (9.15) демонстрируют эффективность применения универсальных методов теории фазовой синхронизации к решению конкретных задач.

10. Заключение

Во второй половине XX в. на фундаменте трех прикладных теорий — теории синхронных и асинхронных электрических машин, теории систем фазовой автоподстройки частоты и теории самосинхронизации неуравновешенных роторов — была создана теория фазовой синхронизации. Ее основным принципом является рассмотрение задач фазовой синхронизации на трех уровнях: на уровне механической, электромеханической или электронной модели, на уровне фазовых и частотных соотношений и на уровне дифференциальных, разностных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. При этом разность фаз колебаний трансформируется в управляющее воздействие, которое осуществляет синхронизацию.

Эти общие принципы мотивировали создание универсальных методов исследования систем фазовой синхронизации. Наиболее эффективными здесь оказались модификация прямого метода Ляпунова с построением периодических функций ляпуновского типа, метод положительно инвариантных конусных сеток и метод нелокального сведения. Последний, объединяя элементы прямого метода Ляпунова и теории бифуркаций, позволил распространить классические результаты Ф. Трикоми и его последователей на многомерные динамические системы.

Список литературы

1. *Абрамович И. М., Блехман И. И., Лавров Б. П., Плис Д. А.* Явление синхронизации вращающихся тел (роторов) // Открытия, изобретения. — 1988. — № 1. Диплом № 333. Зарегистрировано Госкомизобретений 14 мая 1987 г.
2. *Алексеенко А. Г.* Основы микросхемотехники. — М.: Юнимедиастайл, 2002.
3. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
4. *Бакаев Ю. Н.* Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем // М.: Тр. ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1959. — Вып. 800. — 70 с.
5. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Барбашин Е. А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. — 1952. — Т. 86, № 3. — С. 453–459.
7. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. — М.: Наука, 1969.
8. *Белых В. Н., Лебедева Л. Н.* Изучение отображения окружности // Прикл. мат. и механика. — 1982. — № 5. — С. 611–615
9. *Белюстина Л. Н., Быков В. В., Кивелева К. Г., Шалфеев В. Д.* О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. ВУЗов. Радиофизика. — 1970. — Т. 13, № 4. — С. 561–567.
10. *Блехман И. И.* Самосинхронизация вибраторов некоторых вибрационных машин // Инженерный сб. — 1953. — Т. 16.
11. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
12. *Блехман И. И.* Синхронизация в природе и технике. — М.: Наука, 1981.
13. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М.: Физматгиз, 1994.
14. *Блехман И. И., Малахова О. З.* Экстремальные признаки устойчивости некоторых движений // Прикл. мат. и механика. — 1990. — Т. 54, № 1. — С. 142–161.
15. *Витерби Э. Д.* Принципы когерентной связи. — М.: Сов. радио, 1970. [*Viterbi A. J.* Princeples of Coherent Communications. — N.Y.: McGraw-Hill, 1966.]
16. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.

17. *Губарь Н. А.* Исследование одной кусочно-линейной динамической системы с тремя параметрами // Прикл. мат. и механика. — 1961. — Т. 25, № 6. — С. 1011–1023
18. *Гупта С.* Фазовая автоподстройка частоты // ТИИЭР. — 1975. — Т. 63. — С. 50–66. [*Gupta S. C.* Phase Locked Loops // Proc. IEEE. — 1975. — V. 63, №2. — P. 291–306.]
19. *Иванов-Смоленский А. В.* Электрические машины. — М.: Энергия, 1980.
20. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперимент. и теорет. физики. — 1951. — Т. 21, вып.5. — С. 588–598.
21. *Ла Салль Дж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: Мир, 1964.
22. *Леонов Г. А.* Об ограниченности траекторий фазовых систем // Сиб. матем. ж. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 687–692.
23. *Леонов Г. А.* Устойчивость и колебания фазовых систем // Сиб. матем. ж. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1031–1052
24. *Леонов Г. А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т. 17, № 1. — С. 91–112.
25. *Леонов Г. А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // Прикл. мат. и механика. — 1976. — Т. 40, № 2. — С. 238–244.
26. *Леонов Г. А., Селеджи С. М.* Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. — СПб.: Невский диалект, 2002.
27. *Леонов Г. А., Селеджи С. М.* Методы коррекции расфазировок в цифровых сигнальных процессорах // Вест. СПбГУ. — 2004. — Сер. 10. Вып. 1–2. — С. 36–47.
28. *Леонов Г. А., Селеджи С. М.* Синтез блок-схемы и анализ устойчивости астатической системы фазовой автоподстройки для цифровых сигнальных процессоров // АиТ. — 2005. — № 3. — С. 11–19.
29. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000.
30. *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.
31. *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления. — М.: Мир, 1967. [*Lefschetz S.* Stability of Nonlinear Control Systems. — N.Y.: Academic Press, 1965.]
32. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. — М.: Сов.радио, 1978. [*Lindsey W. C.* Sinchronization Systems in Communication and Control. — N.Y.: Prentice-Hall, 1972.]
33. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979.
34. Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации. / Под ред. В. В. Шахгильдяна. — М.: Связь, 1979.
35. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна и Л. Н. Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982.
36. *Солонина А., Улахович Д., Яковлев Л.* Цифровые процессоры обработки сигналов фирмы Motorola. — СПб.: BHV, 2000.

37. *Солонина А., Улахович Д., Яковлев Л.* Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов. — СПб.: BHV, 2001.
38. *Таненбаум Э.* Архитектура компьютера. — М.: Питер, 2003. [*Tanenbaum A.* Structured Computer Organization. — New Jersey: Prentice Hall, 1999.]
39. *Угрюмов Е. П.* Цифровая схемотехника. — СПб.: BHV, 2000.
40. *Фрадков А. Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры. — СПб.: Наука, 2003.
41. *Хендель Ф.* Основные законы физики. — М.: Физматгиз, 1959.
42. *Хоровиц П., Хилл У.* Искусство схемотехники. — М.: Мир, 2003. [*Horowitz P., Hill W.* The Art of Electronics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998.]
43. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. — М.: Связь, 1972.
44. *Шахтарин Б. И.* Устойчивость дискретных систем первого порядка // Радиотехника и электроника. — 1977. — № 11. — С. 2418–2420.
45. *Шахтарин Б. И.* Анализ кусочно-линейных систем с фазовым регулированием. — М.: Машиностроение, 1991.
46. *Шахтарин Б. И., Архангельский В. А.* Динамические характеристики фазовых систем // Радиотехника и электроника. — 1977. — № 5. — С. 978–987
47. *Янко-Триницкий А. А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. — М.: Госэнергоиздат, 1958.
48. *Amerio L.* Determinazione delle condizioni di stabilita per gli integrali di unequazione interessante l'electrotechnica // Annali Matematica Pura Appl. — 1949. — V. 30, № 4. — P. 75–90.
49. *Blekhman I. I., Fradkov A. L.* On general definitions of synchronization// In: Selected topics in vibrational mechanics. Ed. I.I.Blekhman. — Singapore, World Scientific, 2004. — P. 179–188.
50. *Blekhman, I.I., Fradkov A. L., Nijmeijer H. and A.Yu. Pogromsky A.Yu.* On self-synchronization and controlled synchronization // Syst. Control Lett. — 1997. — V. 31. — P. 299–305.
51. *Blekhman I. I., Fradkov A. L., Tomchina O. P., Bogdanov D.E.* Self-Synchronization and Controlled Synchronization: General Definition and Example Design // Math. Comput. Simulation. — 2002. — V. 58, issue 4–6. — P. 367–384.
52. *Bohm C.* Nuovi criteri di esistenza di soluzione periodiche di una nota equazione differenziale non lineare // Annali Matematica Pura appl. — 1953. — V. 35, № 4. — P. 343–353.
53. *Borner H.* Phasenkopplungssysteme in der Nachrichten. Mess-und Regelungstechnik. — Berlin: Verlag Technik, 1976.
54. *Gardner F. M.* Phase-Lock Techniques. — N.Y.: John Wiley, 1966.
55. *Fagiuoli E., Szegö G. P.* Qualitative analysis by modern methods of a stability problem in power-system analysis // J. Franklin Inst. — 1970. — V. 290, № 2. — P. 103–111.
56. *Hale J. K.* Some examples of infinite dimensional systems // Contemporary Math. — 1987. — V. 58. — P. 215–226.
57. *Hayes W. D.* On the equation for a damped pendulum under constant torque // Zeitschrift Angewandte Math. Physik. — 1953. — V. 4, № 5. — S. 398–401.

58. *Lapsley P., Bier J., Shoham A., Lee E. A.* DSP processor fundamentals archecture and features. — N.Y.: IEE Press, 1997.
59. *Leonov G. A.* Mathematical Problems of Control Theory. — Singapore: World Scientific, 2001.
60. *Leonov G. A.*. Discontinuous Load Rating Problem for Inductor Motors // Technische Mechanik. — 2004. — B. 24, № 3–4. — P. 271–276
61. *Leonov G. A., Burkin I. M., Shepeljavy A. I.* Frequency Methods in Oscillation Theory. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
62. *Leonov G. A., Ponomarenko D. V., Smirnova V. B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. — Singapore: World Scientific, 1996.
63. *Leonov G. A., Reitmann V., Smirnova V. B.* Nonlocal Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. — Stuttgart–Leipzig: Teubner Verlagsgesselschaft, 1992.
64. *Leonov G. A., Seledzhi S. M.* Stability and bifurcations of phase-loocked loops for digital signal processors // Int. J. Bifurcat. Chaos. — 2005. — V. 15, № 4. — P. 1347–1360
65. *Leonov G.A., Seledzhi S. M.* Design of Phase-Locked Loops for Digital Signal Processors // Int. J. Innovative Comput. Inform. Control. — 2005. — V. 1, № 4. — P. 1–11
66. *Lindsey W. C., Chie C. M.* A survey of digal phase locked loops // Proc. IEEE. — 1981. — V. 69, №4. — P. 671–685.
67. *Nash G.* Phase Locked Loop, Design Fundamentals. — Motorola Inc. Phoenix AZ, 1994.
68. *Noldus E.* New direct Lyapunov-type method for studying synchronization problems // Automatika. — 1977. — V. 13, № 2. — P. 139–151.
69. *Osborne H. C.* Stability analysis of an Nth power digital phase locked loop. Part. I: First-order DPLL. IEEE Trans. Commun. — 1980. — V. 28. — P. 1343–1354.
70. *Pikovsky A. S., Rosenblum M. G., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. — Cambridge University Press, 2001.
71. *Rosenblum M. G., Pikovsky A. S., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. — 1996. — 76. — P. 1804–1807.
72. *Seifert G.* On the existence of certain solutions of nonlinear differential equations // Zeitschrift Angewandte Math. Physik. — 1952. — V. 3, № 6. — S. 468–471.
73. Selected Topics in Vibrational Mechanics. Ed. I. I. Blekhman. — Singapore: World Scientific, 2003.
74. *Smith S. W.* The scientist and engineers guide to digital signal processing. — San Diego, 1999.
75. *Stephenson A. A.* A new type of dynamical stability // Mem. Proc. Manchr. Cit. Philos. Soc. — 1908. — V. 52. — P. 15–21.
76. *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annali della Roma Schuola Normale Superiore de Pisa. — 1933. — V. 2, № 2. — P. 1–20.
77. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. — Singapore: World Scientific, 2004.

Г. А. Леонов[†]

Семейства трансверсальных кривых для двумерных систем дифференциальных уравнений[*]

Аннотация: описаны два эффективных метода построения семейств трансверсальных кривых для двумерных систем: метод систем сравнения, когда трансверсальными кривыми являются траектории некоторых, более простых, чем исходная система, систем сравнения, и метод сшивания трансверсальной кривой из линий уровня нескольких отличных друг от друга функций ляпуновского типа. С помощью этих методов решена проблема получения необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем, проблема Колониуса–Хинрихсена–Вирта для линейных двумерных управляемых систем, проблема локализации аттракторов уравнения Льенара и проблема Одани.

Введение

А. Пуанкаре широко использовал трансверсальные кривые и поверхности для качественного исследования дифференциальных уравнений. Впоследствии такие поверхности были названы сечениями Пуанкаре. А. М. Ляпунов заметил, что линии уровня некоторых функций являются трансверсальными по отношению к векторным полям дифференциальных уравнений. Функции, индуцирующие таким образом семейства трансверсальных поверхностей, впоследствии были названы функциями Ляпунова, а методы построения таких функций — прямым (или вторым) методом Ляпунова. Этим методом было решено большое число задач в теории устойчивости и в качественной теории дифференциальных уравнений. Однако для двумерных систем дифференциальных уравнений часто оказываются более эффективными другие методы построения семейств трансверсальных кривых.

В настоящем обзоре мы опишем два эффективных метода построения семейств трансверсальных кривых для двумерных систем: метод систем сравнения, когда трансверсальными кривыми являются траектории некоторых, более простых, чем исходная система, систем сравнения, и метод сшивания трансверсальной кривой из линий уровня нескольких отличных друг от друга функций ляпуновского типа. Различные элементы этих методов содержатся во многих работах, однако

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет. Институт проблем машиноведения РАН.

[*]) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 04–01–00250А и Программы Dutch Russian research cooperation NWO.

только в последнее время стало ясно, что с их помощью можно получить значительное продвижение в решении многих прикладных задач. Здесь мы опишем некоторые из них.

1. Проблема Айзермана. Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных систем

В 1949 году М. А. Айзерман сформулировал следующую проблему [1].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(Cx), \tag{1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, B и C — постоянные n-мерные вектор-столбец и вектор-строка, $\varphi(\sigma)$ — непрерывная функция.

Наряду с системой (1) рассмотрим линейные системы

$$\frac{dy}{dt} = (A + kBC)\,y \tag{2}$$

и предположим, что при

$$\alpha < k < \beta$$

эти системы являются устойчивыми в целом. Будет ли нулевое решение системы (1) устойчиво в целом, если выполнено условие

$$\alpha < \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \beta$$

для всех $\sigma \neq 0$?

Напомним, что нулевое решение системы (1) устойчиво в целом, если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение системы (1) стремится к нулю при $t \to +\infty$. Говорят также, что система (1) абсолютно устойчива в классе функций $\varphi(\sigma)$, если ее нулевое решение устойчиво в целом для любой $\varphi(\sigma)$, удовлетворяющей сформулированным выше условиям.

М. А. Айзерман высказал гипотезу, что поставленный выше вопрос всегда имеет положительное решение [1].

Рассмотрим эту гипотезу для случая $n = 2$, $CB \neq 0$, [5, 11, 25]. Здесь систему (1) можно линейным неособым преобразованием привести к специальному виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + \beta x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \gamma x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(x_1) = \mu\varphi(x_1) + \alpha x_1$, $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ — некоторые числа.

Для того чтобы доказать существование такого неособого линейного преобразования, рассмотрим передаточные функции [23, 39] соответственно систем (1) и (3):

$$W_1(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{a_1 p + a_2}{p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2 p},$$

$$W_2(p) = \frac{-\mu(p-\gamma)}{p^2 - (\alpha+\gamma)p + \alpha\gamma - \beta}.$$

Здесь a_j и α_j — некоторые числа, $a_1 \neq 0$. Легко видеть, что $W_1(p) = W_2(p)$ при

$$\mu = -a_1, \qquad \gamma = -a_2/a_1, \qquad \alpha = -\alpha_1 + a_2/a_1,$$
$$\beta = -\alpha_2 + (\alpha_1 - a_2/a_1)a_2/a_1.$$

Хорошо известно, что в этом случае (т. е. когда $W_1(p) = W_2(p)$) искомое линейное преобразование существует [23, 39].

Для системы (3) проблема Айзермана может быть решена с помощью построения функции Ляпунова [5, 11, 25]

$$V(x_1, x_2) = (\gamma x_1 - \beta x_2)^2 - \beta x_1^2 + 2\gamma \int\limits_0^{x_1} f(s)\,ds. \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$\dot V(x_1, x_2) = -2\left(\frac{f(x_1)}{x_1} + \gamma\right)\left(\beta - \frac{f(x_1)}{x_1}\gamma\right)x_1^2. \tag{5}$$

Из соотношений (4), (5) по теореме Ла-Салля [23, 37] следует устойчивость в целом нулевого решения системы (3), если

$$\gamma\frac{f(\sigma)}{\sigma} - \beta > 0 \quad \forall\, \sigma \neq 0, \tag{6}$$

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma} + \gamma < 0 \quad \forall\, \sigma \neq 0, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{\sigma} [\gamma f(s) - \beta s]\,ds \to +\infty \quad \text{при} \quad |\sigma| \to \infty. \tag{8}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом нулевого решения линейной системы (3) при $f(\sigma) = k\sigma$ имеют вид

$$\gamma k - \beta > 0, \tag{9}$$

$$k + \gamma < 0. \tag{10}$$

Сравнивая условия (6), (7) и (9), (10), заключаем, что гипотеза Айзермана здесь справедлива при дополнительном условии (8). В приложениях это условие, как правило, выполнено. Н. Н. Красовский показал [12], что невыполнение условия (8) может привести к потере свойства устойчивости в целом.

Аналогичным образом рассматривается случай $CB = 0$, $n = 2$.

Таким образом, для системы (1) необходимые и достаточные условия устойчивости в целом получены в рамках прямого метода Ляпунова. Различные обобщения такого подхода для $n > 2$ имеются в [9, 23, 39, 41, 52].

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\varphi(t, Cx), \tag{11}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, B и C — постоянные n-мерные вектор-столбец и вектор-строка, $\varphi(t,\sigma)$ — кусочно-непрерывная и липшицева по второму аргументу функция.

Так же, как и для уравнения (1), для системы (11) можно поставить вопрос о необходимых и достаточных условиях устойчивости в целом. Прямой метод Ляпунова и полученный в его рамках широко известный круговой критерий дают только достаточные условия устойчивости в целом [9, 41, 52]. Приведем здесь для $n = 2$ необходимые и достаточные условия устойчивости в целом, полученные другим методом — методом построения систем сравнения.

Будем предполагать здесь, что выполнено условие

$$0 \leqslant \frac{\varphi(t,\sigma)}{\sigma} \leqslant k \quad \forall\, t \in R^1,\ \ \forall\, \sigma \neq 0, \tag{12}$$

где k — некоторое положительное число.

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (11):

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{ap + b}{p^2 + \alpha p + \beta}$$

Не умаляя общности, здесь можно принять, что $\alpha > 0,\ \ \beta > 0,\ \ a \geqslant 0,\ \ \beta + bk > 0,\ \ |a| + |b| > 0$. Предположим также, что

$$b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0.$$

Введем в рассмотрение множества

$$\Omega_1 = \{x_2 \geqslant 0, ax_2 + bx_1 \geqslant 0\} \subset \{x_1, x_2\},$$

$$\Omega_2 = \{x_2 \geqslant 0, ax_2 + bx_1 \leqslant 0\} \subset \{x_1, x_2\}$$

и линейные системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\lambda x_2 - \mu x_1, \end{aligned} \tag{13}$$

которые будут играть роль систем сравнения.

На множестве Ω_1 будем рассматривать систему (13) с $\lambda = \alpha,\ \ \mu = \beta$, на Ω_2 — систему (13) с $\lambda = \alpha + ak,\ \ \mu = \beta + bk$.

Рассмотрим решения $x_1(t), x_2(t)$ и $\widetilde{x}_1(t)$, $\widetilde{x}_2(t)$ этих систем с начальными данными

$$x_1(0) = -1, \qquad \widetilde{x}_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = \widetilde{x}_2(0) = 0.$$

Теорема 1. *Если*

$$ax_2(t) + bx_1(t) \neq 0 \;\; \forall\, t > 0$$

или

$$a\widetilde{x}_2(t) + b\widetilde{x}_1(t) \neq 0 \;\; \forall\, t < 0,$$

то нулевое решение системы (11) *устойчиво в целом.*

Рассмотрим теперь случай существования чисел $T > 0$ и $\tau < 0$, для которых выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&ax_2(T) + bx_1(T) = 0,\\
&ax_2(t) + bx_2(t) \neq 0, \;\; \forall\, t \in (0, T),\\
&a\widetilde{x}_2(\tau) + b\widetilde{x}_1(\tau) = 0,\\
&a\widetilde{x}_2(t) + b\widetilde{x}_2(t) \neq 0, \;\; \forall\, t \in (\tau, 0).
\end{aligned}$$

(см. рис. 1).

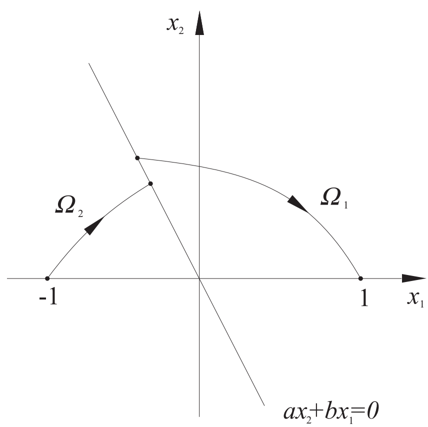

Рис. 1. Случай существования чисел T и τ

Теорема 2. *Если* $x_2(T) < \widetilde{x}_2(\tau)$, *то нулевое решение системы* (11) *устойчиво в целом. Если* $x_2(T) > \widetilde{x}_2(\tau)$, *то существует функция* $u(t) \in [0, k]$, $\forall\, t \in R^1$, *такая, что нулевое решение системы* (11) *с* $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma$ *не является устойчивым в целом.*

Заметим, что решения линейных систем сравнения легко записать в элементарных функциях. Поэтому величины τ, T, $x_2(\tau)$, $x_2(T)$ также легко вычислить и можно записать условия теорем 1 и 2 в терминах элементарных функций. Это сделано в работе [22]. Здесь мы приведем пример таких вычислений.

Пусть $b > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ — вещественные корни полинома $p^2 + \alpha p + \beta = 0$. Здесь

$$\widetilde{x}_2(\tau) = \frac{\beta}{\lambda_2 - \lambda_1}\left[\left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2}\right)^{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} - \left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2}\right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}\right].$$

Поэтому из теорем 1 и 2 следует, что имеет место устойчивость в целом при любом $k > 0$, если

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \frac{a\beta}{b}\left[\left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2}\right)^{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} - \left(\frac{a\beta + b\lambda_1}{a\beta + b\lambda_2}\right)^{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}\right].$$

Если выполнено противоположное неравенство, то существует кусочно-непрерывная функция $u(t) \geqslant 0, \forall\, t \in R^1$, такая, что нулевое решение системы (11) с $\varphi(t,\sigma) = u(t)\sigma$ не является устойчивым в целом.

В случае $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ отсюда следует, что устойчивость в целом имеет место при любом $k > 0$, если

$$a(4 + 2\sqrt{2}\,) > b.$$

Если

$$a(4 + 2\sqrt{2}\,) < b,$$

то для некоторой $\varphi(t,\sigma) = u(t)\sigma$, $u(t) \geqslant 0, \forall\, t \in R^1$, нулевое решение системы (11) не является устойчивым в целом.

Использование кругового критерия [9, 41, 52] дает следующее условие устойчивости в целом при любом $k > 0$:

$$3a > b.$$

Для доказательства теорем 1 и 2 разовьем здесь некоторую специальную форму метода двумерных систем сравнения. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \beta x_1 - \varphi(t, a x_2 + b x_1). \end{aligned} \tag{14}$$

Очевидно, что передаточные функции систем (11) и (14) совпадают. Поэтому существует неособое линейное преобразование, которое преобразует систему (11) к виду (14).

Рассмотрим теперь систему (13) с $\lambda = \alpha - \varepsilon$, $\mu = \beta$ на Ω_1 и с $\lambda = \alpha + ak - \varepsilon$, $\mu = \beta + bk$ на Ω_2. Здесь ε — некоторое малое положительное число. Заметим, что в силу непрерывной зависимости решений линейных систем от параметра ε при достаточно малых ε сохраняются условия теорем 1 и 2.

Хорошо известно, что система (13) эквивалентна уравнению

$$F\frac{dF}{dx_1} = -\lambda F - \mu x_1. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь решение $x_1(t),\ x_2(t)$ системы (14), удовлетворяющее условию

$$x_2(t) = F(x_1(t)) > 0$$

для некоторого $t > 0$.

Очевидно, что

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{-\alpha F(x_1(t)) - \beta x_1(t) - \varphi(t, aF(x_1(t)) + bx_1(t))}{F(x_1(t))} <$$
$$< \frac{-\lambda F(x_1(t)) - \mu x_1(t)}{F(x_1(t))} = \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=x_1(t)}.$$

Здесь мы использовали условие (12). Следовательно, кривая $x_2 = F(x_1)$ трансверсальна по отношению к векторному полю системы (14). При этом решение $x_1(t),\ x_2(t)$ пересекает эту кривую «сверху вниз» (рис. 2). Это свойство кривой является основой для доказательства теорем 1 и 2.

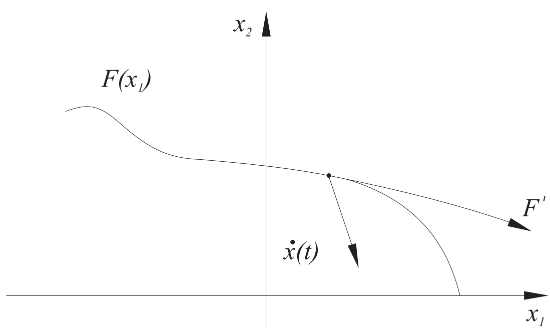

Рис. 2. Трансверсальность кривой $x_2 = F(x_1)$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим здесь следующее семейство замкнутых непрерывных кривых:

$$x_2 = F(x_1, c) \quad \text{на} \ [-c, c],\ F(c, c) = 0,$$

$F(x_1, c)$ — решение уравнения (15);

$$x_2 = F(x_1, -c) \quad \text{на} \ [-c, c],\ F(-c, -c) = 0,$$

$F(x_1, -c)$ — решение уравнения (15);

$$\{x_1 = c, x_2 \in [F(c, -c), 0]\},$$
$$\{x_1 = -c, x_2 \in [0, F(-c, c)]\}$$

(см. рис. 3).

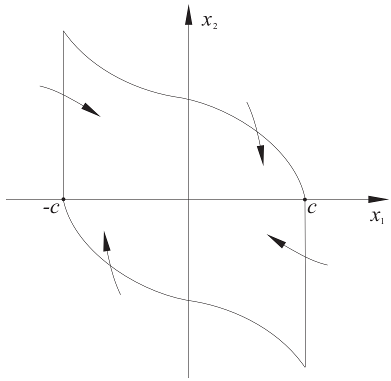

Рис. 3

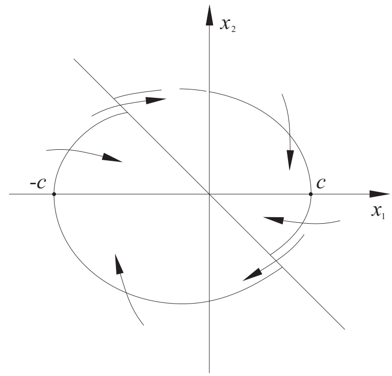

Рис. 4

Такое семейство трансверсальных при $x_2 \neq 0$, замкнутых, непрерывных кривых заполняет все множество $R^2 \backslash \{0\}$. Отсюда следует устойчивость в целом системы (14). □

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим здесь случай $b > 0$ и следующее семейство замкнутых, трансверсальных при $x_2 \neq 0$, непрерывных кривых (рис. 4)

$$x_2 = F(x_1, c) \text{ на } [c\widetilde{x}_1(\tau), c],\ F(c, c) = 0,$$

$F(x_1, c)$ — решение уравнения (15);

$$x_2 = F(x, -c) \text{ на } [-c, cx_1(T)],\ F(-c, -c) = 0,$$

$F(x_1, -c)$ — решение уравнения (15);

$$x_2 = -F(-x_1, -c) \ \text{ на } [-cx_1(T), c],$$

$$x_2 = -F(-x_1, c) \ \text{ на } [-c, -c\widetilde{x}_1(\tau)],$$

$$\{ax_2 + bx_1 = 0,\ \ x_1 \in [c\widetilde{x}_1(\tau), cx_1(T)]\},$$

$$\{ax_2 + bx_1 = 0,\ \ x_1 \in [-cx_1(T), -c\widetilde{x}_1(\tau)]\}.$$

Такое семейство трансверсальных при $x_2 \neq 0$, замкнутых, непрерывных кривых, заполняющих все множество $R^2 \backslash \{0\}$, доказывает устойчивость в целом системы (14).

Случай $b \leqslant 0$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда $x_2(T) > \widetilde{x}_2(\tau)$. Здесь мы построим специальную функцию $\varphi(t, \sigma) = u(t)\sigma$ следующим образом

$$u(t) = \begin{cases} k \ \text{ при } t \in (\tau_{2k}, \tau_{2k+1}), \\ 0 \ \text{ при } t \in (\tau_{2k+1}, \tau_{2k+2}). \end{cases}$$

Числа τ_j выберем следующим образом: $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = T$, τ_2 — такое, что

$$x_1(\tau_2) \geqslant 0, \quad x_2(\tau_2) = 0,$$
$$x_2(t) > 0 \quad \forall\, t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ решение системы (14) с начальными данными $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$.

Число τ_3 выберем так, что

$$ax_2(\tau_3) + bx_1(\tau_3) = 0,$$
$$ax_2(t) + bx_1(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (\tau_2, \tau_3).$$

Число τ_4 выберем так, что

$$x_1(\tau_4) \leqslant 0, \quad x_2(\tau_4) = 0,$$
$$x_2(t) < 0 \quad \forall\, t \in (\tau_3, \tau_4),$$

(рис. 5) и так далее.

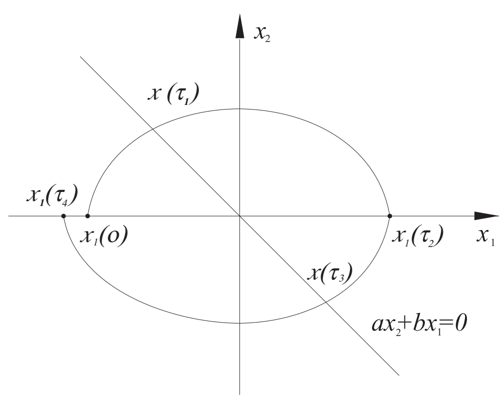

Рис. 5

Легко видеть, что

$$\ldots < x(\tau_8) < x_1(\tau_4) < x_1(0).$$

Поэтому

$$\lim_{j\to\infty} x_1(\tau_j) = \infty.$$

Отсюда следует, что нулевое решение системы (14) не является устойчивой в целом. Теорема 2 доказана. $\square$

Заметим, что в частном случае $a = 0$ теоремы 1 и 2 доказаны в работах [2, 3, 13, 29].

Еще раз подчеркнем здесь, что метод двумерных систем сравнения часто более эффективен и прост в применении, чем метод функций Ляпунова. При этом оба метода имеют близкую геометрическую интерпретацию. В основе ее мы имеем семейства трансверсальных, замкнутых, непрерывных поверхностей. Только в прямом методе Ляпунова эти поверхности индуцируются функциями Ляпунова, а в методе двумерных систем сравнения — траекториями этих систем сравнения.

В работе Е. С. Пятницкого [28] для получения необходимых и достаточных условий абсолютной устойчивости двумерной системы вида (11) применен принцип максимума Понтрягина, где для анализа двумерной системы (11) требуется рассмотрение системы четвертого порядка. В сравнении с подходом Е. С. Пятницкого описанная здесь методика эффективнее и проще.

Для демонстрации этого рассмотрим пример системы (11), приведенный в [26, 28], с передаточной функцией

$$\chi(p) = \frac{-(p+1)}{p^2+p+1}$$

и нелинейностью $\psi(t,\sigma)$, удовлетворяющей условию

$$0 \leqslant \frac{\psi(t,\sigma)}{\sigma} \leqslant k \quad \forall\, t \in R^1,\ \forall\, \sigma \neq 0.$$

Сделав замену $\varphi(t,\sigma) = k\sigma - \psi(t,\sigma)$, приведем рассматриваемую систему к виду (11), (12) с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p+1}{p^2+(1-k)p+(1-k)}.$$

Применим теперь теорему 2. Легко видеть, что

$$x_2(T) = \exp\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\widetilde{x}_2(\tau) = \sqrt{1-k}\,\exp\left(\sqrt{\frac{1-k}{3+k}}\,\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3+k}{1-k}}\right)\right).$$

Отсюда сразу следует, что абсолютная устойчивость имеет место, если $k < k_0$, и система (11) не является абсолютно устойчивой при $k > k_0$. Здесь k_0 определяется из соотношения

$$\sqrt{1-k_0}\,\exp\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-k_0}{3+k_0}}\,\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3+k_0}{1-k_0}}\right)\right) = 1.$$

Этот результат совпадает с формулой, полученной в [26, 28].

2. Проблема Колониуса–Хинрихсена–Вирта

В этом параграфе, используя доказанные выше теоремы 1 и 2, покажем совпадение старших показателей Ляпунова и Флоке для классов двумерных линейных управляемых систем. Тем самым здесь для важного в теории управления случая будет решена проблема, сформулированная Ф. Колониусом, Д. Хинрихсеном и Ф. Виртом [50].

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = (A + u(t)BC)\,x, \tag{16}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, B и C — постоянные $n \times 1$ и $1 \times n$-матрицы (т. е. вектор-столбец и вектор-строка) $u(t)$ — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$k_1 \leqslant u(t) \leqslant k_2 \quad \forall\, t \in R^1, \tag{17}$$

где k_1 и k_2 — некоторые числа.

Напомним, что старшим ляпуновским показателем системы (16) называется число

$$\lambda(u(\cdot)) = \sup_{|z|=1} \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, \frac{1}{t} \ln|x(t,z)|,$$

где $x(t,z)$ — решение системы (16) с начальными данными $x(0,z) = z$.

Старшим показателем Ляпунова класса систем (16) с функциями, удовлетворяющими условию (17), назовем число (или символ $+\infty$)

$$\Lambda_L = \sup_u \lambda(u(\cdot)),$$

где супремум берется на множестве кусочно-непрерывных функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17).

Старшим показателем Флоке класса систем (16) с периодическими кусочно-непрерывными функциями, удовлетворяющими условию (17), назовем число (или $+\infty$)

$$\Lambda_F = \sup_u \lambda(u(\cdot)).$$

Супремум берется на описанном выше множестве всех периодических функций.

Заметим, что здесь рассматривается класс функций со всеми периодами.

Покажем, что для $n = 2$ в предположении полной управляемости и наблюдаемости системы (16) имеет место равенство

$$\Lambda_L = \Lambda_F. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение передаточную функцию системы (16):

$$W(p) = C(A - pI)^{-1}B = \frac{ap + b}{p^2 + \alpha p + \beta},$$

где a, b, α, β — некоторые числа.

Заметим вначале, что для решения сформулированной выше задачи, не умаляя общности, можно принять, что $k_1 = 0$, $k_2 = k > 0$ и что система (16) абсолютно устойчива при условии (17).

Напомним, что система (16) называется абсолютно устойчивой при условии (17), если ее нулевое решение устойчиво в целом для любой функции $u(t)$, удовлетворяющей условию (17).

В самом деле, произведя замену

$$x = z\exp(\nu t)$$

получим систему

$$\dot{z} = (A - \nu I + u(t)BC)z \tag{19}$$

с передаточной функцией $W(p+\nu)$.

Поскольку при больших ν матрица $A - \nu I$ — гурвицева и

$$\frac{1}{k} + \operatorname{Re} W(i\omega + \nu) > 0 \quad \forall \omega \in R^1$$

согласно круговому критерию [9, 41, 52] система (19) абсолютно устойчива. При этом показатели Ляпунова и Флоке примут вид $\Lambda_L - \nu$ и $\Lambda_F - \nu$.

Ясно также, что из абсолютной устойчивости системы (16) следует, что

$$\alpha > 0, \;\; \beta > 0, \;\; \alpha + ak > 0, \;\; \beta + bk > 0. \tag{20}$$

Можно также принять, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$ при $a = 0$.

Предположим также, что

$$b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0. \tag{21}$$

Это неравенство эквивалентно полной управляемости пары (A, B) и полной наблюдаемости пары (A, C).

В первом параграфе было доказано, что систему (16) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \beta x_1 - u(t)(ax_2 + bx_1). \end{aligned} \tag{22}$$

Напомним, что, не умаляя общности, мы рассматриваем абсолютно устойчивую систему (16). Сделаем теперь замену

$$x = y\exp(\rho t)$$

так, чтобы при всех $\rho > R$ система

$$\dot{y} = (A - \rho I + u(t)BC)y \tag{23}$$

была абсолютно устойчивой, а при $\rho = R$ система (23) не являлась абсолютно устойчивой.

Из теорем 1 и 2 следует, что система (23) с $\rho = R$, преобразованная к виду (22), обладает следующим свойством.

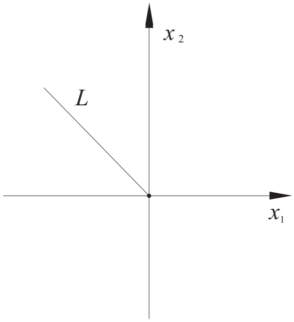

Рис. 6

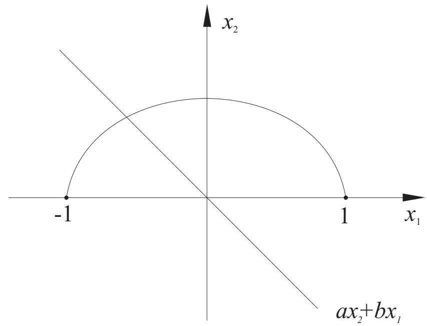

Рис. 7

Либо система (13) с $\lambda = \alpha,\ \mu = \beta$ на Ω_1 и с $\lambda = \alpha + ak,\ \mu = \beta + bk$ на Ω_2 обладает в полуплоскости $\{x_2 \geqslant 0\}$ лучом $L = \{x_2 = Kx_1, K < < 0\}$, целиком состоящим из состояний равновесия (рис. 6), либо для решений $x_1(t), x_2(t)$ и $\widetilde{x}_1(t)$, $\widetilde{x}_2(t)$ этой системы с начальными данными $x_1(0) = -1, \widetilde{x}_1(0) = 1, x_2(0) = \widetilde{x}_2(0) = 0$ справедливо равенство

$$x_2(T) = \widetilde{x}_2(\tau)$$

(см. рис. 7).

В первом случае так же как при доказательстве теоремы 1 строим семейство кривых, изображенных на рис. 3. Отличием от предыдущих рассуждений является лишь тот факт, что здесь вместо трансверсальности имеется более слабое соотношение при $x_2(t) = F(x_1(t)) > 0$:

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} \leqslant \frac{dF(x)}{dx}\Big|_{x=x_1(t)}.$$

Однако выполненное на всем семействе кривых, заполняющих все пространство $R^2 \setminus \{0\}$, оно позволяет доказать ограниченность любого решения системы (22).

Применяя аналогичную схему к случаю $x_2(T) = \widetilde{x}_2(\tau)$, получим, что решения системы (22) не смогут покинуть области, ограниченные кривыми

$$\begin{aligned}
&x_2 = F(x_1, c) \quad \text{на} \quad [c\widetilde{x}_1(\tau), c],\\
&x_2 = F(x_1, -c) \quad \text{на} \quad [-c, cx_1(T)],\\
&x_2 = -F(-x_1, -c) \quad \text{на} \quad [-cx_1(T), c],\\
&x_2 = -F(-x_1, c) \quad \text{на} \quad [-c, -c\widetilde{x}_1(\tau)]
\end{aligned}$$

(см. рис. 8).

Таким образом, $\Lambda_L \leqslant R$.

Однако легко видеть, что в первом случае (рис. 6) имеем для системы (22) либо при $u(t) \equiv 0$ либо при $u(t) \equiv k$ соотношение $\lambda(u(\cdot)) = 0$.

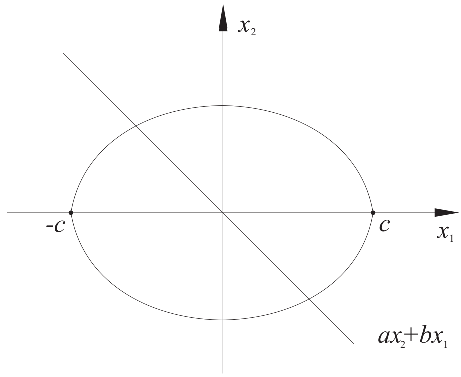

Рис. 8

Во втором случае (рис. 7) при $b > 0$ определим $2(T-\tau)$-периодическую функцию $u(t)$ следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} k & \text{при } t \in (0,T) \cup (T-\tau, 2T-\tau); \\ 0 & \text{при } t \in (T, T-\tau) \cup (2T-\tau, 2T-2\tau). \end{cases}$$

Ясно, что для этой периодической системы $\lambda(u(\cdot)) = 0$. Аналогичные рассуждения проводятся и для случая $b \leqslant 0$.

Из приведенных здесь рассуждений вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Если выполнено неравенство* (21), *то для системы* (16) *при* $n = 2$ *имеет место равенство* (18).

Заметим, что для системы (16) аналогичным образом решается задача о совпадении младших показателей Ляпунова и Флоке, которые определяются как величины

$$\inf_u \inf_{|z|=1} \varliminf_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}\ln|x(t,z)|\right)$$

соответственно на классах функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17), и на классах периодических функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17).

Заметим также, что различные сужения классов функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию (17), приводят к нарушению равенства (18). Так, например, для уравнения

$$\dot{x} = (\sin\ln t + \cos\ln t)\, x$$

легко видеть, что $\lambda = 1$, а для уравнения

$$\dot{x} = \sum_k (a_k \sin kt + b_k \cos kt)\, x$$

при любых a_k и b_k имеем $\lambda = 0$.

3. Локализация аттракторов уравнения Льенара. Гипотеза Одани

Применение «естественной» функции Ляпунова к локализации аттрактора уравнения Льенара (в [36] это уравнение названо уравнением Картрайт–Литтлвуда)

$$\ddot{x} + \mu[F(\dot{x})] + x = \mu E(t), \tag{24}$$

где μ — положительное число, $F(y), E(t)$ — удовлетворяющие условию Липшица функции, встретилось со следующими трудностями.

Рассмотрение функции Ляпунова в виде интеграла энергии

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \mu[F(y) - E(t)] \end{aligned} \tag{25}$$

дает следующее выражение для ее производной:

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = -2\mu y(t)[F(y(t)) - E(t)].$$

Отсюда сразу получаем устойчивость в целом системы (25) при $E(t) \equiv \equiv 0,\ F(y)y > 0\ \forall\, y \neq 0$.

Для классических колебательных систем — Рэлея и Ван-дер-Поля — функция $F(y)$ имеет следующий вид:

$$F(y) = -\alpha y + \beta y^3, \tag{26}$$

где α и β — положительные числа.

Для системы (25) с нелинейной функцией (26) и равномерно ограниченной $E(t) : |E(t)| \leqslant c\ \forall\, t \in R^1$, хорошо известно свойство диссипативности по Левинсону.

Напомним, что система (25) диссипативна по Левинсону [27, 33, 36], если существует число R, для которого любое решение $x(t),\ y(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\varlimsup_{t \to +\infty} (x(t)^2 + y(t)^2) \leqslant R. \tag{27}$$

В классическом подходе к доказательству этого факта поступают следующим образом [27, 33, 36]. Вначале проводят оценку производной $\dot{V}(x(t), y(t))$ на множестве $\{x \in R^1,\ |y| \geqslant \nu\}$:

$$\dot{V}(x(t), y(t)) \leqslant -\varepsilon.$$

Здесь ν и ε — некоторые положительные числа. Такую оценку легко получить для функции $F(y)$ вида (26).

Внутри полосы $\{x \in R^1,\ |y| \leqslant \nu\}$ производная $\dot V(x(t), y(t))$ в некоторых точках может принимать и положительные значения. Здесь обычно получают оценку

$$\dot V(x(t), y(t)) \leqslant L,$$

где L — некоторое положительное число.

Однако при большом удалении от начала координат ($x(t)^2 + y(t)^2 > M$, M — большое число) решение $x(t), y(t)$ «проскакивает» рассматриваемую полосу очень быстро (за время $\tau(M) \to 0$ при $M \to \infty$). После этого на большом временном промежутке $[\tau, \tau + T]$ рассматриваемое решение $x(t), y(t)$ находится на множестве $\{x \in R^1,\ |y| \geqslant \nu\}$. Поэтому оказывается возможным оценить приращение

$$V(x(\tau + T), y(\tau + T)) - V(x(0), y(0)) \leqslant -\varepsilon T + \tau L,$$

которое является отрицательным при больших $x(t)^2 + y(t)^2$.

Такие рассуждения позволяют установить существование числа R, для которого выполнено неравенство (27). Подробное и аккуратное изложение описанной выше схемы имеется в книгах [27, 36]. В этом направлении возможны обобщения на системы более высокого порядка [42, 43]. Однако следует отметить, что описанная выше схема достаточно трудоемка, а локализационные оценки (например, оценка R) оказываются весьма грубыми.

Применим теперь к рассматриваемой задаче методику построения не функций Ляпунова, а систем сравнения. Для этого предположим, что для некоторых положительных чисел α и k выполнено неравенство

$$\frac{(F(y) - E(t))}{y} > \alpha - k\frac{\operatorname{sign} y}{y} \qquad \forall\, t \in R^1, \quad \forall y \neq 0. \tag{28}$$

Это предположение традиционно для системы (25) [28].

Введем в рассмотрение систему сравнения

$$\dot x = y, \qquad \dot y = \mu(-\alpha y + k \operatorname{sign} y) - x. \tag{29}$$

При $\alpha\mu \geqslant 2$ рассмотрим положительную полутраекторию системы (29) с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) = -\mu k$ и положительную полутраекторию с начальными данными $y(0)$, $x(0) = \mu k$. Этим полутраекториям соответствуют графики функций $y = G_1(x) \geqslant 0$ и $y = G_2(x) \leqslant 0$, $G_1(-\mu k) = G_2(\mu k) = 0$.

При $\alpha\mu < 2$ система (29) имеет единственный предельный цикл $x(t)$, $y(t)$ с начальными данными $x(0) = \rho, y(0) = 0$. Здесь

$$\rho = \frac{1 + \exp(-\lambda\pi/\omega)}{1 - \exp(-\lambda\pi/\omega)}\mu k, \qquad \lambda = \frac{\alpha\mu}{2}, \qquad \omega = \sqrt{1 - \lambda^2}\,.$$

Пусть график функции $y = G_1(x)$ совпадает с положительными значениями предельного цикла, а график функции $y = G_2(x)$ — с отрицательными.

Введем в рассмотрение множество

$$\Omega(\alpha, k) = \{x \in [-\mu k, \mu k], G_2(x) \leqslant y \leqslant G_1(x)\}$$

при $\alpha\mu \geqslant 2$ и

$$\Omega(\alpha, k) = \{x \in [-\rho, \rho], G_2(x) \leqslant y \leqslant G_1(x)\}$$

при $\alpha\mu < 2$.

С помощью введенной здесь системы сравнения (29) очень легко доказать следующий результат.

Теорема 4 ([21]). *Для любого решения $x(t)$, $y(t)$ системы* (25) *существует число T такое, что при всех $t \geqslant T$ это решение принадлежит множеству $\Omega(\alpha, k)$.*

Доказательство. Пусть неравенство (28) выполнено для некоторого $\alpha > 0$ и $k = k_0$. Очевидно, что оно выполнено также и для всех $k \geqslant k_0$. Но тогда для любой точки (x_0, y_0) множества $R^2 \backslash \Omega(\alpha, k_0)$ существует число $k \geqslant k_0$ такое, что (x_0, y_0) принадлежит границе $\Omega(\alpha, k)$. Таким образом, границы $\Omega(\alpha, k)$ образуют семейство замкнутых непрерывных кривых, покрывающих множество $R^2 \backslash \Omega(\alpha, k_0)$.

Для доказательства теоремы остается показать, что эти кривые всюду за исключением точек $x \in R^1, y = 0$ трансверсальны и решения системы (25) «прошивают» эти кривые снаружи внутрь. Эти свойства вытекают из соотношений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mu(F(y) - E(t)) - x}{y} < \frac{-\mu(\alpha y - k \operatorname{sign} y) - x}{y} = \frac{dG_j}{dx}.$$

Теорема доказана. □

Таким образом, доказательство диссипативности по Левинсону системы (25) с помощью систем сравнения вида (29) «почти очевидно» и занимает несколько строк. Здесь оказалось, что траектории систем сравнения образуют семейство трансверсальных, замкнутых, непрерывных кривых, которые и обеспечивают свойство диссипативности. Построить же функцию Ляпунова, линии уровня которой обладали бы аналогичным свойством замкнутости, бесконтактности и непрерывности в рассматривамом случае оказывается делом очень трудным.

Заметим, что вычисление и эффективные оценки функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ являются также делом незатруднительным. Поэтому преимущество метода систем сравнения для локализации глобальных аттракторов системы (25) и различных ее обобщений также весьма очевидно. Развитие такого подхода имеется в работах [16–18, 20, 21, 40, 44].

С помощью метода систем сравнения доказана, в частности, справедливость следующей интересной гипотезы Одани [47–49] о том, что на решениях $x(t)$, $y(t)$ аттрактора системы Ван дер Поля (25) с $E(t) \equiv$ $\equiv 0$, $F(y) = y^3/3 - y$ имеет место оценка

$$\max_t |y(t)| \leqslant 2{,}0235$$

при всех $\mu > 0$. Подробное доказательство этого факта, который улучшает широко известные оценки Картрайт [32], Ван Хорсена [51], Алсхолма [30] и Одани [47–49], имеется в [44].

4. Уравнение Льенара и аттракторы квадратичных систем

Здесь мы получим условие ограниченности аттракторов квадратичной системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \alpha_1x + \beta_1y, \\ \dot{y} &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \alpha_2x + \beta_2y, \end{aligned} \tag{30}$$

где $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ — вещественные числа, сведя исследование системы (30) к некоторому специальному уравнению Льенара. Здесь мы будем следовать работам [19, 38].

Предложение 1. *Не умаляя общности можно считать, что* $c_1 = 0$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $a_2 \neq 0$ (в противном случае, сделав переобозначения $x \to y$, $y \to x$, сразу получим $c_1 = 0$). Введем далее линейное преобразование $x_1 = x + \nu y$, $y_1 = y$. Для доказательства предложения 1 достаточно показать, что для некоторых чисел ρ, $\varkappa$, ν справедливо тождество

$$\begin{aligned} (x + \nu y)^\bullet = (a_1 + \nu a_2)x^2 + (b_1 + \nu b_2)xy + (c_1 + \nu c_2)y^2 + \\ + (\alpha_1 + \nu\alpha_2)x + (\beta_1 + \nu\beta_2)y = \rho(x + \nu y)y + \\ + \varkappa(x + \nu y)^2 + (\alpha_1 + \nu\alpha_2)x + (\beta_1 + \nu\beta_2)y. \end{aligned}$$

Это тождество эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\varkappa = a_1 + \nu a_2, \\ &\varkappa\nu^2 + \rho\nu = c_1 + \nu c_2, \\ &\rho + 2\varkappa\nu = b_1 + \nu b_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Эти соотношения выполнены, если

$$(a_1 + \nu a_2)\nu^2 - \nu(b_1 + \nu b_2) + (c_1 + \nu c_2) = 0.$$

Поскольку $a_2 \neq 0$, это уравнение третьей степени относительно ν всегда имеет вещественный корень. Таким образом, система уравнений (31) всегда имеет вещественное решение. □

Далее будем предполагать, что $c_1 = 0$.

Предложение 2. *Пусть* $b_1 \neq 0$. *Прямая линия* $\beta_1 + b_1x = 0$ *на плоскости* $\{x, y\}$ *либо является инвариантной, либо трансверсальна для траекторий системы* (30).

Доказательство. Это утверждение следует из равенства

$$(\beta_1 + b_1 x)^\bullet = b_1\big[(b_1 x + \beta_1)y + a_1 x^2 + \alpha_1 x\big] = \Big[a_1\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big)^2 - \alpha_1\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big)\Big]b_1$$

при $x = -\beta_1/b_1$. Отсюда следует, что если

$$a_1\left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \alpha_1\left(\frac{\beta_1}{b_1}\right) = 0,$$

то прямая $\beta_1 + b_1 x = 0$ инвариантна, и если

$$a_1\left(\frac{\beta_1}{b_1}\right)^2 - \alpha_1\left(\frac{\beta_1}{b_1}\right) \neq 0,$$

то прямая $\beta_1 + b_1 x = 0$ трансверсальна. □

Исключая далее из рассмотрения тривиальный случай, когда правая часть первого уравнения системы (30) не зависит от y, будем предполагать, что

$$|b_1| + |\beta_1| \neq 0. \tag{32}$$

Отсюда и из предложения 2 следует, что траектории системы (30) являются также траекториями системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{a_1 x^2 + \alpha_1 x}{\beta_1 + b_1 x}, \\ \dot{y} &= \frac{a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 + \alpha_2 x + \beta_2 y}{\beta_1 + b_1 x}. \end{aligned} \tag{33}$$

Введем в рассмотрение следующее преобразование

$$\begin{aligned} \overline{y} &= y + \frac{a_1 x^2 + \alpha_1 x}{\beta_1 + b_1 x}, \\ \overline{x} &= x. \end{aligned}$$

В этих новых фазовых переменных (здесь мы опускаем черточки над переменными: $\overline{x} \to x$, $\overline{y} \to y$) система (33) запишется в виде

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -Q(x)y^2 - R(x)y - P(x), \tag{34}$$

где

$$Q(x) = \frac{-c_2}{\beta_1 + b_1 x},$$

$$R(x) = -\frac{(b_1 b_2 - 2a_1 c_2 + a_1 b_1)x^2}{(\beta_1 + b_1 x)^2} - \\ - \frac{(b_2\beta_1 + b_1\beta_2 - 2\alpha_1 c_2 + 2a_1\beta_1)x + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2}{(\beta_1 + b_1 x)^2},$$

$$P(x) = -\left(\frac{a_2 x^2 + \alpha_2 x}{\beta_1 + b_1 x} - \frac{(b_2 x + \beta_2)(a_1 x^2 + \alpha_1 x)}{(\beta_1 + b_1 x)^2} + \frac{c_2(a_1 x^2 + \alpha_1 x)^2}{(\beta_1 + b_1 x)^3}\right).$$

Из предложения 2 и условия (32) следует, что траектории системы (34) являются также траекториями системы

$$\dot{x} = ye^{p(x)}, \quad \dot{y} = \big[-Q(x)y^2 - R(x)y - P(x) \big] e^{p(x)},$$

где $p(x)$ — некоторый интеграл функции $Q(x)$.

Из этой системы с помощью замены $\overline{x} = x$, $\overline{y} = ye^{p(x)}$ получим

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -f(x)y - g(x). \tag{35}$$

Здесь вновь после указанного выше преобразования опущены черточки над переменными x и y.

Итак, при $b_1 \neq 0$ система (30) может быть приведена с помощью указанных выше невырожденных замен к уравнению Льенара (35) с функциями

$$f(x) = R(x)e^{p(x)} = R(x)|\beta_1 + b_1 x|^q,$$
$$g(x) = P(x)e^{2p(x)} = P(x)|\beta_1 + b_1 x|^{2q}.$$

Здесь $q = -\frac{c_2}{b_1}$ при $b_1 \neq 0$.

Рассмотрим теперь систему (35), где будем предполагать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $(a, +\infty)$ и для некоторых чисел $a < \nu_1 \leqslant x_0 \leqslant \nu_2$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \to a} g(x) = -\infty, \\ & \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty, \\ & \lim_{x \to a} \int_{x_0}^{x} g(z)\,dz = \lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} g(z)\,dz = +\infty, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & f(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a, \nu_1) \bigcup (\nu_2, +\infty), \\ & \int_{\nu_2}^{\nu_1} f(x)\,dx \leqslant 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1) *и* 2), *то глобальный минимальный аттрактор системы* (35) *в фазовом пространстве*

$$\{x \in (a, +\infty),\ y \in R^1\}$$

является ограниченным множеством.

Доказательство. Рассмотрим сначала пару чисел $\mu_1 \in (a, \nu_1)$ и $\mu_2 \in \in (\nu_2, +\infty)$, таких, что μ_1 достаточно близко к a, μ_2 достаточно большое и

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} g(x)\,dx = 0. \tag{38}$$

В дальнейшем, не умаляя общности, примем, что

$$g(x) < 0 \quad \forall\, x \in [\mu_1, \nu_1],$$

$$g(x) > 0 \quad \forall\, x \in [\nu_2, \mu_2].$$

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}
&V_1(x,y) = y^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(z)\,dz,\\
&V_2(x,y) = \Big(y + \int\limits_{\nu_1}^{x} f(z)\,dz\Big)^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(z)\,dz,\\
&V_3(x,y) = \Big(y + \int\limits_{\nu_2}^{x} f(z)\,dz\Big)^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(z)\,dz,\\
&V_4(x,y) = V_2(x,y) - \varepsilon(x-\nu_1),\\
&V_5(x,y) = V_3(x,y) - \varepsilon(x-\nu_2),\\
&V_6(x,y) = V_3(x,y) + \varepsilon(x-\nu_2),\\
&V_7(x,y) = V_2(x,y) + \varepsilon(x-\nu_1).
\end{aligned}$$

Здесь ε — некоторое достаточно малое число.

Определим теперь множества Ω_j следующим образом (рис. 9):

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{x \in [\mu_1, \nu_1], y \geqslant 0, V_1(x,y) \leqslant V_1(\mu_1, 0)\},\\
\Omega_2 &= \{x \in [\nu_1, x_0], y \geqslant 0, V_4(x,y) \leqslant V_2(\nu_1, y_1)\},\\
\Omega_3 &= \{x \in [x_0, \nu_2], y \geqslant 0, V_5(x,y) \leqslant V_3(\nu_2, y_2)\},\\
\Omega_4 &= \{x \in [\nu_2, \mu_2], y \geqslant 0, V_3(x,y) \leqslant V_3(\mu_2, 0)\},\\
\Omega_5 &= \{x \in [\nu_2, \mu_2], y \leqslant 0, V_1(x,y) \leqslant V_1(\mu_2, 0)\},\\
\Omega_6 &= \{x \in [x_0, \nu_2], y \leqslant 0, V_6(x,y) \leqslant V_3(\nu_2, y_3)\},\\
\Omega_7 &= \{x \in [\nu_1, x_0], y \leqslant 0, V_7(x,y) \leqslant V_2(\nu_1, y_4)\},\\
\Omega_8 &= \{x \in [\mu_1, \nu_1], y \leqslant 0, V_2(x,y) \leqslant V_2(\mu_1, 0)\}.
\end{aligned}$$

Здесь $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 < 0, y_4 < 0$ — решения квадратных уравнений

$$\begin{aligned}
V_1(\nu_1, y_1) &= V_1(\mu_1, 0),\\
V_3(\nu_2, y_2) &= V_3(\mu_2, 0),\\
V_1(\nu_2, y_3) &= V_1(\mu_2, 0),\\
V_2(\nu_1, y_4) &= V_2(\mu_1, 0)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что для производных функций $V_j(x,y)$ в силу системы (35) имеют место следующие соотношения:

$$\dot V_1 = -2f(x)\,y^2, \quad \dot V_2 = -2g(x)\int\limits_{\nu_1}^{x} f(z)\,dz, \quad \dot V_3 = -2g(x)\int\limits_{\nu_2}^{x} f(z)\,dz,$$

$$\dot V_4 = -2g(x)\int\limits_{\nu_1}^{x} f(z)\,dz - \varepsilon y, \quad \dot V_5 = -2g(x)\int\limits_{\nu_2}^{x} f(z)\,dz - \varepsilon y,$$

$$\dot V_6 = -2g(x)\int\limits_{\nu_2}^{x} f(z)\,dz + \varepsilon y, \quad \dot V_7 = -2g(x)\int\limits_{\nu_1}^{x} f(z)\,dz + \varepsilon y.$$

Поэтому при сделанных предположениях относительно μ_1 и μ_2 и при $y \neq 0, x \neq \nu_j$ имеем неравенства

$$\begin{array}{llllll} \dot V_1 < 0 \ \text{на} \ \Omega_1 \cup \Omega_5; & \dot V_4 < 0 \ \text{на} \ \Omega_2; & \dot V_5 < 0 \ \text{на} \ \Omega_3; \\ \dot V_3 < 0 \ \text{на} \ \Omega_4; & \dot V_6 < 0 \ \text{на} \ \Omega_6; & \dot V_7 < 0 \ \text{на} \ \Omega_7; \\ & \dot V_2 < 0 \ \text{на} \ \Omega_8. & \end{array}$$

Отметим, что из условий 2), (38) и для достаточно малых ε имеем неравенства $y_5 < y_6$ и $y_7 > y_8$, где y_5 — положительное решение уравнения

$$V_4(x_0, y_5) = V_2(\nu_1, y_1),$$

y_6 — положительное решение уравнения

$$V_5(x_0, y_6) = V_3(\nu_2, y_2),$$

y_7 — отрицательное решение уравнения

$$V_6(x_0, y_7) = V_3(\nu_2, y_3),$$

y_8 — отрицательное решение уравнения

$$V_7(x_0, y_8) = V_2(\nu_1, y_4)$$

(см. рис. 9).

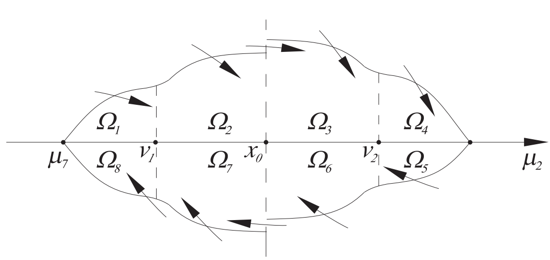

Рис. 9

Таким образом, здесь построено семейство трансверсальных замкнутых кривых, которое и доказывает утверждение теоремы. □

Поясним выполнение соотношений $\dot{V}_4 < 0$, $\dot{V}_5 < 0$, $\dot{V}_6 < 0$, $\dot{V}_7 < 0$ соответственно на множествах Ω_2, Ω_3, Ω_6, Ω_7.

Зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем здесь μ_1 и μ_2 настолько близкими к a и к $+\infty$, что минимальные значения $|y|$ на пересечении замкнутой кривой (рис. 9) с полосой $\{x \in [\nu_1, \nu_2]\}$ будут больше, чем

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \in [\nu_1, \nu_2]} 2\left| g(x) \int\limits_{\nu_1}^{x} f(z)\, dz \right|$$

и

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \in [\nu_1, \nu_2]} 2\left| g(x) \int\limits_{\nu_2}^{x} f(z)\, dz \right|.$$

Отсюда и следуют требуемые неравенства $\dot{V}_j < 0$. Таким образом, здесь $\mu_j = \mu_j(\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_1(\varepsilon) = a, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_2(\varepsilon) = +\infty.$$

Выпишем теперь условия 1) и 2) в терминах квадратичной системы. Здесь

$$a = -\frac{\beta_1}{b_1}, \quad b_1 \neq 0.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $b_1 > 0$. Условия 1) и 2) выполнены, если

$$0 < 2c_2 < b_1, \quad \beta_1 > 0,$$

$$\frac{a_1 \beta_1}{b_1} > \alpha_1, \quad \frac{a_1(2c_2 - b_1)}{b_1} > b_2, \quad \frac{a_1(b_1 b_2 - a_1 c_2)}{b_1^2} > a_2. \tag{39}$$

Кроме того, из условий (39) следует положительная инвариантность полуплоскости $\{x \geqslant a\}$ для квадратичной системы (30).

Заметим, что здесь $c_1 = 0$ и параметры α_2 и β_2 не входят в условия (39).

Заметим также, что аналогичные рассуждения можно провести и для полупространства $\{x < a\}$. Однако здесь при делении обоих уравнений квадратичной системы (30) на $\beta_1 + b_1 x$ изменяется направление движения по траекториям. Таким образом, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (39). *Тогда любое решение системы* (30) *с начальными данными такими, что* $x(0) > a$, *стремится при* $t \to +\infty$ *к ограниченному аттрактору, расположенному в полуплоскости* $\{x > a\}$.

Теорема 6 позволяет локализовать поиск предельных циклов квадратичных систем (30). Заметим также, что трансверсальные кривые, построенные с помощью функций V_j, могут применяться для доказательства существования и оценок циклов. Так, например, если в полуплоскости $\{x > a\}$ имеется единственное неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия системы (30) (или системы (35)) и для нее выполнены условия (39) (или условия 1) и 2) для системы (35)), то система (30) (или (35)) имеет периодическое решение, расположенное в полуплоскости $\{x > a\}$.

Кроме того, в этих предположениях $f(x) > 0$ при $x < a$. Поэтому с помощью функции Ляпунова

$$V(x, y) = y^2 + \int_{2a}^{x} g(z)\,dz$$

легко доказать, что решение системы (30) с начальными данными $x(0) < a$ либо стремится при $t \to +\infty$ к состоянию равновесия, либо к бесконечности, либо покидает за конечное время полуплоскость $\{x < < a\}$.

Используя этот факт и теорему 6 сформулируем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (39) *и в полуплоскости* $\{x > > a\}$ *система* (30) *имеет единственное неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия. Тогда любое решение системы* (30) *с начальными данными такими, что* $x(0) < a$, *либо стремится при* $t \to +\infty$ *к состоянию равновесия, либо — к бесконечности, либо — к ограниченнному аттрактору, расположенном в полуплоскости* $\{x > a\}$. *Любое решение системы* (30) *с начальными данными такими, что* $x(0) \geqslant a$, *стремится при* $t \to +\infty$ *к ограниченному аттрактору, расположенному в полуплоскости* $\{x > a\}$. *Этот аттрактор имеет по крайней мере один цикл.*

Условия теоремы 7 эффективно выделяют в пространстве параметров системы (30) множество положительной лебеговой меры, где существуют циклы. На актуальность [1)] получения результатов такого типа указано в [4].

[1)] В. И. Арнольд (см. [4]) пишет: «Чтобы оценить число предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости, А. Н. Колмогоров раздал несколько сотен таких полей (со случайно выбранными коэффициентами многочленов второй степени) нескольким сотням студентов механико-математического факультета МГУ в качестве математического практикума. Каждый студент должен был найти число предельных циклов своего поля. Результат этого эксперимента был совершенно неожиданным: ни у одного поля не оказалось ни одного предельного цикла! При малом изменении коэффициентов поля предельный цикл сохраняется. Поэтому системы с одним, двумя, тремя (и даже, как стало известно позже, четырьмя) предельными циклами образуют в пространстве коэффициентов открытые множества, так что вероятности попасть в них при случайном выборе коэффициентов многочленов положительны. Тот факт, что этого не случилось, подсказывает, что упомянутые вероятности, по-видимому, малы».

Разовьем теперь предложенную здесь методику для случая, когда функция $f(x)$ меняет знак только один раз на интервале $(a, +\infty)$.

Предположим здесь, что для функции $g(x)$ выполнены условия (36), а функция $f(x)$ такова, что

$$\begin{aligned} &f(x) > 0 \quad \forall\, x > x_0, \\ &f(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, x_0). \end{aligned} \tag{40}$$

Предположим также, что

$$g(x_0) = 0, \qquad g(x) \neq 0, \qquad \forall\, x \neq x_0, \quad x \in (a, +\infty). \tag{41}$$

Рассмотрим функцию $W_1(x, y) = V_1(x, y)$ на множестве $\Phi_1 = \{x > > x_0,\ y < 0\}$,

$$W_2(x, y) = \Bigl(y + \int\limits_{x_0}^{x} f(z)\, dz\Bigr)^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(z)\, dz$$

— на $\Phi_2 = \{x > x_0,\ y > 0\}$ и

$$W_3(x, y) = \Bigl(y + \int\limits_{\mu_1}^{x} f(z)\, dz\Bigr)^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} g(z)\, dz$$

— на $\Phi_3 = \{x \in (\mu_1, x_0),\ y \in R^1\}$.

Ясно, что на рассматриваемых множествах выполнены неравенства $\dot W_1 < 0$, $\dot W_2 < 0$, $\dot W_3 < 0$.

Рассмотрим некоторое число $\mu > x_0$ и построим по нему трансверсальную при $y \neq 0$ кривую

$$\begin{gathered} W_1(x, y) = W_1(\mu, 0) \ \text{ на } \ \Phi_1, \\ W_2(x, y) = W_2(\mu, 0) \ \text{ на } \ \Phi_2, \\ W_3(x, y) = W_3(x_0, y(\mu)) \ \text{ на } \ \Phi_3, \end{gathered}$$

где

$$y(\mu) = -\sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\, dz}\,.$$

Построенная нами кривая будет трансверсальной, если выбрать число μ_1 так, чтобы

$$W_3(\mu_1, 0) = W_3(x_0, y(\mu)). \tag{42}$$

Величина

$$y_1(\mu) = \sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\, dz + \Bigl(\int\limits_{x_0}^{\mu} f(z)\, dz\Bigr)^2}$$

является решением уравнения

$$W_2(x_0, y_1(\mu)) = W_2(\mu, 0),$$

а величина

$$y_2(\mu) = \sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\,dz} - 2\int\limits_{\mu_1}^{x_0} f(z)\,dz$$

— решением уравнения

$$W_3(x_0, y(\mu)) = W_3(x_0, y_2(\mu)).$$

Если

$$y_1(\mu) > y_2(\mu) \tag{43}$$

с μ_1, удовлетворяющим (42), то получим трансверсальную кривую, изображенную на рис. 10.

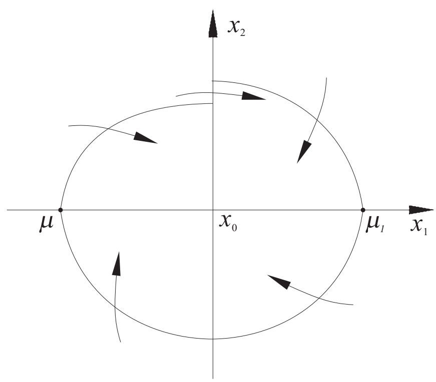

Рис. 10

Условия (43) и (42) можно переписать следующим образом

$$\sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\,dz + \Big(\int\limits_{x_0}^{\mu} f(z)\,dz\Big)^2} - \sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\,dz} > -2\int\limits_{\mu_1}^{x_0} f(z)\,dx, \tag{44}$$

где μ_1 удовлетворяет равенству

$$\sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu_1} g(z)\,dz} = \sqrt{2\int\limits_{x_0}^{\mu} g(z)\,dz} - \int\limits_{\mu_1}^{x_0} f(z)\,dz. \tag{45}$$

Будем предполагать, что уравнение (45) имеет решения $\mu_1(\mu)$.

Заметим, что применяя методику, развитую для доказательства теоремы 5, здесь можно снять ограничение (41).

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 8. *Если при достаточно большом* μ *выполнены условия* (36), (40), (44), (45), *то глобальный минимальный аттрактор системы (35) в фазовом пространстве*

$$\{x \in (a, +\infty), y \in R^1\}$$

является ограниченным множеством. Если, кроме того, в полуплоскости $\{x > a\}$ *система* (35) *имеет только одно неустойчивое по Ляпунову фокусное состояние равновесия, то этот аттрактор имеет цикл.*

Запишем теперь условия теоремы 8 для системы (30). Учитывая вид функций $f(x)$ и $g(x)$, при достаточно больших μ получим следующие асимптотические соотношения

$$\int_{\mu_1}^{x_0} f(z)\,dz \approx \frac{-A}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{1-q}}.$$

$$2\int_{x_0}^{\mu_1} g(z)\,dz \approx \frac{B}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{2(1-q)}}.$$

$$\int_{x_0}^{\mu} f(z)\,dz \approx C\mu^{(q+1)}.$$

$$2\int_{x_0}^{\mu_1} g(z)\,dz \approx D\mu^{2(q+1)}.$$

Здесь числа A, B, C, D легко выписываются через коэффициенты системы (30):

$$A = \frac{-1}{b_1(q-1)}(b_1b_2 - 2a_1c_2 + a_1b_1)\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big)^2 - \\ - (b_1\beta_1 + b_1\beta_2 - 2\alpha_1c_2 + 2a_1\beta_1)\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big) + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2;$$

$$B = \frac{1}{b_1(q-1)}\Big(-c_2\Big(a_1\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big)^2 - \alpha_1\Big(\frac{\beta_1}{b_1}\Big)\Big)^2\Big);$$

$$C = \frac{b_1^q}{1+q}\Big(\frac{2a_1c_2 - b_1b_2 - a_1b_1}{b_1^2}\Big);$$

$$D = \frac{b_1^{2q}}{1+q}\Big(-\frac{a_2}{b_1} + \frac{a_1b_2}{b_1^2} - \frac{c_2a_1^2}{b_1^3}\Big).$$

Будем предполагать, что выполнено условие $0 < 2c_2 < b_1$. Тогда условия (36), (40), (45) и (44) примут вид $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $D > 0$,

$$\frac{\sqrt{B}}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{(1-q)}} = \sqrt{D}\,\mu^{(1+q)} + \frac{A}{(\beta_1 + b_1\mu_1)^{1-q}};$$

$$\sqrt{D + C^2} - \sqrt{D} > \frac{2A\sqrt{D}}{\sqrt{B} - A}, \quad \sqrt{B} > A. \tag{46}$$

Таким образом, если A, B, C, D — положительны, выполнено условие (46) и в полуплоскости $\{x > a\}$ единственным состоянием равновесия является неустойчивый фокус, то справедлива теорема 8. Кроме того, если система (35) имеет по одному неустойчивому фокусу в полуплоскостях $\{x > a\}$ и $\{x < a\}$, то в этих полуплоскостях глобальные минимальные аттракторы ограничены и в них существует по крайней мере по одному циклу (рис. 11).

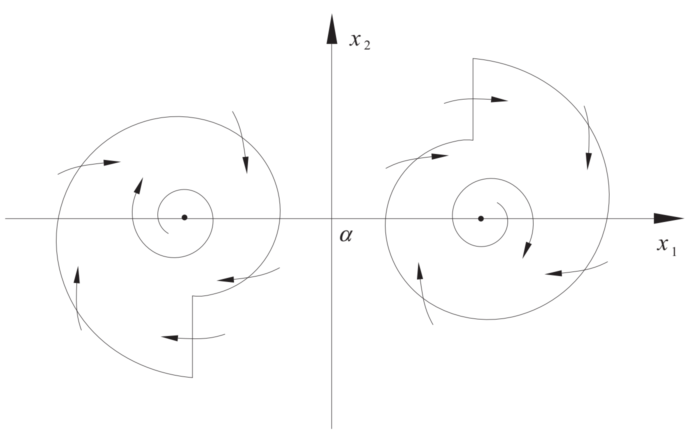

Рис. 11

Последнее утверждение вытекает из того факта, что из условий (46) следует выполнение аналогов соотношений (44) и (45) для $x \in (-\infty, a)$.

Заметим, что предложенная здесь методика позволяет получать условия существования большего количества циклов для системы (35).

Приведем, например, условия существования по крайней мере двух различных циклов в полуплоскости $\{x > a\}$.

Будем предполагать здесь, что выполнены условия (36) и (40). Предположим также, что для некоторого числа $x_1 > x_0$ выполнены условия

$$g(x_1) = 0, \quad g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in (a, +\infty). \tag{47}$$

Рассмотрим функции

$$W_4(x,y) = y^2 + 2\int\limits_{x_1}^{x} g(z)\,dz,$$

$$W_5(x,y) = \Big(y + \int\limits_{x_0}^{x} f(z)\,dz\Big)^2 + 2\int\limits_{x_1}^{x} g(z)\,dz,$$

$$W_6(x,y) = \Big(y + \int\limits_{\nu}^{x} f(z)\,dz\Big)^2 + 2\int\limits_{x_1}^{x} g(z)\,dz$$

соответственно на множествах

$$\{x \in (a, x_0),\ y < 0\},$$
$$\{x \in (a, x_1),\ y > 0\} \cup \{x \in (x_0, x_1),\ y < 0\},$$
$$\{x \in (x_1, \nu),\ y \in R^1\}.$$

Легко видеть, что в сделанных предположениях на этих множествах $\dot{W}_4 > 0, \dot{W}_5 > 0, \dot{W}_6 > 0$.

Поэтому для существования трансверсальной кривой, изображенной на рис. 12, получим следующие аналоги условий (44), (45):

$$\sqrt{2\int\limits_{x_1}^{\nu_1} g(z)\,dz + \Big(\int\limits_{x_0}^{\nu_1} f(z)\,dz\Big)^2} - \sqrt{2\int\limits_{x_1}^{\nu_1} g(z)\,dz} > -2\int\limits_{\nu}^{x_0} f(z)\,dz, \tag{48}$$

где ν_1 удовлетворяет равенству

$$\sqrt{2\int\limits_{x_1}^{\nu_1} g(z)\,dz} = \sqrt{2\int\limits_{x_1}^{\nu} g(z)\,dz} - \int\limits_{x_0}^{\nu} f(z)\,dz. \tag{49}$$

Будем предполагать, что уравнение (49) имеет решения $\nu_1(\nu)$.

В этом случае можно сформулировать следующий результат.

Теорема 9. *Если при достаточно большом μ выполнены условия* (44), (45), *при некотором $\nu > x_1$ выполнены условия* (48), (49) *и в полуплоскости $\{x > a\}$ единственным состоянием равновесия является устойчивый фокус, то в полуплоскости $\{x > a\}$ система* (35) *имеет не менее двух различных циклов.*

Доказательство теоремы 9 иллюстрирует рис. 13.

Легко получить аналог теоремы 9 для системы (35) в полуплоскости $\{x < a\}$. Легко также предъявить функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых выполнены условия теоремы 9 и ее аналога в полуплоскости $\{x < a\}$.

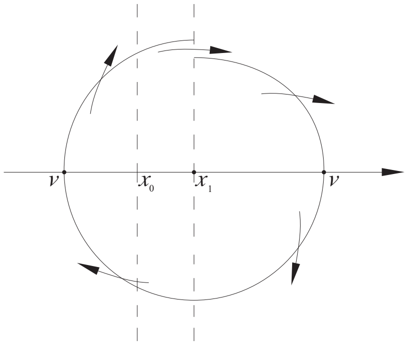

Рис. 12

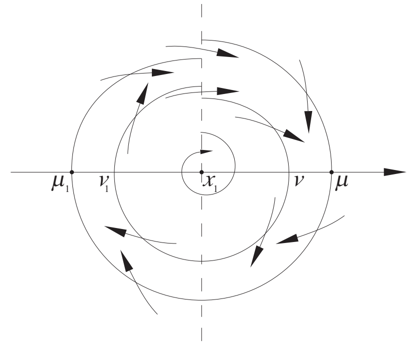

Рис. 13

Тем самым, можно выделить классы систем вида (35), у которых существует по два цикла, окружающих каждое из состояний равновесия.

Естественным образом здесь возникает следующее предположение.

Гипотеза. *Существуют параметры квадратичной системы* (30), *для которой выполнены все условия теоремы* 9 *и ее аналога в полуплоскости* $\{x < a\}$.

Напомним, что исследование предельных циклов квадратичных систем (30) стимулировалось 16-й проблемой Гильберта и различными ее вариантами [4, 10, 31, 35, 46].

5. Системы сравнения в задачах синхронизации

Приведем здесь один изящный результат [6, 8], который имеет различные обобщения [6, 7, 14, 24, 45] и который явился первой наглядной демонстрацией преимущества метода двумерных систем сравнения.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \sin x = p(t), \tag{50}$$

где α — положительное число, $p(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$p_1 < p(t) < p_2 \quad \forall\, t \in R^1. \tag{51}$$

Здесь p_1 и p_2 — числа, такие, что $-1 < p_1 \leqslant p_2 < 1$.

Уравнение (50) описывает движение маятника под действием нестационарной силы, динамику синхронной машины с переменной нагрузкой, систему фазовой автоподстройки частоты с нестабильным эталонным генератором [24].

Предположим, что все решения уравнений

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \sin x = p_1, \tag{52}$$

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \sin x = p_2 \tag{53}$$

ограничены на $[0, +\infty)$.

Теорема 10 ([6, 8]). *Если ограничены при $t \geqslant 0$ все решения уравнений* (52) *и* (53), *то также ограничено при $t \geqslant 0$ любое решение $x(t)$ уравнения* (50).

Доказательство. Рассмотрим следующие системы, эквивалентные соответственно уравнениям (50), (52) и (53):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p(t). \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p_1. \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 - \sin x_1 + p_2. \end{aligned} \tag{56}$$

Хорошо известно [9, 41, 52], что из ограниченности всех решений систем (55) и (56) следует существование решений $F_k(\sigma)$ и $G_k(\sigma)$ уравнений

$$F'F + \alpha F + \sin\sigma = p_1, \tag{57}$$

$$G'G + \alpha G + \sin\sigma = p_2, \tag{58}$$

удовлетворяющих следующим соотношениям (рис. 14):

$$\begin{aligned} &F_k(\sigma_1 + 2\pi k) = 0, \\ &F_k(\sigma) < 0 \quad \forall\, \sigma > \sigma_1 + 2k\pi, \\ &F_k(\sigma) > 0 \quad \forall\, \sigma < \sigma_1 + 2k\pi, \\ &\lim_{\sigma\to\infty} |F_k(\sigma)| = +\infty, \\ &G_k(\sigma_2 + 2k\pi) \leqslant 0, \\ &G_k(\sigma) < 0 \quad \forall\, \sigma > \sigma_2 + 2k\pi, \\ &G_k(\sigma) > 0 \quad \forall\, \sigma < \sigma_2 + 2k\pi, \\ &\lim_{\sigma\to\infty} |G_k(\sigma)| = +\infty. \end{aligned}$$

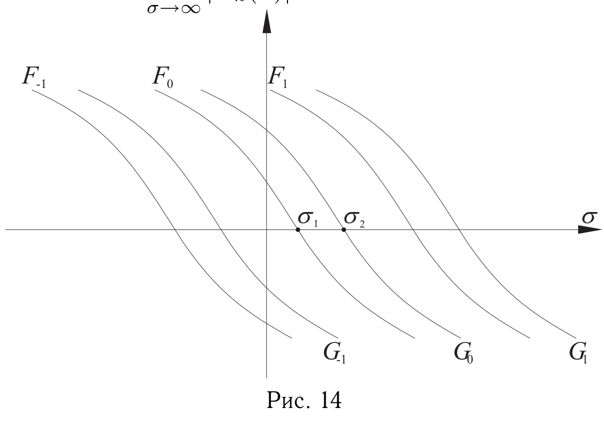

Рис. 14

Здесь σ_1 и σ_2 — соответственно нули функций $\sin\sigma - p_1$ и $\sin\sigma - p_2$ на множестве $[0, 2\pi)$ такие, что $\cos\sigma_1 < 0$ и $\cos\sigma_2 < 0$.

Рассмотрим теперь решение $x_1(t),\ x_2(t)$ системы (54), удовлетворяющее при некотором t условию

$$x_2(t) = G_k(x_1(t)) > 0.$$

Очевидно, что

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{-\alpha G_k(x_1(t)) - \sin x_1(t) + p(t))}{G_k(x_1(t))} < \\ < \frac{-\alpha G_k(x_1(t)) - \sin x_1(t) + p_2}{G_k(x_1(t))} = \left.\frac{dG_k(x)}{dx}\right|_{x=x_1(t)}.$$

Следовательно, кривая $x_2 = G_k(x_1)$, $x_2 > 0$, трансверсальна по отношению к векторному полю системы (54) и решение $x_1(t),\ x_2(t)$ пересекает эту кривую «сверху вниз».

Аналогичным образом доказывается, что кривая $x_2 = F_k(x_1)$, $x_2 < < 0$ трансверсальна по отношению к векторному полю системы (54) и решение $x_1(t),\ x_2(t)$ пересекает эту кривую «снизу вверх».

Таким образом, здесь имеется семейство замкнутых трансверсальных кривых, которые изображены на рис. 15. Это семейство зависит от целого параметра k и для любой точки пространства $\{x_1, x_2\}$ найдется замкнутая трансверсальная кривая, содержащая внутри эту точку.

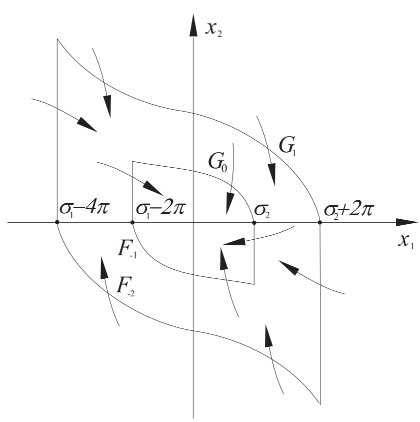

Рис. 15

Существование такого семейства замкнутых трансверсальных кривых и доказывает ограниченность решений системы (54) при $t \geqslant 0$. $\square$

Все обобщения этого результата на многомерный случай дают более грубые условия ограниченности [7, 14, 15, 24, 45]. Поэтому здесь можно сформулировать некоторый аналог проблемы Айзермана.

Доказать или опровергнуть следующую гипотезу. *Если все решения системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(\sin(Cx) + p) \tag{59}$$

ограничены при $t \geqslant 0$ *для любого числа* $p \in (p_1, p_2)$, *то также будут ограничены при* $t \geqslant 0$ *все решения системы*

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B(\sin(Cy) + p(t)) \tag{60}$$

для любой функции $p(t)$, *удовлетворяющей условиям*

$$p_1 < p(t) < p_2 \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Здесь A — *постоянная* $n \times n$-*матрица,* B *и* C — *соответственно* n-*мерные вектор-столбец и вектор-строка.*

Список литературы

1. *Айзерман М. А.* Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем // УМН. — 1949. — Т. 4, вып. 4. — С. 187–188.
2. *Александров В. В., Жермоленко В. Н.* Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестник МГУ. Матем., мех. — 1972. — 5. — С. 102–109.
3. *Александров В. В., Морозова О. И.* О необходимых и достаточных условиях абсолютной устойчивости систем второго порядка // АиТ. — 1985. — № 8. — С. 161–164.
4. *Арнольд В. И.* Экспериментальная математика. — М. Фазис. 2005.
5. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
6. *Белых В. Н.* Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения / В кн.: Системы фазовой синхронизации. Под ред. Шахгильдяна В. В., Белюстиной Л. Н. — М.: Радио и связь, 1982. — С. 45–55.
7. *Белых В. Н., Некоркин В. И.* Качественные исследования системы трех дифференциальных уравнений теории фазовой синхронизации // ПММ. — 1975. — Т. 39, вып. 4. — С. 642–649.
8. *Белюстина Л. Н., Белых В. Н.* Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Диф. ур. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 403–415.
9. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978.
10. *Гринь А. А., Черкас Л. А.* Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Льенара // Диф. ур. — 2005. — Т. 41, № 1. — С. 50–60.
11. *Еругин Н. П.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 5. — С. 620–628.
12. *Красовский Н. Н.* Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 5. — С. 547–554.

13. *Левин А. Ю.* Об устойчивости решений уравнений второго порядка // ДАН СССР, — 1961. — Т. 141, № 6. — С. 1298–1301.
14. *Леонов Г. А.* Теорема сведения для нестационарных нелинейностей // Вестник Ленинградского университета. — 1977. — № 7. — С. 38–42.
15. *Леонов Г. А.* Об ограниченности решений неавтономных дифференциальных уравнений // Вестник Ленинградского университета. — 1983. — № 7. — С. 24–26.
16. *Леонов Г. А.* Колебания в системах с нелинейным демпфированием // ПММ. — 1993. — Т. 57, вып. 5. — С. 183–184.
17. *Леонов Г. А.* Оценка снизу числа циклов двумерных динамических систем // Вест. С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. — 1994. — Вып. 1, № 1. — С. 42–46.
18. *Леонов Г. А.* Локализация аттакторов неавтономного уравнения Льенара методом разрывных систем сравнения // ПММ. — 1996. — Т. 60, вып. 2. — С. 332–336.
19. *Леонов Г. А.* Проблема оценки числа циклов двумерных квадратичных систем с точки зрения нелинейной механики // Укр. матем. ж. — 1998. — Т. 50, № 1. — С. 48–57.
20. *Леонов Г. А.* Глобальная устойчивость двумерных систем управления угловой ориентацией // ПММ. — 2000. — Т. 64, вып. 5. — С. 890–896.
21. *Леонов Г. А.* О локализации аттракторов уравнения Льенара // ПММ. — 2002. — Т. 66, вып. 3. — С. 396–401.
22. *Леонов Г. А.* Необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости двумерных нестационарных систем // АиТ. — 2005. — № 7. — С. 43–53.
23. *Леонов Г. А.* Теория управления. — Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2006.
24. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб., 2000.
25. *Малкин И. Г.* Об устойчивости систем автоматического регулирования // ПММ. — 1952. — Т. 16, вып. 4. — С.495–499.
26. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. II // АиТ. — 1986. — № 4. — С. 5–15.
27. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.–Л.: Наука, 1964.
28. *Пятницкий Е. С.* Критерий абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем второго порядка с одним нелинейным нестационарным элементом // АиТ. — 1971. — № 1. — С. 5–16.
29. *Филиппов А. Ф.* Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // АиТ. — 1980. — № 8. — С. 48–55.
30. *Alsholm P.* Existence of limit cycles for generalized Lienard equations // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — V. 171, № 1. — P. 242–255.
31. *Blows T. R., Perko L. M.* Bifurcation of limit cycles from centers and separatix cycles of planar analytic systems. — SIAM Review. — 1994. — V. 36, № 3. — P. 341–376.

32. *Cartwright M.L.* Van der Pol's equation for relaxation oscillation // Contribution to the Theory of Non-linear Oscillations. e.g. ed. S.Lefschetz. Ann. of Math. Stadies. № 29, vol. 11. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1952. — P. 3–18.
33. *Cesari L.* Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. — Berlin: Springer, 1959. — [*Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.]
34. *Hilbert D.* Mathematical problems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1902. — V. 8. — P. 437–479.
35. *Ilyashenko Yu.* Centennial history of Hilbert's 16th problem // Bulletin of the AMS. — 2002. — V. 39, № 3. — P. 301–354.
36. *Lefshertz S.* Differential Equations: Geometric Theory. — N.Y.–L.: Interscience, 1957. — [*Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1961.]
37. *Lefschetz S.* Stability of Nonlinear Control Systems. — New York: Academic Press, 1965.
38. *Leonov G.A.* Two-Dimensional Quadratic Systems as a Lienard Equation // Differential Equations and Dynamical Systems. — 1997. — V. 5, № 3/4. — P. 289–297.
39. *Leonov G.A.* Mathematical Problems of Control Theory. — Singapore: World Scientific, 2001.
40. *Leonov G.A., Burkin I.M., Shepelyavi A.I.* Frequency Methods in Oscillation Theory. — Dordrecht: Kluwer, 1996.
41. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Applications. — Singapore: World Scientific, 1996.
42. *Leonov G.A., Reitmann V.* Das Rossler-System ist nicht dissipativ in Sinne von Levinson // Mathematische Nachrichten. — 1986. — V. 129. — S. 185–196.
43. *Leonov G.A., Reitman V.* Attraktoreingrenzung für nichtlineare Systeme. — Leipzig: Teubner, 1987.
44. *Leonov G.A., Sundkvist E.A.* Localization of the Lienard Equatiopn's Attractors and Cycles // Differential Equations and Dynamical Systens. — 2005. — V. 13, № 3–4. — P. 275–294.
45. *Leonov G.A., Tschschijowa T.L., Reitmann V.* Eine Frequenzvariante der Vergleichsmethode von Belych-Nekorkin in der Theorie der Phasensynchronisation // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technische Universität Dresden. — 1983. — V. 32, № 1. — S. 51–58.
46. *Lloyd N.G.* Limit cycles of polynomial systems — some recent developments. In book: New Direction in Dynamical Systems. — Cambridge University Press, 1988. — P. 192–234.
47. *Odani K.* Existence of exactly *N* periodic solutions for Lienard systems // Funkcialaj Ekvacioj. — 1996. — V. 39, № 2. — P. 217–234.
48. *Odani K.* On the limit cycle of the van der Pol equation // Equadiff99 CD-ROM: Papers, Z. Dosl. J. Kuben.J. Vosmansk. eds. Masaryk Univ., Czech. 1998. — P. 229–235.

49. *Odani K.* On the limit cycle of the Lienard equation // Arch. Math. (Brno). — 2000. — 36. — P. 25–31.
50. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. — New York: Springer, 1999.
51. *Van Horssen W. T.* A perturbation method based on integrating factors. — SIAM J. Appl. Math. — 1999. — 58. — P. 1427–1443.
52. *Yakubovich V. A., Leonov G. A., Gelig A.Kh.* Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. — Singapore: World Scientific, 2004.

В. Резван†

Колебания по Якубовичу в свете нового критерия диссипативности*

Аннотация: для установления критерия существования в системе колебаний по Якубовичу (т. е. существования траекторий с ограниченным вектором состояний и бесконечным числом изменений знака выхода системы) необходимо обеспечить выполнение двух предварительных условий: неустойчивости или, как минимум, наличия некоторого дихотомического поведения, а также диссипативности системы по Левинсону (предельной ограниченности). Статья фокусируется на последнем условии и ее основной результат заключается в обобщении частотного неравенства в терминах диссипативности с использованием лишь информации о секторе, которому принадлежат нелинейности. Обсуждаются несколько примеров и формулируются заключительные утверждения, касающиеся будущих исследований.

Ключевые слова: диссипативность по Левинсону, функция Ляпунова, частотное неравенство.

1. Введение

A. Лемма Якубовича–Калмана–Попова (KYP-лемма), которую иногда называют Великой Леммой Теории Систем, стала в шестидесятые годы XX-го столетия поворотным пунктом в развитии качественной теории динамических систем. Если рассматривать вопрос о том, кто был ее первооткрывателем, то первой статьей по этому вопросу

†) Department of Automatic Control, University of Craiova, A. I. Cuza Str. No. 13, RO-200585 Craiova, Romania.

*) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала Int. J. of Robust & Nonlinear Control: A new dissipativity criterion — towards Yakubovich oscillations. — 2007. — Vol. 17, Issue 5–6. — P. 483–495. Перев. с англ. — И. А. Макаров.

была опубликованная в 1962 г. работа В. А. Якубовича [8]; следующей работой была статья Калмана [23], в которой это утверждение было доказано для случая одной переменной (одной функции управления) с использованием полиномиального разложения; в работе Попова [25] рассматривается векторный случай (несколько функций управления), предложенное доказательство основывается на матричном полиномиальном разложении и полученные результаты применены к решению задач гиперустойчивости и оптимального управления. В наши дни эта лемма в основном рассматривается как утверждение об эквивалентности между частотным неравенством и выполнимостью линейных матричных неравенств типа неравенств Риккати (в области исследований абсолютной устойчивости эти неравенства более известны как неравенства Лурье).

Среди множества применений KYP-леммы мы хотели бы выделить те, что связаны с исследованием систем с нелинейностями, имеющими ограничения секторного характера (ограничения типа Лурье). В качестве первичного результата в этой области следует рассматривать работу Лурье и Постникова [6]. Но в действительности существует более ранняя работа, в которой та же система исследовалась на отсутствие автоколебаний с использованием той же математической модели [2]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax - b\varphi(c^*x), \tag{1}$$

где $\varphi : R \to R$ — непрерывная функция, такая что

$$\underline{\varphi} \leqslant \phi(\sigma)/\sigma \leqslant \overline{\varphi}, \tag{2}$$

т. е. $\underline{\varphi} \in \mathcal{N}(\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$. Абсолютная устойчивость этой системы, т. е. глобальная асимптотическая устойчивость состояния равновесия $x \equiv 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{N}(\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$, исследовалась с использованием функции Ляпунова вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейной функции» $V : R^n \to R$

$$V(x) = x^*Hx + \beta \int\limits_0^{c^*x} \varphi(\lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

позднее Попов предложил для решения той же задачи свое известное частотное неравенство

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \mathrm{Re}\,(1 + i\omega\beta)\chi(i\omega) > 0, \tag{4}$$

при выполнении которого обеспечивается абсолютная устойчивость для $\varphi \in \mathcal{N}(0, \overline{\varphi})$; здесь $\chi(s) = c^*(sI - A)^{-1}b$ — передаточная функция линейной подсистемы замкнутой системы (1).

Изначально KYP-лемма была получена для того, чтобы доказать полную эквивалентность существования функции Ляпунова (3), т. е. выполнимости некоторого линейного матричного неравенства типа

Лурье выполнению неравенства (4). Далее мы не будем рассматривать результаты в этой области, поскольку это не является целью этой статьи. Однако отметим, что KYP-лемма для Попова стала лишь этапом на пути к результату, полностью независимому от формализма функций Ляпунова; Калман обратился в своих исследованиях к другим областям теории систем и, насколько нам известно, больше не вернулся к рассматриваемой теме.

В этой статье мы рассмотрим направление исследований, которого придерживается В. А. Якубович и в соответствии с которым были получены результаты этой статьи. Во-первых, следует отметить, что подход Якубовича не отклоняется от первоначальной мотивации формулировки KYP-леммы: основным математическим методом доказательства является формализм функций Ляпунова, но при этом используется установленный с использованием леммы эквивалент частотного неравенства — условие его выполнимости, которое можно проверить при анализе системы (имеющееся коммерческое программное обеспечение для решения линейных матричных неравенств позволило внести некоторую корректировку в эту точку зрения). В течении последующих 10–15 лет были рассмотрены различные приложения этой теории, при анализе которых авторы придерживались изложенного выше подхода; в связи с этим мы хотели бы упомянуть лишь те работы, которые связаны с исследованием вынужденных колебаний и автоколебаний или касаются вопросов неустойчивости или диссипативности по Левинсону [9–12, 15]. В процессе этих исследований было установлено, что в рамках «соревнования» метода функций Ляпунова с методом, использующим частотные неравенства (см. [20]), метод функций Ляпунова оказывается более предпочтительным при решении таких качественных проблем, как задачи неустойчивости, диссипативности, а также при исследовании колебаний.

B. Что касается колебаний, мы хотели бы упомянуть специальный класс поведения системы — *автоколебания по Якубовичу*. Определение этих колебаний, критерии их существования и различные приложения могут быть найдены в основных статьях на эту тему [3, 13, 16], в обзоре [15], а также в монографии [4]; следует также упомянуть пионерскую работу [24], в которой колебательное поведение в смысле Якубовича рассматривается несколько иначе. В целях полноты изложения мы приведем ниже определение колебаний по Якубовичу.

Определение 1. Пусть $\alpha < \beta$ — некоторые вещественные числа. Решение $x(t)$ системы (1) называется $[\alpha,\beta]$-*колебанием в системе с выходом* $\sigma = c^* x$ при $t \to +\infty$, если i) $x(t)$ ограничено и ii) при $t \to \to \infty$ «точка» $\sigma(t)$ принадлежит бесконечное число раз каждому из интервалов $(-\infty,\alpha]$, $[\beta,+\infty)$ (и, следовательно, интервалу (α,β)). Решение, являющееся $[\alpha,\beta]$-колебанием (при $t \to +\infty$) для некоторых α,β, называется *колебательным решением* (при $t \to +\infty$). Колебательное решение при $t \to -\infty$, а также $[\alpha, \beta]$-колебание в системе с выходом $\sigma = c^* x$ при $t \to -\infty$ определяются аналогично. Решение, являющееся $[\alpha, \beta]$-колебанием при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, называется *двухсторонним* $[\alpha, \beta]$-колебанием или $[\alpha, \beta]$-*автоколебанием*. Если существует $T > 0$, такое что принадлежность $\sigma(t)$ каждому из интервалов $(-\infty, \alpha]$, (α, β), $[\beta, +\infty)$ на отрезках длиной не более T, то $[\alpha, \beta]$-колебание называется *нерастягивающим* (*non-dilating*) (при $t \to +\infty$, $t \to -\infty$ или *двухсторонним*, соответственно).

В вышеупомянутых работах было отмечено, что если φ дифференцируема и $\dim x = 2$, то в соответствии с классической теоремой Пуанкаре–Бендиксона любое двухстороннее $[\alpha, \beta]$-колебание является периодическим; поэтому результат Якубовича может рассматриваться как эффективный критерий существования предельных циклов.

Напомним известное свойство устойчивого цикла, охватывающего единственное состояние равновесия в 0; очевидно, что устойчивость цикла следует из свойства диссипативности по Левинсону, рассматриваемого совместно со свойством строгой неустойчивости состояния равновесия. Это замечание фактически выявляет методологические основы подхода, используемого Якубовичем при исследовании автоколебаний: свойства неустойчивости состояния равновесия в $x = 0$ системы (1) и ее диссипативность по Левинсону.

Исследование любых задач, связанных с исследованием колебаний по Якубовичу, содержит два аспекта: рассмотрение свойств неустойчивости и диссипативности по Левинсону (или, если использовать эквивалентный термин, предельной ограниченности). В настоящей статье рассматривается второе свойство — диссипативность — и это определяет соответствующим образом ее структуру. В начале изложения будет предложен специальный вид частотного неравенства, обеспечивающего абсолютную устойчивость системы в классе секторных нелинейностей [22]: в этом частотном неравенстве используется информация лишь о наклоне линий, ограничивающих сектор нелинейностей. Далее это частотное неравенство обобщается в терминах диссипативности (предельной ограниченности) с использованием подхода [17, 18]. Примеры из этих работ анализируются с использованием представленного в этой статье нового вида частного неравенства. В заключение статьи рассматриваются некоторые задачи, которые должны быть исследованы в будущем.

2. Частотное неравенство и абсолютная устойчивость

Сформулируем основной результат работы [22] в несколько модифицированной форме.

Теорема 1. *Рассмотрим тройку* (A, B, C), *где* A — $n \times n$ *матрица*, $B = (b_1, \ldots, b_m)$, $C = (c_1, \ldots, c_m)$, *столбцы* b_i, c_j *имеют размерность* n. *Предположим, что*

i) $\det A \neq 0$;

ii) (A, B) — *управляемая пара и* (C^*, A) — *наблюдаемая пара, т. е.* (A, B, C) — *минимальная (невырожденная по Попову) реализация матричной передаточной функции* $H(s) = = C^*(sI - A)^{-1}B$;

iii) $c_k^* A^{-1} b_j = 0,\ k \neq j,\ c_k^* A^{-1} b_k \neq 0\ \forall k$ *или, эквивалентно,* $H(0) = = -C^* A^{-1} B$ — *диагональная матрица.*

Предположим также, что

iv) *существуют вещественные числа* $\underline{\varphi}_k, \tau_k, \theta_k, \overline{\varphi}_k,\ \ \tau_k \geqslant 0,\ \ 0 \leqslant \leqslant \overline{\varphi}_k \leqslant +\infty,\ \ k = 1, \ldots, n,$ *такие что выполено следующее матричное частотное неравенство*:

$$\operatorname{diag}(\tau_k/\overline{\varphi}_k) + \operatorname{Re}\Big[\operatorname{diag}(\tau_k(1 + \underline{\varphi}_k/\overline{\varphi}_k) + (i\omega)^{-1}\theta_k)H(i\omega)\Big] + \\ + H^*(-i\omega)\operatorname{diag}(\tau_k \underline{\varphi}_k)H(i\omega) \geqslant 0 \quad \forall \omega \in R; \tag{5}$$

v) *существует* $\overline{\varphi}_k \in (\overline{\varphi}_k, \underline{\varphi}_k)$ *такое, что*

$$\overline{\varphi}_k \begin{cases} > -1/\chi_{kk}(0), & \text{если } \chi_{kk}(0) = -c_k^* A^{-1} b_k > 0 \\ < -1/\chi_{kk}(0), & \text{если } \chi_{kk}(0) = -c_k^* A^{-1} b_k < 0 \end{cases} \tag{6}$$

и $A - \sum_1^m \overline{\varphi}_k b_k c_k^*$ — *гурвицева матрица.*

Тогда нелинейная система

$$\dot{x} = Ax - \sum_1^m b_k \phi_k(c_k^* x) \tag{7}$$

имеет состояние равновесия в $x = 0$, *являющееся глобально асимптотически устойчивым для всех ограниченных в секторе* C^1-*функций* $\phi_k(\sigma)$, *таких что*

$$\phi_k(0) = 0,\ \ \phi_k(\sigma) \neq 0\ \forall \sigma \neq 0,\ \ \underline{\varphi}_k \leqslant \phi_k'(\sigma) \leqslant \overline{\varphi}_k, \tag{8}$$

и

$$\Omega_k(\sigma) = \frac{\theta_k}{\xi_{kk}(0)}\Big[\frac{\psi_k^2(\sigma)}{2(1 + \overline{\varphi}_k \chi_{kk}(0))} - \int_0^\sigma \psi_k(\lambda)\,d\lambda\Big], \tag{9}$$

где $\psi_k(\sigma) = \sigma + \chi_{kk}(0)\phi_k(\sigma)$ — *положительно определенные функции, удовлетворяющие* $\lim_{\sigma \to \pm\infty} \Omega_k(\sigma) = \infty$.

Достаточно непростое доказательство этого результата представлено в [22]. Аналогичный результат для случая одной нелинейности и для интегральных уравнений можно найти в работе [27]; для нелинейных функций с гистерезисом очень похожий результат был получен в работе [1]. Анализ различных примеров, выполненный в вышеуказанных работах, показывает, что во многих случаях новый критерий подобного рода позволяет получить более сильные условия абсолютной устойчивости. Далее будет получен такой критерий для диссипативности по Левинсону (предельной ограниченности); этот результат является полезным сам по себе, но он также может рассматриваться как необходимый шаг к получению критерия существования в системе автоколебаний по Якубовичу.

3. Основной результат

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax - \sum_{1}^{m} b_k \phi_k(c_k^* x) + p(t, x), \tag{10}$$

представляющую собой не что иное, как систему (7) с членом возмущения. С использованием введенной для системы (7) функции Ляпунова, полученной в лемме Якубовича–Калмана–Попова, а также частотного неравенства, нам следует установить свойство диссипативности по Левинсону; некоторые предположения, накладываемые на исследуемую систему, могут быть ослаблены, но другие будут усилены для того, чтобы получить оценки решений [17, 18], необходимые нам для того, чтобы применить стандартный результат по диссипативности с использованием формализма функций Ляпунова [29]. В первую очередь мы сформулируем основную теорему о диссипативности по Левинсону (о предельной ограниченности).

Теорема 2. *Рассмотрим систему* (10) *в условиях предположений* i)–v) *теоремы* 1 *с «усиленным» частотным неравенством*

$$\begin{gathered}\operatorname{diag}(\tau_k/\overline{\varphi}_k) + \operatorname{Re}\left[\operatorname{diag}(\tau_k(1+\underline{\varphi}_k/\overline{\varphi}_k) + (i\omega)^{-1}\theta_k) H(i\omega)\right] + \\ + H^*(-i\omega)\operatorname{diag}(\tau_k\underline{\varphi}_k) H(i\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \overline{R},\end{gathered} \tag{11}$$

а также при дополнительных предположениях: vi) *ограниченные в секторе C^1-функции $\phi_k : R \to R$ удовлетворяют неравенствам*

$$\underline{\varphi}_k \leqslant \phi_k'(\sigma) \leqslant \overline{\varphi}_k, \quad |\sigma| \geqslant \lambda_0 > 0 \tag{12}$$

и функции $\Omega_k(\sigma)$, определяемые равенствами (9), *имеют те же свойства, что указаны для них в теореме* 1, *но при $|\sigma| \geqslant \lambda_0 > 0$, где константа λ_0 может быть большой*; vii) $|p(t,x)| \leqslant \rho_0$ *для всех* (t,x) *или* $\lim_{|x|\to\infty} |p(t,x)|/|x| = 0$ *равномерно по* $t \in R$.

Тогда система (10) *равномерно предельно ограничена* (*равномерно диссипативна по Левинсону*).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично тому, как это было сделано в других работах, например в [22] — с использованием функции Ляпунова, полученной из частотного неравенства в KYP-лемме, а также с учетом специфических аспектов теории Ляпунова для предельной ограниченности [17, 18]. Доказательство представлено в приложении.

Важно рассмотреть некоторые аспекты, связанные с усиленным частотным условием (11), точнее, вопрос о выполнении этого неравенства при $|\omega| \to \infty$. Передаточные функции $\chi_{kj}(s) = c_k^*(sI - A)^{-1}b_j$, представляющие собой элементы матричной передаточной функции $H(s) = C^*(sI - A)^{-1}B$, являются рациональными строго собственными функциями. Тогда представленный результат следует для случая $|\omega| \to \infty$ из выполнения неравенства $\tau_k/\overline{\varphi}_k > 0\ \forall k$, которое показывает, что $\overline{\varphi}_k$ не может быть бесконечной и $\tau_k \neq 0$; следовательно, не умаляя общности, можно положить $\tau_k = 1\ \forall k$.

4. Некоторые примеры

В этом разделе мы применим теорему 2 к некоторым примерам из работ [17, 18].

A. Рассмотрим систему второго порядка [17]

$$\ddot{\sigma} + 2\zeta\omega_n\dot{\sigma} + \omega_n^2\sigma + \omega_n^2\gamma(\sigma) = q(t, \sigma, \dot{\sigma}), \quad \zeta > 0, \tag{13}$$

которую можно представить в следующей форме:

$$\ddot{\sigma} + 2\zeta\omega_n\dot{\sigma} + \omega_n^2\varepsilon\sigma + \omega_n^2(1-\varepsilon)\sigma + \omega_n^2\gamma(\sigma) = q(t, \sigma, \dot{\sigma}), \tag{14}$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$. Введем в рассмотрение нелинейную функцию

$$\varphi(\sigma) = (1-\varepsilon)\sigma + \gamma(\sigma). \tag{15}$$

Тогда

$$\ddot{\sigma} + 2\zeta\omega_n\dot{\sigma} + \omega_n^2\varepsilon\sigma + \omega_n^2\varphi(\sigma) = q(t, \sigma, \dot{\sigma}). \tag{16}$$

Легко видеть, что

$$\overline{\varphi} = 0, \quad \chi(s) = \omega_n^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\varepsilon)^{-1}, \quad \chi(0) = \varepsilon^{-1} > 0.$$

Полагая $\underline{\varphi} = 0$, $\tau = 1$, получаем частотное неравенство

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \frac{\omega_n^2\varepsilon - \omega^2 - 2\zeta\omega_n\theta)\omega_n^2}{(\omega_n^2\varepsilon - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} > 0 \quad \forall\omega \geqslant 0, \tag{17}$$

которое справедливо если и только если

$$\overline{\varphi}^2 + 4(\beta - 2\zeta^2)\overline{\varphi} + 4(\varepsilon - 2\zeta^2)^2 - 4\varepsilon^2 < 0, \tag{18}$$

где $\beta = 2\zeta\theta/\omega_n$. Если значение β выбрать между двумя положительными корнями уравнения

$$\beta^2 - 4\zeta^2\beta + 4\zeta^2\varepsilon = 0,$$

то неравенство (18) выполнено для любого $\overline{\varphi} > 0$, которое, таким образом, может быть выбрано произвольно большим. Поскольку $\theta > 0$ ($\beta > 0$), секторные ограничения на $\varphi(\sigma)$ имеют вид $0 < \varphi'(\sigma) < \overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}$ — произвольно большая величина (но это неравенство имеет место только при $|\sigma| \geqslant \lambda_0$, где величина $\lambda_0 > 0$ может быть большой). Кроме того, мы имеем условие (см. [17])

$$\varphi(\sigma)/\sigma > -\chi(0)^{-1} = -\varepsilon \qquad (|\sigma| \geqslant \lambda_0).$$

Если вернуться к рассмотрению функции $\gamma(\sigma)$ в (13), можно увидеть, что система (13) диссипативна для всех функций $\gamma(\sigma)$, принадлежащих классу C^1, ограниченных в секторе и удовлетворяющих неравенствам

$$\gamma(\sigma)/\sigma > -1-\varepsilon, \quad -1 < \gamma'(\sigma) < -1+\overline{\varphi}, \quad \forall|\sigma| \geqslant \lambda_0, \tag{19}$$

где $\lambda_0 > 0$ может быть большой и $\overline{\varphi} > 0$ — произвольно большая, но конечная величина. Таким образом, мы получили результат, представленный в работе [17].

B. Рассмотрим систему третьего порядка, исследованную Плиссом в работе [7]:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -(1+a)\xi + \varphi(\sigma) + p_1(t,\xi,\eta,\zeta), \\ \dot{\eta} = -\zeta + p_2(t,\xi,\eta,\zeta), \\ \dot{\zeta} = \eta + \varphi(\sigma) + p_3(t,\xi,\eta,\zeta), \quad \sigma = \xi+\eta+\zeta, \quad a > 0. \end{cases} \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\chi(s) = \frac{1}{s+1+a} + \frac{s-1}{s^2+1}, \quad \chi(0) = -a(1+a)^{-1} < 0, \tag{21}$$

и корни характеристического многочлена есть $-(1+a), \pm i$. Можно показать, что $\overline{\varphi} = \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая величина. Положив в частотном неравенстве (11) $\underline{\varphi} = 0$, $\tau = 1$ и выбрав произвольно большую, но конечную величину $\overline{\varphi} > 0$, получаем неравенство

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \frac{1+a-\theta}{(1+a)^2+\omega^2} + \frac{\theta-1}{1-\omega^2} > 0. \tag{22}$$

Выберем $\theta = 1 > 0$. Система (20) равномерно предельно ограничена для всех функций $\varphi : R \to R$, которые являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют неравенствам (см. [22])

$$\varepsilon < \varphi'(\sigma) < \overline{\varphi} < +\infty, \;\; 0 < \varphi(\sigma)/\sigma < -\chi(0)^{-1} = (1+a)/a, \;\; |\sigma| \geqslant \lambda_0 > 0, \tag{23}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая величина, $\overline{\varphi} > 0$ — произвольно большая, но конечная, величина и $\lambda_0 > 0$ — некоторая константа, которая может быть большой.

C. Рассмотрим систему третьего порядка [17]

$$\sigma''' + \alpha\sigma'' + \beta\sigma' + \gamma\sigma + f(\sigma) = p(t,\sigma,\sigma',\sigma''), \tag{24}$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha\beta - \gamma > 0$, $|p(t,\sigma,\sigma',\sigma'')| < \rho_0$. Эта система может быть переписана в следующей форме:

$$\sigma''' + \alpha\sigma'' + \beta\sigma' + \alpha\beta\sigma + \varphi(\sigma) = p(t,\sigma,\sigma',\sigma''), \tag{25}$$

где

$$\varphi(\sigma) = (\gamma - \alpha\beta)\sigma + f(\sigma). \tag{26}$$

Очевидно, что $\overline{\varphi} = -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольно малая величина,

$$\chi(s) = (s^3 + \alpha s^2 + \beta s + \alpha\beta)^{-1} = ((s+\alpha)(s^2+\beta))^{-1}, \;\; \chi(0) = (\alpha\beta)^{-1} > 0.$$

Полагая в частотном неравенстве (11) $\underline{\varphi} = 0$, $\tau = 1$ и выбирая произвольно большую, но конечную, величину $\overline{\varphi} > 0$, получаем неравенство

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \frac{\alpha - \theta}{\alpha^2 + \beta}\left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{1}{\beta^2 - \omega^2}\right) > 0,$$

Выберем $\theta = \alpha > 0$. Система (25) равномерно предельно ограничена для всех функций $\varphi : R \to R$, которые являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют неравенствам

$$0 < \varphi'(\sigma) < \overline{\varphi} < +\infty, \quad \varphi(\sigma)/\sigma > -(\alpha\beta), \quad |\sigma| \geqslant \lambda_0 > 0, \tag{27}$$

где $\overline{\varphi} > 0$ — произвольно большая, но конечная, величина и $\lambda_0 > 0$ — некоторая константа, которая может быть большой. Из этого следует, что система (24) равномерно предельно ограничена для всех функций $f : R \to R$, которые являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют неравенствам

$$(\alpha\beta - \gamma) < f'(\sigma) < \overline{f}, \quad f(\sigma)/\sigma > -\gamma. \tag{28}$$

Заметим [17], что если $\gamma = 0$, то полученный результат сводится к результату Эзейло ([28, теорема 4.15, стр. 320]).

D. Рассмотрим систему четвертого порядка [17, 18]

$$\sigma'''' + \alpha\sigma''' + \beta\sigma'' + \gamma\sigma' + f(\sigma) = p(t, \sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''), \tag{29}$$

где $\alpha > 0$, $\alpha\beta - \gamma > 0$, $\gamma > 0$. Принимая во внимание условия Гурвица для полинома

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta,$$

имеющие вид

$$\alpha > 0, \quad \alpha\beta - \gamma > 0, \quad (\alpha\beta - \gamma)\gamma - \alpha^2\delta > 0,$$

получаем, что $\beta > 0, \gamma > 0$. Перепишем (20) в следующей форме:

$$\sigma'''' + \alpha\sigma''' + \beta\sigma'' + (\beta\gamma/\alpha - (\gamma/\alpha)^2)\sigma + \varphi(\sigma) = p(t, \sigma, \sigma', \sigma'', \sigma'''), \tag{30}$$

где

$$\varphi(\sigma) = -(\beta\gamma/\alpha - (\gamma/\alpha)^2)\sigma + f(\sigma). \tag{31}$$

Можно показать, что передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$\begin{gathered}\chi(s) = \alpha^2[(\alpha s^2+\gamma)(\alpha s^2+\alpha^2 s+\alpha\beta-\gamma)]^{-1},\\ \chi(0) = \alpha^2(\gamma(\alpha\beta-\gamma))^{-1} > 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Поскольку $\alpha\beta-\gamma>0$, $\alpha>0$, $\gamma>0$, эта функция имеет два полюса на мнимой оси iR и два полюса в C^-. Мы можем положить $\overline{\varphi}=-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — произвольно малая величина. Положив в частотном неравенстве (11) $\underline{\varphi}=0$, $\tau=1$ и выбрав произвольно большую, но конечную, величину $\overline{\varphi}>0$, получаем неравенство

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \operatorname{Re}(1+(i\omega)^{-1}\theta)\chi(i\omega) > 0.$$

Путем несложных вычислений можно показать, что существует единственный выбор $\theta=(\alpha\beta-2\gamma)\alpha^{-2}$ и он приводит к неравенству

$$\frac{1}{\overline{\varphi}} + \frac{\alpha\gamma+(2\gamma-\alpha\beta)^2}{\alpha^3\gamma+(2\gamma-\alpha\beta)^2}\cdot\frac{1}{(\alpha\beta-\gamma-\alpha\omega^2)^2+\alpha^4\omega^2} > 0 \quad \forall\omega\in\overline{R}, \tag{33}$$

которое справедливо при произвольно большой, но конечной, величине $\overline{\varphi}>0$. Принимая во внимание выбор θ, а также результаты [22], нам следует рассмотреть два случая.

1°. Если $\alpha\beta-2\gamma>0$, то система (30) равномерно предельно ограничена для всех функций $\varphi : R\to R$, которые являются непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяют неравенствам

$$0<\varphi'(\sigma)<\overline{\varphi}<+\infty, \quad \varphi(\sigma)/\sigma > -\gamma(\alpha\beta-\gamma)\alpha^{-2}, \quad |\sigma|\geqslant\lambda_0>0, \tag{34}$$

где $\overline{\varphi}>0$ — произвольно большая, но конечная, величина, константа $\lambda_0>0$ может быть большой.

2°. Если $\alpha\beta-2\gamma<0$, то равномерная предельная ограниченность имеет место для всех функций $\varphi : R\to R$, которые являются непрерывно дифференцируемыми и для которых одно из вышеприведенных неравенств должно быть модифицировано: либо $\phi'(\sigma)<0$ и справедливо второе неравенство в (34), либо $0<\phi'(\sigma)<\overline{\varphi}$ и во втором неравенстве (34) знак «больше» должен быть заменен на знак «меньше».

5. Заключение и будущие исследования

Необходимо сделать несколько замечаний по поводу представленных в этой статье результатов. Хотелось бы начать с рассмотренных в предыдущих разделах приложений, которые были исследованы в более ранних работах с использованием другого критерия диссипативности [17, 18]. Во всех этих случаях представленный в этой статье новый критерий диссипативности позволяет получить более сильные (или, по крайней мере, эквивалентные) условия диссипативности в терминах коэффициентов системы. Это представляется полезным качеством нового критерия. В то же время, некоторые примеры в указанных работах не могут быть исследованы с использованием этого критерия вследствие присущих ему ограничений структурного характера. Большинство подобных примеров соответствуют случаю $\chi(0) = 0$, что является нарушением одного из основных предположений основного результата, теоремы 2. Более того, примеры, в которых имеется несколько нелинейностей, и характеризующиеся, таким образом, матричной передаточной функцией линейной части системы, не обладают свойством статического разделения, т. е. $H(0)$ не диагональная. Это очень существенный недостаток представленного подхода, который, как нам кажется, не может быть легко устранен. Например, с использованием формализма интегральных уравнений [27] можно рассмотреть случай нескольких нелинейностей и дословно повторить представленное доказательство, но указанное условие, тем не менее, не может быть устранено (возможно, это не совсем «естественное» предположение помешало автору приступить к исследованию случая нескольких нелинейностей). Несколько иной подход [1] позволяет исключить это условие, но этот результат получен лишь для случая одной нелинейности и его обобщение на случай нескольких нелинейностей представляет собой интересную открытую проблему.

Говоря о будущих исследованиях, следует вспомнить о том, что было сказано во введении к этой статье — конечной целью исследований является получение результата для автоколебаний по Якубовичу. Следовательно, необходимо рассмотреть вопрос о неустойчивости и это будет сделано на основе результатов Якубовича [12].

Мы не можем завершить наши исследования затронутых в этой статье вопросов без рассмотрения соответствующих обобщений представленных результатов на случай систем с запаздыванием, а также систем с распределенными параметрами. Если для исследования вопросов неустойчивости и диссипативности используется формализм функций Ляпунова, то в качестве основного средства анализа будет выступать версия леммы Якубовича–Калмана–Попова для гильбертова пространства, которая была сформулирована и доказана Якубовичем и его коллегами [5, 14]. Разумеется, в этом случае потребуется построить гильбертово пространство для специфических приложений. С другой стороны, существуют результаты о неустойчивости (точнее, об экспоненциальном дихотомическом поведении системы), полученные с использованием формализма интегральных уравнений [26], а также результаты о диссипативности, полученные без использования теории функций Ляпунова и лишь на основе оценок решений [19, 21]. Эти результаты менее четко сформулированы, нежели соответствующие результаты, основанные на формализме функций Ляпунова, но для их получения не требуется построения соответствующего гильбертова пространства. Таким образом, мы опять приходим к старой дилемме: использовать формализм функций Ляпунова или следует избрать другой подход?

Приложение: доказательство теоремы 2

Напомним два вспомогательных результата, доказательства которых очевидно и может быть найдено в [22].

Лемма 1. *Если* $x(t)$ *— решение системы* (7), *то* $(z(t),\ \xi_k(t))$ *такое, что*

$$\begin{cases} z(t) = Ax(t) - \sum\limits_1^m b_j \varphi_j(c_j^* x(t)), \\ \xi_k(t) = c_k^* x(t), \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{35}$$

является решением системы

$$\begin{cases} \dot{z} = Az - \sum\limits_1^m b_j \varphi_j'(\xi_j) c_j^* z, \\ \dot{\xi}_k = c_k^* z, \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{36}$$

и удовлетворяет тождествам

$$F_k(z(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) \equiv \psi_k(t) - c^* A^{-1} z(t) \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{37}$$

где $\varphi_k(\sigma) = \sigma + \chi_{kk}(0)\varphi_k(\sigma)$ *определена в теореме* 1. *Обратно, если* $(z(t),\ \xi_k(t))$ *является решением системы* (36), *то*

$$x(t) = A^{-1}(z(t) + \sum_1^m b_j \varphi_j(\xi_j(t))) \tag{38}$$

является решением (7).

Лемма 2. *Если пара* (A, B) *управляема и* $\det A \neq 0$, *то пара*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

управляема, если и только если $\det C^* A^{-1} B \neq 0$.

Эти результаты будут использованы при доказательстве теоремы 2, которое, в свою очередь, будет выполнено в несколько этапов и с использованием подхода, примененного в [22].

А. Сопоставим системе (36) следующую систему Попова «дифференциальное уравнение плюс интегральный функционал»:

$$\begin{aligned}
&\dot z = Az + \sum_1^m b_k \mu_k(t),\\
&\dot\xi_k = c_k^* z, \quad k = 1, \dots, m,\\
&\eta(0,T) = \sum_1^m \int_0^T [\tau_k(\mu_k + \underline{\varphi}_k c_k^* z)(\mu_k/\overline{\varphi}_k + c_k^* z) + \theta_k \mu_k \xi_k]\, dt -\\
&\qquad - \varepsilon_0^2 \sum_1^m \int_0^T (A^{-1}z)^* c_k c_k^* A^{-1} z\, dt.
\end{aligned} \tag{40}$$

С использованием обозначений

$$\begin{aligned}
&u = \mathrm{col}(\mu_1 \dots \mu_n), \quad y = \mathrm{col}(z\xi_1 \dots z\xi_m), \quad K = \mathrm{diag}\,(\tau_k/\overline{\varphi}_k),\\
&L_1 = \frac{1}{2} C \cdot \mathrm{diag}\,(\tau_k(1 + \underline{\varphi}_k/\overline{\varphi}_k)), \quad L_2 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{diag}\,(\theta_k),\\
&M_{11} = \sum_1^m (\tau_k \underline{\varphi}_k c_k c_k^* - \varepsilon_0^2 (A^{-1})^* c_k c_k^* A^{-1}),\\
&\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{41}$$

а также с использованием $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, определенных в лемме 2, система (40) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{aligned}
&\dot y = \mathcal{A} y + \mathcal{B} u(t),\\
&\eta(0,T) = \int_0^T (u^* K u + u^* \mathcal{L}^* x + x^* \mathcal{L} u + x^* \mathcal{M} x)\, dt.
\end{aligned} \tag{42}$$

Это представление имеет вид стандартной формы Попова и матрицы K и $\mathcal{M}$ очевидно являются эрмитовыми (или симметричными в вещественном случае). Частотная характеристика, определенная Поповым и Якубовичем, имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = (i\omega) = L + \mathcal{L}^*(i\omega I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{B}^*(-i\omega I - \mathcal{A}^*)^{-1}\mathcal{L} +\\
+ \mathcal{B}^*(-i\omega I - \mathcal{A}^*)^{-1}\mathcal{M}(i\omega I - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}
\end{aligned} \tag{43}$$

и может быть переписана с учетом введенных выше обозначений в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(i\omega) = \mathrm{diag}\,(\tau_k/\overline{\varphi}_k) + \mathrm{Re}\left[\mathrm{diag}\,(\tau_k(1 + \underline{\varphi}_k/\overline{\varphi}_k) + (i\omega)^{-1}\theta_k) H(i\omega)\right] +\\
+ H^*(-i\omega)\,\mathrm{diag}\,(\tau_k \underline{\varphi}_k) H(i\omega) -\\
- \varepsilon_0^2 \sum_1^m (-i\omega I - \mathcal{A}^*)^{-1}(A^{-1})^* c_k c_k^* A^{-1}(i\omega I - \mathcal{A})^{-1}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Частотное неравенство (11) выполнено $\forall\omega \in \overline{R}$, а также при $|\omega| \to +\infty$. Тогда с учетом того, что $\lim_{|\omega|\to+\infty} |c_k^* A^{-1}(i\omega I - A)^{-1}|^2 = 0$, а также выбирая $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малой, можно показать, что $\mathcal{H}(i\omega) \geqslant 0$.

Этот результат позволяет применить лемму Якубовича–Калмана–Попова, т. е. система (42) является положительной в смысле Попова. Далее, рассуждая аналогично тому, как это было сделано в [22], мы получаем, что существует эрмитова матрица H, матрица W и диагональная матрица V с диагональными элементами $\sqrt{\tau_k/\overline{\varphi}_k}$, такие что выполнено следующее равенство:

$$\eta(0,T) = [z^* Hz + \sum_1^m (\theta_k (c_k^* A^{-1} b_k)^{-1} (\xi_k c_k^* A^{-1} z - (1/2)\xi_k^2)] \Big|_0^T + \\ + \int_0^T |Vu + W^* z|^2 dt. \quad (45)$$

Полагая $\mu_k(t) = -\varphi'(\xi_k(t)) c_k^* z(t)$, где (z, ξ_k) — решение системы (36), удовлетворяющее (37), мы получаем функцию состояния

$$\mathcal{V}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m) = z^* Hz - \sum_1^m \theta_k \left(\frac{1}{2\chi_{kk}(0)} \xi_k^2 + \int_0^{\xi_k} \varphi_k(\lambda)\, d\lambda \right), \quad (46)$$

которая удовлетворяет тождеству

$$\mathcal{V}(z(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) - \mathcal{V}(z(0), \xi_1(0), \ldots, \xi_m(0)) \equiv \\ \equiv \int_0^t |-\sqrt{\tau_k/\overline{\varphi}_k}\, \varphi_k'(\xi_k) c_k^* z + W^* z|^2 dt - \varepsilon_0^2 \sum_1^m \int_0^t |c_k^* A^{-1} z(\vartheta)|^2 d\vartheta - \\ - \sum_1^m \tau_k \int_0^t (\varphi_k'(\xi_k) - \underline{\varphi}_k)(1 - \varphi' k(\xi_k)/\overline{\varphi}_k)(c_k^* z)^2 d\vartheta \quad (47)$$

вдоль решений системы (36) с ограничением (37). Очевидно, что $\mathcal{V}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ является *кандидатом на роль функции Ляпунова*. Далее мы получим некоторые оценки для $\mathcal{V}$ и ее производной вдоль решений системы.

B. Дифференцируя (47) вдоль решений системы (36) с учетом (37) и секторных ограничений на $\varphi_k(\sigma)$, получаем

$$\mathcal{W}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m) = \frac{d}{dt} \mathcal{V}(z(t), \xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)) \leqslant \\ \leqslant -\varepsilon_0^2 \sum_1^m \psi_k^2(\xi_k(t)), \quad |\xi_k(t)| \geqslant \lambda_0. \quad (48)$$

Используя свойства Ω_k и ψ_k, сформулированные в утверждении теоремы, мы получаем, что при $|\xi_k| \geqslant \lambda_0$ и достаточно большой λ_0 справедлива оценка

$$\mathcal{W}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m) \leqslant -\varepsilon_0^2 \sum_1^m \alpha_k(|\xi_k|), \quad |\xi_k| \geqslant \lambda_0, \tag{49}$$

где $\alpha_k(\varrho)$ — функции Массера ($\alpha_k(0) = 0$, непрерывные в некоторой окрестности нуля и возрастающие), который удовлетворяют $\lim_{\varrho\to\infty} \alpha_k(\varrho) = \infty$. Рассмотрим *супремум*

$$K_k(\lambda_0) = \sup |(\varphi_k'(\xi) - \underline{\varphi}_k)(1 - \varphi_k'(\xi)/\overline{\varphi}_k)(c_k^* z)^2|,$$

который вычисляется на компактном (замкнутом и ограниченном) множестве

$$\mathcal{U}_k(\lambda_0) = \left\{(z, \xi) |\ |\xi| \leqslant \lambda_0, \quad c_k^* A^{-1} z = \psi_k(\xi)\right\}.$$

Тогда оценка производной имеет следующий вид:

$$\mathcal{W}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m) \leqslant -\varepsilon_0^2 \sum_1^m \alpha_k(|\xi_k|) + \sum_1^m \tau_j K_j(\lambda_0). \tag{50}$$

Вернемся к рассмотрению $\mathcal{V}$ с целью получения ее оценки. Следуя предложенному в [22] подходу, а также с учетом свойств $\overline{\varphi}_k$, получаем матричное неравенство

$$H = \frac{\theta_k}{2\chi_{kk}(0)(1 + \overline{\varphi}_k \chi_{kk}(0))}(A^{-1})^* c_k c_k^* A^{-1} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(z, \xi_1, \ldots, \xi_m) = z^* H z - \sum_1^m \frac{\theta_k}{2\chi_{kk}(0)(1 + \overline{\varphi}_k \chi_{kk}(0))} \psi_k^2(\xi_k) + \\ + \sum_1^m \Omega_k(\xi_k) \geqslant \sum_1^m \Omega_k(\xi_k) \geqslant \sum_1^m \beta_k(|\xi_k|). \end{aligned} \tag{51}$$

Последнее неравенство было получено с использованием свойств $\Omega(\cdot)$; оно справедливо при $|\xi_k| \geqslant \lambda_0 > 0$, где λ_0 может быть большой, и $\beta_k(\varrho)$ — функции Массера, $\lim_{\varrho\to\infty} \beta_k(\varrho) = \infty$.

C. Неравенство (50) и последнее неравенство в (51), верные при $|\xi_k| \geqslant \lambda_0 > 0$, где λ_0 может быть большой, представляют собой именно те неравенства, которые необходимы для стандартного доказательства предельной ограниченности (см. [29, с. 42]). Из этих неравенств следует оценка диссипативности для ξ_k и с использованием определения $\overline{\varphi}_k$ и формулы вариации постоянных можно получить оценку для z. С использованием (38) мы получаем искомую оценку для $x(t)$ как решения системы (7). Однако нам требуется получить соответствующую оценку для системы (10), являющейся возмущенной системой (7). Этот результат можно получить путем преобразования оценок (50) и (51) в оценки $\mathcal{V}$ и cW по x. Эти оценки также являются оценками для предельной ограниченности, доказывающими утверждение теоремы с использованием стандартного подхода [17, 18].

Признательности

С первых шагов своих исследований в области теории систем и на протяжении 40 лет автор этой статьи руководствовался глубокими идеями и замечательными достижениями профессора В. А. Якубовича, которого он рассматривает как одного из гениальных «отцов-основателей» современной теории систем и управления. По этой причине, и не только по ней, эта статья не может закончиться чем либо иным, нежели поздравлением:

С днем рождения, Владимир Андреевич!

Список литературы

1. *Барабанов Н. Е., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость систем регулирования с одной гистерезисной нелинейностью // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 5–11.
2. *Булгаков Б. В.* Самоподдерживающиеся колебания в системах управления. ДАН СССР. — 1942. — Т. 37, № 9. — С. 283–287.
3. *Георгиевский В. Г., Левит М. В., Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных регулируемых системах // АиТ. — 1972. — № 2. — С. 30–39.
4. *Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И.* Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: 1992. — Изд-во С.-Петербургского ун-та. Т. 1,2.
5. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1069–1085.
6. *Лурье А. И., Постников В. Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // ПММ. — 1944. — Т. 8, Вып. 3. — С. 246–248.
7. *Плисс В.А.* Некоторые проблемы устойчивости вцелом. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
8. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
9. *Якубович В. А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний // АиТ. 1964. Т. 25, № 7. — С. 1017–1029.
10. *Якубович В. А.* Частотные условия абсолютной устойчивости и диссипативности регулируемых систем с одной дифференцируемой нелинейностью // ДАН СССР. — 1965. — Т. 160, № 2. — С. 298–301.

11. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими нелинейностями // ДАН СССР. — 1966. — Т. 171, № 3. — С. 533–536.
12. *Якубович В. А.* Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления. I. Общие частотные критерии // АиТ. — 1970. — № 12. — С. 5–14. Абсолютная неустойчивость нелинейных регулируемых систем. II. Система с нестационарными нелинейностями. Круговой критерий // АиТ. — 1971. — № 6. — С. 25–33.
13. *Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью // Сиб. матем. журн. — 1973. — Т. 14, № 5. — С. 1100–1129.
14. *Якубович В. А.* Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления, I // Сиб. матем. журн. — 1974. — Т. 15, № 3. — С. 639–668. Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах синтеза оптимального управления, II // Сиб. матем. журн. — 1975. — Т. 16, № 5. — С. 1081–1102.
15. *Якубович В. А.* Частотные методы качественного исследования нелинейных регулируемых систем // VII Int. Konf. über nichtlineare Schwingungen. B. 1. — Berlin: Akademie-Verlag, — 1977. — S. 365–387.
16. *Якубович В. А.* Частотные условия колебаний в системе с одной дифференцируемой нелинейностью // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 264–269.
17. *Barbalat I., Halanay A.* Nouvelles applications de la méthode fréquentielle dans la théorie des oscillations // Rev. Roum. Sci. Techn. Sér. Électrotechn. et Énerg. — 1971. — V. 16, № 4. — P. 689–702.
18. *Barbalat I., Halanay A.* Conditions de comportement «presque linéaire» dans la théorie des oscillations // Rev. Roum. Sci. Techn. Sér. Électrotechn. et Énerg. — 1974. — V. 19, № 2. — P. 321–341.
19. *Halanay A.* Almost periodic solutions for a class of nonlinear systems with time lag // Rev. Roum. Math. Pures Appl. — 1969. — V. XIV, № 9. — P. 1269–1276.
20. *Halanay A.* For and against the Liapunov function // In Symposia Mathematica VI Monograf. — Bologna, 1971. — P. 167–175.
21. *Halanay A., Rasvan Vl.* Periodic and almost periodic solutions for a class of systems described by coupled delay-differential and difference equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. — 1977. — V. 1, № 3. — P. 197–206.
22. *Halanay A., Rasvan Vl.* Absolute stability of feedback systems with several differentiable non-linearities // Int. J. Systems Sci. — 1991. — V. 22, № 10. — P. 1911–1927.
23. *Kalman R. E.* Ljapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control // Proc. Nat. Acad. Sci. — USA, 1963. — V. 49, № 2. — P. 201–205.
24. *Lellouche G.A* frequency criterion for oscillatory solutions // SIAM J. Control. — 1970. — V. 8, № 1. — P. 202–206.

25. *Popov V. M.* Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions // Rev. Roum. Sci. Techn. Sér. Électrotechn. et Énerg. — 1964. — V. 9, № 4. — P. 629–690.
26. *Popov V. M.* Dichotomy and stability by frequency domain methods // Proc. IEEE. — 1974. — V. 62, № 5. — P. 548–562.
27. *Popov V. M.* Application of the saturability technique in the problem of stability of nonlinear systems // Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. — 1977. — V. 1, № 5. — P. 571–581.
28. *Reissig R., Sansone G., Conti R.* Nichtlineare Differentialgleichungen hoherer Ordnung. — Rome: Edizioni Cremonese, 1969.
29. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method // Tokyo: The Mathem. Soc. of Japan, 1966.

Глава 4

АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

В. А. Бондарко[†]

Адаптивные субоптимальные системы с переменной размерностью вектора подстраиваемых параметров[*]

Аннотация: приведен краткий обзор метода рекуррентных целевых неравенств — созданного В. А. Якубовичем направления в теории адаптивных систем. Рассмотрены также две новые задачи субоптимального в минимаксном смысле адаптивного управления минимально фазовыми дискретными и непрерывными объектами неизвестного порядка с запаздыванием. Попутно получено решение субоптимальной задачи для непрерывных объектов с известными параметрами и критерий минимальной фазовости дискретной модели непрерывного объекта в случае, когда запаздывание не кратно периоду дискретизации. В качестве алгоритма адаптации выступает конечно сходящийся алгоритм решения счетной системы рекуррентных целевых неравенств с переменным количеством подстраиваемых параметров, которое стабилизируется только после окончания переходных процессов.

1. Введение

В условиях существенной априорной неопределенности относительно параметров объекта управления и свойств внешней среды для достижения заданных целевых установок необходимо создавать такие

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 11. — С. 38–60.

системы, которые способны в процессе функционирования изменять свои параметры либо структуру на основе обработки доступной текущей информации. С формулировки этого постулата началось в 1965 г. развитие метода рекуррентных целевых неравенств, а удовлетворяющие этому постулату системы управления получили название обучаемых, или адаптивных. Задача разработки таких систем облегчалась тем, что к тому времени подходящий математический аппарат усилиями возглавляемой В. А. Якубовичем группы сотрудников Ленинградского университета уже был частично разработан [11] для нужд теории обучения распознаванию образов.

Поясним связь между алгоритмами распознавания и адаптации на примере двух задач — настройки весов персептрона и прямого адаптивного управления дискретным объектом. Задачу настройки весов простейшего персептрона можно трактовать следующим образом: имеются два тренировочных множества изображений (точек в конечномерном пространстве признаков R^N) — X_1 и X_2, требуется построить задаваемую уравнением $\alpha + (\theta, x) = 0$ гиперплоскость, разделяющую эти множества, то есть найти такую скалярную величину α и такой вектор $\theta \in R^N$, что $\alpha + (\theta, x) < 0$ при $x \in X_1$ и $\alpha + (\theta, x) > 0$ при $x \in X_2$ (через (θ, x) здесь обозначается скалярное произведение векторов θ и x). Введем следующие обозначения: $\tau = (\alpha, \theta')'$, $\varphi = (1, x')'$ при $x \in X_1$, $\varphi = -(1, x')'$ при $x \in X_2$ (штрих обозначает транспонирование). В результате задача разделения X_1 и X_2 сводится к бесконечной, вообще говоря, системе неравенств

$$(\tau, \varphi) < 0 \tag{1}$$

относительно вектора τ. Аналогичным образом, линейную модель дискретного по времени объекта с ограниченным и в остальном непредсказуемым возмущением $v_k \in [-C, C]$ можно трактовать как систему неравенств

$$|y_{k+1} - (\tau, \varphi_k)| \leqslant C, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

относительно τ — вектора параметров модели. Входящие в эти неравенства величины y_k и φ_k имеют смысл наблюдаемого выхода и фазового вектора соответственно, компоненты последнего также доступны измерению. При некоторых дополнительных предположениях наилучший выбор управляющего воздействия — обеспечить равенство $(\tau, \varphi_k) = 0$, и тогда (2) переходит в неравенство $|y_k| \leqslant C$, эквивалентное стабилизации наблюдаемого выхода около нуля или, аналогично, любого другого желательного значения. Таким образом, неравенства вида (2) оказываются эквивалентными цели управления, и поэтому они были названы *целевыми*. От этого происходит название метода рекуррентных целевых неравенств, характеристика «рекуррентные» объясняется тем, что набор решаемых неравенств (2) не задан заранее, а определяется в ходе функционирования объекта и зависит как от реализации возмущения, так и от алгоритма, применяемого для их решения.

Ясно видно, что рассматриваемые задачи близки между собой как по типу неравенств, так и в другом отношении — возможной неединственностью решения и принципиальной безразличностью к тому, какое из многих решений будет найдено. В самом деле, в задаче распознавания нас в равной степени устраивают все плоскости, разделяющие тренировочные множества; а в задаче управления объектом с неизвестным вектором параметров все решения неравенств (2) совершенно эквивалентны. Бессмысленно говорить о том, какое решение истинное, а какое — его приблизительная оценка. Эта черта — следствие отсутствия каких-либо предположений о стохастических свойствах элементов тренировочных множеств и возмущающего воздействия. В этом смысле обсуждаемый подход — более общий по сравнению с привычной многим стохастической теорией.

Начиная с Розенблатта для решения персептронных неравенств (1) применялись *алгоритмы с поощрением* — рекуррентные процедуры вида $\tau_{k+1} = T(\varphi_k, \tau_k)$, которые оставляли вектор τ_k на месте, если неравенство (1) выполнялось для очередного элемента обучающей последовательности φ_k и полученного на предыдущих шагах вектора τ_k, и каким-то образом модифицировали τ_k в случае нарушения неравенства. Геометрический смысл неравенства (1) при $\varphi = \varphi_k$ — принадлежность вектора τ соответствующему полупространству. Нарушение неравенства означает, что вектор τ_k находится вне текущего полупространства $(\tau, \varphi_k) < 0$, поэтому естественный способ его модификации — проекция вектора τ_k на текущее полупространство. Именно таков (с точностью до некоторых уточнений, которые обеспечивают сходимость за конечное количество шагов) был предложенный В. А. Якубовичем алгоритм «ЯВА». Поскольку каждое неравенство (2) — это комбинация двух неравенств вида (1), то проекционный алгоритм «ЯВА» оказался вполне подходящим для их решения. Примененный к неравенствам (2), этот алгоритм получил название «Полоска», поскольку каждое неравенство (2) выделяет в пространстве векторов τ полосу, т. е. промежуток между двумя гиперплоскостями.

Итак, конечно-сходящиеся алгоритмы настройки весов персептрона в результате модификации превратились [12, 13] в алгоритмы решения счетных систем неравенств относительно параметров объекта управления или настраиваемого регулятора. В структуре обучаемой системы управления именно они играют роль алгоритмов адаптации, поэтому описываемый подход получил также название метода конечно-сходящихся алгоритмов.

Появившийся метод успешно развивался как в плане теоретическом, так и в области приложений. Были рассмотрены самые разнообразные типы рекуррентных неравенств и алгоритмы их решения, в том числе и вероятностные, — в этом направлении многие результаты были получены В. Н. Фоминым [7, 8]. Обычно алгоритмы решения целевых неравенств строятся как проекционные на те области, которые выделяются неравенствами в пространстве подстраиваемых параметров, и основное условие их сходимости — это выпуклость этих областей и ненулевая мера их пересечения. Впрочем, были предприняты попытки [14, 17] распространить метод и на невыпуклые неравенства. Достаточно подробную библиографию на 1980 г. можно найти в книге [9], которая сама стала заметным этапом в развитии теории адаптивных систем.

Несмотря на значительное разнообразие полученных результатов, проекционный алгоритм решения неравенств (2) остался в каком-то смысле базовым, особенно при решении задач управления линейными объектами. В. А. Якубович и его ученики предложили [5, 6, 12, 13] самые разные его варианты — «Полоска-1» и «Полоска-2», «Векторная полоска», «Сложная полоска» и т. п. Для всех этих алгоритмов характерно то, что они обеспечивают выполнение каждого неравенства рекуррентной системы с достаточно большим номером. В отличие от них, предложенный в [4] алгоритм обеспечивает справедливость сразу всех неравенств в среднеквадратичном смысле. Это позволило [15, 16] раздвинуть границы применимости метода рекуррентных целевых неравенств со случая равномерно ограниченных возмущающих воздействий на случай возмущений, ограниченных в смысле среднего квадрата. К этому классу принадлежат, в частности, все стационарные случайные процессы с конечной дисперсией.

Сейчас, когда теория адаптивных систем вновь стала привлекать активный интерес исследователей, есть все основания для дальнейшего развития метода рекуррентных целевых неравенств. Настоящая работа посвящена двум задачам адаптивного субоптимального управления. Рассматриваются минимально фазовые объекты управления с возмущающими воздействиями, которые представляют собой нерегулярные (равномерно ограниченные и в остальном абсолютно произвольные) сигналы, прошедшие через линейный фильтр общего вида. В дискретном времени такая задача уже была рассмотрена [6], и предлагаемый результат развивает изложенные там подходы. Случай непрерывного времени в рассматриваемой постановке, видимо, еще не рассматривался. Даже для известных параметров объекта решение близкой задачи минимаксной оптимизации известно [1] только в классе линейных, а не произвольных регуляторов.

Отличительная черта обоих предлагаемых здесь результатов об адаптивном субоптимальном управлении в том, что ни порядок уравнений управляемых объектов, ни необходимое для достижения цели управления количество подстраиваемых параметров не предполагается априорно известным. Алгоритм адаптации должен сам их определить. Алгоритмы такой структуры были предложены В. А. Якубовичем на семинаре кафедры теоретической кибернетики Санкт-Петербургского университета при обсуждении задач адаптивного управления бесконечномерными объектами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретные и непрерывные объекты управления

$$\alpha(\nabla)y_k = \beta(\nabla)u_{k-\vartheta} + v_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

$$a(p)y(t) = b(p)u(t-\theta) + v(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{4}$$

со скалярными управляющим воздействием u, возмущением v и наблюдаемым выходом y. Все входящие в эти уравнения сигналы предполагаются нулевыми при отрицательных значениях времени, $\nabla^j y_k = y_{k-j}$, $p^j y(t) = d^j y(t)/dt^j$,

$$\alpha(\lambda) = 1 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_n\lambda^n, \quad \beta(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \ldots + \beta_m\lambda^m, \quad \beta_0 \neq 0,$$

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^{N}(\lambda - \lambda_j), \quad b(\lambda) = b_0\prod_{j=1}^{M}(\lambda - \mu_j), \quad M < N,\ b_0 \neq 0,$$

запаздывания ϑ и θ неотрицательны. У многочлена $\beta(\lambda)$ все корни лежат вне замкнутого единичного круга, а у $b(\lambda)$ — в открытой левой полуплоскости. Обозначим через Ξ_d класс дискретных объектов (3), а через Ξ_c — класс непрерывных объектов (4), которые обладают всеми перечисленными свойствами. Подмножество тех объектов из Ξ_c, для которых $M = N - 1$, будет обозначаться как Ξ_c^1. Таким образом, мы рассматриваем так называемые *минимально-фазовые* линейные стационарные объекты, у которых нули передаточной функции лежат в области устойчивости (дополнение к единичному кругу и левая полуплоскость соответственно). Объекты из Ξ_c^1 будем называть *сильно минимально фазовыми* .

Введем обозначения: z_i^j — вектор с компонентами $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_j$, z_i^∞ — последовательность с элементами $z_i, z_{i+1}, \ldots$, $z(\cdot)$ — функция со значениями $z(t)$.

У возмущающих воздействий на объекты управления (3) и (4) никаких стохастических свойств не предполагается. Будем считать, что последовательности v_0^∞ и функции (возможно, обобщенные) $v(\cdot)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varkappa(\nabla)v_k = \zeta(\nabla)w_k, \qquad d(p)v(t) = c(p)w(t),$$

где

$$\varkappa(\lambda) = (1 - \lambda/\varkappa_1)(1 - \lambda/\varkappa_2)\ldots(1 - \lambda/\varkappa_r),$$
$$\zeta(\lambda) = \zeta_0(\lambda - \zeta_1)(\lambda - \zeta_2)\ldots(\lambda - \zeta_l),$$
$$c(\lambda) = c_0(\lambda - c_1)(\lambda - c_2)\ldots(\lambda - c_L),$$
$$d(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2)\ldots(\lambda - d_R),$$
$$\min_j |\varkappa_j| > 1, \quad \min_{1\leqslant j\leqslant l} |\zeta_j| > \overline{\zeta} > 1,$$
$$\max_{1\leqslant j\leqslant L}\{\mathrm{Re}\ c_j\} < -\overline{c} < 0, \quad \max_j\{\mathrm{Re}\ d_j\} < 0, \quad L < N + R,$$

т. е. корни многочленов $\varkappa(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ лежат вне замкнутого единичного круга, а корни $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — в открытой левой полуплоскости. Последовательности w_0^∞ и кусочно-непрерывные функции $w(\cdot)$ равномерно ограничены по абсолютной величине, а в остальном совершенно произвольны:

$$|w_k| \leqslant 1 \quad \forall k, \qquad |w(t)| \leqslant 1 \quad \forall t.$$

Обозначим через $V_d = V_d(\varkappa_1^r, \zeta_0^l) = \{v_0^\infty\}$ и $V_c = V_c(d_1^R, c_0^L) = \{v(\cdot)\}$ классы всех дискретных и непрерывных возмущений, которые описываются подобным образом.

Предположим, что управляющие воздействия формируются регуляторами типа обратной связи:

$$u_k = U_k(y_0^k), \;\; u(\cdot) = U(y(\cdot)),$$

где $U_k(\cdot)$ — произвольные функции, $U(\cdot)$ — неупреждающее отображение множества абсолютно непрерывных функций $y(\cdot)$ в множество кусочно-непрерывных функций $u(\cdot)$. Тогда для этих регуляторов определены функционалы качества управления

$$J_d[U_0^\infty(\cdot)] = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{v_0^\infty \in V_d} |y_k|, \;\; J_c[U(\cdot)] = \varlimsup_{t\to\infty} \sup_{v(\cdot)\in V_c} |y(t)|. \tag{5}$$

Настоящая работа посвящена минимизации функционалов J_d и J_c при дополнительном условии ограниченности управления. Без ограничения общности будем считать в дальнейшем, что $r = R = 0$, $\varkappa(\lambda) = d(\lambda) = 1$. Действительно, к этому случаю мы приходим, применив к обеим частям уравнений (3) и (4) операторы $\varkappa(\nabla)$ и $d(p)$ соответственно. В силу расположения корней этих многочленов такие преобразования уравнений не меняют их решений с точностью до затухающих компонент, которые не оказывают никакого влияния на значения функционалов J_d и J_c.

Задачи минимизации функционалов J_d и J_c для известных (фиксированных) объектов управления (3) и (4) из классов Ξ_d и Ξ_c соответственно будут здесь рассмотрены как вспомогательные при синтезе управления для объектов с неизвестными параметрами. В этом последнем случае решение будет получено в терминах общего определения адаптивной субоптимальной системы управления [9]. Для рассматриваемых дискретных объектов (3) это означает, что при всех $k \geqslant 0$ должны быть заданы три рекуррентных соотношения:

$$\sigma_k = S_k(\sigma_{k-1}, y_k), \quad u_k = U_k(\tau_k, \sigma_k), \quad \tau_k = A_k(\tau_{k-1}, \sigma_k). \tag{6}$$

В этих уравнениях векторы σ_k и τ_k могут иметь переменную размерность, но в каждый момент k она конечна. Первое из уравнений (6) порождает *сенсор* σ_k, т. е. конечный набор всех известных (априорно заданных, измеренных, вычисленных и запомненных) к этому моменту величин. Начальное значение сенсора — это априорно известная информация об объекте управления. Второе из уравнений (6) описывает собственно регулятор. На содержательном уровне подразумевается, что для каждого фиксированного объекта управления с полным набором параметров ξ существует такой вектор параметров регулятора $\overline{\tau} = \overline{\tau}(\xi)$, что регулятор $u_k = U_k(\overline{\tau}, \sigma_k)$ гарантирует выполнение *цели управления* — неравенства

$$|y_k| \leqslant C_y. \tag{7}$$

Этим управлением невозможно воспользоваться, если, как это и предполагается, априорная информация не включает в себя полный набор параметров объекта. Вместо неизвестного вектора $\overline{\tau}$ в уравнении регулятора используются *векторы подстраиваемых параметров* τ_k. Эти векторы доставляются *алгоритмом адаптации*, который описывается последним, третьим из уравнений (6).

Система управления (6) называется *адаптивной в классе* $\Xi_d \times V_d$ *относительно цели управления* (7), если для любого объекта управления (3) из класса Ξ_d и любого возмущения из класса V_d все процессы замкнутой системы (3),(6) обладают следующими свойствами:

(A1) значения $\overline{\lim}_{k\to\infty} |u_k|$ и $\overline{\lim}_{k\to\infty} |\sigma_k|$ конечны;
(A2) существует такой момент времени, после которого цель управления выполнена, а значения $\dim \sigma_k$ и τ_k перестают меняться.

Адаптивная система (6) называется *ε-субоптимальной в смысле функционала* J_d, если цель управления (7) достигается с константой $C_y \leqslant \overline{J}_d + \varepsilon$, где $\overline{J}_d = \inf J_d$ по всевозможным обратным связям.

Общее определение адаптивной системы управления непрерывными объектами (4) из класса Ξ_c формулируется сходным образом. При этом вместо разностных уравнений (6) для описания сенсора, регулятора и алгоритма адаптации используются аналогичные функциональные соотношения с неупреждающими операторами $S(\cdot)$, $U(\cdot)$ и $A(\cdot)$. Здесь, однако, для адаптивного управления непрерывными объектами будет использована их дискретизация. Это означает, что мы ограничиваемся кусочно-постоянными управляющими воздействиями вида

$$u(kh + \varepsilon) = u_k, \quad \varepsilon \in [0, h),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

где h — постоянный положительный *период дискретизации*. Таким образом, управление $u(\cdot)$ как функция непрерывного времени $t \in [0, \infty)$ полностью определяется последовательностью u_0^∞, значения членов которой вырабатываются дискретным (по времени) регулятором (6). При этом для формирования сенсора используются не все значения наблюдаемого выхода $y(t)$, а только дискретные равноотстоящие отсчеты

$$y_k = y(kh), \quad k = 0, 1, \ldots\ . \tag{9}$$

Пусть $\widetilde{\Xi}_c$ — некоторое подмножество Ξ_c. Будем говорить, что соотношения (6), (8), (9) задают *дискретную систему управления* *непрерывными объектами* (4), *адаптивную в классе* $\widetilde{\Xi}_c \times V_c$ *относительно цели управления*

$$|y(t)| \leqslant C_y, \tag{10}$$

если для любого объекта управления (4) из класса $\widetilde{\Xi}_c$ и любого возмущения из класса V_c все процессы замкнутой системы (4), (6), (8), (9) обладают свойствами (A1), (A2). Адаптивная система называется ε-*субоптимальной в смысле функционала* J_c, если цель управления (10) достигается с константой $C_y \leqslant \overline{J}_c + \varepsilon$, где $\overline{J}_c = \inf J_c$ по всевозможным (а не только дискретным) обратным связям.

Если соотношения (8), (9) справедливы, то выбрав из решений дифференциального уравнения (4) дискретные отсчеты $y_k = y(kh)$, $u_k = u(kh)$, получаем для них разностное уравнение вида (3). Коэффициенты этого разностного уравнения зависят от периода дискретизации h и коэффициентов исходного уравнения (4), а значения дискретного возмущающего воздействия — еще и от значений возмущающего воздействия $v(\cdot)$ в исходном управлении. Порождаемое таким образом уравнение (3) будем называть *дискретной моделью непрерывного объекта* (4), или результатом его *дискретизации*.

В этой работе при построении адаптивной системы управления непрерывными объектами используются их дискретные модели. Это не означает, разумеется, что непрерывный случай банально сводится к дискретному. Прежде всего, дискретная модель описывает функционирование объекта управления только в кратные h моменты времени, а минимизируемый функционал J_c зависит от значений наблюдаемого выхода во все моменты, включая промежуточные. Затем, класс возникающих в результате дискретизации возмущений v_k вообще никогда (кроме элементарнейшего случая $N = 1,\ L = 0$) не совпадает с V_d, а сами дискретные модели попадают в класс Ξ_d только при определенных дополнительных условиях, которые подлежат выяснению. Наконец, качество предлагамой дискретно-непрерывной системы управления неизбежно зависит от периода дискретизации h и повышаться может только при его уменьшении. Поскольку дискретная модель и возмущения сами существенно зависит от h, то необходим асимптотический (при $h \to 0$) анализ характеристик замкнутой системы.

3. Переход к рекуррентным целевым неравенствам

Цель этого раздела — свести задачу адаптивного управления к счетной системе неравенств специального вида относительно вектора подстраиваемых параметров. Специфика этих неравенств в том, что их выполнение эквивалентно достижению цели управления, а сам набор входящих в систему неравенств не определен заранее, а определяется алгоритмом их решения. Такие системы названы в [9, 13] системами рекуррентных целевых неравенств (РЦН). Алгоритм их решения выступает в качестве алгоритма адаптации в уравнениях (6), описывающих адаптивную систему.

Начнем с дискретного случая. Определим (однозначным образом) многочлены $\gamma(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$ из условия

$$\delta(\lambda)\alpha(\lambda) + \lambda^{\vartheta}\gamma(\lambda) = \zeta(\lambda) \quad \forall\lambda, \ \deg\gamma(\lambda) < n, \ \deg\delta(\lambda) < \vartheta,$$

тогда для решений уравнения (3) будет справедливо равенство

$$\begin{aligned}\zeta(\nabla)y_k =& \delta(\nabla)\alpha(\nabla)y_k + \gamma(\nabla)y_{k-\vartheta} = \\ =& \delta(\nabla)[\beta(\nabla)u_{k-\vartheta} + \zeta(\nabla)w_k] + \gamma(\nabla)y_{k-\vartheta},\end{aligned}$$

откуда

$$\zeta(\nabla)[y_k - \delta(\nabla)w_k] = \delta(\nabla)\beta(\nabla)u_{k-\vartheta} + \gamma(\nabla)y_{k-\vartheta}. \tag{11}$$

Обозначим через τ_j коэффициенты разложения функций $\delta(\lambda)\beta(\lambda)/\zeta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)/\zeta(\lambda)$ в степенные ряды:

$$\frac{\delta(\lambda)\beta(\lambda)}{\zeta(\lambda)} = \sum_{j=0}^{\infty}\tau_{2j}\lambda^j, \quad \frac{\gamma(\lambda)}{\zeta(\lambda)} = \sum_{j=0}^{\infty}\tau_{2j+1}\lambda^j.$$

Решив (11) как разностное уравнение относительно величин $z_k = y_k - \delta(\nabla)w_k$, получаем

$$y_k - \delta(\nabla)w_k - \left\{\sum_{j=0}^{\infty}(\tau_{2j}u_{k-\vartheta-j} + \tau_{2j+1}y_{k-\vartheta-j})\right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{12}$$

Обозначим через l_2 гильбертово пространство бесконечномерных квадратично суммируемых векторов со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Величины τ_j экспоненциально стремятся к нулю, поскольку корни многочлена $\zeta(\lambda)$ лежат вне некоторого круга с центром в нуле и радиусом $r^2 = \overline{\zeta} > 1$. Следовательно, бесконечномерные векторы (последовательности)

$$\begin{aligned}\varphi_k &= (u_k, y_k/r, u_{k-1}/r^2, y_{k-1}/r^3, \ldots, u_0/r^{2k}, y_0/r^{2k+1}, 0, 0, \ldots), \\ \tau &= (\tau_0, r\tau_1, r^2\tau_2, \ldots)\end{aligned} \tag{13}$$

оба принадлежат l_2. Таким образом, соотношение (12) можно переписать в виде

$$y_k - (\tau, \varphi_{k-\vartheta}) = \delta(\nabla)w_k + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{14}$$

где (τ, φ_k) — скалярное произведение τ и φ_k.

В работах [6, 9] показано, что оптимальный в смысле функционала J_d регулятор задается уравнением $\delta(\nabla)\beta(\nabla)u_k + \gamma(\nabla)y_k = 0$, а минимальное значение функционала равно

$$\overline{J}_d = |\delta_0| + |\delta_1| + \ldots + |\delta_{\vartheta-1}|, \tag{15}$$

где δ_j — коэффициенты многочлена $\delta(\lambda)$. Доказательство этого утверждения элементарно следует из (11) и (12); аналогичные этому доказательству рассуждения будут ниже приведены для случая непрерывных объектов управления.

Пусть $C_y > \overline{J}_d$, тогда из (12) и (15) следует, что

$$|y_k - (\tau, \varphi_{k-\vartheta})| \leqslant C_y \tag{16}$$

при всех достаточно больших k. Если мы будем определять значения управления из уравнения

$$(\tau, \varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{17}$$

то (16) перейдет в неравенство $|y_k| \leqslant C_y$. Поскольку значение C_y может, вообще говоря, быть сколь угодно близким к $\overline{J}_d$, то построенный таким образом регулятор оптимален.

В чем недостатки этого регулятора? Во-первых, компоненты вектора τ зависят от параметров объекта (3), поэтому регулятор (17) невозможно использовать, если параметры объекта управления неизвестны. Если даже они известны, то регулятор (17) все равно невозможно реализовать с помощью устройства с конечной памятью из-за бесконечной размерности τ. Предположим, однако, что в результате наблюдения за откликом объекта на подаваемые управляющие воздействия удалось найти такой конечномерный (точнее, имеющий конечное число ненулевых компонент) вектор $\widehat{\tau}$, что для $\tau = \widehat{\tau}$ неравенства (16) выполняются при всех достаточно больших k. Тогда, очевидно, уравнение $(\widehat{\tau}, \varphi_k) = 0$ также будет задавать субоптимальный регулятор, причем эффективно реализуемый. Таким образом, задача субоптимального управления объектами (3) будет решена, если вычислять управляющие воздействия u_k из уравнений $(\tau_k, \varphi_k) = 0$, порождая векторы подстраиваемых параметров τ_k посредством алгоритма адаптации, который за конечное число шагов решает систему РЦН (16).

Пусть $\nu \geqslant \mu > 0$, а $x = (x_1, x_2, \ldots)$ — бесконечномерный вектор (последовательность) с компонентами x_i. Обозначим через $x[\mu : \nu]$ вектор-столбец $(x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_\nu)'$ (штрих означает транспонирование). Таким образом,

$$\varphi_{k-\vartheta}[1:2n] = \left[u_{k-\vartheta}, \frac{y_{k-\vartheta}}{r}, \frac{u_{k-\vartheta-1}}{r^2}, \ldots, \frac{u_{k-\vartheta-n}}{r^{2n}}\right]',$$

$$\varphi_{k-\vartheta}[1:2n+1] = \left[u_{k-\vartheta}, \frac{y_{k-\vartheta}}{r}, \ldots, \frac{y_{k-\vartheta-n}}{r^{2n+1}}\right]',$$

и при этом последние компоненты могут быть нулями при $k < \vartheta + n$.

Рассмотрим в качестве алгоритма адаптации следующую процедуру:

$$\begin{cases} \psi_k = \varphi_{k-\vartheta}[1:n_{k-1}], \quad \eta_k = y_k - \psi_k'\tau_{k-1}, \\ \text{если } |\eta_k| \leqslant C_y, \quad \text{то} \quad \tau_k = \tau_{k-1},\ n_k = n_{k-1}, \\ \text{если } |\eta_k| > C_y, \quad \text{то} \quad \Delta_k = \mu_k\eta_k|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}(1 - C_y\rho \mid \eta_k \mid^{-1})\psi_k, \\ \qquad\qquad \tau_k = \begin{bmatrix} \tau_{k-1} + \Delta_k \\ 0 \end{bmatrix},\ n_k = n_{k-1} + 1, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots\ . \tag{18}$$

В эти уравнения входят постоянные параметры $\rho \in (0,1)$, $r > 1$, переменные параметры $\mu_k \in (1/2, 1]$ и начальные данные $n_0 = 1$, $\tau_0 \neq 0$. Значения μ_k должны выбираться таким образом, чтобы первая компонента τ_{k+1} отличалась от нуля. Это обеспечивает разрешимость уравнения

$$\tau_k'\varphi_k[1:n_k] = 0 \tag{19}$$

относительно u_k при всех k. Алгоритм (18) в каждый момент k имеет конечную память, поскольку для величин $\Phi_k = |\varphi_k|^2$ справедливо рекуррентное соотношение $\Phi_k = |u_k|^2 + |y_k|^2/r^2 + \Phi_{k-1}/r^4$.

Условия сходимости алгоритма (18) описываются следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть последовательности скалярных величин y_k и бесконечномерных векторов $\varphi_k \in l_2$ таковы, что некоторый бесконечномерный вектор $\overline{\tau} = (\overline{\tau}_{[j]})_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам $\overline{\tau}_{[j]} < \nu^{-j}$ и*

$$|y_k - (\overline{\tau}, \varphi_{k-\vartheta})| \leqslant \rho\, C_y \tag{20}$$

для всех достаточно больших j и k, где $0 < \rho < 1$, $\nu > 1$. Пусть векторы τ_k, ψ_k доставляются алгоритмом (18). *Тогда*

$$|\Delta_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{21}$$

$$|y_k - \tau_k'\psi_k| \leqslant C_y + \varepsilon_k|\psi_k|, \tag{22}$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. При дополнительном условии $\sup_k |\varphi_k| < +\infty$ неравенства (22) *выполнены при $\varepsilon_k \equiv 0$ (и, значит, $\tau_k = \mathrm{const}$, $n_k = \mathrm{const}$) при всех достаточно больших k.*

Ключевым условием сходимости алгоритма (18) служит разрешимость неравенства (20) для любого $C_y > \overline{J}_d$. Применить тот же алгоритм для построения адаптивного субоптимального управления непрерывными объектами (4) можно только в том случае, если аналогичное неравенство разрешимо для любого $C_y > \overline{J}_c$, где $\overline{J}_c$ — минимальное значение функционала качества J_c. Для проверки этого условия нужно знать $\overline{J}_c$, т. е. решить задачу оптимального (на самом деле, субоптимального) управления непрерывными объектами (4) с известными параметрами и недоступным измерению возмущением. Этой задаче посвящен следующий раздел.

4. Субоптимальное управление непрерывными объектами

Минимальная фазовость дискретной модели — необходимое условие для того, чтобы любой регулятор, минимизирующий абсолютную величину наблюдаемого выхода $y(\cdot)$ за счет обработки исключительно дискретных отсчетов $y_k = y(kh)$, автоматически обеспечивал ограниченность управляющего воздействия. Поэтому первый вопрос, который следует рассмотреть при построении дискретного адаптивного управления непрерывными объектами (4), — это вопрос о минимальной фазовости модели (3), т. е. о том, какие объекты (4) после дискретизации попадают в класс Ξ_d. Чтобы сформулировать ответ, определим величину ε — относительную погрешность в представлении запаздывания θ в виде кратной периоду дискретизации h величины:

$$\theta = (\vartheta + \varepsilon)h, \quad \varepsilon \in [0, 1),$$

где ϑ — целочисленное запаздывание модели.

Теорема 2. *Фиксируем* $\varepsilon \in [0, 1)$. *Если* $M = N - 1$, *то дискретизация непрерывного объекта* (4) *приводит к дискретной модели, у которой многочлен* $\beta(\lambda)$ *в уравнении* (3) *имеет вид*

$$\beta(\lambda) = hb_0(h)(1 - \varepsilon)(1 - \lambda\mu_0(h)) \prod_{j=1}^{N-1} (1 - \lambda e^{h\mu_j(h)}), \tag{23}$$

где $b_0(h) \to b_0$, $\mu_0(h) \to \varepsilon/(\varepsilon - 1)$, $\mu_j(h) \to \mu_j$ *при* $h \to 0$, $j = 1, 2, \ldots, N - 1$.

Таким образом, если исходный непрерывный объект (4) — сильно минимально фазовый, то результат его дискретизации (3) с достаточно малым периодом h будет минимально фазовым при $\varepsilon < 1/2$ и не будет минимально фазовым при $\varepsilon > 1/2$, а дискретизация объектов (4), у которых хотя бы один корень $b(\lambda)$ лежит в открытой правой полуплоскости, при достаточно малом h всегда приводит к неминимально фазовой модели. Анализ предельной при $h \to 0$ минимальной фазовости дискретных моделей можно и продолжить. Так, если $M = N - 2$, то при $\varepsilon = 0$ предельная минимальная фазовость определяется [3] знаком величины $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_M$, а при $\varepsilon > 0$ ее нет никогда. Можно показать, далее, что для $M < N - 2$ предельной минимальной фазовости нет при всех ε, достаточно близких к нулю и к единице. В случае векторных сигналов $u(\cdot)$ и $y(\cdot)$ картина становится [18] еще более сложной, но при соответствующем определении сильной минимальной фазовости теорема 2 остается справедливой. Подытоживая, можно сделать вывод, что на предельную минимальную фазовость, нечувствительную к малым отклонениям параметров объекта, можно рассчитывать только для сильно минимально фазовых объектов (4). Именно такие объекты и будут далее рассматриваться.

Определим функцию $G(\cdot)$ как импульсную реакцию объекта (4) с возмущением из класса V_c по каналу от w к y. Для этого можно переписать дифференциальные уравнения объекта в пространстве состояний или взять обратное преобразование Лапласа от функции $c(\lambda)/[a(\lambda)d(\lambda)]$. Вещественная часть корней многочлена $c(\lambda)$ в соответствии с введенными ранее обозначениями ограничена сверху величиной $-\overline{c} < 0$.

Теорема 3. *Пусть возмущающее воздействие на сильно минимально фазовый объект* (4) *принадлежит классу* V_c, *а управляющее воздействие* (8) *кусочно-постоянно. Если период дискретизации* h *достаточно мал, то для дискретных отсчетов управления* $u_k = u(kh)$, *наблюдаемого выхода* $y_k = y(kh)$ *и составленного из них при* $r = e^{\overline{c}h/2}$ *бесконечномерного вектора* (13) *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\Bigg[y_{k+\vartheta} - \int\limits_0^{\theta} G(s)w(kh+\theta-s)\,ds - \\ - \int\limits_0^{kh} g(h,s)w(kh-s)\,ds - (\tau,\varphi_k)\Bigg] = 0, \tag{24}$$

в котором функция $g(\cdot)$ *и бесконечномерный вектор* (*последовательность*) $\tau = \{\tau_{[j]}\}_{j=1}^{\infty}$ *обладают следующими свойствами*:

$$\int\limits_0^{\infty} |g(h,s)|\,ds \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad |\tau_{[j]}| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{25}$$

экспоненциально. Уравнения $(\tau,\varphi_k) = 0$ *и* (8) *задают* $(O(h) + O(\varepsilon))$-*субоптимальный регулятор в смысле функционала* J_c. *Его минимальное значение —*

$$\overline{J}_c = \int\limits_0^{\theta} |G(s)|\,ds.$$

Как определить значения $\tau_{[j]}$ по заданным параметрам объекта управления (4), становится ясно из доказательства теоремы. Для построения адаптивного субоптимального регулятора это совершенно неважно — достаточно знать принципиальную разрешимость целевых неравенств с правой частью, близкой к $\overline{J}_c$.

5. Адаптивные субоптимальные регуляторы

Чтобы сформулировать утверждение об адаптивности, в соответствии со сделанными определениями следует явно указать класс адаптивности, сенсор (включая априорную информацию), уравнения регулятора и алгоритма адаптации. С классами адаптации все предельно ясно — мы рассматриваем минимально фазовые дискретные объекты из класса Ξ_d с возмущениями из V_d и сильно минимально фазовые непрерывные объекты из $\overline{\Xi}_c$ с возмущениями из V_c. Уравнения систем также, разумеется, будут указаны. Некоторых комментариев требует, однако, необходимая априорная информация и ее связь с достигаемым уровнем субоптимальности. Характерная черта метода рекуррентных целевых неравенств — требование их усиленной разрешимости. Чтобы гарантировать достижение цели управления (7) или (10) с константой C_y, приходится требовать выполнение неравенств $\rho C_y > \overline{J}_d$ или $\rho C_y > \overline{J}_c$ соответственно, где $\rho \in (0,1)$. Поскольку минимальные значения функционалов J_d и J_c существенно зависят от параметров объекта, эти неравенства представляются достаточно ограничительными, если значение C_y требуется получить на основании каких-то грубых оценок параметров объекта. На самом деле, рассматривается другой подход — информацию о реалистичности поставленной цели управления предполагается получать непосредственно. Несколько огрубляя ситуацию (пренебрегая разницей между ρ и единицей, которую можно сделать сколь угодно малой), можно сказать, что адаптивный регулятор справляется с задачей, если она в приципе разрешима. Например, если человек-оператор обеспечивает заданную точность регулирования, то заменяющая его автоматическая адаптивная система тоже сможет поддержать эту же точность.

Итак, определим доступную априорную информацию для дискретного и непрерывного случаев:

$$\sigma_d = \{\vartheta, r, \rho, C_y\}, \quad \sigma_c = \{\theta, \overline{c}, \rho, C_y\}.$$

Здесь ϑ и θ — запаздывания, $1 < r^2 = \overline{\zeta}$ — оценка снизу для модуля корней многочлена $\zeta(\lambda)$ из уравнения, задающего класс возмущений V_d, $-\overline{c}$ — оценка сверху для вещественной части корней многочлена $c(\lambda)$ из дифференциального уравнения, определяющего класс возмущений V_c, $\rho \in (0,1)$, в дискретном случае должно быть справедливо неравенство $\rho C_y > \overline{J}_d$, а в непрерывном — неравенство $\rho C_y > \overline{J}_c$. В непрерывном случае по запаздыванию θ и периоду дискретизации $h > 0$ из равенства $\theta = h(\vartheta + \varepsilon)$ однозначно определяются целая величина ϑ и вещественная $\varepsilon \in (0,1)$, которую будем называть *относительной погрешностью* при представлении запаздывания кратной h величиной.

Теорема 4. *Пусть для минимально фазовых дискретных объектов* (3) *из класса* Ξ_d *с возмущениями из* V_d *доступны измерению* (*известны*) *текущие значения наблюдаемого выхода* y_k, *а также* *запаздывание в управлении ϑ и априорная информация $\sigma_0 = \sigma_d$. Тогда уравнения* (18), (19) *задают систему, адаптивную в классе $\Xi_d \times V_d$ относительно цели управления* (7) *и $(\overline{J}_d - C_y)$-субоптимальную в смысле функционала J_d.*

Теорема 5. *Пусть для сильно минимально фазовых непрерывных объектов из класса $\overline{\overline{\Xi}}_c$ с возмущениями из V_c доступны измерению (известны) текущие значения наблюдаемого выхода $y_k = y(kh)$ и априорная информация $\sigma_0 = \sigma_c$. Если относительная погрешность ε меньше* $1/2$, *то уравнения* (8), (18), (19) *при $r = e^{h\overline{c}/2}$ задают систему, адаптивную в классе $\Xi_c \times V_c$ относительно цели управления* (10) *и $(C_y - \overline{J}_c + O(h) + O(\varepsilon))$-субоптимальную в смысле функционала J_c.*

6. Пример

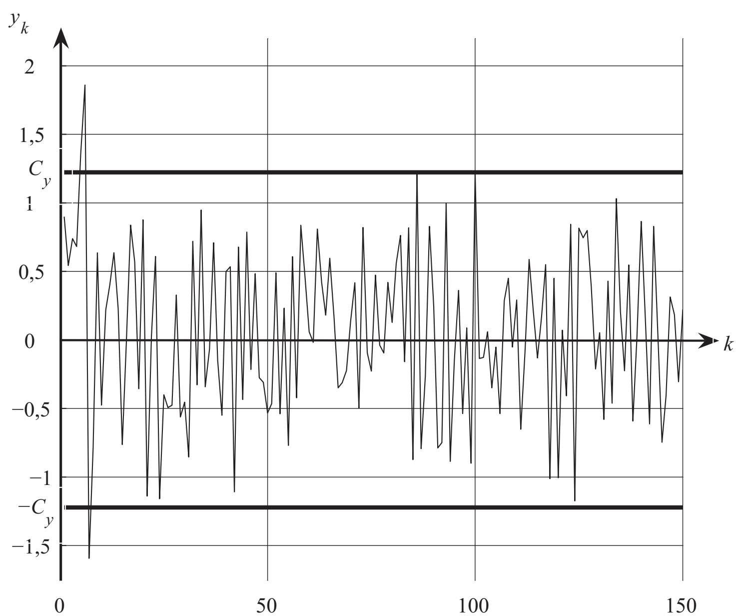

Рис. 1. Выход адаптивной системы

Рассмотрим дискретный объект управления вида (3):

$$y_k - 2y_{k-1} + 1{,}1y_{k-2} = u_{k-1} + 0{,}9u_{k-2} + w_k + 0{,}8w_{k-1}, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Для этого объекта минимальное значение функционала J_d равно единице, т. е. оптимальный регулятор гарантирует неравенство $\overline{\lim}_k |y_k| \leqslant 1$, и уменьшить его правую часть невозможно. Адаптивный регулятор (18), (19) с параметрами $\rho = 0,9$, $C_y = 1,1/\rho$ гарантирует неравенство $\overline{\lim}_k |y_k| \leqslant C_y$. На рис. 1 приведены типичные результаты компьютерного моделирования системы (3), (18), (19) с псевдослучайным возмущением, равномерно распределенным на промежутке $[-1,1]$. Начальное значение вектора подстраиваемых параметров $\tau_0 = 1$, нарушения целевого неравенства (и, соответственно, коррекции τ_k) происходили в моменты $k = 5$, $k = 6$, $k = 7$, $k = 100$ и $k = 1296$ при общей продолжительности моделирования 50 000 тактов.

7. Заключение

Решены две задачи субоптимального в минимаксном смысле адаптивного управления минимально фазовыми дискретными и непрерывными объектами с запаздыванием. Попутно получено решение субоптимальной задачи для непрерывных объектов с известными параметрами и критерий минимальной фазовости дискретной модели непрерывного объекта в случае, когда запаздывание не кратно периоду дискретизации. В качестве алгоритма адаптации выступает конечно сходящийся алгоритм решения счетной системы рекуррентных целевых неравенств с переменным количеством подстраиваемых параметров, которое стабилизируется только после окончания переходных процессов.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Предположим, что $n_k \to n_* < \infty$. Это возможно, только если $|\eta_k| \leqslant C_y$ при всех достаточно больших k, откуда сразу следует заключение теоремы.

Пусть теперь $n_k \to \infty$. Определим

$$\widetilde{\tau}_k = (\tau_k, 0, 0, \ldots) \in l_2, \quad \widehat{\tau}_k = (\overline{\tau}_{[1]}, \overline{\tau}_{[2]}, \ldots, \overline{\tau}_{[n_k]})', \quad V_k = |\tau_k - \widehat{\tau}_k|^2.$$

Если $|\eta_k| \leqslant C_y$, то $V_k = V_{k-1}$, а в противоположном случае

$$\begin{aligned} V_{k-1} - V_k =& |\tau_{k-1} - \widehat{\tau}_{k-1}|^2 - |\tau_k - \widehat{\tau}_k|^2 = \\ =& |\tau_{k-1} - \widehat{\tau}_{k-1}|^2 - |\tau_{k-1} + \Delta_k - \widehat{\tau}_{k-1}|^2 - |\overline{\tau}_{[n_k]}|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} &V_{k-1} - V_k + |\overline{\tau}_{[n_k]}|^2 = -\Delta_k'[2(\tau_{k-1} - \widehat{\tau}_{k-1}) + \Delta_k] = \\ &= -\frac{\mu_k \eta_k}{|\varphi_{k-\vartheta}|^2}\left(1 - \frac{C_y \rho}{|\eta_k|}\right)\psi_k' \times \\ &\quad \times \left[2(\tau_{k-1} - \widehat{\tau}_{k-1}) + \frac{\mu_k \eta_k}{|\varphi_{k-\vartheta}|^2}\left(1 - \frac{C_y \rho}{|\eta_k|}\right)\psi_k\right] = \\ &= \frac{\mu_k \eta_k}{|\varphi_{k-\vartheta}|^2}\left(1 - \frac{C_y \rho}{|\eta_k|}\right) \times \end{aligned}$$

$$\times\left\{2[\eta_k-(y_k-\psi_k'\widehat{\tau}_{k-1})]-\mu_k\eta_k\frac{|\psi_k|^2}{|\varphi_{k-\vartheta}|^2}\left(1-\frac{C_y\rho}{|\eta_k|}\right)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\mu_k}{|\varphi_{k-\vartheta}|^2}\left(1-\frac{C_y\rho}{|\eta_k|}\right)\left\{\left(2-\mu_k+\frac{\rho C_y}{|\eta_k|}\right)\eta_k^2-2(y_k-\psi_k\widehat{\tau}_{k-1})\eta_k\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}\left\{\left(|\eta_k|^2-C_y^2\rho^2\right)-2(|\eta_k|-\rho C_y)(y_k-\psi_k\widehat{\tau}_{k-1})\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}(|\eta_k|-\rho C_y)\times$$
$$\times\{|\eta_k|+\rho C_y-2[y_k-(\varphi_{k-\vartheta},\overline{\tau})]-2|\varphi_{k-\vartheta}|\,|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}(|\eta_k|-\rho C_y)\{|\eta_k|-\rho C_y-2|\varphi_{k-\vartheta}|\,|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(|\eta_k|-\rho C_y)}{|\varphi_{k-\vartheta}|}-|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|\right\}^2-\frac{1}{2}|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|^2.$$

Таким образом,

$$V_0\geqslant V_0-V_K=\sum_{k=1}^{K}(V_{k-1}-V_k)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\sum_{|\eta_k|>C_y}\left\{\left[\frac{|\eta_k|-\rho C_y}{|\varphi_{k-\vartheta}|}-|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|\right]^2-|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|^2-2|\overline{\tau}_{[n_k]}|^2\right\}.$$

Следовательно,

$$\sum_{|\eta_k|>C_y}\left\{\left[\frac{|\eta_k|-\rho C_y}{|\varphi_{k-\vartheta}|}-|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|\right]^2-|\overline{\tau}-\widetilde{\tau}_{k-1}|^2\right\}\leqslant 2(V_0+|\overline{\tau}|^2),$$

т. е. ряд в левой части неравенства сходится. Отсюда с учетом экспоненциальной оценки убывания $|\overline{\tau}_{[k]}|$ следует, что

$$\sum\frac{|\Delta_k|^2}{\mu_k^2}=\sum_{|\eta_k|>C_y}|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}(|\eta_k|-\rho C_y)^2<\infty. \tag{П.1}$$

Таким образом, $|\Delta_k|^2\to 0$ как общий член сходящегося ряда. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших k либо $|\eta_k|\leqslant C_y$, либо $|\varphi_{k-\vartheta}|^{-2}(|\eta_k|-\rho C_y)^2<\varepsilon$. Тем самым соотношения (21) и (22) доказаны. Если же выполнено дополнительное условие $\sup_k|\varphi_k|<+\infty$, то каждый ненулевой член ряда (П.1) от нуля отделен, поэтому количество таких членов конечно. Это противоречит предположению о бесконечном росте n_k, и тем самым теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2.Перепишем уравнение (4) в N-мерном пространстве состояний:

$$dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t-\theta)+Dw(t),\quad y(t)=Cx(t), \tag{П.2}$$

где (A, B, C, D) — какая-нибудь такая четверка матриц подходящей размерности, что $a(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, $b(\lambda) = a(\lambda)C(\lambda I - A)^{-1}B$, $c(\lambda) = a(\lambda)C(\lambda I - A)^{-1}D$, $CB = b_0 \neq 0$ и (A, C) — наблюдаемая пара. Решив при $w(t) \equiv 0$ уравнение (П.2) с учетом равенств (8) на временны́х промежутках $[h(k+\varepsilon-1), h(k+\varepsilon)]$ и $[h(k+\varepsilon-1), kh]$, приходим к разностному уравнению

$$x_{k+1} = Px_k + Qu_{k-\vartheta-1}, \quad y_k = Rx_k + Su_{k-\vartheta-1}, \tag{П.3}$$

где $x_k = x((k-1+\varepsilon)h)$,

$$P = e^{hA}, \quad Q = \int_0^h e^{sA}\,B\,ds, \quad R = Ce^{h(1-\varepsilon)A}, \quad S = C\int_0^{h(1-\varepsilon)} e^{sA}\,B\,ds.$$

Исключив из (П.3) векторы состояния, получаем дискретную модель (3) с многочленами $\alpha(\lambda) = \det(I - \lambda P)$ и

$$\beta(\lambda) = \det\begin{bmatrix} I - \lambda P & -\lambda Q \\ R & S \end{bmatrix}.$$

Ясно, что свободный член этого многочлена $\beta(0) = S$ имеет вид $b_0 h(1 - \varepsilon) + o(h)$, что и утверждается теоремой. Покажем, что у многочлена $\beta(\lambda)$ имеется корень $\mu_0(h)$, который стремится к $(\varepsilon-1)/\varepsilon$ при $h \to 0$. Фиксируем произвольное $\rho \in (0, 1)$ и обозначим через Ω_ρ лежащий в комплексной плоскости круг радиуса ρ с центром в точке $(\varepsilon-1)/\varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \det\begin{bmatrix} (1-\lambda)I & -\lambda B \\ C & (1-\varepsilon)CB \end{bmatrix} = (1-\lambda)^{n-1}[(1-\varepsilon) + \varepsilon\lambda]CB.$$

При фиксированном λ и $h \to 0$ значение $f(\lambda)$ сколь угодно близко к

$$h^{-1}\beta(\lambda) = \det\begin{bmatrix} (1-\lambda)I + O(h) & h^{-1}\lambda[-hB + O(h^2)] \\ C + O(h) & h^{-1}[h(1-\varepsilon)CB + O(h^2)] \end{bmatrix}.$$

Следовательно, функция $g(\lambda) = f(\lambda) - h^{-1}\beta(\lambda)$ стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно по $\lambda \in \partial\Omega_\rho$, где $\partial\Omega_\rho$ — граница Ω_ρ, т. е. окружность. Обозначим $f_0 = \min|f(\lambda)|$ по $\lambda \in \partial\Omega_\rho$. Поскольку ни один корень $f(\lambda)$ не принадлежит $\partial\Omega_\rho$, то f_0 — величина положительная. Таким образом, если значение h достаточно мало, то $|g(\lambda)| < f_0 \leqslant |f(\lambda)|$ для любого $\lambda \in \partial\Omega_\rho$. По теореме Руше [10] отсюда следует, что функции $f(\lambda)$ и $f(\lambda) + g(\lambda) = h^{-1}\beta(\lambda)$ имеют внутри Ω_ρ одинаковое количество корней, а именно, один. Поскольку ρ может быть выбрано сколь угодно малым, то этот корень стремиться к $(\varepsilon-1)/\varepsilon$, что и требовалось.

Аналогично доказывается, что при $M = N - 1$ у $\beta(\lambda)$ имеется $N - 1$ корень вида $e^{-h\mu_i(h)}$, где $\mu_i(h) \to \mu_i$ при $h \to 0$, μ_i — корни $b(\lambda)$. Для этого нужно сравнить функции $b(\lambda)$ и $h^{-1}\beta(e^{-h\lambda})$ на границе достаточно малых окрестностей точек μ_i и применить теорему Руше. Теорема доказана. □

Лемма 1. *Если A, C — наблюдаемая пара матриц, то пара e^{hA}, C тоже наблюдаема при всех достаточно малых h.*

Доказательство. Пусть h достаточно мало для того, чтобы

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow e^{h\lambda_i} \neq e^{h\lambda_j}$$

для всех собственных чисел A. Тогда у A и e^{hA} один и тот же набор собственных векторов — для проверки достаточно привести A к жордановой форме. Поскольку наблюдаемость пар A, C и e^{hA}, C эквивалентна отсутствию в общем наборе собственных векторов такого $z \neq 0$, что $Cz = 0$, то лемма доказана. □

Лемма 2. *Если H достаточно мало, то для процессов наблюдаемой системы* (П.2) *справедливо равенство*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \Theta_j(h) y(t - jH) + \int_0^H \Phi_j(H, s) \begin{bmatrix} u(t - jH - \theta - s) \\ w(t - jH - s) \end{bmatrix} ds \right\}, \tag{П.4}$$

в котором $\Theta_j(\cdot)$ и $\Phi_j(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемые функции соответствующей размерности.

Доказательство. Воспользуемся формулой Коши для решения уравнения (П.2) на промежутках $[t - jH, t]$:

$$\begin{gathered} y(t - jH) = Ce^{-jHA} x(t) - f_j(t, H), \quad j = 0, 1, \ldots, N - 1, \\ f_j(t, H) = \int_0^{jH} \left[Ce^{-sA} Bu(t - jH - \theta + s) + Ce^{-sA} Dw(t - jH + s) \right] ds. \end{gathered} \tag{П.5}$$

Эти равенства составляют линейную систему $\mathcal{K}(h)x(t) = f(t, h)$ уравнений относительно $x(t)$, в которой $f(t, h)$ — вектор с компонентами $y(t - jh) - f_j(t, h)$, а $\mathcal{K}(h)$ — матрица наблюдаемости пары матриц $\{e^{-hA}, C\}$. Лемма 1 гарантирует невырожденность $\mathcal{K}(h)$ при всех достаточно малых h, поэтому $x(t) = \mathcal{K}^{-1}(h) f(t, h)$, откуда и следует (П.4) с соответствующими функциями $\Theta_j(\cdot)$ и $\Phi_j(\cdot)$. □

Лемма 3. *Если h достаточно мало, то для процессов объекта* (4) *с возмущающими воздействиями из V_c при $\varepsilon \in [0, h]$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} y(t + \varepsilon) = & \int_0^{\varepsilon} \Psi_N(s) \begin{bmatrix} u(t + \varepsilon - \theta - s) \\ w(t + \varepsilon - s) \end{bmatrix} ds + \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \Omega_j(h, \varepsilon) y(t - jh) + \int_0^h \Psi_j(h, \varepsilon, s) \begin{bmatrix} u(t + \varepsilon - jh - \theta - s) \\ w(t + \varepsilon - jh - s) \end{bmatrix} ds \right\}, \end{aligned} \tag{П.6}$$

в котором $\Psi_j(\cdot)$ — равномерно ограниченные непрерывные функции.

Доказательство. Докажем сначала существование искомых функций $\Omega_j(\cdot)$ и $\Psi_j(\cdot)(\cdot)$. Перепишем вновь уравнение (4) в пространстве состояний и решим уравнение (П.2) на промежутке $[t, t+\varepsilon]$:

$$y(t+\varepsilon) = Ce^{\varepsilon A}x(t) + \\ + \int\limits_0^{\varepsilon} \left[Ce^{sA}Bu(t+\varepsilon-\theta-s) + Ce^{-sA}Dw(t+\varepsilon-s)\right] ds.$$

Подставив вместо $x(t)$ правую часть (П.4), получаем (П.6) с соответствующими функциями $\Omega_j(\cdot)$ и $\Psi_j(\cdot)$.

Чтобы доказать равномерную ограниченность $\Psi_j(\cdot)$, достаточно перед переходом в пространство состояний проделать в дифференциальном уравнении (4) такую замену времени, чтобы в новом масштабе период дискретизации h был равен единице. После такой замены корни многочленов $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ умножатся на h и станут сколь угодно близки к нулю при $h \to 0$. По своему построению функции $\Psi_j(\cdot)$ в (П.6) непрерывно зависят от матриц A, B, C, D, которые, в свою очередь, определяются многочленами $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$. Следовательно, при $h \to 0$ значения $\Omega_u(\cdot)$ и $\Omega_w(\cdot)$ будут близки к тем конечным предельным значениям, которые соответствуют нулевым корням $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$. Лемма доказана. $\square$

Пусть $y(\cdot)$ — выход сильно минимально фазового объекта (4) с управлением $u(\cdot)$ вида (8) и возмущением $v(\cdot) \in V_c$. Определим функцию $\overline{y}(\cdot)$ как кусочно-линейное приближение к $y(\cdot)$:

$$\overline{y}(kh+\varepsilon) = y_k(1-\varepsilon/h) + y_{k+1}\varepsilon/h, \quad \varepsilon \in [0,h),\ k = 0, 1, \ldots .$$

Обозначим $C_y = \overline{\lim}_{k\to\infty} |y_k|$, $\overline{C}_y = \overline{\lim}_{t\to\infty} |\overline{y}(t) - y(t)|$, $C_u = \overline{\lim}_{k\to\infty} |u_k|$.

Лемма 4. *При $\varepsilon \in [0, 1/2)$ и достаточно малых h имеют место следующие неравенства:*

$$C_u \leqslant (1+C_y)O(1)h^{-1}, \tag{П.7}$$

$$\overline{C}_y \leqslant O(h) + O(\varepsilon). \tag{П.8}$$

Доказательство. Возьмем k достаточно большим для того, чтобы выполнялось неравенство $|y_k| < 2C_y$. Определим функции $\widehat{y}(\cdot)$ и $\widetilde{y}(\cdot)$ из уравнений

$$a(p)\widehat{y}(t) = b(p)u(t-\theta), \quad \widehat{y}\left((k-j)h\right) = y_{k-j},$$
$$a(p)\widetilde{y}(t) = c(p)w(t), \quad \widetilde{y}\left((k-j)h\right) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Из леммы 3 следует, что $y(\cdot) = \widehat{y}(\cdot) + \widetilde{y}(\cdot)$ и $|\widetilde{y}(kh+\varepsilon)| = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, неравенство (П.7) достаточно доказать при $w(t) \equiv 0$, что мы и будем предполагать.

Воспользуемся теоремой 2. Из нее следует, что

$$\prod_{i=1}^{N-1}(1-\nabla e^{h\mu_i(h)})hb_0(h)(1-\varepsilon)(1-\nabla\mu_0(h))u_k=\prod_{i=1}^{N}(1-\nabla e^{h\lambda_i})y_{k+\vartheta},$$

причем многочлен в левой части устойчив, если h достаточно мало. Обозначим $y_k^{(0)}=y_{k+\vartheta}$ и определим величины $y_k^{(j)}$ из разностных уравнений

$$b_0(h)(1-\varepsilon)(1-\nabla\mu_0(h))y_k^{(1)}=(1-\nabla e^{h\lambda_N})y_k^{(0)},$$
$$(1-\nabla e^{h\mu_j(h)})y_k^{(j+1)}=(1-\nabla e^{h\lambda_j})y_k^{(j)},\quad j=1,2,\ldots,N-1.$$

Ясно, что величины $hy_k^{(N)}$ удовлетворяют тому же самому устойчивому уравнению, что и u_k. С другой стороны, из асимптотики $\mu_j(h)$ следует, что $\overline{\lim}_k|y_k^{(j)}|\leqslant O(h^0)C_y$. Отсюда вытекает неравенство (П.7).

Докажем неравенство (П.8). Пусть сперва $\varepsilon=0$. Воспользуемся уравнением (П.2). При фиксированном k из него следует, что

$$\begin{aligned}
&y(kh+\varepsilon)-\overline{y}(kh+\varepsilon)=\\
&=C^*\left(e^{\varepsilon A}-\frac{\varepsilon}{h}e^{hA}-\frac{h-\varepsilon}{h}I\right)x(kh)+\int_0^\varepsilon C^*e^{sA}B\,ds\,u_{k-\vartheta}-\\
&\quad-\frac{\varepsilon}{h}\int_0^h C^*e^{sA}B\,ds\,u_{k-\vartheta}+\int_0^\varepsilon C^*e^{sA}Dw(kh+\varepsilon-s)\,ds-\\
&\quad-\frac{\varepsilon}{h}\int_0^h C^*e^{sA}Dw(kh+h-s)\,ds=\\
&=O(h^2)x(kh)+O(h^2)u_k+O(h).
\end{aligned}$$

Из леммы 2 и уже доказанного неравенства (П.7) следует, что $|u_k|\leqslant O(h^{-1})$ и $|x_k|\leqslant O(h^{-1})$, поэтому $|y(kh+\varepsilon)-\overline{y}(kh+\varepsilon)|\leqslant O(h)$. Если $\varepsilon>0$, то полученная оценка, как нетрудно убедиться с использованием леммы 3, испортится на $h^{-1}O(h\varepsilon)=O(\varepsilon)$ и перейдет в неравенство (П.8). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3. Докажем более общую по сравнению с (24) формулу:

$$\begin{aligned}
y(t+\theta)-\int_0^\theta G(s)w(t+\theta-s)\,ds-\int_0^t g(h,s)w(t-s)\,ds-\qquad\qquad (\text{П.9})\\
-\int_0^t T(h,s)u(t-s)\,ds-\sum_{0\leqslant j\leqslant t/h}\Gamma_j(h)y(t-jh)\xrightarrow[t\to 0]{}0,
\end{aligned}$$

где $T(h,s)$ — кусочно-непрерывная функция, экспоненциально стремящаяся к нулю при $s \to \infty$, $\Gamma_j(h) \to 0$ экспоненциально при $j \to \infty$. Если $t = kh$ и управление имеет вид (8), то (П.9) переходит в (24).

Соотношение (П.9) доказано в [2] для случая $M = 0$, и при этом оказывается, что $g(h,s) = R(h,s) = 0$ для всех $s > (N-1)h$, $\Gamma_j(h) = 0$ для всех $j > N$. Ограничимся здесь для простоты случаем $M = N - 1$. Обоснование формулы (П.9) для промежуточных случаев $M = 1, 2, \ldots, N-2$ основано на аналогичных рассуждениях, но несколько более громоздко.

Обратимся опять к уравнению (П.2) для описания объекта (4) в пространстве состояний. Решив задачу Коши на промежутке $[t, t+\theta]$, получаем

$$y(t+\theta) = Cx(t+\theta) = \\ = Ce^{\theta A}x(t) + \int_0^\theta Ce^{sA}Bu(t-s)\,ds + \int_0^\theta G(s)w(t+\theta-s)\,ds. \tag{П.10}$$

Остается только надлежащим образом выразить $x(t)$ через значения w, u и y в предшествующие t моменты, и из (П.10) будет следовать (П.9). Возьмем положительную кратную h величину H, выпишем аналогичные (П.10) равенства

$$y(t - jH) = Ce^{-jHA}x(t) - f_j(t,H), \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

и составим из них линейную систему $\mathcal{K}(H)x(t) = f(t,H)$, в которой $f(t,H)$ — вектор с компонентами (П.5), а $\mathcal{K}(H)$ — матрица наблюдаемости пары матриц $\{e^{-HA}, C\}$. В силу леммы 1 она невырождена при всех достаточно малых $H > 0$, поэтому найдется такой замкнутый отрезок $[H_1, H_2]$, на котором значения $\|\mathcal{K}^{-1}(H)\|$ равномерно ограничены. Для любого достаточно малого $h > 0$ можно выбрать кратное h значение $H = l_h h \in [H_1, H_2]$ и получить

$$x(t) = \mathcal{K}^{-1}(l_h h) f(t, l_h h) = x_y(t) + x_u(t) + x_w(t), \tag{П.11}$$

где

$$x_y(t) = \sum_{j=0}^{M} \Theta_j(h) y(t - j l_h h),$$

$$x_u(t) = \sum_{j=1}^{M} \int_0^{l_h h} \Phi_j(h,s) u(t + (1-j) l_h h - \theta - s)\,ds,$$

$$x_w(t) = \sum_{j=1}^{M} \int_0^{l_h h} \Psi_j(h,s) w(t + (1-j) l_h h - s)\,ds,$$

а $\Theta_j(\cdot)$, $\Phi_j(\cdot)$, $\Psi_j(\cdot)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые и равномерно ограниченные по всем s и всем достаточно малым $h > 0$ вектор-функции, причем значения $\|\partial\Psi_j(h,s)/\partial s\|$ также равномерно ограничены.

Первые два слагаемых в правой части (П.4), т. е. $x_y(t)$ и $x_u(t)$, уже вполне подходят для подстановки в (П.9). Остается оценить $x_w(t)$.

Представим (4) как уравнение системы с выходом $w(t)$ и входами $u(t)$ и $Y(t) = \dot{y}(t) - \lambda_{M+1}y(t)$:

$$c(p)w(t)/c_0 = \left(\prod_{i=1}^{m}(p-\lambda_i)\right)Y(t)/c_0 - b(p)u(t-\theta)/c_0.$$

Выбрав подходящие матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, перепишем это уравнение в M-мерном пространстве состояний:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}Y(t) + \mathcal{D}u(t-\theta),\\ w(t) &= Y(t) - b_0u(t-T) + \mathcal{C}z(t),\end{aligned}$$

где $\det(\lambda I - \mathcal{A}) = c(\lambda)$, т. е. $\mathcal{A}$ — гурвицева матрица. Пренебрегая ненулевыми значениями $z(0)$ и $y(0)$, влияние которых на $w(t)$ экспоненциально затухает, в результате интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}w(t) &= Y(t) - b_0u(t-\theta) + \mathcal{C}\int_0^t e^{s\mathcal{A}}\{\mathcal{B}Y(t-s) + \mathcal{D}u(t-\theta-s)\}\,ds =\\ &= \dot{y}(t) - (\lambda_{M+1} - \mathcal{C}\mathcal{B})y(t) - b_0u(t-\theta) +\\ &\quad + \mathcal{C}\int_0^t e^{s\mathcal{A}}\{(\mathcal{A} - \lambda_{m+1}I)\mathcal{B}y(t-s) + \mathcal{D}u(t-\theta-s)\}\,ds.\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение для $w(t)$ в (П.4), после еще одного интегрирования по частям приходим к равенству

$$x(t) = \sum_{j=0}^{M}\overline{\Omega}_j y(t-jH) + \int_0^t \overline{\Omega}_y(s)y(t-s)\,ds + \int_0^{t-\theta}\overline{\Omega}_u(s)u(t-\theta-s)\,ds, \tag{П.12}$$

где $\overline{\Omega}_y(\cdot)$ и $\overline{\Omega}_u(\cdot)$ — кусочно-непрерывные экспоненциально затухающие функции.

Воспользуемся теперь леммой 3. Равенство (П.6) позволяет заменить интеграл от функции $y(\cdot)$ в правой части (П.12) на сумму значений $y(t-jh)$ с соответсвующими весами:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{t/h}\widetilde{\Omega}_j y(t-jH) + \int_0^{t-\theta}\widetilde{\Omega}_u(s)u(t-\theta-s)\,ds + \int_0^t \widetilde{\Omega}_w(s)w(t-s)\,ds,$$

причем из равномерной по h ограниченности функции $\Omega_w(\cdot)$ следует, что функция $\widetilde{\Omega}_w(\cdot)$ не только абсолютно суммируема, но ее L_1-норма еще и стремится к нулю при $h \to 0$. Поэтому, подставив полученное выражение для $x(t)$ в правую часть (П.10), для $y(t+\theta)$ получаем формулу (П.9) с функцией $g(\cdot)$, для которой справедливо (25).

Итак, равенство (П.9) доказано, а в случае кусочно-постоянного управления из него следует (24). Покажем, что уравнения $(\tau, \varphi_k) = 0$ и (8) задают $(O(h)+O(\varepsilon))$-субоптимальный регулятор в смысле функционала J_c, и оценим его минимальное значение $\overline{J}_c$. Обозначим через J_* интеграл от $|G(s)|$ от нуля до θ. Из (П.10) следует, что $\overline{J}_c \geqslant J_*$. Действительно, в момент t значение

$$q(t) = Ce^{\theta A}x(t) + \int\limits_0^\theta Ce^{sA}Bu(t-s)\,ds$$

уже определено. Рассмотрим функцию $w(\cdot)$, которая на отрезках $[k\theta, (k+1)\theta]$ принимает значения

$$w(\theta(k+1)-s) = \operatorname{sign} q(k\theta) \operatorname{sign} G(s), \quad s \in [0,\theta],\ k = 0,1,\ldots\ .$$

Для такой функции $w(\cdot)$ из (П.10) следует, что

$$|y((k+1)\theta)| = |q(k\theta)| + \int\limits_0^\theta |G(s)|\,ds \geqslant \int\limits_0^\theta |G(s)|\,ds$$

независимо от того, какой регулятор формирует значения $u(t)$. Следовательно, $\sup_{w(\cdot)} \overline{\lim}_t |y(t)| \geqslant J_*$, что и требовалось.

Пусть теперь управление определяется из уравнений $(\tau, \varphi_k) = 0$ и (8), тогда из (24) и (25) следует, что

$$|y_k| = |y(kh)| \leqslant J_* + O(h)$$

при всех достаточно больших k. Применив лемму 3, оцениваем $|u_k|$ и значения $|y(t)|$ при t, не кратном периоду дискретизации: $\overline{\lim}\,|u_k| < \infty$, $\overline{\lim}\,|y(t)| \leqslant J_* + O(h)(1+O(\varepsilon))$, где ε — относительная погрешность при приближении запаздывания θ величиной, кратной периоду дискретизации h.

Итак, рассматриваемый регулятор для произвольного $\varepsilon > 0$ при надлежащем выборе h гарантирует неравенство $\overline{\lim}_t |y(t)| \leqslant J_* + \varepsilon$. С другой стороны, как было показано, $\overline{J}_c \geqslant J_*$. Следовательно, $\overline{J}_c = J_*$, а уравнения $(\tau, \varphi_k) = 0$ и (8) задают субоптимальный регулятор. Теорема доказана. □

Вспомним обозначение φ_k для вектора (13), составленного из значений входа и выхода дискретного объекта (3) с дисконтирующим множителем $1/r$, где $r > 1$.

Лемма 5. *Пусть для выхода минимально фазового объекта* (3) *с ограниченным возмущением* v_k *при всех достаточно больших* k *справедливо неравенство* $|y_k| \leqslant C_y + \varepsilon|\varphi_{k-\vartheta}|$ *с достаточно малой величиной* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $\overline{\lim}_k |\varphi_k| < \infty$.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $\beta_0 = 1$, $\vartheta = 1$ (этого всегда можно добиться переобозначениями). Составим бесконечномерные векторы-столбцы z_k из компонент $y_k, u_{k-1}/r, y_{k-1}/r^2, \dots, y_0/r^{2k}, 0, \dots$, тогда

$$z_{k+1} = \mathcal{P} z_k + \mathcal{Q}_y y_{k+1} + \mathcal{Q}_v v_{k+1},$$

где $\mathcal{P}, \mathcal{Q}_y$ и $\mathcal{Q}_v$ — операторы, задаваемые бесконечными матрицами:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & \\ \alpha_1 & -r\beta_2 & r^2\alpha_2 & -r^3\beta_2 & \dots \\ 1/r & & & & \\ & 1/r & & & \\ & & \ddots & & \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{P}$ — ограниченный оператор из l_2 в l_2, весь спектр которого лежит внутри открытого единичного круга. Следовательно, ряд $\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathcal{P}^*)^j \mathcal{P}^j$ сходится и определяет ограниченный самосопряженный оператор $\mathcal{H} \geqslant I$, для которого $\mathcal{P}^*\mathcal{H}\mathcal{P} - \mathcal{H} = -I$. Рассмотрим функцию Ляпунова $V(z) = z^*\mathcal{H}z$. Для величин $V_k = V(z_k)$ из неравенств $|v_k| \leqslant C_v$ и $|y_k| \leqslant C_y + \varepsilon|\varphi_{k-1}|$ при достаточно малом ε следует, что $V_{k+1} - V_k < -|z_k|^2/2$, если z_k находится вне некоторого шара с радиусом R. Обозначим $R_1 = \sup_{|z_k| \leqslant R} |z_{k+1}|$, $\rho = \|\mathcal{H}\| \max\{R^2, R_1^2\}$, $G_\rho = \{z : V(z) \leqslant \rho\}$. Ясно, что для любого процесса системы найдется такое k, что $|z_k| \leqslant R$ и, следовательно, $z_k \in G_\rho$. Из этого множества вектор z_k выйти уже не сможет: если $|z_k| \leqslant R$, то $|z_{k+1}| \leqslant R_1$ и $V(z_{k+1}) \leqslant \|\mathcal{H}\| R_1^2 \leqslant \rho$, а если $|z_k| > R$, то $|V(z_{k+1})| < |V(z_k)| \leqslant \rho$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим процессы системы (3), (18), (19). Из соотношений (14) следует, что для векторов (13) справедливы условия теоремы 1. Применив эту теорему, из (19),(21), (22) получаем, что

$$\begin{aligned} |y_k| =& |y_k - \tau'_{k-1}\varphi_{k-1}[1 : n_{k-1}]| \leqslant \\ \leqslant& |y_k - \tau'_{k-1}\varphi_{k-\vartheta}[1 : n_{k-1}]| + \sum_{j=1}^{\vartheta-1} |\Delta_{k-j}|\, |\varphi_{k-1}[1 : n_{k-1}]| \leqslant \\ \leqslant& C_y + \left(\varepsilon_k + \sum_{j=1}^{\vartheta-1} |\Delta_{k-j}|\right) |\varphi_{k-1}|, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_k \to 0$, $|\Delta_k| \to 0$ при $k \to \infty$.

Применив лемму 5, приходим к выводу, что $\overline{\lim}_k |\varphi_k|$ — конечная величина, т. е. выполнено дополнительное условие теоремы 1. Применив эту теорему еще раз, получаем, что $\tau_k = \text{const}$ и $|y_k| \leqslant C_y$ при всех достаточно больших k. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим процессы системы (4), (8), (9), (18), (19). Для дискретных значений управления и выхода справедливо уравнение дискретной модели (3), которая при всех достаточно малых h в силу теоремы 2 будет минимально фазовым объектом, если относительная погрешность ε меньше половины. Теорема 3 гарантирует, что при достаточно малых значениях периода дискретизации h для векторов (13) выполнено условие усиленной разрешимости (20). Применив теорему 1, как и при доказательстве теоремы 4, из (19), (21), (22) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших k справедливо неравенство $|y_k| \leqslant C_y + \varepsilon|\varphi_{k-1}|$. По лемме 5 отсюда следует дополнительное условие теоремы 1 — ограниченность $|\varphi_k|$. Применив эту теорему, получаем, что $\tau_k = \text{const}$ и $|y(kh)| = |y_k| \leqslant C_y$ при всех достаточно больших k. Применив лемму 4, получаем искомую оценку для $|y(t)|$ и для значений t, промежуточных между кратными периоду дискретизации. Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. — СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.
2. *Бондарко В.А.* Синтез адаптивного субоптимального управления непрерывным линейным динамическим объектом, выход которого измеряется с запаздыванием // Деп. в ВИНИТИ, № 3377-81, 1981, 51 с.
3. *Бондарко В.А.* Субоптимальное и адаптивное управление непрерывными линейными объектами с запаздыванием // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 62–68.
4. *Гусев С.В.* Конечно-сходящийся алгоритм восстановления функции регрессии и его применение в задачах адаптивного управления // АиТ. — 1989. — № 3. — С. 99–108.
5. *Любачевский Б.Д.*, *Якубович В.А.* Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами // АиТ. — 1974. — № 4. — С. 116–127.
6. *Пономаренко В.И.*, *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в задачах субоптимального адаптивного управления динамическими объектами. / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1977. — С. 16–28.
7. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
8. *Фомин В.Н.* Синтез адаптивных предельно-оптимальных управляющих систем в задаче управления линейными стохастическими объектами // Вопросы кибернетики. Задачи и методы адаптивного управления. — М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1981. — С. 52–65.
9. *Фомин В.Н.*, *Фрадков А.Л.*, *Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

11. *Якубович В. А.* Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем // Выч. техника и вопр. прогр. Вып. 4. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1965, — С. 3–72.
12. *Якубович В. А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. — 1966. — Т. 166, № 6. — С. 1308–1311.
13. *Якубович В. А.* К теории адаптивных систем // ДАН СССР. — 1968. — Т. 182, № 3. — С. 518–521.
14. *Якубович В. А.* Конечно-сходящиеся алгоритмы решения счетных систем неравенств и их применение в задачах адаптивных систем // ДАН СССР. — 1969. — Т. 189, № 3. — С. 495–498.
15. *Bondarko V. A.*,*Gusev S. V.*, *Yakubovich V. A.* Using the Recurrent Aim Inequalities Method for Adaptive Control of Nonminimumphase Systems. Progress in Systems and Control Theory, v. 7, «New Trends in Systems Theory». — Boston, Basel, Berlin: Birkhauser, 1991. — P. 147–154.
16. *Bondarko V. A.*, *Yakubovich V. A.* The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control and Signal Proc. — 1992. — Vol. 6, № 3. — P. 141–160.
17. *Gusev S. V.*, *Shishkin S. L.* Adaptive control of biped robot walking on an inclined plane // Proc. of the 5th IEEE Conf. Control Appl., Dearborn, MI, 1996. — P. 1090–1095.
18. *Hayakawa Y*, *Hosoe S.*, *and Ito M.* On the limiting zeros of sampled multivariable systems // Syst. & Contr. Lett. — 1983. — Vol. 2, № 5. — P. 292–300.

А. Л. Фрадков[†], *Б. Р. Андриевский*[†]

Метод пассификации в задачах адаптивного управления, наблюдения и синхронизации[*]

Аннотация: представлены основные результаты метода пассификации, основанного на применении частотной теоремы Якубовича–Калмана для синтеза систем с обратной связью, а также примеры применения метода к задачам адаптации, наблюдения и синхронизации систем. Описываются различные типы алгоритмов адаптивного управления с неявной эталонной моделью: алгоритмы стабилизации и слежения с заданной динамикой, алгоритмы адаптивной настройки типовых за-

[†]) Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург.

[*]) Работа частично финансирована Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 05-01-00869, 06-08-01386, и научной программой Президиума РАН № 22 «Процессы управления» (проект 1.8). Исследования на стенде «Вертолет» выполнены в рамках проекта международного сотрудничества Национального центра научных исследований Франции (CNRS) и РАН, проект № 19134 «Робастное и адаптивное управление сложными системами: теория и применения». Статья является расширенным вариантом журнальной публикации [7].

конов управления, комбинированные сигнально-параметрические алгоритмы адаптивного управления. Даны краткие сведения о методе шунтирования в задаче адаптивного управления. Описаны результаты экспериментов по адаптивному управлению стендом «Вертолет». Рассмотрена задача адаптивного управления нелинейными объектами. Приведены примеры применения метода пассификации и адаптивных наблюдателей в задаче синхронизации нелинейных осцилляторов и в задаче передачи сообщений при помощи хаотических сигналов. Показана возможность учета ограничений на пропускную способность каналов связи.

1. Введение

Историкам науки известно много примеров, когда популярность того или иного научного направления определялась наличием удобного инструментария с широкой областью применения. Удобство и легкость освоения процедур сыграли немалую роль в бурном развитии направлений, связанных с применением метода усреднения Крылова–Боголюбова [13] и принципа максимума Понтрягина [30], а позднее — теоремы Харитонова [44]. Еще одним ярким примером является направление в теории систем и теории управления, использующее частотные и матричные неравенства и связывающую их *частотную теорему*, или *лемму Якубовича–Калмана*. Этому направлению посвящены обзорные статьи [17, 24] данного сборника и многочисленные упомянутые и не упомянутые в них работы. Как отмечено в обзоре [9], частотная теорема является матричным аналогом теоремы Виета о дискриминанте квадратного трехчлена. Применение частотной теоремы доступно студенту университета, она является одним из краеугольных камней современной теории управления, позволяя решать многие фундаментальные и прикладные задачи. Поэтому знакомство с ней завораживает, вызывая желание свести решение самых различных задач к ее применению. Именно так родилось и направление, которому посвящена данная статья.

В 1972 г. авторы этих строк, в то время работавшие по распределению в научно-исследовательском секторе Ленинградского механического института, пытались понять и переосмыслить результаты о синтезе адаптивных систем методом функций Ляпунова, приведенные в только что вышедшей тогда книге Б. Н. Петрова, В. Ю. Рутковского, И. Н. Крутовой и С. Д. Землякова [28]. Дело в том, что метод функций Ляпунова традиционно используется для анализа систем и требует подбора подходящей функции Ляпунова. Синтез же на основе этого метода означает выбор из класса регуляторов такого, который «подгоняет» систему под заданную функцию Ляпунова и, на первый взгляд, делает решение зависящим от задания функции Ляпунова еще в большей степени, чем в задачах анализа. Неожиданно оказалось, что если не фиксировать функцию Ляпунова до начала синтеза, а ввести в рассмотрение некоторый естественный класс таких функций (квадратичные формы от переменных состояния системы), то условия разрешимости задачи синтеза в классе линейных регуляторов по выходу приводят к некоторой новой системе матричных равенств и неравенств. Эти неравенства похожи на неравенства, возникающие в методе матричных неравенств В. А. Якубовича [46], но неизвестными в них являются, кроме коэффициентов положительно-определенной матрицы квадратичной формы, еще и коэффициенты регулятора, что делает матричные неравенства не линейными, а *билинейными*. Несмотря на кажущуюся неприступность задачи (а позднее выяснилось, что разрешимость билинейных матричных неравенств — это действительно NP-трудная задача [90]) в частных случаях решение удалось найти, а затем и сформулировать условия ее разрешимости в более общем случае [35, 36], причем именно путем сведения к лемме Якубовича–Калмана.

Разрешимость матричных неравенств, возникающих в лемме Якубовича–Калмана, эквивалентна разрешимости некоторых интегральных неравенств во временной области, соответствующих свойству типа диссипации. В частном случае, возникающем при синтезе адаптивных систем, разрешимость этих неравенств соответствует свойству пассивности системы, хорошо известному из теории электрических цепей. Поэтому полученные в [35, 36] условия означают существование обратной связи, делающей систему пассивной, иначе говоря — *пассифицирующей обратной связи* (*passifying feedback*). Таким образом возник прием решения задач, состоящий в поиске обратной связи, делающей систему пассивной. Он и превратился в дальнейшем в *метод пассификации*. [1)]

Надо сказать, что В. А. Якубович активно поддерживал эти исследования, которые на начальном этапе были совершенно внеплановыми. Более того В. А. Якубович, в совершенстве владеющий тонкостями комплексного анализа, подсказал идею доказательства необходимости условия минимальнофазовости через принцип аргумента и дал много других полезных советов.

Впоследствии метод пассификации нашел применение в целом ряде задач построения нелинейных и адаптивных систем управления, см. [3, 4, 25, 34, 39, 50, 51]. Обзор основных результатов этого направления приводится ниже.

Иногда говорят, что методы, основанные на лемме Якубовича–Калмана, имеют, главным образом, теоретический интерес и мало подходят для решения практических задач. Приводимые ниже результаты, на взгляд авторов, свидетельствуют об обратном.

[1)] Термин впервые был использован в [87] в более общей задаче адаптивного управления нелинейным объектом. В англоязычной литературе встречается также термин «пассивация» (*passivation*).

2. Пассивность и пассификация

Рассмотрим аффинную по управлению систему

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \qquad y = h(x), \tag{1}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, входа и выхода соответственно, $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ — гладкие вектор-функции аргумента x, а $g(\cdot)$ — гладкая матрица-функция. В некоторых приложениях (например, в задачах управления квантово-механическими системами) возникает случай, когда переменные и параметры принимают комплексные значения ($x = x(t) \in \mathbb{C}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{C}^m$, $y = y(t) \in \in \mathbb{C}^l$). Такой случай будем называть *комплексным случаем*, а случай вещественнозначных переменных и параметров будем называть *вещественным случаем*.

Пусть G — заданная $(m \times l)$-матрица.

Определение 1. Система (1) называется *G-пассивной*, если существует неотрицательная скалярная функция $V(x)$ (*функция запаса*) такая, что

$$V(x) \leqslant V(x_0) + \int\limits_0^t u(t)^* G y(t)\, dt \tag{2}$$

для любого решения $x(t)$ системы (1) такого, что $x(0) = x_0$, $x(t) = x$. В неравенстве (2) и далее звездочка означает транспонирование матрицы и комплексное сопряжение ее элементов (в вещественном случае — просто транспонирование).

Определение 2. Система (1) называется *строго G-пассивной*, если существует неотрицательная скалярная функция $V(x)$ и скалярная функция $\mu(x)$, где $\mu(x) > 0$ для $x \neq 0$, такие, что

$$V(x) \leqslant V(x_0) + \int\limits_0^t \big(u(t)^* G y(t) - \mu(x(t))\big)\, dt \tag{3}$$

для любого решения $x(t)$ системы (1) такого, что $x(0) = x_0$, $x(t) = x$.

Далее будем говорить о строгой G-пассивности линейных систем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, A, B, C — матрицы соответствующего размера. Для линейных систем функция запаса $V(x)$ всегда может быть выбрана в виде квадратичной формы $V(x) = 0{,}5\, x^* H x$ (или эрмитовой формы в комплексном случае), а в качестве функции $\mu(x)$ можно взять просто эвклидову норму вектора или ее квадрат: $\mu(x) = \mu |x|^2$, $\mu > 0$.

Заметим, что, если $l = m$ и $G = I_m$ — единичная матрица, то G-пассивность совпадает с обычной пассивностью. В свою очередь, пассивность весьма близка к свойству *гиперустойчивости*, введенному для линейных систем В. М. Поповым в 1964 г. [32], и является частным случаем свойства диссипативности [92], в котором под интегралом в (2) может стоять произвольная функция от u, y (или от u, x), например квадратичная форма $F(u, y)$.

Для нелинейных систем, если функция запаса $V(x)$ — гладкая, то интегральное неравенство диссипации (3) эквивалентно своей дифференциальной форме:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)u) \leqslant u^* G y - \mu(x). \tag{5}$$

Для линейной системы (4) и квадратичной функции запаса $V(x) = 0{,}5\, x^* H x$ неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$x^* H(Ax + Bu) \leqslant u^* G y - \rho |x|^2 \tag{6}$$

для некоторого $\rho > 0$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$.

В свою очередь, неравенство (6) эквивалентно матричным соотношениям

$$HA + A^* H < 0, \qquad HB = (GC)^*, \tag{7}$$

условия разрешимости которых и даются частотной теоремой.

В дальнейшем нам понадобится «полувырожденная» версия частотной теоремы, установленная В. А. Якубовичем в 1966 г. [47].

Введем следующие обозначения[1]:

$$Q(H) = \begin{bmatrix} -(HA + A^* H + R) & -(Ha + b) \\ -(Ha + b)^* & \rho \end{bmatrix},$$

$$\pi(\lambda) = \rho + 2\mathrm{Re}\left(b^* (\lambda I_n - A)^{-1} a\right) + a^* (\lambda^* I_n - A^*)^{-1} R (\lambda I_n - A)^{-1} a,$$

где $H = H^*$ — $(n \times n)$-матрица, $R = R^*$ — $(n \times n)$-матрица, $\rho = \rho^*$ — $(m \times m)$-матрица, a, b — $(n \times m)$-матрицы, λ — комплексное число. Пусть $m = m_1 + m_2$, где m_1, m_2 — целые числа, и пусть матрицы ρ, π, a разбиты на блоки следующим образом:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \qquad \pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

и $\rho_{12} = \rho_{21}^* = 0$, $\rho_{22} = 0$.

---

[1] Через $\mathrm{Re}\, K$ обозначается эрмитова часть матрицы: $\mathrm{Re}\, K = (K + K^*)/2$. Матрица (многочлен) называется *гурвицевой* (*гурвицевым*), если все вещественные части ее собственных чисел (его корней) отрицательны. Нормы матриц и векторов всюду эвклидовы, а матричные неравенства понимаются в смысле квадратичных форм.

Теорема 1 ([47]). *Пусть A — гурвицева матрица, $\rho_{11} \geqslant 0$ и $\operatorname{rank} a_2 = m_2$. Для существования матрицы $H = H^*$ такой, что $Q(H) \geqslant 0$ и $\operatorname{rank} Q = n + m_1$, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) $\pi(i\omega) > 0$ *для всех вещественных* ω, $(i^2 = -1)$,

(2) $\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2\big(\pi_{22}(i\omega) - \pi_{21}(i\omega)\ \pi_{11}^{-1}(i\omega)\ \pi_{12}(i\omega)\big) > 0.$

Отметим, что при $m_2 = 0$ теорема 1 превращается в «невырожденную» частотную теорему, а при $m_1 = 0$, $C = 0$ она устанавливает, что условием разрешимости матричных неравенств $HA + A^*H < 0$, $Ha = -b$ является строгая положительная вещественность передаточной матрицы $b(\lambda I_m - A)^{-1}a$.

Свойство пассивности играет важную роль в задачах синтеза систем управления, поскольку оно тесно связано с устойчивостью: легко видеть, что если функция запаса $V(x)$ положительно определенная, то пассивная система (1) при $u = 0$ устойчива по Ляпунову, а при $u = -Ky$ асимптотически устойчива при любом скалярном или матричном $K > 0$. С другой стороны, это свойство весьма ограничительно. Например, для строго пассивной линейной системы (4) при $m = l = 1$ с передаточной функцией $W(\lambda) = C^*(\lambda I - A)^{-1}B = \beta(\lambda)/\alpha(\lambda)$ многочлены $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ должны быть гурвицевыми и разность их степеней должна равняться единице. Поэтому возникает интерес к возможности преобразования системы в пассивную, т. е. пассификации, например, с помощью обратной связи по выходу или по состоянию. Ниже рассматриваются следующие задачи пассификации обратной связью по выходу.

Задача A. Найти m-вектор-функцию $\alpha(y)$ и $(m \times m)$-матрицу-функцию $\beta(y)$ такие, что система (1) с обратной связью по выходу

$$u = \alpha(y) + \beta(y)v, \tag{8}$$

где $v \in \mathbb{R}^m$ — новый вход, строго G-пассивна.

Задача B. Найти m-вектор-функцию $\alpha(y)$ такую, что система (1) с обратной связью по выходу (8) строго G-пассивна с *фиксированной* $(m \times m)$-матрицей-функцией $\beta(y)$.

Для линейных систем пассифицирующая обратная связь также ищется в классе линейных законов и задачи пассификации формулируются следующим образом.

Задача AL. Найти $(m \times l)$-матрицу K и $(m \times m)$-матрицу L такие, что система (4) с обратной связью

$$u = Ky + Lv, \tag{9}$$

(где $v \in \mathbb{R}^m$ — новый вход, $\det L \neq 0$) строго G-пассивна.

Задача BL. Найти $(l \times m)$-матрицу K такую, что система (4) с обратной связью по выходу (9) строго G-пассивна с фиксированной матрицей L.

Для комплексного случая все переменные и функции в (8), (9) комплекснозначны. Для применения метода пассификации важны задачи G-пассифицируемости: нахождения условий разрешимости задач A, B, AL, BL.

В работе [64] решения задач пассификации и пассифицируемости AL, BL сформулированы для линейных прямоугольных ($l \neq m$) систем. Аналогичные задачи в частном случае квадратных ($l = m$) линейных многомерных систем рассматривались в [48, 74, 75, 91]. В работах [48, 75] рассматривался частный случай $L = K$, а результаты [74, 91] соответствуют случаю $L = I$.

Для формулировки решений перечисленных задач введем дополнительные обозначения:

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A), \quad W(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B, \quad A(K) = A + BKC,$$
$$\delta(\lambda, K) = \det\big(\lambda I_n - A(K)\big), \quad W(\lambda, K) = C\big(\lambda I_n - A(K)\big)^{-1}B,$$

где K — некоторая $(m \times l)$-матрица. Очевидно, что $\delta(\lambda, K)$ и $W(\lambda, K)$ — характеристический многочлен и передаточная матрица соответственно для системы (4), замкнутой обратной связью

$$u = Ky + v. \tag{10}$$

Легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\delta(\lambda, K) = \delta(\lambda)\det\big(I_m - KW(\lambda)\big), \tag{11}$$
$$W(\lambda, K) = W(\lambda)\big(I_m - KW(\lambda)\big)^{-1}. \tag{12}$$

Пусть G — $(m \times l)$-матрица. Определим $\varphi(\lambda) = \delta(\lambda)\det GW(\lambda)$, $\Gamma = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda GW(\lambda)$. Можно показать, что $\varphi(\lambda)$ — многочлен степени, не превосходящей $n - m$, инвариантный относительно преобразования обратной связи (10). Поскольку $\Gamma = GCB$, то $(m \times m)$-матрица Γ также инвариантна относительно преобразования обратной связи (10).

Определение 3. Система (4) называется *G-минимальнофазовой*, если многочлен $\varphi(\lambda)$ гурвицев (его нули имеют отрицательные вещественные части). Система называется *строго G-минимальнофазовой*, если она минимальнофазовая и $\det\Gamma \neq 0$, и *гипер G-минимальнофазовой*, если она минимальнофазовая и $\Gamma = \Gamma^* > 0$.

Теперь можно сформулировать условия разрешимости задачи пассификации AL, BL.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{rank} B = m$. *Система* (4) *строго G-пассифицируема обратной связью* (9) *тогда и только тогда, когда она строго G-минимальнофазовая.*

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{rank} B = m$. *Система* (4) *строго G-пассифицируема обратной связью* (9) *с фиксированной матрицей L тогда и только тогда, когда система с передаточной матрицей $W(\lambda)L$ гипер G-минимальнофазовая.*

Доказательства теорем 2, 3 можно найти в [25, 64]. Они основаны на решении следующей алгебраической задачи, поставленной и решенной в [36].

Даны комплекснозначные матрицы A, B, C, G, R размера $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $m \times l$, $n \times n$ соответственно ($m \leqslant n$, $l \leqslant n$), причем $R = R^* \geqslant 0$.

Найти условия существования эрмитовой $(n \times n)$-матрицы $H = H^* > 0$ и комплекснозначной $(m \times l)$-матрицы K таких, что

$$HA(K) + A(K)^*H + R < 0, \tag{13}$$

$$HB = (GC)^*, \tag{14}$$

где

$$A(K) = A + BKC. \tag{15}$$

Решение дается следующей теоремой.

Теорема 4 ([36]). *Для существования матриц* $H = H^* > 0$, K, *удовлетворяющих соотношениям* (13)–(15) *и вещественных в вещественном случае, достаточно, а если* $\operatorname{rank}(B) = m$, *то и необходимо, чтобы система с передаточной матрицей* $GW(\lambda)$ *была гиперминимальнофазовой.*

Замечание 1. Можно показать [62], что теорема 4 остается справедливой, если матрица $A(K)$ задается вместо (15) соотношением $A(K) = A + BK$ или $A(K) = A + KC$.

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что если условие гиперминимальнофазовости выполнено, то всегда можно выбрать матрицу K, удовлетворяющую соотношениям (13)–(15) в виде $K = -\varkappa G$, где $\varkappa$ — любое достаточно большое число. При этом нижняя граница $\varkappa_0$ для $\varkappa$ имеет вид, [64]:

$$\varkappa > \varkappa_0 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}^1} \lambda_{\max}(\operatorname{Re}\big(GW(i\omega)\big)^{-1}), \tag{16}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы. Приведем доказательство этой оценки, уточняющее [64] для $m > 1$. Из доказательства теоремы 4 следует, что для обеспечения строгой положительной вещественности матрицы $GW(i\omega, K)$, эквивалентной, по теореме Якубовича (теорема 1), разрешимости (13)–(15) достаточно выполнения неравенства $\operatorname{Re}\ GW(i\omega, K) > 0$ при $K = -\varkappa G$ для всех $\omega \in \mathbb{R}^1$, которое, очевидно, эквивалентно неравенству $\operatorname{Re}\big(GW(i\omega, K)\big)^{-1} > 0$. Умножая тождество $\big(GW(\lambda, K)\big)^{-1} = \varkappa I_m + \big(GW(\lambda)\big)^{-1}$ слева и справа на x^*, x и выбирая $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^1$, при $\varkappa > \varkappa_0$ получим

$$\begin{aligned} x^*\operatorname{Re}\big(GW(i\omega, K)\big)^{-1}x &= \varkappa x^*x + x^*\operatorname{Re}\big(GW(i\omega)\big)^{-1}x = \\ &= \varkappa x^*x\left(1 + \frac{x^*\operatorname{Re}\big(GW(i\omega)\big)^{-1}x}{\varkappa x^*x}\right) \geqslant \\ &\geqslant \varkappa x^*x\Big(1 - \lambda_{\max}\big(\operatorname{Re}\big(GW(i\omega)\big)^{-1}\big)/\varkappa\Big), \end{aligned}$$

откуда искомое утверждение следует непосредственно.

Таким образом, теорема 4 дает условия разрешимости матричных неравенств, относящихся к классической лемме Якубовича–Калмана (частотной теореме) для случая связей специального вида с формой $F(x,u) = y^T u$ относительно положительно определенной матрицы H и матрицы обратной связи K. Ее можно назвать частотной теоремой с обратной связью, а вместе с теоремами типа 2, 3 — теоремами о пассификации [12, 50, 64]. Известны варианты теорем о пассификации для нестрогих матричных неравенств (слабой пассификации) [86]. Теоремы о пассификации распространены на линейные распределенные системы [14, 15] и нелинейные системы [60, 69] и имеют различные применения. Ниже будут рассмотрены применения теорем о пассификации к синтезу адаптивных систем с неявной эталонной моделью.

3. Применение метода пассификации к задачам адаптивного управления

3.1. Адаптивные системы с неявной эталонной моделью

Обратимся к задаче управления динамическими объектами в условиях существенной априорной неопределенности их параметров и характеристик внешних воздействий. Одним из наиболее универсальных и эффективных способов ее решения является применение методов адаптации, т. е. автоматической настройки регулятора в процессе нормального функционирования системы [21, 25, 27, 28, 34, 39, 80].

Адаптивное управление может выполняться как на основе идентификации неизвестных параметров, так и непосредственно настройкой коэффициентов регулятора в соответствии с заданным показателем качества (целевым функционалом). Последний подход, называемый *прямым адаптивным управлением*, обычно связан с заданием желаемой динамики замкнутой системы с помощью некоторой эталонной системы: *эталонной модели* [21, 28, 34, 80]. Применение теоремы о пассификации позволило получить адаптивные регуляторы с *неявной эталонной моделью*, порядок которой может быть существенно меньше порядка объекта управления. Основные результаты кратко описаны ниже. Более полное изложение содержится в [3, 4, 25, 34, 39].

Рассмотрим объект управления (4), считая для простоты, что $m = 1$. В [35] была поставлена следующая задача адаптивной стабилизации: найти закон адаптивной обратной связи по выходу

$$u = \theta^{\mathrm{T}} y, \quad \dot{\theta} = \Theta(y), \tag{17}$$

обеспечивающий в системе (4), (17) достижение цели

$$x(t) \to 0, \quad \theta(t) \to \mathrm{const} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{18}$$

Ясно, что цель (18) будет достигнута, если система обладает квадратичной функцией Ляпунова

$$V(x,\theta) = x^{\mathrm{T}} H x + 0{,}5\,(\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1} (\theta - \theta_*) \tag{19}$$

со свойствами

$$\begin{array}{lll} V(x,\theta) > 0 & \text{при} & x \neq 0,\ \theta \neq \theta_*; \\ \dot{V}(x,\theta) < 0 & \text{при} & x \neq 0. \end{array} \tag{20}$$

В работах [35, 36] показано, что существование у системы (4), (17) функции (19), обладающей свойствами (20), эквивалентно существованию матрицы $H = H^{\mathrm{T}} > 0$ и вектора $\theta_* \in \mathbb{R}^l$, удовлетворяющих для некоторого $G^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^l$ соотношениям:

$$HA(\theta_*) + A(\theta_*)^{\mathrm{T}} H < 0, \quad HB = C^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

где $A(\theta_*) = A + B\theta_* C$. В случае разрешимости (21) адаптивный регулятор (17), обеспечивающий цель (18), приобретает вид

$$u = \theta^{\mathrm{T}} y, \quad \dot{\theta} = -\Gamma(Gy)y. \tag{22}$$

Поскольку (21) есть не что иное, как частный случай соотношений (13)–(15) при $m = 1$, необходимым и достаточным условием разрешимости (21) относительно пары (H, θ_*) является *гиперминимальнофазовость* передаточной функции $GW(\lambda) = GC(\lambda I - A)^{-1}B$, означающая, что $GW(\lambda)$ минимальнофазовая (ее числитель — гурвицев многочлен), имеет единичную относительную степень (разность степеней знаменателя и числителя) и положительный высокочастотный коэффициент усиления: $GCB > 0$.

Система (4), (22) и ее распространение на задачи слежения были названы *адаптивными системами с неявной эталонной моделью*, так как можно показать, что переменная $\delta(t) = Gy(t)$ при $l > 1$ стремится к нулю быстрее, чем $y(t)$ (т. е. через некоторое время переходного процесса в адаптируемой системе $g^{\mathrm{T}} y(t) \cong 0$). Иными словами, $\delta(t)$ может быть интерпретирована как обобщенная ошибка некоторой неявной эталонной модели. Описанный подход был распространен на распределенные системы [14, 15] и системы с запаздыванием [45]. В [34, гл. 7] показано, что алгоритм (22) будет обеспечивать цель (18) и для нелинейных объектов, получающихся при введении в правые части (4) нелинейностей, действующих аддитивно с управлением и удовлетворяющих секторным ограничениям.

Перечисленные результаты позволяют сформулировать процедурную часть метода пассификации как состоящую из следующих этапов.

1. Определяется новый выход $\widetilde{y}$ в виде линейной комбинации выходов $\widetilde{y} = Gy$ так, что система оказывается гиперминимальнофазовой по отношению к входу u и выходу $\widetilde{y}$.
2. Выбирается закон управления в виде обратной связи по выходу y. Для неадаптивной постановки задачи стабилизации он имеет вид

$$u = -\varkappa \widetilde{y} = -\varkappa G y, \tag{23}$$

а для адаптивной задачи стабилизации — вид (22).

3. Если исходный объект управления не удается сделать пассифицируемым путем выбора выхода (например, передаточная функция объекта имеет относительную степень, большую единицы, недостаточное число переменных доступно измерению и т. д.), то его модель модифицируется так, чтобы условие пассифицируемости было обеспечено. Например, если в знаменателе передаточной функции объекта есть устойчивые сомножители с малыми постоянными времени, то можно попробовать их отбросить и провести синтез по *редуцированной модели* [31, 38, 39, 79]. Другие приемы состоят во введении в систему *параллельного компенсирующего звена* (шунта, см. раздел 3.5), наблюдателя и т. д.

Отметим, что хотя G-пассивность системы совпадает с пассивностью по отношению к выходу $\widetilde{y} = Gy$, задачи пассификации для этих двух случаев не совпадают. Действительно, в первом случае пассифицирующая обратная связь ищется в виде $u = -Ky + Lv$, а во втором — в виде $u = \varkappa Gy + Lv$, причем размеры матриц K и $\varkappa$ не совпадают. В частности, если выход $\widetilde{y} = Gy$ — скаляр, то и $\varkappa$ — тоже скаляр. Алгоритм адаптивной стабилизации тогда будет выглядеть так:

$$u = \varkappa\widetilde{y}, \quad \frac{d\varkappa}{dt} = -\gamma\widetilde{y}^2 \tag{24}$$

(так называемый «универсальный регулятор» [77]). Этот алгоритм предлагался в различных работах, начиная с [61]. Несмотря на кажущуюся простоту (в нем всего один настраиваемый параметр) и те же асимптотические свойства, что и у алгоритма (22), он обладает меньшей гибкостью. В частности, алгоритм (24) не позволяет реализовать принцип неявной эталонной модели.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

3.2. Адаптивная стабилизация и слежение для систем в форме вход–выход

Адаптивная стабилизация. Пусть линейная стационарная система (4) со скалярными входом и выходом представлена уравнением вход–выход

$$A(p)y(t) = B(p)u(t), \quad t \geqslant 0, \tag{25}$$

где u, y — скалярные переменные, $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0$, $B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0$ — многочлены от оператора дифференцирования по времени $p \equiv d/dt$. Через k обозначим *относительную степень* системы (25), $k = n - m > 0$. В соответствии с постановкой задачи адаптивного управления считаем, что коэффициенты a_i, b_j ($i = 0,\ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, m$) являются априорно неизвестными параметрами объекта управления (25).

Рассмотрим вначале задачу стабилизации объекта (25) — задачу приведения $y(t)$ в нуль из ненулевого начального состояния. Желаемая динамика процесса стабилизации может быть задана некоторым дифференциальным уравнением, которому должен подчиняться выход объекта $y(t)$. В классических *беспоисковых самонастраивающихся системах с эталонной моделью* (БСНС с ЭМ) это уравнение реализуется явно в виде динамического звена — эталонной модели, которая включается в состав адаптивного регулятора [21, 27, 28, 80]. Несколько иная схема решения задачи реализуется в описанных здесь адаптивных системах с *неявной эталонной моделью* (НЭМ).

Введем сигнал *невязки* (*ошибки*) *адаптации* $\sigma(t)$ как

$$\sigma(t) = G(p)y(t), \tag{26}$$

где $G(p) = p^l + g_{l-1}p^{l-1} + \ldots + g_1 p + g_0$ — некоторый заданный гурвицев многочлен от оператора $p \equiv d/dt$. Коэффициенты g_i многочлена $G(p)$ задаются разработчиком системы управления, исходя из желаемой динамики процесса стабилизации, с учетом указанного ниже требования на значение его степени l. Алгоритм адаптации должен обеспечить стремление невязки $\sigma(t)$ к нулю. Полагая $\sigma \equiv 0$, получим, что $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$G(p)y(t) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, уравнение (27) задает эталонную модель. Но эта модель не реализуется в адаптивном регуляторе явно (в виде некоторого динамического звена), а выражена неявно через коэффициенты g_i ($i = 0, 1, \ldots, l-1$). Поэтому (27) можно назвать НЭМ.

Выберем следующий закон управления в основном контуре:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{l} k_i(t)\big(p^i y(t)\big), \tag{28}$$

где $k_i(t)$ $(i = 0, \ldots, l)$ — настраиваемые параметры регулятора. Для нашей задачи из требования пассифицируемости вытекает следующая структура алгоритма адаптации:

$$\dot{k}_i(t) = -\gamma\sigma(t)p^i y(t), \quad k_i^0 = k_i(0), \tag{29}$$

где $\gamma > 0$ — *коэффициент усиления* алгоритма адаптации, k_i^0 начальные значения настраиваемых параметров, $i = 0, \ldots, l$.

Для проверки работоспособности замкнутой системы с объектом (25) и адаптивным регулятором (26), (28), (29) используем теорему 4. С этой целью введем вектор G, состоящий из коэффициентов g_i

многочлена $G(p)$, и передаточную функцию $W(\lambda)$ объекта (25) от входа u к вектору $[y,\, \dot{y},\, \dots y^{(l)}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{l+1}$ как

$$G = [g_0, g_1, \dots, 1]\,, \qquad W(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^l \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Применяя теорему 4 к системе с передаточной функцией $GW(\lambda)$, получим следующие условия работоспособности адаптивного регулятора (28), (29) [34, 35, 39]:

1) многочлен $B(p)$ гурвицев и $b_0 > 0$;
2) $l{=}k{-}1$, где $k{=}n{-}m$ — относительная степень уравнения объекта (25).

Эти условия означают, что объект должен быть минимальнофазовым и достаточное число l производных от его выхода должно использоваться в законе управления. Величина l определяется относительной степенью передаточной функции объекта. Поэтому порядок эталонной модели может быть небольшим, даже если объект управления описывается уравнением высокого порядка. Более того, при синтезе алгоритма управления порядок модели объекта может быть неизвестным, что является отличительной особенностью систем с НЭМ по сравнению с традиционными БСНС с ЭМ. Другой особенностью таких систем является возможность применения НЭМ в задачах стабилизации, а не только слежения за задающим воздействием. В системах с явной ЭМ используется выходной сигнал модели — ее реакция на задающее воздействие. В задачах стабилизации такая ЭМ «слепнет». Наконец, при выборе основного контура БСНС с ЭМ важную роль обычно играет *условие согласованности модели* [21, 28, 34, 80], которое означает, что должны иметься коэффициенты регулятора, обеспечивающие совпадение уравнений замкнутой системы с уравнениями ЭМ. Это условие во многих случаях является весьма ограничительным. Заметим, что указанное выше в п. 1) условие $b_0 > 0$ означает, что общий знак коэффициентов правой части уравнения объекта управления (25) должен быть известен при разработке алгоритма. Если оказывается, что он отрицателен, т. е. $b_0 < 0$, то следует просто изменить знак коэффициента γ алгоритма адаптации (29). [1)]

При использовании алгоритма (29) существенно, что в процессе адаптации величина $\sigma(t)$ обычно затухает значительно быстрее, чем

[1)] Если знак b_0 неизвестен, то можно ввести в регулятор блок оценивания b_0 или знака b_0 так, что оценка знака b_0 изменяется, когда точность прогноза падает. Подобные «переключающиеся» алгоритмы привлекали большое внимание в 1980–1990-х годах [77]. Следует отметить, что впервые подобный алгоритм был предложен В. А. Якубовичем в 1979 г. и исследован на примере задачи обучения «робота-велосипедиста с перекрещенными руками» [34, гл. 4].

переходный процесс в системе. В результате коэффициенты регулятора (28) перестают изменяться, а выход $y(t)$ объекта (25) подчиняется уравнению НЭМ (27).

Огрубление алгоритмов адаптации. Алгоритм адаптации (29) в том виде, как он записан, редко используется на практике. Это связано с тем, что при действии на объект управления (25) внешних возмущений или при наличии погрешностей чувствительных элементов, коэффициенты регулятора (28) могут неограниченно возрастать. Для предотвращения этого явления разработаны различные *методы огрубления* («регуляризации») алгоритма (29) [34, 37], среди которых основными являются введение *параметрической обратной связи* и введение *зоны нечувствительности*.

Алгоритм адаптации, регуляризованный параметрической обратной связью, имеет вид

$$\dot{k}_i(t) = -\gamma\sigma(t)p^i y(t) - \alpha\big(k_i(t) - k_i^0\big), \quad k_i^0 = k_i(0), \tag{30}$$

где введен коэффициент *параметрической обратной связи* алгоритма $\alpha \geqslant 0$. Этот коэффициент выбирается разработчиком алгоритма управления. Следует иметь в виду, что при огрублении обратной связью удается обеспечить не асимптотическое стремление выхода объекта к нулю, а только попадание траекторий системы в некоторую ограниченную окрестность начала координат [34, 37, 39]. Сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ при таком способе регуляризации также не обязательно стремится к нулю.

Рассмотренный метод регуляризации применим и при наличии некоторых нелинейностей в контуре управления (таких, например, как квантование сигналов по уровню и по времени в цифровых системах управления), и при наличии динамических возмущений (малой дополнительной инерционности в контуре управления) [18, 34].

Метод неявной эталонной модели на основе пассификации распространен и на задачи слежения за задающим воздействием [1, 4, 34, 39, 51]. Опишем имеющиеся результаты подробнее.

Указанное выше требование на связь между числом l измеряемых производных и относительной степенью k передаточной функции объекта управления во многих практических задачах оказывается слишком жестким. Для смягчения этого условия получены различные виды структур основного контура адаптивных систем управления: с *управлением по промежуточной переменной*, с *регулятором с настраиваемой динамикой* и с *параллельным компенсатором* («шунтом»). Эти структуры опираются на условия теоремы 4.

Управление по промежуточной координате. Такая структура адаптивного регулятора получается, если, кроме выхода $y(t)$ объекта управления (25) и ряда его производных, измерению доступна некоторая промежуточная переменная $v(t)$: $y = W(\lambda)u$, $v = W_1(\lambda)u$, $W(\lambda) = W_1(\lambda)W_2(\lambda)$. Для выполнения указанного выше условия

$m = \deg \overline{B}(\lambda) = n-1$, как нетрудно убедиться, достаточно, чтобы $m_1 = n_1 - 1$, где m_1, n_1 — степени многочленов в числителе и знаменателе «промежуточной» подсистемы $W_1(\lambda)$. Требование гурвицевости многочлена $\overline{B}(\lambda)$ накладывает, конечно, дополнительные условия на выбор коэффициентов g и числа l, которые следует учитывать при решении конкретной задачи с учетом возможности получения информации с датчиков и области изменения параметров объекта управления.

Управление с динамической обратной связью. При этом способе управления регулятор в основном контуре обладает своей динамикой, причем изменяемой по алгоритму адаптации. Такой регулятор можно рассматривать как настраиваемое корректирующее звено в контуре управления.

Рассмотрим, как можно получить такую структуру, исходя из общего подхода к синтезу адаптивных систем с неявной эталонной моделью. Для этого введем дополнительно в систему цепочку из l интеграторов, на вход которой поступает вспомогательный сигнал $v(t)$. Обозначим выходы интеграторов через w_i, $i = 1, \dots, l$, так что выполнено $\dot{w}_1 = v(t)$, $\dot{w}_2 = w_1$, …, $\dot{w}_l = w_{l-1}$. Сигнал $v(t)$ будем считать новым управляющим воздействием и сформируем его в виде обратной связи по выходам интеграторов и выходу объекта управления:

$$v(t) = y(t) - \alpha_0(t)w_l(t) - \alpha_1(t)w_{l-1}(t) - \ldots - \alpha_{l-1}(t)w_1(t). \tag{31}$$

Управление $u(t)$, подаваемое на вход объекта, зададим в виде линейной комбинации выходных сигналов интеграторов с настраиваемыми коэффициентами:

$$u(t) = \beta_l(t)v(t) + \beta_{l-1}(t)w_1(t) + \ldots + \beta_0(t)w_l(t). \tag{32}$$

Как отмечено в [34], структура (31), (32) позволяет, в принципе, решать задачи адаптивной стабилизации неминимально-фазовых объектов и снизить число измеряемых производных от выхода. Заметим, что при фиксированных коэффициентах α_i, β_j закон управления (31), (32) соответствует регулятору с передаточной функцией

$$W_{u/y}(\lambda) = \frac{\beta_l\lambda^l + \ldots + \beta_1\lambda + \beta_0}{\lambda^l + \alpha_{l-1}\lambda^{l-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0}.$$

Адаптивные системы слежения [34, с. 391], [1]. Рассмотрим задачу слежения объекта (25) за командным воздействием $r(t)$ с заданной динамикой.

Сигнал ошибки адаптации $\sigma(t)$ определим в форме

$$\sigma(t) = G(p)y(t) - D(p)r(t), \tag{33}$$

где многочлен $G(p)$ определен выше, а $D(p)$ есть операторный многочлен вида $D(p) = d_q p^q + d_{q-1}p^{q-1} + \ldots + d_1 p + d_0$. Алгоритм адаптации должен обеспечить стремление невязки $\sigma(t)$ к нулю: асимптотически или с некоторой погрешностью $\Delta > 0$

$$|\sigma(t)| \leqslant \Delta \quad \text{при} \quad t \geqslant t_*, \tag{34}$$

где t_* — некоторое *время адаптации*.

Сигнал $\sigma(t)$ можно интерпретировать как ошибку выполнения соотношения

$$G(p)y(t) = D(p)r(t), \tag{35}$$

и уравнение (35), как и (27), представляет собой НЭМ, но уже для задачи слежения.

По аналогии с (28) выберем закон управления в основном контуре

$$u(t) = k_r(t)\big(D(p)r(t)\big) + \sum_{i=0}^{l} k_i(t)\big(p^i y(t)\big), \tag{36}$$

где $k_r(t)$, $k_i(t)$ $(i = 0, \ldots, l)$ — настраиваемые параметры. Используем следующий регуляризованный алгоритм адаптации:

$$\begin{aligned} \dot{k}_r(t) &= \gamma\sigma(t)D(p)r(t) - \alpha\big(k_r(t) - k_r^0\big), \quad k_r^0 = k_r(0), \\ \dot{k}_i(t) &= -\gamma\sigma(t)p^i y(t) - \alpha\big(k_i(t) - k_i^0\big), \quad k_i^0 = k_i(0), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\gamma > 0$, $\alpha \geqslant 0$ — параметры алгоритма; k_r^0, k_i^0 — начальные оценки подходящих значений настраиваемых параметров, $i = 0, \ldots, l$. Как показано в работах [1, 34, 39, 51], при выполнении указанных выше условий 1), 2) и условий ограниченности возмущений и ограниченности скорости изменения задающего воздействия обеспечивается диссипативность замкнутой системы (25), (35)–(37).

Заметим, что ни степень q многочлена $D(p)$, ни его коэффициенты не входят в указанные выше условия. Степень многочлена $D(p)$ ограничена возможностью дифференцирования командного сигнала $r(t)$ и выбирается разработчиком системы управления.

Дальнейшее развитие метода связано как с расширением класса рассматриваемых алгоритмов адаптации, так и с разработкой на его основе практически применимых схем адаптивного управления. Некоторые результаты изложены ниже.

3.3. Адаптивная настройка типовых законов управления

Системы с НЭМ можно использовать для адаптивной настройки типовых регуляторов в процессе эксплуатации системы [4, 51]. Рассмотрим, например, следующий пропорционально-интегральный закон управления в основном контуре:

$$u(t) = k_P(t)e(t) + k_I(t)\int_0^t e(\tau)\,d\tau, \tag{38}$$

где $e(t) = r(t) - y(t)$ — ошибка слежения, $k_P(t)$, $k_I(t)$ — настраиваемые коэффициенты регулятора. Возьмем НЭМ второго порядка:

$$T^2 p^2 y(t) + 2\xi T p\, y(t) + y(t) = r(t), \tag{39}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования по времени, а T, ξ — выбираемые при синтезе параметры НЭМ, которые задают желаемое поведение замкнутой системы. Применяя операции интегрирования и фильтрации, представим ошибку адаптации σ в виде

$$\sigma(t) = T^2 y(t)\omega_f + (2\xi - T\omega_f)T y_f(t) - \int\limits_0^t e_f(\tau)\, d\tau, \tag{40}$$

где $y_f(t)$, $e_f(t)$ — выходы фильтров нижних частот, на входы которых поступают соответственно сигналы $y(t)$ и $e(t)$.

В этом случае алгоритм адаптации (37) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot k_P(t) &= \gamma\sigma(t)e(t) - \alpha\big(k_P(t) - k_P^0\big), \quad k_P(0) = k_P^0 \\ \dot k_I(t) &= \gamma\sigma(t)\int\limits_0^t e(\tau)\, d\tau - \alpha\big(k_I(t) - k_I^0\big), \quad k_I(0) = k_I^0. \end{aligned} \tag{41}$$

Заметим, что при синтезе алгоритма (41) используется фильтрация сигнала невязки $\sigma(t)$. Допустимость такого преобразования сигнала, с точки зрения устойчивости замкнутой адаптивной системы обоснована в [34, раздел 7.1.3].

3.4. Комбинированные сигнально-параметрические алгоритмы управления с неявной эталонной моделью

Рассмотрим теперь применение теоремы пассификации для задач синтеза регуляторов систем с переменной структурой (СПС) [4, 33] и сигнально-параметрических адаптивных регуляторов (СПАР) [3, 4, 39, 50, 88]. Снова рассмотрим линейную систему (4), для которой поставлена цель управления в виде $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Пусть в качестве вспомогательной цели выбрано обеспечение движения в *скользящем режиме* по поверхности $\sigma = 0$, где $\sigma = Gy$, а G — заданная $(l \times n)$-матрица. Используем алгоритм управления вида

$$u = -\gamma \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = Gy, \tag{42}$$

где $\gamma > 0$ — некоторый выбранный параметр. Как показано в [3, 34], указанная цель достигается для системы (4), (42), если существуют матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ и вектор K_* такие, что $PA_* + {A_*}^{\mathrm{T}}P < 0$, $PB = GC$, $A_* = A + B{K_*}^{\mathrm{T}}C$. Как следует из теоремы 4, указанные условия выполнены в том и только в том случае, когда передаточная функция $GW(\lambda)$, где $W(\lambda) = C\big(\lambda I_n - A\big)^{-1}B$, является гиперминимальнофазовой и, кроме того, известен знак коэффициента передачи на высших частотах, т. е. знак величины GCB, которую при синтезе алгоритма принимаем положительной. При выполнении этих условий $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ при достаточно большом коэффициенте γ. Чтобы устранить зависимость факта устойчивости системы от начальных условий и параметров объекта, вместо (42) предложен «сигнально-параметрический» (или «комбинированный») алгоритм адаптивного управления, [3, 4]:

$$\begin{aligned} &u = K^{\mathrm{т}}(t)y(t) - \gamma \operatorname{sign}\sigma, \quad \sigma(y) = G\,y, \\ &\dot{K}(t) = -\sigma(y)\Gamma y(t), \end{aligned} \tag{43}$$

где $\Gamma = \Gamma^{\mathrm{т}} > 0$, $\gamma > 0$ — матричный и скалярный коэффициенты усиления алгоритма.

Следует заметить, что сходимость к нулю за конечное время является существенным свойством СПС с принудительными скользящими режимами. Можно показать (см., например, [39]) что это свойство выполнено для любой ограниченной области начальных состояний системы (4), (43).

3.5. Метод шунтирования в адаптивных системах

Важной является задача уменьшения числа переменных состояния объекта, измерения которых используются в алгоритме адаптивного управления. В последние годы появилось значительное число публикаций, посвященных разработке методов адаптивного управления объектами, направленных на снижение требований к текущей информации о состоянии объекта управления, которое выражается в том числе и в стремлении уменьшить количество производных от выхода объекта, используемых алгоритмом управления [20, 26]. Недостатком известных методов является сложность (высокий порядок) предлагаемых алгоритмов, которая затрудняет их реализацию и снижает помехоустойчивость. Одним из подходов к решению данной задачи является *метод шунтирования*, основанный на использовании параллельного компенсатора («шунтирующего звена», или «шунта») [4, 40, 51, 56]. Основная идея метода заключается в обеспечении свойства гиперминимальнофазовости *расширенного объекта* (включающего собственно объект управления и компенсатор). Выходной величиной, используемой при формировании управляющего воздействия, является суммарный сигнал с измеряемого выхода объекта и шунта. Таким образом, при синтезе алгоритма адаптации используется так называемый расширенный объект, передаточная функция которого равна сумме передаточных функций собственно объекта управления и шунта. Требование работоспособности системы состоит в гурвицевости числителя передаточной функции расширенного объекта, что должно быть обеспечено определенным выбором передаточной функции и параметров шунтирующего звена. В частности, равенство единице относительной степени расширенного объекта, которое входит в определение строгой минимальнофазовости, автоматически выполняется, если передаточная функция шунта имеет относительную степень, равную единице, а степень знаменателя шунта на единицу меньше относительной степени передаточной функции объекта.

Рассмотрим следующую структуру. Подадим сигнал управления $u(t)$ как на вход объекта, так и на некоторое дополнительное звено («*параллельный компенсатор*», или «*шунт*»), выход которого суммируется с выходом объекта управления при формировании сигнала управления. Основная идея такого подхода заключается в обеспечении свойства строгой минимальнофазовости расширенного объекта, включающего собственно объект управления и компенсатор. Пусть, как и раньше, объект управления задается уравнением (25). Введем дополнительно звено (шунт) с передаточной функцией $W_c(\lambda) = \dfrac{B_c(\lambda)}{A_c(\lambda)}$, где $A_c(\lambda)$, $B_c(\lambda)$ — многочлены степеней n_c, m_c соответственно, $n_c = m_c + 1$, многочлен $A_c(\lambda)$ — гурвицев. Выход расширенного объекта $\overline{y}(t)$ получим в виде суммы выхода объекта управления и выхода шунта, на вход которого подается сигнал $u(t)$:

$$A_c(p)y_c(t) = B_c(p)u(t), \quad \overline{y}(t) = y(t) + y_c(t), \quad p \equiv d/dt. \tag{44}$$

Расширенный объект описывается передаточной функцией от входа $u(t)$ к выходу $\overline{y}(t)$, имеющей вид

$$\overline{W}(\lambda) = \frac{B_c(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)A_c(\lambda)}{A(\lambda)A_c(\lambda)} = \frac{\overline{B}(\lambda)}{A(\lambda)A_c(\lambda)}. \tag{45}$$

Нетрудно заметить, что относительная степень k расширенного объекта (45) равна $k = n + n_1 - \max(m_1 + n, m + n_1) = 1$, следовательно, условие гипер-минимальнофазовости будет выполнено, если многочлен $\overline{B}(\lambda)$ гурвицев. Заметим, что данная структура предполагает измерение только выхода объекта, без его производных. Это существенно упрощает реализацию алгоритма управления и повышает его помехозащищенность.

Шунтирующее звено может выбираться по-разному. В [4, 40, 51] было предложено использовать в качестве шунта звено с передаточной функцией

$$W_c(\lambda) = \frac{\varkappa\varepsilon\left(\varepsilon\lambda+1\right)^{k-2}}{\left(\lambda+\alpha\right)^{k-1}}\,, \quad \alpha > 0. \tag{46}$$

В следующих теоремах 5, 6 приведены свойства расширенного объекта (45) с шунтом вида (46).

Теорема 5 ([40, 51]). *Пусть функция $W(\lambda)$ (25) минимальнофазовая ($B(\lambda)$ — гурвицев многочлен), имеет относительную степень $k > 1$ и $B(0) > 0$. Тогда существуют число $\varkappa_0 > 0$ и функция $\varepsilon_0(\varkappa) > 0$ такая, что передаточная функция $\overline{W}(\lambda) = W(\lambda) + W_c(\lambda)$ — гиперминимальнофазовая для всех $\varkappa > \varkappa_0$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(\varkappa_0)$.*

Теорема 6 ([56]). *Пусть функция* $W(\lambda)$ *устойчивая* ($A(\lambda)$ — *гурвицев многочлен*) *и имеет относительнную степень* $k>1$ *и* $W(0)>0$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует достаточно большое значение* $\varkappa_0$, *такое, что* $\overline{W}(\lambda)=W(\lambda)+W_c(\lambda)$ — *гиперминимальнофазовая для всех* $\varkappa \geqslant \varkappa_0$.

Доказательство теоремы 6 приведено в приложении.

Из теоремы 5 следует, что можно ввести шунт (46) порядка $\deg(A_s(\lambda))=k-1=n-m-1$, который при достаточно большом $\varkappa$ и достаточно малом ε обеспечит выполнение условия гиперминимальнофазовости расширенного объекта (45) для любого минимальнофазового объекта управления и для произвольной ограниченной области параметров. Из теоремы 6 следует, что при другом способе выбора параметров шунта (46) условие гиперминимальнофазовости выполняется для устойчивых (и, возможно, неминимально-фазовых) объектов. В этом случае уравнение шунта можно упростить, именно: вместо (46) можно взять $W_c(\lambda)=\varkappa/(\lambda+\alpha)$.

Заметим, что приведенные выше утверждения гарантируют выполнение условия гиперминимальнофазовости либо для минимальнофазовых, либо для устойчивых объектов управления, однако в некоторой, более узкой, области возможных значений параметров объекта можно обеспечить гиперминимальнофазовость системы с шунтом и для одновременно неустойчивых и неминимальнофазовых объектов. Достоинством такого способа шунтирования является также возможность выбирать малое значение статического коэффициента передачи шунта, что в задачах слежения приводит к малости ошибки, вызванной использованием в законе управления выхода $\overline{y}(t)$ расширенного объекта (45) вместо выхода $y(t)$ самого объекта управления.

На основе метода шунтирования разработаны новые, комбинированные структуры адаптивных систем управления, сочетающие методы пассификации, шунтирования и идентификации на скользящих режимах, а также выполнен синтез робастных регуляторов для решения прикладных задач управления [4, 5, 42, 52–54, 56, 65, 66].

3.6. Адаптивное управление угловым движением стенда «Вертолет»

В последнее время появляется большое количество технических и научных публикаций, посвященных разработке лабораторных стендов, управляемых с помощью персональных компьютеров. В этой связи значительный интерес вызывают задачи управления различными видами лабораторных установок вертолетного типа. Одним из впечатляющих устройств такого типа является стенд «Вертолет», серийно выпускаемый компанией *Quanser Co* [1]) [58]. Стенд предназначен для тестирования и отработки алгоритмов пространственного управления

[1]) Quanser Co. URL: http://www.quanser.com/choice.asp

летательными аппаратами. Ниже рассмотрена одна из задач управления стендом «Вертолет», для решения которой использован описанный выше метод адаптивного управления. Более подробную информацию по адаптивному управлению стендом на основе метода пассификации можно найти в [2, 7, 8, 55, 57].

Стенд «Вертолет». Основными конструктивными элементами стенда являются основание и коромысло (несущая штанга), шарнирно закрепленное на основании. На одном из плеч коромысла шарнирно закреплен «корпус вертолета». На противоположном плече помещен противовес. Штанга может изменять свой наклон, поворачиваясь относительно горизонтальной *оси возвышения*, а также вращаться относительно вертикальной *оси перемещения*. На этих осях смонтированы импульсные оптические датчики, позволяющие определить углы подъема и перемещения. Корпус вертолета свободно поворачивается в пределах $\pm 90^o$ вокруг *оси тангажа* (продольная ось коромысла) на некоторый *угол тангажа*. На корпусе вертолета расположены два независимо управляемых электрических двигателя с пропеллерами, благодаря которым развиваются силы, зависящие от приложенного управляющего напряжения на двигателях. Под действием пары сил «Вертолет» может менять свое положение, поворачиваясь относительно указанных осей. По заказу лаборатории LAAS–CNRS [1)] «Вертолет» снабжен дополнительным *подающим винтом*, который установлен вдоль коромысла и приводится во вращение от отдельного двигателя. На винте расположен груз, который может перемещаться вдоль коромысла по командам оператора в пределах $0 \div 0.3$ м. Благодаря перемещению груза можно воспроизводить действие возмущений на систему и изменение ее динамических характеристик. Фотография лабораторного стенда «Вертолет LAAS» представлена на рис. 1, а его кинематическая схема — на рис. 2.

Ниже использованы следующие обозначения: $\theta(t)$ — угол тангажа; $r(t)$ — задающее (командное) воздействие по тангажу; $e(t) = r(t) - \theta(t)$ — ошибка слежения по тангажу; $v_f(t)$ — управляющее напряжение «переднего» (условно) электромотора; $v_b(t)$ — управляющее напряжение «заднего» электромотора; $u(t)$ — командный сигнал по углу тангажа (по вращающему моменту); $w(t)$ — командный сигнал по углу возвышения/перемещения (по нормальной силе). Управляющие напряжения, подаваемые на передний и задний электромоторы $v_f(t)$, $v_b(t)$ вычисляются через командные сигналы $u(t)$, $w(t)$ следующим образом:

$$v_f = 0{,}5\,(w + u), \quad v_b = 0{,}5\,(w - u). \tag{47}$$

Величина управляющего напряжения каждого двигателя имеет насыщение на уровне 5 В.

[1)] Лаборатория анализа и архитектуры систем LAAS–CNRS, Тулуза, Франция. URL: http://www.laas.fr

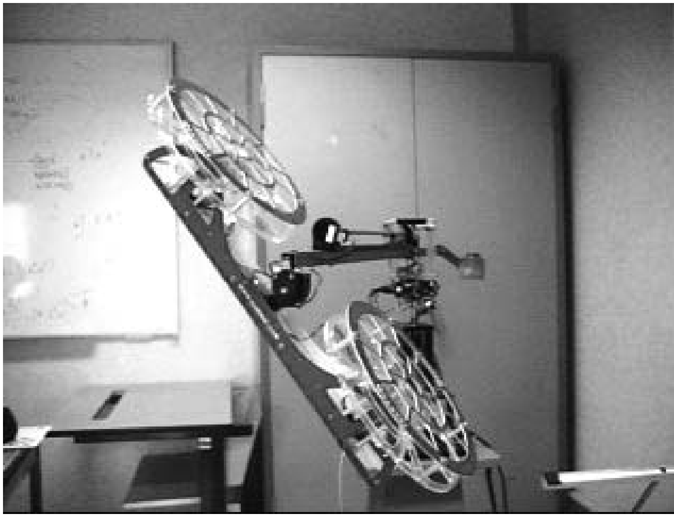

Рис. 1. Фотография стенда «Вертолет LAAS»

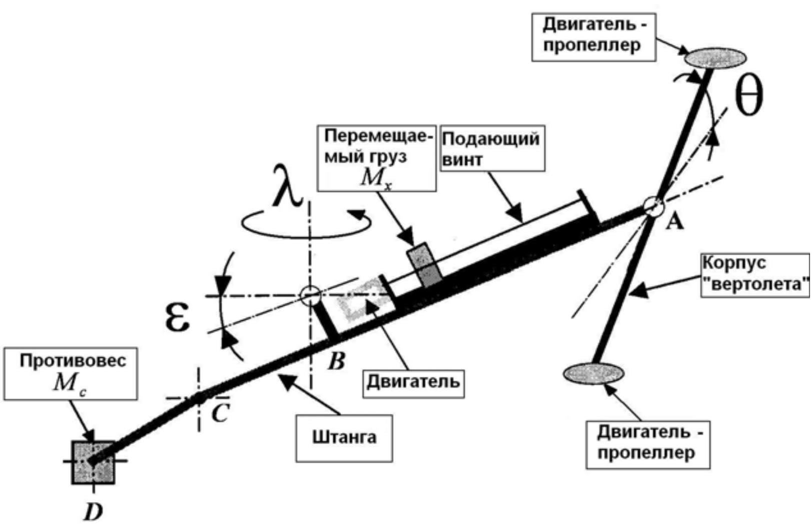

Рис. 2. Кинематическая схема стенда «Вертолет LAAS»

Алгоритмы адаптивного управления углом тангажа. Описанный в пп. 3.3, 3.4 подход использован для разработки двух видов адаптивных регуляторов с НЭМ, которые реализованы на управляющем персональном компьютере в программных средах MATLAB/Simulink и WinCon и тестированы для управления углом тангажа стенда «Вертолет» [2, 7, 8, 55, 57]. Первый закон управления реализован в адаптивном ПИД-регуляторе АПИД-НЭМ. Адаптивный сигнально-параметрический закон управления (42), (43) реализован в регуляторе СПА-НЭМ.

Сигнал управления по тангажу в АПИД-НЭМ регуляторе вычисляется следующим образом:

$$u(t) = k_P(t)\overline{e}(t) + k_I(t)\int\limits_0^t \overline{e}(\tau)\,d\tau - k_D(t)\dot{\theta}(t). \tag{48}$$

где $\overline{e}(t) = \mathrm{sat}_E\big(e(t)\big)$, $e = r(t) - \theta(t)$, $\mathrm{sat}_E(e)$ означает *функцию насыщения* на уровне E:

$$\mathrm{sat}_E(e) = \begin{cases} e, & \text{если} \quad |e| \leqslant E, \\ E\,\mathrm{sign}\, e, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для настройки коэффициентов регулятора k_P, k_I и k_D используется алгоритм

$$\begin{aligned} \dot{k}_P(t) &= -\gamma_P \sigma(t)\overline{e}(t) - \alpha_P\big(k_P(t) - k_P^0\big), \quad k_P(0) = k_P^0; \\ \dot{k}_I(t) &= -\gamma_I \sigma(t)\int\limits_0^t \overline{e}(\tau)\,d\tau - \alpha_I\big(k_I(t) - k_I^0\big), \quad k_I(0) = k_I^0; \\ \dot{k}_D(t) &= \gamma_D \sigma(t)\dot{y}(t) - \alpha_D\big(k_D(t) - k_D^0\big), \quad k_D(0) = k_D^0, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\gamma_i > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, k_i^0 — параметры алгоритма, $i \in \{P, I, D\}$. Сигнал $\sigma(t)$ вычисляется по аналогии с (40) как

$$\sigma(t) = T\dot{y}(t) - e(t), \tag{50}$$

где параметр T определяет желаемую доминирующую постоянную времени замкнутой системы.

После небольшого числа экспериментов со стендом получены следующие рекомендованные значения параметров регулятора АПИД-НЭМ:

$$\begin{aligned} &T = 0.5\ \text{с}; \quad \gamma_P = 10^{-3}\ \text{В/(град}^3 \cdot \text{с)}; \quad \gamma_D = 10^{-3}\ \text{Вс/град}^3; \\ &\alpha_P = 20\ \text{с}^{-1}; \quad \alpha_D = 20\ \text{с}{-1}; \quad E = 25^{\text{o}}; \\ &k_I^0 = 0.05\ \text{В/(град} \cdot \text{с)}; \quad k_P^0 = 0.1\ \text{В/град}; \quad k_D^0 = 0.1\ \text{Вс/град}. \end{aligned}$$

Для исследования свойств системы при действии параметрических и координатных возмущений, дискретизации процесса управления, а также с учетом неполноты математического описания объекта, на стенде выполнен ряд экспериментов. Некоторые результаты представлены на рисунках 3, 4. Как видно из графиков, при действии на систему ступенчатого задающего сигнала $\theta_*(t)$ (в виде «прямоугольной волны») амплитудой 45$^{\text{o}}$ и периодом 25 с, время переходного процесса (по отношению к зоне в 3 % от установившегося значения) не превосходит 3 с, а перерегулирование составляет около 10 %. Стремление к нулю установившейся ошибки достигается за счет введения интегральной составляющей в закон управления.

Важным преимуществом адаптивного управления на основе пассификации является простота синтеза законов управления (в первую очередь, для выбора их параметров) по сравнению с традиционным подходом, использованным для данной системы в [58].

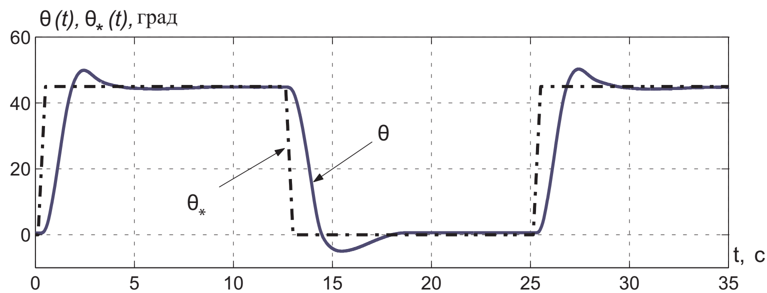

Рис. 3. Переходные процессы по углу тангажа $\theta(t)$

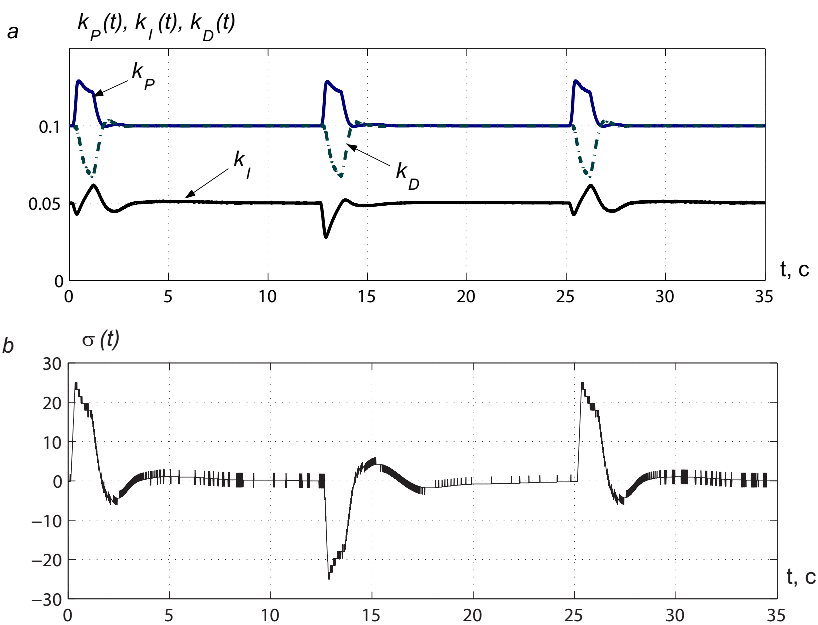

Рис. 4. Управление тангажем. Графики процессов: a — коэффициенты регулятора $k_P(t)$, $k_I(t)$, $k_D(t)$; b — сигнал невязки адаптации $\sigma(t)$

4. Адаптивное управление нелинейными объектами

Изложим теперь результаты по развитию методов пассификации и неявной эталонной модели для синтеза алгоритмов адаптивного управления нелинейными объектами [68]. Для простоты рассмотрим случай отсутствия возмущений. При наличии ограниченных координатных возмущений и сингулярных динамических возмущений в контуре управления результаты получаются по аналогии с известными для управления линейными объектами, см. [3, 39, 51] и выше раздел 3.2.

Рассмотрим нелинейный аффинный по управлению объект вида

$$\dot{x} = Ax + f(x,t) + Bu, \quad y = Cx \tag{51}$$

и поставим задачу слежения за эталонной моделью

$$\dot{x}^* = f^*(x^*,t), \qquad y^* = Cx^*, \tag{52}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ — векторы состояния объекта и эталонной модели, $y \in \mathbb{R}^l$, $y^* \in \mathbb{R}^l$ — измеряемые выходные сигналы, $u \in \mathbb{R}^m$ — управляющее воздействие. Эту цель управления можно формализовать в виде

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \tag{53}$$

где $e(t) = x(t) - x^*(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор ошибки.

Как правило, уравнения и параметры эталонной модели (52) считаются известными при проектировании системы. Рассмотрим более общий случай, в котором как параметры линейной части (элементы матриц A, B, C), так и параметры нелинейных зависимостей $f(\cdot)$, $f^*(\cdot)$ заранее не известны. Другими словами, считаем их зависящими от некоторого вектора неизвестных параметров $\theta \in \Omega_\theta$, где Ω_θ — заданное множество допустимых параметров. Задача состоит в определении закона управления, в котором используются только измеряемые выходы и, возможно, некоторая дополнительная информация о нелинейных зависимостях, так чтобы для всех $\theta \in \Omega_\theta$ достигалась цель управления (53).

Запишем сначала уравнение ошибки

$$\dot{e} = Ae + \Phi(x,x^*,t) + Bu, \tag{54}$$

в котором $\Phi = Ax^* + f(x,t) - f^*(x^*,t)$. Теперь сформулируем основное ограничение на класс решаемых задач: далее предполагаем, что функцию Φ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} B_i\big(\theta_i^{\mathrm{T}} z_i(x,x^*,t) + v_i(x,x^*,t)\big), \tag{55}$$

где B_i — i-й столбец матрицы B, $\theta_i \in \mathbb{R}^N$ — векторы неизвестных параметров, а значения вектор-функции $z_i(\cdot) \in \mathbb{R}^N$ и скалярных функций $v_i(\cdot)$ доступны измерению. Предположение (55) означает, что значения всех нелинейностей и неопределенностей принадлежат подпространству, порождаемому управляющим воздействием. В отличие от стандартного *условия согласованности модели* [21, 28, 34, 80] это не означает, что неизвестные параметры входят в уравнения системы линейно или же что все неопределенности могут быть устранены соответствующим выбором управления — действительно, слагаемое с матрицей A в правой части (54) нельзя устранить. Поэтому (55) уместно назвать *ослабленным условием согласованности*.

Для решения задачи выберем адаптивный закон управления следующего вида:

$$u_i = \widehat{\theta}_{0i}^{\mathrm{T}}(y - y^*) + \widehat{\theta}_{1i}^{\mathrm{T}} z_i(x, x^*, t) - v_i(x, x^*, t), \tag{56}$$

где $\widehat{\theta}_{0i} \in \mathbb{R}^l$, $\widehat{\theta}_{1i} \in \mathbb{R}^N$ — векторы настраиваемых параметров, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$.

Применение теоремы 4 приводит к следующему утверждению.

Теорема 7. *Пусть функция $x^*(t)$ ограничена и функции $z_i(x, x^*, t)$, $v_i(x, x^*, t)$, $i = 1, \ldots, m$ ограничены в любой такой области, что $\big\{(x,t) : |x| \leqslant r,\ t \geqslant 0\big\}$.*

Выберем $(m \times l)$-матрицу G со строками g_i, $i = 1, \ldots, m$, так, чтобы передаточная функция $W(\lambda) = GC(\lambda I - A)^{-1}B$ была гиперминимальнофазовой для всех $\theta \in \Omega_\theta$, и используем алгоритм адаптации в конечно-дифференциальной форме:

$$\frac{d\left(\widehat{\theta}_{ji} + \psi_{ji}(w_{ji})\right)}{dt} = -\Gamma_{ji} w_{ji}(t), \tag{57}$$

где $j = 0, 1$, $i = 1, \ldots, m$,

$$w_{0i} = \big(g_i(y - y^*)\big)(y - y^*), \quad w_{1i} = \big(g_i(y - y^*)\big) z_i,$$

где $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ji}^{\mathrm{T}} \geqslant 0$ — матрицы коэффициентов усиления, $\psi_{ji}(w)^{\mathrm{T}} w \geqslant$ $\geqslant 0$ для всех w, $j = 0, 1$, $i = 1,\ 2, \ldots, m$.

Тогда все траектории системы (51), (52), (56), (57) *ограничены и достигается цель управления* (53).

Доказательство теоремы приведено в Приложении и основано на функции Ляпунова

$$V(e, \widehat{\theta}, t) = \frac{1}{2} e^{\mathrm{T}} P e + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \Big(|\widehat{\theta}_{0i} + \psi_{0j}(\omega_{0j}) - \theta_{0i}^*|^2_{\Gamma_{0i}^{-1}} + |\widehat{\theta}_{1i} + \psi_{1j}(\omega_{1j}) - \theta_{0i}^*|^2_{\Gamma_{1i}^{-1}} \Big), \tag{58}$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ — положительно определенная матрица. Как и для линейных систем, при относительной степени системы $k > 1$, синтез адаптивного регулятора можно выполнить с применением описанного выше в разделе 3.5 метода шунтирования.

5. Метод пассификации в задаче адаптивной синхронизации нелинейных осцилляторов

В современных технических системах важную роль играют колебательные (т. е. обладающие той или иной степенью повторяемости) процессы. Колебательные режимы могут выступать не только как нежелательные, вредные режимы, но и в качестве основных, полезных режимов функционирования. В первом случае при разработке системы требуется подавлять нежелательные колебания, во втором — обеспечить поддержание заданного колебательного режима. Первый тип задач характерен для систем виброизоляции, подавления электрических и акустических помех, подавления упругих колебаний и вибраций в приборах, инструментах и другом оборудовании. Задачи второго типа встречаются: при разработке вибрационного оборудования и вибрационных технологий, различных машин и механизмов, рабочий орган которых совершает возвратно-поступательное или возвратно-вращательное движение, генераторов электрических или акустических колебаний и т. д.

Среди задач управления взаимодействующими колебательными системами важное место занимает задача *синхронизации* протекающих в них процессов, которая имеет многочисленные применения в механике и физике [10, 11, 29], в вибрационных технологиях [10, 11], в радиотехнике и технике связи [22, 23] и в других областях. В последние годы возрастает интерес к задачам управления синхронизацией, состоящим в обеспечении синхронного протекания процессов в системе путем введения дополнительных обратных связей. Применение современных методов синтеза законов управления позволяет расширить класс систем, обладающих синхронными режимами, повысить их устойчивость и робастность.

С начала 1990-х гг. значительно вырос интерес к так называемой *хаотической синхронизации*, когда каждая из синхронизируемых подсистем продолжает совершать сложные, хаотические колебания и после установления синхронного режима [4, 73, 84]. Предложен целый ряд способов использования эффекта хаотической синхронизации для повышения скрытности и надежности передачи информации (см., например, обзоры и специальные выпуски журналов [19, 76, 78]). Изучаются закономерности и способы обеспечения синхронизации в массивах взаимодействующих осцилляторов, с применениями к синхронизации биологических объектов, искусственных и естественных нейронов и т. д. [29, 59, 85].

5.1. Задача адаптивной синхронизации

Во многих случаях динамика синхронизируемых систем зависит от неизвестных параметров, недоступных при синтезе алгоритма синхронизации. В таких случаях для управления синхронизацией можно использовать законы адаптивного управления. Следуя [4, 63, 70], изложим общую постановку задач адаптивного управления синхронизацией и схему решения для двух подсистем на основе метода пассификации. Рассмотрим две взаимосвязанных подсистемы, описываемые уравнениями вида

$$\dot{x}_i = F_i\left(x_1, x_2, u, \theta, t\right), \quad i = 1, 2, \tag{59}$$

где $\theta \in \mathbb{R}^M$ — вектор неизвестных параметров. Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм адаптивного управления вида

$$u = U(x_1, x_2, t, \widehat{\theta}),$$

где $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}^M$ — вектор настраиваемых параметров и алгоритм адаптации вида

$$\dot{\widehat{\theta}} = \Theta(x_1, x_2, t, \widehat{\theta}),$$

так чтобы цель управления

$$\lim_{t\to\infty} |x_1(t) - x_2(t)| = 0 \tag{60}$$

достигалась для всех $\theta \in \Xi$, где Ξ — множество допустимых θ.

Отметим, что поскольку правые части F_i в (59) различны, поставленная задача охватывает случай неидентичных подсистем, представляющий наибольший интерес в задачах управления синхронизацией.

Вычтем уравнение второй системы из уравнения первой и предположим, что в полученном уравнении для вектора ошибки можно выделить линейную и нелинейную части и представить модель ошибки в следующем виде:

$$\dot{e} = Ae + B\sum_{i=1}^{N} \theta_i \varphi_i(x_1, x_2, t) + Bu, \tag{61}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица; B — постоянный n-мерный вектор; θ_i — постоянные, но неизвестные коэффициенты, а функции φ_i известны и измеряемы. Таким образом, предполагается наличие линейной и согласованной параметризации: как неизвестные параметры, так и управление входят в уравнение ошибки линейно и, кроме того, пропорционально постоянному вектору B (например, нелинейности и управление входят только в одно из уравнений системы).

Модель ошибки (61) охватывает как традиционный для теории управления случай, когда управление входит только в одну из подсистем (59), так и случай, когда управление может воздействовать на обе подсистемы. В последнем случае предельное движение управляемой системы (синхронный режим), вообще говоря, неизвестно, даже если ошибка приблизилась к нулю.

Пусть измерению доступны, кроме функций $\varphi_i(x_1, x_2, t)$, выходные переменные $y_i = Cx_i$, $i = 1, 2$. Зададим основной контур управления в виде

$$u = -\widehat{\theta}_0(y_1 - y_2) + \sum_{i=1}^{N} \widehat{\theta}_i \varphi_i(x_1, x_2, t), \tag{62}$$

где $\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_i$ — некоторые настраиваемые параметры. Выбор такого закона управления мотивируется надеждой на то, что он, в принципе, способен решить задачу, поскольку существуют такие значения настраиваемых параметров $\widehat{\theta}_i$, $i = 1, \ldots, N$, что цель управления достигается. Действительно, если выбрать

$$\widehat{\theta}_{i_*} = -\theta_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{63}$$

то при подстановке выбранных значений настраиваемых параметров $\widehat{\theta}_{i_*}$ и управления u в уравнение ошибки (61) все нелинейности исчезнут, уравнение примет вид

$$\dot{e} = (A - \theta_0 BC)\, e, \tag{64}$$

и, если существует θ_{0_*} такое, что уравнение (64) асимптотически устойчиво, то закон (62), (63), в принципе, обеспечивает синхронизацию. Однако в любом случае воспользоваться таким законом нельзя, так как он зависит от неизвестных параметров.

Воспользуемся для системы (64) алгоритмом адаптации (57), который в данном случае принимает вид

$$\dot{\widehat{\theta}}_i = -\gamma_i(y_1 - y_2)\varphi_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{65}$$

$$\dot{\widehat{\theta}}_0 = -\gamma_0(y_1 - y_2)^2, \tag{66}$$

где $\gamma_i > 0$.

5.2. Условия достижения цели синхронизации

Вывод условий работоспособности предложенной схемы основан на применении теоремы 4. Также потребуется следующее определение.

Определение 4. Вектор-функция $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ называется *постоянно возбуждающей (persistently exciting) на* $[0, \infty)$, если она измерима и ограничена на $[0, \infty)$ и существуют $\alpha > 0, T > 0$ такие, что

$$\int_{t}^{t+T} f(s) f(s)^{\mathrm{T}} ds \geqslant \alpha I_m$$

для всех $t \geqslant 0$.

Постоянно возбуждающая вектор-функция отличается тем, что при $t \to \infty$ она «не прижимается» ни к какой гиперплоскости в m-мерном пространстве. О полезности свойства постоянного возбуждения для изучения сходимости оценок говорит следующее утверждение [34, 93].

Лемма 1 (лемма о постоянном возбуждении). *Рассмотрим вектор-функции $f, \widetilde{\theta} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$. Предположим, что $\widetilde{\theta}(t)$ непрерывно-дифференцируема, $d\widetilde{\theta}(t)/dt \to 0$ при $t \to \infty$ и f — постоянно возбуждающая. Тогда, если $\widetilde{\theta}(t)^{\mathrm{T}} f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то $\widetilde{\theta}(t) \to 0$.*

Условия адаптивной синхронизации сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 8 ([70]). *Предположим, что траектории синхронизируемых систем с управлением вида* (62) *при ограниченных $e(t)$, $\widehat{\theta}_i(t)$ ограничены и линейная система с передаточной функцией $W(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B$ гиперминимальнофазовая. Тогда все траектории системы* (61), (62), (65), (66) *ограничены и выполнена цель синхронизации* (60). *Если, кроме того, условие постоянного возбуждения выполнено для вектор-функции $\big(\varphi_1(x_1, x_2, t), \; \ldots \varphi_N(x_1, x_2, t)\big)^{\mathrm{T}}$, то настраиваемые параметры сходятся к своим идеальным значениям:*

$$\lim_{t\to\infty} \big(\widehat{\theta}_i(t) - \theta_i\big) = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{67}$$

Доказательство теоремы 8 приведено в приложении. Оно основано на применении функции Ляпунова

$$V(x, \widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}) = \frac{1}{2} e^{\mathrm{T}} P e + \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2\gamma_i} |\widehat{\theta}_i - \theta_i|^2 + |\widehat{\theta}_0 - \theta_0|^2/(2\gamma_0) \tag{68}$$

для некоторой положительно-определенной матрицы P и числа θ_0.

Замечание. Теорема 8, фактически, дает необходимое и достаточное условие существования функции Ляпунова вида (68) со свойствами

$$\begin{cases} V(x, \widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}, t) > 0 \text{ при } e \neq 0, \\ \dot{V}(x, \widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}, t) < 0 \text{ при } e \neq 0. \end{cases} \tag{69}$$

Это означает, что нет другого алгоритма адаптации, основанного на функции Ляпунова (98) со свойствами (69).

5.3. Синхронизация и адаптивные наблюдатели

Аналогично задаче об адаптивном управлении синхронизацией рассматривается задача о синхронизации на основе адаптивного наблюдателя [4, 6, 25], в которой модель неуправляемой системы (передатчика) имеет вид

$$\dot{x}_d = A x_d + \varphi_0(y_d) + B \sum_{i=1}^{N} \theta_i \varphi_i(y_d), \quad y_d = C x_d, \tag{70}$$

где $x_d \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния передатчика; $y_d \in \mathbb{R}^l$ — вектор выходов (передаваемых сигналов); $\theta = \mathrm{col}\,(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ — вектор параметров передатчика. Предполагается, что нелинейности $\varphi_i(\cdot)$, $i = 0, \ldots, N$, матрицы A, C и вектор B известны.

Задача состоит в построении адаптивного наблюдателя (приемника) — динамической системы с входом $y_d(t)$, вектор выходов которой $w(t)$ состоит из оценок состояния передатчика $\widehat{x}(t)$ и оценок параметров передатчика $\widehat{\theta}$, обеспечивающего *цель наблюдения* — сходимость к нулю ошибок наблюдения:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\widehat{x}(t)-x_d(t)\right)=0, \tag{71}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\widehat{\theta}(t)-\theta\right)=0. \tag{72}$$

Адаптивный наблюдатель строится в виде

$$\dot{\widehat{x}}=A\widehat{x}+\varphi_0(y_d)+B\Big(\sum_{i=1}^{N}\widehat{\theta}_i\varphi_i(y_d)+\widehat{\theta}_0G(y_d-y)\Big),\quad y=Cx, \tag{73}$$

$$\dot{\widehat{\theta}}_i=\psi_i(y_d,y),\quad i=0,\ldots,N, \tag{74}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y_d\in\mathbb{R}^l$, $\widehat{\theta}_i\in\mathbb{R}$, а $G\in\mathbb{R}^l$ является вектором-строкой весовых коэффициентов. Алгоритм адаптации (74) подлежит определению. Хотя формально задача наблюдения не является задачей управления, уравнение ошибки имеет, как и ранее, вид (61), если ввести обозначения $e=x_d-\widehat{x}$, $\varphi_i=\varphi_i(y_d)$, $u=-\theta_0(y_d-C\widehat{x})+\sum_{i=1}^{N}\theta_i\varphi_i(y_d)$. Алгоритм адаптации, синтезированный методом пассификации, имеет вид

$$\dot{\widehat{\theta}}_i=-\gamma_i(y-y_d)\varphi_i(y_d),\quad i=1,\ldots,N, \tag{75}$$

$$\dot{\widehat{\theta}}_0=-\gamma_0(y-y_d)^2, \tag{76}$$

где $\gamma_i>0$.

Аналогично теореме 8 доказывается следующее утверждение, дающее условия адаптивной синхронизации.

Теорема 9 ([4, 25]). *Предположим, что все траектории системы* ,(70) *ограничены и линейная система с передаточной функцией* $W(\lambda)=C(\lambda I-A)^{-1}B$ *гиперминимальнофазовая. Тогда все траектории системы* (73), (75), (76) *ограничены и выполнена цель наблюдения* (71). *Если, кроме того, условие постоянного возбуждения выполнено для вектор-функции* $\big(\varphi_1(y_d(t)),\ \ldots,\varphi_N(y_d(t))\big)$, *то выполнена цель наблюдения* (72): *настраиваемые параметры сходятся к своим идеальным значениям.*

Отметим, что для работы описанных схем адаптивной синхронизации существенна возможность пассификации уравнения ошибки, а значит, условие равенства единице относительной степени линейной части $d=1$. В [72] предложены и обоснованы новые схемы адаптивной синхронизации на основе концепций расширенной ошибки и тюнеров высших порядков, позволяющие снять условие $d=1$ за счет введения в структуру наблюдателя вспомогательных динамических систем — фильтров.

5.4. Передача сообщений на основе синхронизации хаотических систем

Среди задач управления колебательными процессами особое место занимают задачи управления *хаотическими колебаниями*. Одним из эффективных применений хаотических систем является современная техника телекоммуникаций, в частности, мобильная телефония. Традиционные методы передачи и приема сигналов основана преимущественно на линейной передаче (модуляции) и приеме (оценивании параметров) сигналов, а также на стохастических моделях шума (помех). Существующие работы по нелинейной модуляции [16] предполагают относительно медленное (по сравнению с несущим сигналом) изменение параметров линейных генераторов колебаний. Ниже описывается вариант другого подхода, основанного на синхронизации хаотических сигналов. Такой подход вызывает в последние годы растущий интерес специалистов. Показано, как метод пассификации может быть эффективно применен для адаптивной синхронизации хаотических систем.

В [4, 71] было предложено применять адаптивный наблюдатель для передачи информации на основе хаотического несущего сигнала. При этом передаваемое сообщение кодируется изменением параметров $\theta_i,\ i=1,\dots,N$. Исследование точности передачи сообщений в условиях ограниченных помех проведено в [6, 49].

В качестве примера рассмотрим задачу синхронизации двух цепей Чуа. Уравнение передатчика (в безразмерной форме) имеет вид

$$\begin{cases} \dot x_{d_1} = p\big(x_{d_2} - x_{d_1} + f(x_{d_1}) + sf_1(x_{d_1})\big),\\ \dot x_{d_2} = x_{d_1} - x_{d_2} + x_{d3},\\ \dot x_{d_3} = -qx_{d_2}, \end{cases} \tag{77}$$

где $f(z) = M_0 z + 0{,}5\,(M_1 - M_0) f_1(z)$, $f_1(z) = |z+1| - |z-1|$; M_0, M_1, p, q — параметры передатчика. Пусть $s = s(t)$ — сообщение, которое следует восстановить в приемнике. Предположим, что передаваемый сигнал имеет вид $y_d(t) = x_{d_1}(t)$, а значения параметров M_0, M_1, p, q известны.

В соответствии с вышеизложенным приемник описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot x_1 = p(x_2 - x_1 + f(y_d) + c_1 f_1(y_d) + c_0(x_1 - y_d)),\\ \dot x_2 = x_1 - x_2 + x_3,\\ \dot x_3 = -qx_2, \end{cases} \tag{78}$$

где c_0, c_1 — настраиваемые параметры. Алгоритм адаптации (65), (66) принимает вид

$$\begin{array}{rcl} \dot c_0 &=& -\gamma_0 (y_d - x_1)^2,\\ \dot c_1 &=& -\gamma_1 (x_1 - y_d) f_1(y_d), \end{array} \tag{79}$$

где γ_0, γ_1 — коэффициенты усиления алгоритма.

Исследуем возможность системы (78), (79) получать и декодировать сообщения. Для этого проверим условие гиперминимальнофазовости предполагая, что $s(t) \equiv \mathrm{const}$. [1] Из уравнения ошибки следует, что

$$\begin{cases} \dot e_1 = p\big(e_2 - e_1 + (c_1 - s) f_1(y_d) + c_0 e_1\big), \\ \dot e_2 = e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot e_3 = -q e_2, \end{cases} \tag{80}$$

где $e_i = x_i - x_{d_i}$, $i = 1,2,3$. Система (80), очевидно, имеет форму Лурье (63), где $\widehat{\theta}_1 = c_1$, $\theta_1 = s$, $\theta_0 = c_0$,

$$A = \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -q & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1\ 0\ 0].$$

Передаточная функция линейной части системы имеет вид

$$W(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \lambda + q}{\lambda^3 + (p+1)\lambda^2 + q\lambda + pq}.$$

Видно, что порядок системы $n = 3$, а так как числитель — гурвицев многочлен второй степени для всех $q > 0$ и всех вещественных p, то условие гиперминимальнофазовости выполняется при $q > 0$ и любых p, M_0, M_1. Таким образом, обеспечивается ограниченность всех траекторий приемника $x(t)$ и сходимость ошибки наблюдения $e(t) \to 0$. В частности, $y_d(t) - x_1(t) \to 0$. Далее, для того чтобы иметь возможность восстановить сигнал $s(t)$, приемник должен обеспечить сходимость $c_1(t) - s \to 0$ для каждой постоянной s. Это имеет место при выполнении условия постоянного возбуждения, которое в данном случае записывается как

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f_1^2(y_d(t))\, dt \geqslant \alpha \tag{81}$$

для некоторых $T > 0$, $\alpha > 0$ и всех $t_0 \geqslant 0$. Для проверки (81) заметим, что условие (81), по существу, означает, что траектория передатчика $x_d(t)$ не сходится на плоскость $x_{d_1} = 0$ при $t \to \infty$. Интуитивно ясно, что это верно, если система (77) обладает хаотическим поведением.

[1] Если $s(t)$ — изменяющийся во времени, например, двоичный сигнал, то изложенные выше результаты, строго говоря, неприменимы. Однако если оценки параметров сходятся достаточно быстро, во всяком случае быстрее, чем происходят изменения параметров передатчика, то сообщение будет принято приемником.

Результаты вычислительных экспериментов. Приведем результаты моделирования описанной выше системы. Примем следующие значения параметров: $p = 9$, $q = 14.3$, $M_0 = 5/7$, $M_1 = -6/7$. Для этих значений параметров система (77) обладает хаотическим аттрактором. Начальное состояние передатчика $x_d(0) = [0.3,\ 0.3,\ 0.3]^{\mathrm{T}}$. Начальное состояние приемника x_0 и начальные значения настраиваемых параметров $c_0(0)$, $c_1(0)$ приняты нулевыми. Для устранения влияния начальных условий никакое сообщение не передавалось в течение первых 20 единиц времени («настройка», или «калибровка», приемника), т. е. принято $s(t) \equiv 1$ для $0 \leqslant t \leqslant 20$.

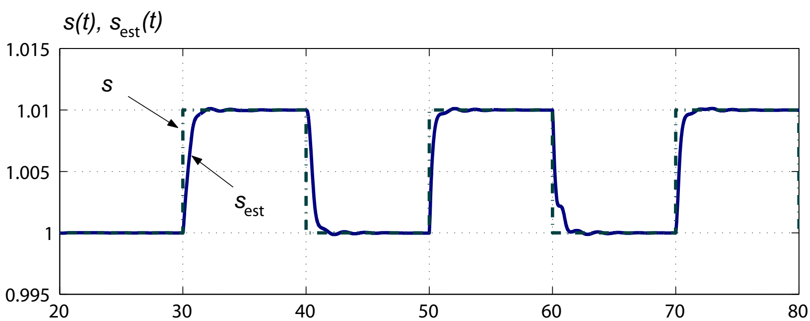

Рис. 5. Идентификация параметра источника сообщения; $s(t)$ — пунктирная линия, $s_{\mathrm{est}}(t)$ — сплошная линия

После периода настройки передается сообщение, имеющее вид «прямоугольной волны»:

$$s(t) = s_0 + s_1 \operatorname{sign}\big(\sin\big(2\pi t/T_0\big)\big), \tag{82}$$

где $s_0 = 1{,}005$, $s_1 = 0{,}005$. Результаты моделирования для $T_0 = 20$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 5{,}0$ — графики параметра $s(t)$ и его оценки $s_{\mathrm{est}}(t)$ показаны на рис. 5. Вычислительный эксперимент не только качественно согласуется с теоретическим анализом, но и дает дополнительную количественную информацию о скорости достижения цели. Для повышения скорости идентификации параметров можно увеличить коэффициенты усиления γ_1, γ_2 в алгоритме адаптации. Для практического применения требуется добиться работоспособности алгоритма синхронизации в условиях шумов. При учете помех в канале измерений достижимая скорость передачи информации ограничена и зависит от наибольшей частоты спектра несущего сигнала. Для уменьшения влияния помех применяют различные способы огрубления алгоритмов, например описанные в разделе 3.2, введение отрицательной обратной связи или зоны нечувствительности, фильтрацию ошибки наблюдения и т. д. Некоторые результаты по применению описанных алгоритмов при наличии шумов в канале связи приведены в [6, 49].

6. Адаптивная синхронизация при ограниченной пропускной способности каналов связи

Наконец, остановимся на новом бурно развивающемся направлении — решении задач управления и наблюдения в системах, для которых существенны ограничения на информационные потоки между отдельными элементами, т. е. ограничения, вызванные конечной пропускной способностью каналов связи.

Все более широкое распространение в настоящее время получают системы, в которых устройства управления и датчики, расположенные на расстоянии друг от друга, связаны между собой цифровыми информационными каналами с ограниченной пропускной способностью. Среди них можно указать системы управления автономными подвижными средствами (летательными и подводными аппаратами, мобильными наземными роботами, наноспутниками); мехатронными установками; системы демпфирования колебаний больших космических конструкций; системы мониторинга земной поверхности и атмосферы с помощью космических и беспилотных летательных аппаратов; системы управления агротехническими комплексами на базе сенсорных сетей, и другие. В таких системах, несмотря на то, что общая пропускная способность канала связи может быть значительной, отдельным узлам доступна лишь малая часть информации, что приводит к ошибкам квантования, которые существенно сказываются на процессе управления вследствие низкой точности получаемых данных. Дополнительную трудность создает нелинейность моделей объектов управления и наблюдения.

По существу, речь идет о необходимости создания новой широкой теории — сплава теории управления, теории связи и теории вычислений [41, 81]. Метод пассификации может применяться и для решения этого нового класса задач.

Следуя [43, 67], опишем метод адаптивной управляемой синхронизации хаотических систем через канал связи с ограниченной скоростью передачи информации в предположении, что ряд параметров генератора сигнала («ведущей системы») неизвестен, и только выход (а не состояние) генератора измеряется.

6.1. Постановка задачи и описание метода синхронизации

Так же, как и в предыдущем разделе, рассматривается нелинейная система с неопределенными параметрами («генератор», или «ведущая система»), описанная уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + \varphi_0(y) + B\sum_{i=1}^{m} \theta_i \varphi_i(y), \quad y = Cx, \tag{83}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния генератора; $y \in \mathbb{R}^l$ — вектор выходов (передаваемых через канал связи); $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_m]^{\mathrm{T}}$ — вектор параметров генератора. Вид нелинейных зависимостей $\varphi_i(\cdot)$ $(i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m)$, значения матриц A, C и вектора B считаются известными. Также считаем, что лишь значения выходного сигнал $y(t)$ (а не всего вектора состояния) могут быть измерены датчиками. Полагаем, что начальное состояние генератора $x_0 = x(0)$ также априорно неизвестно на стороне приемника (ведомой системы). Заметим, что для систем связи с модулированием хаотического сигнала, вектор неизвестных параметров θ меняется во времени, и сигнал $\theta = \theta(t)$ является передаваемым сообщением, которое должно быть восстановлено приемником. Далее предполагается, что вектор $\theta(t)$ изменяется достаточно медленно по сравнению с другими процессами в системе, поэтому θ считается неизвестным постоянным вектором параметров ведущей системы.

Адаптивный наблюдатель состоит из *настраиваемого наблюдателя* и *блока адаптации* (*адаптора*). Настраиваемый наблюдатель описывается уравнениями

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi_0(y) + B\sum_{i=1}^{m}\widehat{\theta}_i\varphi_i(y) + L(y - \widehat{y}), \quad \widehat{y} = C\widehat{x}, \tag{84}$$

где $\widehat{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния наблюдателя; $\widehat{y} \in \mathbb{R}^l$ — вектор выходных переменных; $\widehat{\theta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, — скалярные настраиваемые параметры наблюдателя, а L — матрица коэффициентов наблюдателя. Алгоритм адаптации имеет вид

$$\dot{\widehat{\theta}}_i = -\gamma_i(y - \widehat{y})\varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{85}$$

где коэффициенты $\gamma_i > 0$ — параметры алгоритма адаптации.

Настраиваемый наблюдатель (84), (85) отличается от описанного в п. 5.3 тем, что в нем отсутствует адаптивная настройка обратной связи по ошибке $(y - \widehat{y})$, вместо которой в (84) вводится линейная стационарная корректирующая связь $L(y - \widehat{y})$, что позволяет уменьшить число настраиваемых параметров адаптивного наблюдателя (73), (84) по сравнению с рассмотренным п. 5.3.

В присутствии ошибок канала связи между ведущей и ведомой подсистемами (в которые могут также входить ошибки измерений, искажения в канале связи и ошибки кодирования, вызванные конечной пропускной способностью канала связи), измеряемый выход $y(t)$ искажается, что можно представить как изменение входа наблюдателя в виде

$$\overline{y}(t) = y(t) + \delta_y(t), \tag{86}$$

где через $\delta_y(t)$ обозначено общее искажение сигнала измерений в аддитивной форме. В этом случае предлагается использовать регуляризованную версию адаптивного наблюдателя, которая описывается уравнениями

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + \varphi_0(\overline{y}) + B\sum_{i=1}^{m}\widehat{\theta}_i\varphi_i(\overline{y}) + L(\overline{y}-\widehat{y}), \qquad \widehat{y} = C\widehat{x}, \tag{87}$$

$$\dot{\widehat{\theta}}_i = -\gamma_i(\overline{y}-\widehat{y})\varphi_i(\overline{y}) - \alpha_i\widehat{\theta}_i, \quad i=1,2,\ldots,m, \tag{88}$$

где α_i — *коэффициенты регуляризации*.

Как и ранее, под синхронизацией понимается сходимость траекторий $x(t)$ и $\widehat{x}(t)$, при которой достаточно мала *ошибка синхронизации* $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$. Вследствие ошибок в канале связи, стремление вектора $e(t)$ к нулю не может быть обеспечено, и цель синхронизации имеет смысл представить в виде

$$Q \leqslant \Delta_x, \tag{89}$$

где Δ_x — заданная верхняя граница асимптотического значения ошибки, а

$$Q = \overline{\lim_{t\to\infty}}\|x(t) - \widehat{x}(t)\| \tag{90}$$

является предельной ошибкой синхронизации.

Рассматривается задача определения границ параметров системы и скорости передачи информации, при которых обеспечивается оценка (89) на качество процесса синхронизации.

6.2. Теоретические оценки точности синхронизации

Исследуем процесс синхронизации в адаптивной системе (83), (87), (88), предполагая, что в кодирующем устройстве насыщения не наступает и полная ошибка передачи в канале связи равномерно ограничена:

$$\|\delta_y(t)\| \leqslant \Delta \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0. \tag{91}$$

Для простоты изложения, рассмотрим далее случай скалярного выхода, т. е. $l = 1$ и постоянных параметров алгоритма $\gamma_i \equiv \gamma > 0$, $\alpha_i \equiv \equiv \alpha > 0$. Распространение результатов на общий случай выполняется непосредственно. Верхняя оценка границы синхронизации в рассматриваемой системе определяется на основании следующей теоремы.

Теорема 10. *Пусть выполнены следующие условия*:

А1. *Матрица коэффициентов передачи наблюдателя L выбрана так, что передаточная функция*

$$W_L(\lambda) = C(\lambda\mathbf{I} - A + LC)^{-1}B$$

строго пассивна, т. е. выполнены неравенства

$$\operatorname{Re} W_L(i\omega) > 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \geqslant 0, \qquad \lim_{\omega\to\infty}\omega^2 \operatorname{Re} W_L(i\omega) > 0. \tag{92}$$

A2. *Система* (83) *имеет ограниченное инвариантное множество* $\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^n$ *для любого* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m$, *где* Θ — *множество возможных значений неопределенных параметров, а* $x(0) \in \Omega$.

A3. *Функции* $\varphi_i(y)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ *ограничены и непрерывно-липшицевы в замкнутой* Δ*-области* Ω_θ, *т. е.*

$$|\varphi_i(y)| \leqslant L_\varphi, \quad |\varphi_i(y') - \varphi_i(y)| \leqslant L'_\varphi \tag{93}$$

для некоторых L_φ, L'_φ *и для всех* $y = Cx$, $x \in S_\Delta(\Omega_\theta)$, *где*

$$S_\Delta(\Omega_\theta) = \big\{x : \exists z \in \Omega_\theta : \|x - z\| \leqslant \Delta\big\}.$$

Тогда существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ *такие, что для любого* $\Delta > 0$ *выбор параметров алгоритма* $\alpha = \Delta^2$, $\gamma = \dfrac{C_2}{\Delta^2}$ *гарантирует достижение ошибки синхронизации* (89) *для*

$$\Delta_x = C_1 \Delta, \tag{94}$$

т. е. предельная ошибка синхронизации Δ_x *пропорциональна ошибке передачи в канале связи* Δ.

Доказательство теоремы 10 приведено в приложении.

Замечание 3. Важно отметить, что условия теоремы 10 не накладывают никаких требований на устойчивость ведущей системы (83), т. е. не препятствуют ее хаотичности.

Замечание 4. В соответствии замечанием 1 к теореме 4, вектор L удовлетворяющий условию A1 существует тогда и только тогда, когда передаточная функция $W(\lambda) = C(\lambda\mathbf{I} - A)^{-1}B$ — *гиперминимальнофазовая* (ГМФ), т. е. когда многочлен $A(\lambda)\det W(\lambda)$ — гурвицев, а матрица $G = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda W(\lambda)$ симметрична и положительно-определена, где $A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A)$. При $l = 1$ (измеряется скалярный выход), $W(\lambda) = \dfrac{B(\lambda)}{A(\lambda)}$, то $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ являются многочленами и условие ГМФ означает, что многочлен $B(\lambda)$ — гурвицев, его степень $\deg B(\lambda) = \deg A(\lambda) - 1$, а старший коэффициент положителен. Напомним, что в соответствии с теоремой Якубовича–Калмана, строгая пассивность $W_L(\lambda)$ эквивалентна существованию положительно-определенной симметричной матрицы $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ такой, что

$$PA_L + A_L^{\mathrm{T}}P < 0, \quad PB = C^{\mathrm{T}}, \quad A_L = A - LC. \tag{95}$$

Для того чтобы найти вектор L, удовлетворяющий условию A1 при наличии пассифицируемости (ГМФ) достаточно выбрать L в виде $L = -\varkappa C$, где $\varkappa > 0$ достаточно велико.

7. Заключение

Рожденные из частотной теоремы алгоритмы метода пассификации унаследовали ее процедурную простоту и ясность применения. Более чем за тридцать лет истории метод получил серьезное развитие как в плане теоретических обоснований, так и в плане практической направленности. Появились вполне реальные области применения в задачах управления полетом и передачи сообщений модуляцией хаотических сигналов. Наконец, появились экспериментальные подтверждения работоспособности адаптивных систем, свидетельствующие о практичности подхода, прочный теоретический фундамент которого был заложен в работах В. А. Якубовича.

В то же время имеется целый ряд нерешенных задач и активно развивающихся направлений. Здесь следует упомянуть недавние работы по необходимым и достаточным условиям робастной пассифицируемости при параметрической неопределенности, ограниченной по норме [82], а также работы по необходимым и достаточным условиям адаптивной пассифицируемости [83]. Остается нерешенным важный практический вопрос о выборе матрицы G, обеспечивающей пассивность или минимальнофазовость системы с передаточной функцией $GW(\lambda)$ (в известных публикациях этот вопрос решен лишь в случае нулевой относительной степени $W(\lambda)$ [89]). Много важных нерешенных задач остается в новой области — адаптивном управлении при ограниченной пропускной способности каналов связи.

В то же время результаты предыдущего раздела показывают, что частотная теорема В. А. Якубовича и основанный на ней метод пассификации являются эффективными инструментами для развития единой теории управления, вычислений и связи — актуального направления современной науки [41, 81].

Приложение

Доказательство теоремы 6. Перепишем передаточную функцию $\overline{W}(\lambda)$ в виде

$$\overline{W}(\lambda) = W(\lambda) + W_c(\lambda) = \frac{B_p(\lambda)(\lambda+\alpha)^{k-1} + \varkappa\varepsilon(\varepsilon\lambda+1)^{k-2}A(\lambda)}{A(\lambda)(\lambda+\alpha)^{k-1}} =$$

$$= \frac{B'(\lambda) + \varkappa\varepsilon(\varepsilon\lambda+1)^{k-2}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n)}{A(\lambda)(\lambda+\alpha)^{k-1}} =$$

$$= \frac{\mu b_0'\lambda^{n-1} + \mu(b_1'\lambda^{n-2} + \ldots + b_{n-1}') + \widehat{A}(\lambda)}{\mu A(\lambda)(\lambda+\alpha)^{k-1}},$$

где $\mu = 1/\varkappa$, $\widehat{A}(\lambda)$ — гурвицев многочлен,

$$\widehat{A}(\lambda)=\widehat{a}_0\lambda^n+\widehat{a}_1\lambda^{n-1}+\ldots+\widehat{a}_n,$$
$$B'(\lambda)=\Big(b_0\lambda^{n-k}+\widehat{B}(\lambda)\Big)\Big(\lambda+\alpha\Big)^{k-1},$$
$$\widehat{B}(\lambda)=b_1\lambda^{n-k-1}+\ldots+b_{n-k},\quad b_0'=b_0,\ b_1'=b_1+\lambda b_0,\ldots,b_{n-1}'=b_{n-k}\lambda^{k-1}.$$

Тогда $\overline{W}(\lambda)=\dfrac{\overline{B}(\lambda)}{\mu A_p(\lambda)(\lambda+\lambda)^{k-1}}$, где $\overline{B}(\lambda)=\overline{a}_0s^{n+k-2}+\ldots+\overline{a}_{k-2}s^n+$ $+(\overline{a}_{k-1}+\mu b_{k-1}')s^{n-1}+\ldots+\overline{a}_{n+k-2}+\mu b_{n-k}'$. Следовательно, числитель $\overline{B}(\lambda)$ передаточной функции $\overline{W}(\lambda)$ гурвицев при достаточно малом $\mu>$ >0, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим функцию Ляпунова (58), где матрицы $P=P^{\mathrm{T}}>0$ и θ_{0i}^* будут определены ниже. Вычисляя $\dot V$ для функции (58) и приводя подобные члены, получим

$$\dot V=e^{\mathrm{T}}(PA^*+(A^*)^{\mathrm{T}}P)e+\sum_{i=1}^{m}(\widehat{\theta}_{0i}-\theta_{0i}^*)^{\mathrm{T}}\big(e^{\mathrm{T}}PB_ig_i^{\mathrm{T}}(y-y^*)+\Gamma_{0i}^{-1}\dot{\widehat{\theta}}_{0i}\big),\tag{96}$$

где $A^*=A+\sum_{i=1}^m B_i\theta_{0i}^*C$. Из условия гиперминимальнофазовости и теоремы 4 следует существование матрицы $P=P^{\mathrm{T}}>0$ и вектора θ_{0i}^* таких, что
$$PA^*+(A^*)^{\mathrm{T}}P\leqslant -Q<0,\quad PB=C^{\mathrm{T}}G.$$

Выбор θ_{0i}^* в соответствии с условиями теоремы 4 дает

$$\dot V\leqslant -e^{\mathrm{T}}Qe,\tag{97}$$

где $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$. Вследствие (97) и ограниченности $x^*(t)$ получим, что $V(x(t),\widehat{\theta}(t),t)$ ограничена. Значит, $e(t)$, $\widehat{\theta}_{0i}(t)$ и $\widehat{\theta}_{1i}(t)$ также ограничены, что доказывает первое утверждение теоремы. Так как $z_i(t)$, $v_i(t)$ ограничены, $\dot e(t)$ также ограничена. Теперь заметим, что последнее утверждение теоремы следует из $\int\limits_0^\infty e^2(t)\,dt<\infty$.

Рассматривая (96) и принимая во внимание утверждение о необходимости, содержащееся в теореме 4, получим, что выбор алгоритма адаптации в виде (57) и выполнение условия гиперминимальнофазовости являются необходимыми и достаточными условиями существования у системы функции Ляпунова вида (58), для которой при $e\neq 0$ выполнено $\dot V<0$. □

Доказательство теоремы 8. Для доказательства рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(x,\widehat{\theta}_0,\widehat{\theta})\ =\ \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Pe+\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{2\gamma_i}|\widehat{\theta}_i-\theta_i|^2+|\widehat{\theta}_0-\theta_{*0}|^2/(2\gamma_0),\tag{98}$$

где матрица $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ и число θ_{*0} подлежат определению. Вычисление $\dot{V}$ показывает, что соотношение $\dot{V} < 0$ при $e \neq 0$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases}\dot{\widehat{\theta}}_0 = -\gamma_0 e^{\mathrm{T}} PBCe, \\ \dot{\widehat{\theta}}_i = -\gamma_i e^{\mathrm{T}} PB\varphi_i(x_1, x_2, t),\end{cases} \tag{99}$$

причем матрица P удовлетворяет неравенству Ляпунова $PA_* + A_*P < 0$, где $A_* = A + B\theta_0 C$. Вспоминая, что измеряемость всех величин, входящих в алгоритм адаптации, эквивалентна выполнению соотношения $PB = C^{\mathrm{T}}$, и применяя лемму 1, получим, что $\dot{V} < 0$ при $e \neq 0$ тогда и только тогда, когда алгоритм адаптации имеет вид (65), (66) и система $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ является гиперминимальнофазовой, что по условию имеет место. Поэтому функция $V(t) = V(x(t), \widehat{\theta}_0(t), \widehat{\theta}(t))$ ограничена. Следовательно, ограничены также функции $e(t)$, $\widehat{\theta}_i(t)$ (так как $\varphi_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, \ldots, N$, ограничены). Из уравнений (99) следует, что $\dot{V} = e^{\mathrm{T}}(PA_* + A_*^{\mathrm{T}}P)e \leqslant -\mu|e(t)|^2$ для некоторого $\mu > 0$. Теперь мы находимся в условиях леммы о частичной аттрактивности [25, 73] для функции V, имеющей вид (98). Поскольку из ограниченности функции $V(t)$ следует ограниченность всех переменных состояния системы, из леммы следует, что $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Для доказательства (67) заметим сначала, что из (60) и (65) следует, что $\dot{\widetilde{\theta}}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Дифференцируя (61), из ограниченности функций e, $\widetilde{\theta}$, φ_d, $\widetilde{y}$, $\widehat{\theta}_0$ и их производных по времени заключаем, что $\ddot{e}(t)$ ограничено. Из леммы Барбалата [25] следует, что $\dot{e}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда и из (65) получим, что $\widetilde{\theta}(t)^{\mathrm{T}}\varphi_d(t) \to 0$ при $t \to$ $\to \infty$. Наконец, (67) следует из условия постоянного возбуждения и леммы 1. □

Доказательство теоремы 10. Для доказательства рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(e, \widehat{\theta}) = e^{\mathrm{T}}Pe + \frac{\|\theta - \widehat{\theta}\|^2}{2\gamma}, \tag{100}$$

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$ выбирается в соответствии с условием A1 (см. также замечание 1) так, чтобы выполнялись соотношения

$$PA_L + A_LP < 0, \quad PB = C^{\mathrm{T}}, \; A_L = A - LC. \tag{101}$$

Это означает, что при достаточно малом $\lambda_0 > 0$ выполнено неравенство

$$PA_L + A_LP \leqslant -\lambda_0 P \tag{102}$$

(в действительности, матричное уравнение Ляпунова (102) имеет решение при любом $\lambda_0 < \eta$, где $\eta = \min|\mathrm{Re}\,\lambda_i(A_L)|$ — степень устойчивости матрицы A_L.)

Рассмотрим уравнение ошибки синхронизации $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$:

$$\dot{e} = A_L e + \varphi_0(y) - \varphi_0(\overline{y}) + B\sum_{i=1}^{m}\Big((\theta_i - \widehat{\theta}_i)\varphi_i(\overline{y}) + \theta_i\left(\varphi_i(y) - \varphi_i(\overline{y})\right)\Big) + L\delta_y \tag{103}$$

и вычислим скорость изменения $\dot{V}$ функции $V_t = V\big(e(t), \widehat{\theta}(t)\big)$ вдоль траекторий системы (88), (103). С учетом условий A2, A3 получим

$$\dot{V} \leqslant e^{\mathrm{T}}(PA_L + A_L^{\mathrm{T}}P)e + \|e^{\mathrm{T}}P\|L'_{\varphi}\Delta + e^{\mathrm{T}}PB(\theta - \widehat{\theta})\varphi(\overline{y}) +$$
$$+ \Big(\sum_{i=1}^{m}|\theta_i|\Big)\left|e^{\mathrm{T}}PB\right| L'_{\varphi}\Delta - (\overline{y} - y)\big(\theta - \widehat{\theta}\big)^{\mathrm{T}}\varphi(\overline{y}) + \alpha\big(\theta - \widehat{\theta}\big)^{\mathrm{T}}\widehat{\theta}.$$

С учетом неравенства $\sum\limits_{i=1}^{m}|\theta_i| \leqslant \sqrt{m}\,\|\theta\|$ и условий (101), (102) (или $e^{\mathrm{T}}PB = Ce$) получим, что

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_0 e^{\mathrm{T}}Pe + \|e^{\mathrm{T}}P\|L'_{\varphi}\Delta\big(1 + \|B\|\sqrt{m}\,\|\theta\|\big) - \alpha\|\theta - \widehat{\theta}\|^2 + \alpha\big(\theta - \widehat{\theta}\big)^{\mathrm{T}}\theta. \tag{104}$$

Введем величину $D_1 = L'_{\varphi}\big(1 + \|B\|\|\theta\|\sqrt{m}\,\big)$. С учетом элементарного квадратного неравенства

$$|a^{\mathrm{T}}b| \leqslant M\|a\|^2 + \frac{1}{4\mu}\|b\|^2, \tag{105}$$

выполненного для $a, b \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$, получим при $a = \theta - \widehat{\theta}$, $b = \theta$:

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_0 e^{\mathrm{T}}Pe + \|e^{\mathrm{T}}P\|D_1\Delta - \alpha\big(1 - M\big)\|\theta - \widehat{\theta}\|^2 + \frac{\alpha}{4\mu}\|\theta\|^2. \tag{106}$$

Введем $\lambda_{\max}(P)$ и $\lambda_{\min}(P)$ как минимальное и максимальное собственные числа положительно определенной матрицы P. Применим неравенство (105) ко второму слагаемому уравнения (104) при $\mu = \lambda_0\mu_1/\lambda_{\max}(P)$. Используя обозначение $\beta = \min\big\{\lambda_0(1 - \mu_1), 2\alpha\gamma(1 - \mu)\big\}$ и учитывая, что $\|Pe\|^2 \leqslant e^{\mathrm{T}}Pe\lambda_{\max}(P)$ получим

$$\dot{V} \leqslant -\beta V + \frac{D_1^2\lambda_{\max}(P)}{4\lambda_0\mu_1}\Delta^2 + \frac{\alpha}{4\mu}\|\theta\|^2 \tag{107}$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{t\to\infty} V(t) \leqslant D/\beta,$$

где $D = \dfrac{D_1^2\lambda_{\max}(P)}{4\lambda_0\mu_1}\Delta^2 + \dfrac{\alpha}{4\mu}\|\theta\|^2$.

Для упрощения последнего выражения выберем $\mu_1 = \mu = 1/2$ и $\gamma = \lambda_0/2\alpha$. Тогда $\beta = \lambda_0/2$ и выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} V(t) \leqslant \frac{D_1^2 \lambda_{\max}(P)}{\lambda_0^2}\Delta^2 + \frac{\alpha}{2}\|\theta\|^2.$$

Окончательно, учитывая что $\|e\|^2 \leqslant \dfrac{e^{\mathrm{T}}Pe}{\lambda_{\min}(P)}$ и $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ при $a > 0$, $b > 0$, приходим к выражению

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|e(t)\| \leqslant \frac{D_1}{\lambda_0}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\,\Delta + \sqrt{\frac{\alpha}{2\lambda_{\min}(P)}}\,\|\theta\|,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Список литературы

1. *Андриевский Б. Р.* Синтез адаптивных систем слежения методом матричных неравенств // Оптимальные и адаптивные системы. — Фрунзе: Фрунз. политехн. ин-т, 1979. — С. 20–25.
2. *Андриевский Б. Р., Арзелье Д., Фрадков А. Л., Посель Д.* Адаптивное управление по тангажу стендом «Геликоптер» лаборатории LAAS // Тр. XII Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. ГНЦ ЦНИИ «Электроприбор». 2005. — С. 33–39.
3. *Андриевский Б. Р., Стоцкий А. А., Фрадков А. Л.* Алгоритмы скоростного градиента в задачах адаптации и управления // АиТ. — 1988. — № 12. — С. 3–39.
4. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. — СПб.: Наука, 1999.
5. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод шунтирования в задаче адаптивного управления неустойчивыми и неминимально-фазовыми объектами // Междунар. конф. по проблемам управления, посв. 60-летию ИПУ РАН. Тез. докл. Москва, 1999. Т. 1. — С. 153–154.
6. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. Учеб. пособ. — СПб.: Наука, 2001.
7. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. — 2006. — № 11. — С. 3–37.
8. *Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л., Посель Д.* Адаптивное управление мехатронным стендом «Вертолет» // Мехатроника, автоматизация, управление. — М.: «Новые технологии». 2007.
9. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А., и др.* Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления // АиТ. — 1996. — № 10. — С. 3–40.
10. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
11. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. — М.: Наука, 1994.

12. *Бобцов А. А., Николаев Н. А.* Синтез управления нелинейными системами с параметрической и функциональной неопределенностью на основе теоремы Фрадкова // АиТ. — 2005. — № 1. — С. 118–129.
13. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нельнейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
14. *Бондарко В. А., Лихтарников А. Л., Фрадков А. Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами // АиТ. — 1979. — № 12. — С. 95–103.
15. *Бондарко В. А., Фрадков А. Л.* Необходимые и достаточные условия пассифицируемости линейных распределенных систем // АиТ. — 2003. — № 4. — С. 3–17.
16. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 2. Теория нелинейной модуляции. — М.: Сов. Радио, 1975. — 334 с.
17. *Гусев С. В., Лихтарников А. Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. — 2006. — № 10. [1]
18. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. — М.: Наука, 1981.
19. *Дмитриев А. С., Панас А. И., Старков С. О.* Динамический хаос как парадигма современных систем связи // Зарубежная радиоэлектроника. — 1997. — № 10. — С. 4–26.
20. *Дружинина М. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Методы адаптивного управления нелинейными объектами по выходу // АиТ. — 1996. — № 2. — С. 3–33.
21. *Земляков С. Д., Рутковский В. Ю.* Синтез алгоритмов изменения перестраиваемых коэффициентов самонастраивающихся системах с эталонной моделью // ДАН СССР. — 1967. —Т. 174, № 1. — С. 47–49.
22. *Леонов Г. А., Смирнова В. Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации. — СПб.: Наука, 2000.
23. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении. — М.: Мир, 1978.
24. *Матвеев А. С.* Теория оптимального управления в работах В. А. Якубовича // АиТ. — 2006. — № 10. [2]
25. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными системами. — СПб.: Наука, 2000.
26. *Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // АиТ. — 1994. — № 9. — С. 3–26.
27. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Земляков С. Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление. — М.: Наука, 1980.
28. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Крутова И. Н., Земляков С. Д.* Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем. — М.: Машиностроение, 1972.
29. *Пиковский А. Б., Розенблюм М. Б., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. — М.: Техносфера, 2003.

[1] См. также настоящий сборник, с. 77.

[2] См. также настоящий сборник, с. 534.

30. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гомкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1974.
31. *Попов А. М., Фрадков А. Л.* Адаптивное управление сингулярно-возмущенными объектами / Тр. XI Всес. сов. по пробл. управления. Ереван, 1983. — С. 166.
32. *Попов В. М.* Об одной задаче теории абсолютной устойчивости автоматических систем // АиТ. — 1964. —Т. 25, № 9. — С. 1129–1134.
33. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981.
34. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.
35. *Фрадков А. Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // АиТ. — 1974. — № 12. — С. 96–103.
36. *Фрадков А. Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 436–445.
37. *Фрадков А. Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. — 1979. — Т. 40, № 9. — С. 1333–1342.
38. *Фрадков А. Л.* Синтез адаптивных систем управления нелинейными сингулярно-возмущенными объектами // АиТ. — 1987. — № 6. — С. 100–110.
39. *Фрадков А. Л.* Адаптивное управление сложными системами. — М.: Наука, 1990.
40. *Фрадков А. Л.* Адаптивная стабилизация минимально-фазовых объектов с векторным входом без измерения производных от выхода // Докл. РАН. — 1994. —Т. 337, № 5. — С. 592–594.
41. *Фрадков А. Л.* Настоящее и будущее автоматического управления // Новости Академии навигации и управления движением. — № 4 (20). — СПб.: ФГУП ГНЦ РФ «Электроприбор», 2006. — С. 1–2.
42. *Фрадков А. Л., Андриевский Б. Р.* Синтез робастного автопилота на основе метода шунтирования // XI Санкт-Петерб. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2004. —С. 36–38.
43. *Фрадков А. Л., Андриевский Б. Р.* Адаптивная синхронизация одного класса нелинейных систем при информационных ограничениях // Изв. вузов. Приборостроение. — 2007.
44. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1978. —Т. 11. — С. 2086–2088.
45. *Цыкунов А. М.* Адаптивное управление объектами с последействием. — М.: Наука, 1984.
46. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. —Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
47. *Якубович В. А.* Периодические и почти периодические предельные режимы регулируемых систем с несколькими нелинейностями // ДАН СССР. — 1966. —Т. 171, № 3. — С. 533–536.

48. *Abdallah C., Dorato P., Karni S.* SPR design using feedback / Proc. Amer. Control Conf. — 1990. — P. 1742–1743.
49. *Andrievsky B. R.* Adaptive synchronization methods for signal transmission on chaotic carriers // Mathematics and Computers in Simulation. — 2002. — V. 58, Issue 4–6. — P. 285–293.
50. *Andrievsky B. R., Churilov A. N., Fradkov A. L.* Feedback Kalman–Yakubovich Lemma and its applications to adaptive control / Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Control, Kobe, 11–13 Dec., 1996.
51. *Andrievsky B. R., Fradkov A. L.* Adaptive controllers with Implicit Reference Models based on Feedback Kalman–Yakubovich Lemma / Proc. 3rd IEEE Conf. Control Appl. Glasgow, 1994. — P. 1171–1174.
52. *Andrievsky B. R., Fradkov A. L.* Combined adaptive autopilot for an UAV flight control / Proc. IEEE Conf. Control Appl. Glasgow, Sept. 2002. — P. 290–291.
53. *Andrievsky B. R., Fradkov A. L.* Combined adaptive flight control system / Proc. 5th Int. ESA Conf. Spacecraft Guidance, Navigation and Control Syst. Frascati, Italy, 2002. ESA-516, Feb. 2003. — P. 299–302.
54. *Andrievsky B. R., Fradkov A. L.* UAV guidance system with combined adaptive autopilot / Proc. IASTED Int. Conf. «Intelligent Systems and Control» (ISC 2003). 2003. Salzburg, Austria. ACTA Press. — P. 91–93.
55. *Andrievsky B., Fradkov A. L., Peaucelle D.* Adaptive control experiments for LAAS “Helicopter” benchmark / Proc. 2nd Int. Conf. “Physics and Control”, IEEE, St.Petersburg, 2005. — P. 760–766.
56. *Andrievsky B. R., Fradkov A. L., Stotsky A. A.* Shunt compensation for indirect sliding-mode adaptive control / Proc. 13th IFAC World Congress, San Francisco, July 1996. V. K. — P. 193–198.
57. *Andrievsky B., Peaucelle D., Fradkov A. L.* Adaptive control of 3DOF motion for LAAS Helicopter Benchmark: Design and experiments // Proc. Amer. Control Conf. 2007.
58. *Apkarian J.* Internet control // Circuit Cellar, Sept. 1999, Iss. 110. Статья доступна на сайте: http://www.circuitcellar.com.
59. *Belykh V. N., Belykh I. V., Hasler M.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems // Phys. Rev. E. — 2000. — V. 62, № 5. — P. 6332–6345.
60. *Byrnes C. I., Isidori A., Willems J. C.* Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1991. — V. AC-36. — P. 1228–1240.
61. *Byrnes C. I., Willems J. C.* Adaptive stabilization of multivariable linear systems / Proc. 23rd IEEE Conf. Decision and Control, Las Vegas, Nevada, 1984. — P. 1574–1577.
62. *Efimov D. V., Fradkov A. L.* Adaptive tuning to bifurcation for time-varying nonlinear systems // Automatica. — 2006. — V. 42, № 3. — P. 417–425.
63. *Fradkov A. L.* Nonlinear adaptive control: regulation, tracking, oscillations / Proc. 1st IFAC Workshop «New trends in design of control systems.» Smolenice, 1994. — P. 426–431.
64. *Fradkov A. L.* Passification of nonsquare linear systems and Yakubovich-Kalman-Popov Lemma // Europ. J. Control. — 2003. — No 6. — P. 573–582.

65. *Fradkov A. L., Andrievsky B. R.* Shunting method for control of homing missiles with uncertain parameters / Prepr. 16th IFAC Symp. on Automatic Control in Aerospace (ACA'2004). St.Petersburg. Russia. 2004. — V. 2. — P. 33–38.
66. *Fradkov A. L., Andrievsky B. R.* Combined adaptive controller for UAV guidance // Europ. J. Control. — 2005. — V. 11, № 1. — P. 71–79.
67. *Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.* Adaptive observer-based synchronisation of chaotic systems in presence of information constraints / Prepr. 1st IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems «Chaos 06», Reims, France, 2006.
68. *Fradkov A. L., Druzhinina M. V.* Output-feedback nonlinear adaptive control with implicit reference model / Proc. Amer. Control Conf. 2001.
69. *Fradkov A. L., Hill D. J.* Exponential feedback passivity and stabilizability of nonlinear systems // Automatica. — 1998. — № 6. — P. 697-703.
70. *Fradkov A. L., Markov A. Yu.* Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification // IEEE Trans. Circ. Syst. I. — 1997. — № 10. — P. 905–912.
71. *Fradkov A. L., Nijmeijer H., Markov A.* Adaptive observer-based synchronization for communications // Intern. J. Bifurcat. Chaos. — 2000. — V. 10, № 12. — P 2807–2814.
72. *Fradkov A. L., Nikiforov V. O., Andrievsky B. R.* Adaptive observers for nonlinear nonpassifiable systems with application to signal transmission // Proc. 41th IEEE Conf. Dec. Control Las Vegas, 2002. — P. 4706–4711.
73. *Fradkov A. L., Pogromsky A. Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. — Singapore: World Scientific, 1998.
74. *Huang C. H., Ioannou P. I., Maroulas J., Safonov M. G.* Design of strictly positive real systems using constant output feedback // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, № 3. — P. 569–573.
75. *Gu G.* Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control // IEEE Trans Automat. Control. — 1990. —V. 35, No 8. — P. 925–927.
76. IEEE Trans. Circ. Syst. Special issue on applications of chaos in modern communication systems / Ed. L. Kocarev, G.M. Maggio, M. Ogorzalek, et al. — 2001. — V. 48. — No 12.
77. *Ilchmann A.* Non-identifier-based adaptive control of dynamical systems: A survey // IMA J. Math. Control Info. — 1991. —No 8. — P. 321–366.
78. International Journal of Circuit Theory and Applications. Special issue: Communications, Information Processing and Control Using Chaos / Eds. M. Hasler, J. Vandewalle. — 1999. — V. 27, No 6.
79. *Ioannou P. A. Kokotović P. V.* Adaptive Systems with Reduced Models. — Berlin: Springer-Verlag, 1983.
80. *Landau J. D.* Adaptive control systems. The model reference approach. — N.Y.: Dekker, 1979.
81. *Murray R. M., Astrom K. J., Boyd S. P., Brockett R. W., Stein G.* Future directions in control in an information-rich world // IEEE Control Systems Magazine. — 2003. — Vol. 23, № 2. — P. 20–33.

82. *Peaucelle D., Fradkov A., Andrievsky B.* Robust passification via static output feedback — LMI results / Prepr. 16th IFAC World Congress on Aut. Control Prague, 2005.
83. *Peaucelle D., Fradkov A., Andrievsky B.* Passification-based adaptive control : Robustness issues / Prepr. 5th IFAC Symp. Robust Control Design (ROCOND'06). Toulouse, France, July 5–7, 2006.
84. *Pecora L. M., Carroll T. L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. — 1990. — V. 64. — P. 821–823.
85. *Rabinovich M. I., Abarbanel H. D. I., Huerta R., Elson R., Selverston A. I.* Self-regularization of chaos in neural systems: Experimental and theoretical results // IEEE Trans. Circ. Syst. I. — 1997. — V. 44. — P. 997–1005.
86. *Saberi A., Kokotović P., Sussmann H.* Global stabilization of partially linear composite systems // SIAM J. Control Optim. — 1990. —V. 28. — P. 1491–1503.
87. *Seron M. M., Hill D. J., Fradkov A. L.* Adaptive passification of nonlinear systems // Proc. 33rd Conf. Dec. Control, CDC, 1994. — P. 190–195.
88. *Stotsky A. A.* Combined adaptive and variable structure control // Variable Structure and Lyapunov Control, (Ed: A.S.I. Zinober). — London: Springer-Verlag, 1994. — P. 313–333.
89. *Sun W., Khargonekar P., Shim D.* Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — V. 39, № 10. — P. 2034–2046.
90. *Toker O., Ozbay H.* On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback / Proc. Amer. Control Conf. 1995. — P. 2525–2526.
91. *Weiss H., Wang Q., Speyer J. L.* System characterization of positive real conditions // IEEE Trans. Automat. Control. — 1994. — Vol. 39, No 3. — P. 540–544.
92. *Willems J. C.* Dissipative dynamical systems, Part I: General theory // Arch. Rational Mech. Anal. — 1972. — V. 45. — P. 321–351.
93. *Yuan J., Wonham W.* Probing signals for model reference identification // IEEE Trans. Automat. Control. — 1977. — V. AC-22. — P. 530–538.

Глава 5

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

А. Е. Барабанов[†]

Инвариантность и полиномиальный синтез стратегий в линейно-квадратичной игре[*]

Аннотация: изложен новый алгоритм решения задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления в случае полной информации, совмещающий спектральный и матричный методы. Введено понятие полиномиального оператора Лурье–Риккати. Представлена параметризация всех решений уравнения объекта управления при помощи скрытых переменных в рамках поведенческого описания Я. Виллемса. Ядро полиномиального оператора Лурье–Риккати разложено в прямую сумму подпространств, аналогичных жордановым блокам. Показано, что найденная В. А. Якубовичем в 1970 г. седловая точка линейно-квадратичной игры дает решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления для значительного класса объектов управления.

1. Введение

Важной составной частью систем управления или сопровождения динамических объектов является подсистема подавления постоянно действующих возмущений при помощи подходящего регулятора или

[†]) Санкт-Петербургский государственный университет.

[*]) Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-00084). Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 10. — С. 20–47.

компенсатора. Проблема полного подавления возмущения или инвариантности выхода к этому возмущению интенсивно изучалась одновременно с созданием теории автоматического управления в 30–40-е годы. Корректно определенные регуляторы и способы компенсации возмущений обсуждались в работах А. В. Михайлова, Г. В. Щипанова, Н. Н. Лузина, А. И. Кухтенко и др. [4, 5, 7]. Из результатов работ В. А. Якубовича [11] следует, что полное подавление возмущения, как правило, невозможно.

В связи с тем, что возмущение в общем случае влияет на выход при любом допустимом регуляторе, возникла задача численного измерения этого влияния и затем минимизации полученной характеристики влияния в классе допустимых регуляторов. Методы аналитического конструирования регуляторов А. М. Летова и решение линейно-квадратичной стохастической задачи оптимального управления были важными шагами в этом направлении. Для линейных стационарных объектов управления общего вида В. А. Якубович ввел понятие реактивности [10] как степени неинвариантности выделенного выхода системы относительно выделенного входа. Минимизация этого показателя сводится к линейно-квадратичной задаче управления и к развитым методам уравнений Лурье или к спектральной теории Н. Винера и А. Н. Колмогорова. В 1990-е годы В. А. Якубович вернулся к исследованию свойств инвариантных систем, опубликовав ряд работ по синтезу универсальных регуляторов (см. обзор [6]).

Другим показателем меры влияния возмущения на выход объекта является равномерно-частотный показатель [3], а его минимизация сводится к задаче $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления. Минимальное значение равномерно-частотного показателя является одновременно ценой игры в соответствующей линейной задаче управления с двумя игроками, интересы которых противоположны.

Полное исследование игровой задачи в классе произвольных стабилизирующих пар стратегий обоих игроков было выполнено В. А. Якубовичем [9] на основе частотной теоремы. Лишь через 10 лет эта же задача, но в несколько измененном классе стратегий появилась в работах американских авторов [23] и вскоре получила название теории $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления. В дальнейшем связь между линейно-квадратичной игрой и теорией $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления исследовалась во многих статьях и монографиях [16].

В разделе 2 данной работы показано, что найденная В. А. Якубовичем седловая точка линейно-квадратичной игры дает решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления для значительного класса объектов управления.

Известно, что решение линейно-квадратичных задач можно проводить либо матричным методом в пространстве состояний, что сводится к уравнениям Лурье–Риккати [3], либо спектральным методом, включающим операции с матричными многочленами [20] для систем, описанных в форме вход–выход. В разделе 3 эти методы совмещены и вводятся понятия полиномиального уравнения и оператора Лурье–Риккати. Основной вычислительной операцией становится факторизация матричных многочленов, разработанная М. С. Дэвисом [18], В. А. Якубовичем [8], Х. Квакернааком [20] и др. [2, 17].

В разделе 4 обобщен Ф-подход в теории $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления [15], который дает полное решение задачи субоптимального управления для систем в форме вход–выход без вспомогательных полиномиальных преобразований и без перехода к уравнению в пространстве состояний. Метод включает спектральную факторизацию и решение одного линейного полиномиального уравнения, в котором определяются непосредственно коэффициенты регулятора. В работе [14] идея Ф-подхода распространена на нестационарные системы и на уравнения с запаздываниями. Существенную роль в решении нестационарных игровых задач на бесконечном промежутке времени играет абстрактный принцип максимума, предложенный В. А. Якубовичем [6].

Численное решение задачи расчета $\mathcal{H}^\infty$–оптимального регулятора, реализующего наименьшее значение равномерно-частотного показателя, сталкивается с серьезными трудностями. В частности, стандартное уравнение Лурье–Риккати может не иметь решений [3, 19]. Из теоремы 2 в разделе 4 следует, что такая сингулярность связана с тем, что полиномиальный оператор Лурье–Риккати не взаимно однозначен. В разделе 5 проведено полное исследование ядра этого оператора в вырожденном случае. Доказано, что оно является прямой суммой корневых подпространств, аналогичных жордановым блокам.

В разделе 6 дано общее решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления при помощи полиномиальных операторов Лурье–Риккати.

Доказательства утверждений включены в основной текст статьи только в том случае, когда они относительно короткие и информативные. В остальных случаях они перенесены в приложение.

2. Инвариантность и игровая линейно-квадратичная задача управления

Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + c(p)v(t), \qquad t \geqslant 0,$$

где $p = d/dt$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ — выход объекта, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управление, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ — возмущение, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — матричные многочлены, матрица a — квадратная невырожденная. Будем предполагать, что рациональные матрицы $W_{y/u}(z) = a(z)^{-1}b(z)$ и $W_{y/v}(z) = a(z)^{-1}c(z)$ — правильные, а пара матриц (a, b) несократима слева [1].

Решением уравнения объекта называется тройка функций $x(\cdot) = \operatorname{col}(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \in L^2_n(0,\infty)$, удовлетворяющая уравнению объекта при $t > 0$, где $n = n_y + n_u + n_v$ — размерность процесса x. *Решением с нулевыми начальными данными* называется такое решение, которое можно продолжить нулем на $(-\infty, 0)$, и при этом уравнение объекта будет выполнено в точке $t = 0$ и, поэтому, на всей оси.

Задача синтеза инвариантных систем состоит в том, чтобы за счет выбора управления u скомпенсировать влияние возмущения v на выход y. Методы компенсации возмущений изучались в работах многих авторов. В. А. Якубович [11] установил необходимые и достаточные условия, при которых полная компенсация возможна в классе линейных обратных связей.

В случае, когда полная компенсация невозможна, требуется уменьшить влияние возмущения v на выход y. За счет сильной обратной связи в некоторых системах управления можно обеспечить сколь угодно малый уровень такого влияния [12]. В общем случае В. А. Якубович [10] предложил выбрать в качестве меры влияния v на скалярный выход y норму передаточной функции замкнутой системы, названную реактивностью:

$$R_{y/v} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |W_{y/v}(i\omega)|^2 \, d\omega,$$

где $W_{y/v}$ — передаточная функция замкнутой системы от v к y. Задача минимизации реактивности сводится к классической линейно-квадратичной задаче оптимального управления. В [10] описаны способы минимизации этого функционала в классах физически реализуемых, строго реализуемых и структурно реализуемых регуляторов.

Другой мерой остаточного влияния возмущений на выход объекта может быть выбран равномерно-частотный показатель

$$\|W_{y/v}\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |W_{y/v}(i\omega)|,$$

который указывает гарантированный уровень компенсации возмущений равномерно по всем частотам. Минимизация этого показателя известна как задача $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления.

Равномерно-частотный показатель $\|W_{y/v}\|_\infty$ является мерой неинвариантности выхода y к возмущению v. В оптимальных по этому показателю замкнутых системах могут возникать неоправданно большие значения управляющего воздействия. Поэтому оптимизационная задача обычно ставится как условная при ограничениях на u. При помощи множителя Лагранжа она сводится к минимизации квадратичной формы, в которой за счет нормировки коэффициент при u может быть взят единичным. Задачу минимизации равномерно-частотного функционала

$$J = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |W_{y/v}(i\omega)^* Q_0 W_{y/v}(i\omega) + W_{u/v}(i\omega)^* W_{u/v}(i\omega)|$$

можно заменить на субоптимизацию: обеспечить выбором допустимого регулятора неравенство $J \leqslant \gamma^2$ при заданном уровне γ.

Минимизация показателя J является одновременно количественной оптимизацией системы по свойству инвариантности к возмущению v.

Эта же задача может быть поставлена как игровая. При фиксированном уровне γ неравенство $J \leqslant \gamma^2$ равносильно неравенству $\mathcal{F}_\gamma(y,u,v) \leqslant \leqslant 0$ на всех решениях замкнутой системы с нулевыми начальными данными, где

$$\mathcal{F}_\gamma(y,u,v) = \int\limits_0^\infty F_\gamma(y(t),u(t),v(t))\,dt, \quad F_\gamma(y,u,v) = y^* Q_0 y + |u|^2 - \gamma^2|v|^2.$$

Выход y объекта управляется двумя игроками: игрок u стремится минимизировать, а игрок v — максимизировать функционал $\mathcal{F}_\gamma$. Классы допустимых стратегий в этой игре можно выбирать по-разному, что влияет на решение задачи.

Объект управления всегда можно эквивалентным преобразованием записать в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot X(t) &= AX(t) + Bu(t) + Cv(t), \\ y(t) &= e^T X(t). \end{aligned}$$

В такой постановке задача впервые была рассмотрена В. А. Якубовичем [9] в классе следующих допустимых стратегий: $u(t) = U(X(t),t)$, $v(t) = V(X(t),t)$, где U и V — измеримые функции, такие, что решение замкнутой системы существует. Значение функционала качества при заданных стратегиях (U,V) обозначим $J(U,V)$. Начальное данное фиксировано, обозначим его $X(0) = X_0$.

Допустимая стратегия (U^0,V^0) называется *седловой точкой* данной линейно-квадратичной игры, если

$$J(U^0,V) \leqslant J(U^0,V^0) \leqslant J(U,V^0)$$

для любых функций U и V, для которых стратегии (U^0,V) и (U,V^0) допустимы.

При помощи частотной теоремы В. А. Якубович указал способ определения седловой точки в данной игре, если выполнено следующее частотное условие: квадратичная форма

$$\mathcal{G}_\omega(u,v) = F_\gamma(W_{y/u}(i\omega)u + W_{y/v}(i\omega)v,\ u,\ v)$$

имеет одинаковую сигнатуру при всех вещественных ω. Если же количество положительных или количество отрицательных собственных чисел этой квадратичной формы меняется на множестве $\{\omega\}$ положительной меры, то седловой точки не существует.

Позднее аналогичная линейно-квадратичная игра с другим классом допустимых стратегий была названа задачей $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления. В этой задаче предполагается неравноправность и, в то же время, независимость стратегий каждого игрока. Игрок v выбирает программную стратегию, т. е. функцию $v(\cdot) \in L^2_{n_v}(0,\infty)$. Игрок u несет ответственность за устойчивость замкнутой системы, но может выбирать произвольные обратные связи. Будем предполагать, что класс допустимых стратегий игрока u есть множество линейных форм $\mathcal{L}$ размерности n_u от функций y, u, v и их производных, таких, что уравнение $\mathcal{L} = 0$ вместе с уравнением объекта однозначно задает процесс $x(\cdot) = (y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ в $L^2_n(0, \infty)$ при любой функции $v \in L^2_{n_v}(0, \infty)$ и при нулевых начальных данных.

Задача оптимизации состоит в поиске минимального положительного значения $\gamma = \gamma^0$, для которого существует допустимая стратегия $\mathcal{L}$, обеспечивающая условие $\mathcal{F}_\gamma \leqslant 0$ для любой функции $v \in L^2_{n_v}(0, \infty)$. Общая задача $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления ставится для произвольного числа $\gamma \geqslant \gamma^0$ и состоит в описании всех допустимых стратегий $\mathcal{L}$, для которых $\mathcal{F}_\gamma \leqslant 0$ для любой функции $v \in L^2_{n_v}(0, \infty)$.

В. А. Якубовичем доказано, что существование седловой точки необходимо для разрешимости задачи $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления [9]. Минимальное значение $\gamma > 0$, для которого квадратичная форма $\mathcal{G}_\gamma$ не меняет почти везде сигнатуру, обозначим $\gamma_{\rm abs}$. Таким образом, $\gamma^0 \geqslant \gamma_{\rm abs}$.

Пусть $\gamma > \gamma_{\rm abs}$ и (U^0, V^0) — седловая точка в линейно-квадратичной игре. В [9] доказано, что U^0 — линейная стационарная функция. Если уравнение $u = U^0(X)$ обеспечивает устойчивость замкнутой системы при $v = 0$, то это есть субоптимальная стратегия в задаче $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления и $\gamma^0 \leqslant \gamma$. Для многих объектов управления (положительной меры в пространстве коэффициентов) это условие выполнено для всех $\gamma > \gamma_{\rm abs}$. Поэтому для таких объектов $\gamma^0 = \gamma_{\rm abs}$, а найденная В. А. Якубовичем стратегия U^0 решает задачу $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления в полном объеме.

Если же при некотором $\gamma > \gamma_{\rm abs}$ обратная связь U^0 не стабилизирует объект управления, то $\gamma^0 > \gamma_{\rm abs}$ и решения игровой задачи и задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления различны.

3. Полиномиальный оператор Лурье–Риккати

Алгоритм минимизации реактивности как количественной меры неинвариантности замкнутой системы был сформулирован В. А. Якубовичем в терминах уравнений Лурье [10]. Аналогичные уравнения в полиномиальной форме, как доказано в данной статье, играют центральную роль в минимизации равномерно-частотного показателя неинвариантности или задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления для многомерных объектов, уравнения которых записаны в форме вход–выход. Решение основано на полиномиальных методах с ограничениями на степени матричных многочленов [2]. В данном разделе сначала вводятся необходимые обозначения, затем определяется полиномиальный оператор Лурье–Риккати, который решает соответствующее полиномиальное матричное уравнение.

3.1. Матричные многочлены с ограничениями на степени строк

В каждом из n_y уравнений объекта выделим наивысшую производную переменной y. Обозначим набор порядков этих производных $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n_y})$. С мультииндексом μ свяжем диагональную матрицу $z^\mu = \mathrm{diag}\{z^{\mu_k}, 1 \leqslant k \leqslant n_y\}$. Матрица старших коэффициентов многочлена a определяется как

$$a_\mu^\infty = \lim_{z\to\infty} z^{-\mu} a(z).$$

При помощи эквивалентных преобразований строк и линейной замены переменных всегда можно добиться того, чтобы матрица a_μ^∞ была единичной порядка n_y [2]. Будем считать, что это сделано. Определим множество $\mathcal{P}_\mu$ матричных многочленов с n_y строками условием

$$\mathcal{P}_\mu = \{p(z) \; : \; \lim_{z\to\infty} z^{-\mu} p(z) = 0\}.$$

Тогда матричные функции $a(z) - z^\mu$, $b(z)$ и $c(z)$ входят в множество $\mathcal{P}_\mu$. Подмножество векторных функций из $\mathcal{P}_\mu$ обозначим $\mathcal{P}_\mu^1$.

Если f — рациональная матричная функция, то f^* обозначает функцию, определяемую равенством $f^*(z) = f(-z)^T$.

Следуя поведенческому описанию систем Я. Виллемса [22], введем вектор явных переменных объекта управления $x = \mathrm{col}(y, u, v)$, а также матричный многочлен $R = (a, -b, -c)$ и матрицу $Q = \mathrm{diag}\{Q_0, I_{n_u}, -\gamma^2 I_{n_v}\}$. Без ограничения общности будем считать, что матрица Q_0 невырождена.

Тогда уравнение объекта можно записать в виде $R(p)x(t) = 0$, а квадратичную форму в показателе качества — в виде $F_\gamma(y, u, v) = x^* Q x$. Такая запись удобна для алгебраических преобразований системы. В ней отсутствуют различия между переменными управления, возмущения и выхода объекта.

Строгое частотное условие В. А. Якубовича — постоянство сигнатуры квадратичной формы $\mathcal{G}_\omega(u, v)$ — можно записать в полиномиальной форме [2]: квадратные матрицы размера n_y

$$a(z) Q_0^{-1} a^*(z) + b(z) b^*(z) - \gamma^{-2} c(z) c^*(z) = R(z) Q^{-1} R^*(z)$$

имеют одинаковую сигнатуру при всех $z = i\omega$ на мнимой оси. При этом условии в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования факторизации симметричного матричного многочлена, полученными В. А. Якубовичем [8], существует такой матричный гурвицев многочлен $\Pi(z)$ размера $n_y \times n_y$, что

$$R Q^{-1} R^* = \Pi^* Q_0^{-1} \Pi.$$

Далее будем предполагать, что такая факторизация существует для всех $\gamma > \gamma_{\mathrm{abs}}$ и что выполнено ограничение на степени: $\Pi^*(z) - z^\mu \in \mathcal{P}_\mu$. В [2, 13] доказано, что факторизация с ограничением на степени возможна тогда и только тогда, когда сходится алгоритм последовательно-го сокращения множителей Дэвиса–Каллиера–Квакернаака [17, 18, 20]. Для неотрицательно определенной матрицы Q_0 такая факторизация существует для всех $\gamma > \gamma_{\mathrm{abs}}$.

В правильно поставленной задаче оптимального управления факторизуемая матрица должна быть неотрицательно определена при $\gamma = \infty$. Будем предполагать, что выполнено усиленное условие

$$a(i\omega)Q_0^{-1}a^*(i\omega) + b(i\omega)b^*(i\omega) > 0 \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}.$$

3.2. Операции над матричными многочленами и рациональными функциями

Каждую рациональную функцию f любой размерности можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции. Этот многочлен будем обозначать $[f]_+$, а правильную рациональную функцию — $[f]_-$. Очевидно, что $f = [f]_+ + [f]_-$.

Для произвольной рациональной функции f ее вычет в бесконечности с противоположным знаком будем обозначать

$$\{f\}_\infty = -\operatorname{res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} z[f]_-(z).$$

В частности, если у скалярной рациональной функции f степень знаменателя больше степени числителя на число $k \geqslant 2$, то $\{f\}_\infty = 0$.

В множестве векторных многочленов, имеющих одинаковое количество строк, введем скалярное произведение, порожденное векторами коэффициентов:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{N} f_k^T g_k, \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{N} f_k z^k, \qquad g(z) = \sum_{k=0}^{N} g_k z^k,$$

которое также можно выразить в виде

$$\langle f, g\rangle = \{\widetilde{f}(z)g(z)\}_\infty = \{z^{-1}f(z^{-1})^T g(z)\}_\infty.$$

Распространим эту операцию также на пары матричных многочленов, имеющих одинаковое количество строк. Очевидно, что $\langle f, g\rangle^T = \langle g, f\rangle$.

Если p — матричный многочлен, то $\widetilde{p}$ обозначает функцию, определяемую равенством $\widetilde{p}(z) = z^{-1}p(z^{-1})^T$.

3.3. Полиномиальный оператор и полиномиальное уравнение Лурье–Риккати

С каждым многочленом $s \in \mathcal{P}_\mu$ свяжем правильную рациональную матричную функцию

$$\phi s = [R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+]_-.$$

Здесь и далее последовательность операций в $\widetilde{s}^*$ понимается как $(\widetilde{s})^*$.

Лемма 1. *Отображение ϕ взаимно однозначно на $\mathcal{P}_\mu$.*

Лемма 2. *Пусть $s \in \mathcal{P}_\mu$. Тогда рациональная функция $f_s = RQ^{-1}(\phi s)$ является многочленом из множества $\mathcal{P}_\mu$.*

Доказательство. Из определений операций $[\cdot]_-$ и $[\cdot]_+$ и уравнения факторизации следует, что рациональная функция

$$\begin{aligned} f_s &= RQ^{-1}(\phi s) = RQ^{-1}\big(R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+ - [R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+]_+\big) \\ &= \Pi^* Q_0^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+ - RQ^{-1}[R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+]_+ \end{aligned}$$

является многочленом как сумма и произведение многочленов. С другой стороны, очевидно, что

$$\lim_{z\to\infty} z^{-\mu} f_s(z) = \Big(\lim_{z\to\infty} z^{-\mu} R(z)\Big)\, Q^{-1}\left(\lim_{z\to\infty} (\phi s)(z)\right) = 0,$$

и поэтому $f_s \in \mathcal{P}_\mu$. □

Определение 1. Каждому матричному многочлену $s \in \mathcal{P}_\mu$ поставим в соответствие матричный многочлен

$$\mathcal{LR}(s) = -RQ^{-1}(\phi s) = -RQ^{-1}[R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+]_-.$$

Назовем оператор $\mathcal{LR}$ *полиномиальным оператором Лурье–Риккати*.

Лемма 3. *Полиномиальный оператор Лурье–Риккати самосопряженный*,

$$\langle \mathcal{LR}(s_1), s_2\rangle = \langle s_1, \mathcal{LR}(s_2)\rangle \qquad \forall\, s_1, s_2 \in \mathcal{P}_\mu.$$

Оператор $\mathcal{LR}$ является решением полиномиального уравнения, являющегося точным аналогом сопряженного уравнения Лурье–Риккати для систем первого порядка. Определим оператор $\mathcal{A}$ из множества $\mathcal{P}_\mu$ в себя равенством

$$(\mathcal{A}s)(z) = zs(z) - a(z)\langle z^{\mu-1}, s\rangle, \qquad s \in \mathcal{P}_\mu.$$

Найдем явное выражение для оператора $\mathcal{A}^*$ из его определения $\langle \mathcal{A}^*x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}y\rangle$ при всех $x, y \in \mathcal{P}_\mu$. По определению оператора $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \langle x, \mathcal{A}y\rangle &= \{\widetilde{x}(z)(zy(z) - a(z)\langle z^{\mu-1}, y\rangle)\}_\infty = \\ &= \{(z\widetilde{x}(z) - \langle x, a\rangle z^{-\mu})y(z)\}_\infty = \\ &= \{z^{-1}(\mathcal{A}^*x)(z^{-1})^T y(z)\}_\infty. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\mathcal{A}^*x)(z) = [z^{-1}x]_+(z) - z^{\mu-1}\langle a, x\rangle.$$

Произвольный многочлен $p \in \mathcal{P}_\mu$ определяет операцию двойственности p_{fun} на $\mathcal{P}_\mu$ равенством

$$p_{\text{fun}} s = \langle p, s\rangle, \qquad s \in \mathcal{P}_\mu.$$

Определение 2. *Полиномиальным уравнением Лурье–Риккати* назовем операторное уравнение

$$\mathcal{A}X + (\mathcal{A}X)^* - bb_{\text{fun}} + \gamma^{-2} cc_{\text{fun}} + (Xz^{\mu-1})Q_0(Xz^{\mu-1})_{\text{fun}} = 0$$

относительно самосопряженного оператора X, действующего на $\mathcal{P}_\mu$. Решение X называется стабилизирующим, если все собственные числа оператора

$$\Lambda = \mathcal{A} + (Xz^{\mu-1})Q_0(z^{\mu-1})_{\mathrm{fun}}$$

лежат справа от мнимой оси.

Можно показать, что для любой минимальной реализации объекта в пространстве состояний введенное полиномиальное уравнение Лурье–Риккати переходит в матричное уравнение Лурье–Риккати [3], сопряженное к стандартному уравнению Лурье–Риккати в теории $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления.

В развернутой форме полиномиальное уравнение Риккати записывается в виде

$$\langle s_1, \mathcal{A}Xs_2\rangle + \langle \mathcal{A}Xs_1, s_2\rangle - \langle s_1, b\rangle\langle b, s_2\rangle + \\ + \gamma^2\langle s_1, c\rangle\langle c, s_2\rangle + \langle s_1, Xz^{\mu-1}\rangle Q_0\langle Xz^{\mu-1}, s_2\rangle = 0$$

для любых $s_1, s_2 \in \mathcal{P}_\mu$.

Теорема 1. *Полиномиальный оператор Лурье–Риккати $\mathcal{LR}$ является стабилизирующим решением полиномиального уравнения Лурье–Риккати.*

4. Синтез регуляторов при невырожденном операторе Лурье–Риккати

Если полиномиальный оператор Лурье–Риккати $\mathcal{LR}$ взаимно однозначен, то синтез субоптимального регулятора сводится к решению одного линейного уравнения, указанного в лемме 5. Основным результатом данного раздела являются теоремы 2 и 3 о параметризации всех решений уравнения объекта и о способе выбора требуемого регулятора в случае взаимной однозначности оператора $\mathcal{LR}$.

4.1. Класс Φ-решений уравнения объекта

Центральным утверждением Φ-подхода в теории синтеза $\mathcal{H}^\infty$-оптимальных регуляторов [15] является свойство некоррелированности специальных решений уравнения объекта управления. Оно сформулировано в следующей лемме в терминах преобразований Лапласа от этих решений.

Лемма 4. *Пусть матричные многочлены $s \in \mathcal{P}_\mu$ и h имеют одинаковое число столбцов. Пусть рациональная функция*

$$\Phi = h + Q^{-1}\phi s$$

удовлетворяет уравнению объекта в спектральной области: $R(z)\Phi(z) = 0$. Тогда функция $\Phi^*(z)Q\Phi(z)$ является матричным многочленом.

Если к тому же h есть постоянная матрица, то

$$\Phi^*(z)Q\Phi(z) = h^*Qh.$$

Доказательство. Определим матричный многочлен $\Psi = h - Q^{-1}[R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+]_+$. Полюсы функции

$$\Phi = \Psi + Q^{-1}R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+$$

являются нулями функции Π и поэтому лежат в левой полуплоскости.

Вычислим квадратичную форму двумя способами, подставив уравнение $R\Phi = 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi^*(z)Q\Phi(z) &= (\Psi + Q^{-1}R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+)^*Q\Phi = \Psi^*Q\Phi, \\
\Phi^*(z)Q\Phi(z) &= \Phi^*Q(\Psi + Q^{-1}R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+) = \Phi^*Q\Psi.
\end{aligned}$$

Поскольку Ψ — многочлен, то полюсы функции $\Psi^*Q\Phi$ являются полюсами функции Φ и лежат в левой полуплоскости. По этой же причине полюсы функции $\Phi^*Q\Psi$ являются полюсами функции Φ^* и, следовательно, лежат в правой полуплоскости. Однако, эти выражения равны, и поэтому полюсов не имеют и являются многочленами.

Если матрица h постоянна, то функции Φ и Φ^* являются суммами констант и правильных рациональных функций по определению. Следовательно, многочлен $\Phi^*Q\Phi$ является произведением этих констант, а именно, h^*Qh. $\square$

В дальнейшем будет доказано, что матричные функции Φ указанного вида и ранга $n_u + n_v$ обладают двумя важными свойствами: они параметризуют все множество решений уравнения объекта управления и они содержат коэффициенты субоптимального регулятора.

4.2. Параметризация множества всех решений уравнения объекта в невырожденном случае

Пространство $\mathcal{P}_\mu^1$ вектор-столбцов из $\mathcal{P}_\mu$ конечномерно и имеет размерность $|\mu|$. Оператор $\mathcal{LR}$ действует из $\mathcal{P}_\mu^1$ в $\mathcal{P}_\mu^1$. Если линейное отображение $\mathcal{LR} : \mathcal{P}_\mu^1 \to \mathcal{P}_\mu^1$ взаимно однозначно, то это биекция. В этом случае отображение матричных многочленов $\mathcal{LR} : \mathcal{P}_\mu \to \mathcal{P}_\mu$ также биективно.

Лемма 5. *Пусть оператор $\mathcal{LR}$ взаимно однозначный. Определим матрицу $h_0 = \mathrm{col}(0, I)$ размера $n \times (n_u + n_v)$, где I — единичная матрица.*

Тогда существует такая матричная функция $s_0 \in \mathcal{P}_\mu$, что функция

$$\Phi_0 = h_0 + Q^{-1}\phi s_0 = h_0 + Q^{-1}[R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}_0^*]_+]_-$$

удовлетворяет уравнению $R(z)\Phi_0(z) = 0$.

Доказательство. Матричный многочлен $g = Rh_0 = -(b, c)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}_\mu$. Следовательно, существует такая функция

$s_0 \in \mathcal{P}_\mu$, что $\mathcal{LR}(s_0) = g$, что равносильно уравнению $-RQ^{-1}\phi s_0 = = Rh_0$. □

Зафиксируем до конца данного раздела обозначения h_0, s_0 и Φ_0 для матрицы и функций из леммы 5. Матрица $J = \mathrm{diag}\{I_{n_u}, -\gamma^2 I_{n_v}\}$ является подматрицей матрицы Q и $h_0^T Q h_0 = J$.

Лемма 6. *Пусть оператор $\mathcal{LR}$ взаимно однозначный. Тогда следующие квадратные матрицы размера $n = n_y + n_u + n_v$ взаимно обратны при всех z, где они определены*:

$$\begin{pmatrix} R \\ J^{-1}\Phi_0^* Q \end{pmatrix}^{-1} = \left(Q^{-1}R^*(\Pi^* Q_0^{-1}\Pi)^{-1}, \quad \Phi_0\right).$$

Доказательство. Заключение непосредственно следует из равенств $R\Phi_0 = 0$ по лемме 5, $\Phi_0^* Q \Phi_0 = J$ по лемме 4 и уравнения факторизации $RQ^{-1}R^* = \Pi^* Q_0^{-1}\Pi$. □

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{LR}$ взаимно однозначный. Тогда множество $\mathcal{M}_0$ всех решений $x = \mathrm{col}(y, u, v)$ уравнения объекта из $L^2(0,\infty)$ с нулевыми начальными данными может быть параметризовано произвольными функциями $\ell \in L^2(0,\infty)$ размерности $n_{uv} = n_u + n_v$ при помощи формул*

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(p)\ell(t), \\ \ell(t) &= J^{-1}\Phi_0^*(p)Qx(t), \end{aligned}$$

где $p = d/dt$, $\Phi_0(p)$ обозначает линейный оператор с устойчивой передаточной функцией $\Phi_0(z)$ и нулевыми начальными данными, $\Phi_0^*(p)$ обозначает линейный оператор с полностью неустойчивой передаточной функцией $\Phi_0^*(z)$, обеспечивающий условие $\ell \in L^2(0,\infty)$.

Разобьем вектор $\ell = \mathrm{col}(U, V)$ на вектор U размерности n_u и вектор V размерности n_v. Тогда показатель качества решения x уравнения объекта равен

$$\mathcal{F}_\gamma(x) = \int_0^\infty x(t)^* Q x(t)\, dt = \int_0^\infty |U(t)|^2\, dt - \gamma^2 \int_0^\infty |V(t)|^2\, dt.$$

В рамках поведенческого описания систем Я. Виллемса [22] функции ℓ называются скрытыми (latent) переменными, процессы x — явными (manifest) переменными, а уравнение $x = \Phi_0\ell$ — параметрическим представлением объекта (image representation). Первая компонента U функции ℓ отвечает за положительное слагаемое в функционале качества управления, а вторая V — за отрицательное слагаемое. Очевидно, что уравнение $U = 0$ гарантирует цель управления — неположительность функционала качества при всех возмущениях v. В следующей теореме указано, при каких условиях это уравнение задает допустимый регулятор.

4.3. Построение субоптимального регулятора по функции Φ_0

Пусть число γ выбрано так, что оператор $\mathcal{LR}$ является биекцией на $\mathcal{P}_\mu$. В этом случае в лемме 5 определена матричная функция $\Phi_0(z)$ размера $(n_y + n_u + n_v) \times (n_u + n_v)$. Разобьем ее на блоки с двумя индексами, первый из которых указывает на количество строк, а второй — на количество столбцов блока:

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \Phi_{yu} & \Phi_{yv} \\ \Phi_{uu} & \Phi_{uv} \\ \Phi_{vu} & \Phi_{vv} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathcal{LR}$ взаимно однозначный. Для того, чтобы существовал такой допустимый регулятор $u = \mathcal{U}(y)$, что для любой функции $v \in L^2(0,\infty)$ существует единственное решение замкнутой системы $x = \mathrm{col}(y,u,v) \in L^2(0,\infty)$ с $\mathcal{F}(x) \leqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\Phi_{vv}(z)$ была невырождена при всех z из правой полуплоскости.*

При выполнении этого условия требуемый регулятор определяется неявно уравнениями

$$\begin{aligned} u(t) &= \Phi_{uv}(p)V(t), \\ y(t) &= \Phi_{yv}(p)V(t). \end{aligned}$$

Если размерности переменных y и v совпадают и матрица Φ_{yv} невырождена, то неявное уравнение можно заменить явным

$$u(t) = W_{\mathrm{reg}}(p)y(t), \qquad W_{\mathrm{reg}}(z) = \Phi_{uv}(z)\Phi_{yv}(z)^{-1}.$$

5. Синтез регулятора при минимальном значении γ

Для минимального значения $\gamma = \gamma^0$ полиномиальный оператор Лурье–Риккати вырожден. Тем не менее и для этого сингулярного случая оказывается возможным полная параметризация решений уравнения объекта в рамках поведенческого подхода Я. Виллемса [21, 22], аналогичная представлению через скрытые переменные в теореме 2. Это представление описано в теореме 6. Оно имеет более сложную структуру, чем в невырожденном случае, и основано на свойствах нуль-пространства полиномиального оператора Лурье–Риккати.

5.1. Классификация нуль-пространства оператора Лурье–Риккати по степеням

Введем ряд обозначений. Множество всех рациональных функций Φ вида $h + Q^{-1}\phi s$, где h — матричный многочлен, а $s \in \mathcal{P}_\mu$, которые удовлетворяют уравнению $R\Phi = 0$, будем обозначать $\mathcal{W}$. Это множество всех преобразований Лапласа от векторных функций $x = \mathrm{col}(y,u,v)$, являющихся решением уравнения объекта управления с нулевыми начальными данными.

По аналогии с многочленами степенью $\deg(r)$ рациональной функции $r(z)$ будем называть разность степеней числителя и знаменателя. Степень правильной рациональной функции отрицательна. Степенью рациональной матричной функции $r(z)$ будем называть наибольшую степень ее компонент.

Выделим в множестве $\mathcal{W}$ подмножества заданной степени. Для любого целого k подмножество $\mathcal{W}$, содержащее векторные функции степени не выше k, обозначим $\mathcal{W}_k$. Если $k < 0$ и $\Phi \in \mathcal{W}_k$, то $\Phi = Q^{-1}\phi s$. Множество всех правильных рациональных векторных функций из $\mathcal{W}$ совпадает с $\mathcal{W}_{-1}$. Наибольшее число k, для которого множество $\mathcal{W}_{-k}$ непусто, обозначим $k_{\max}$. По лемме 1 отображение ϕ взаимно однозначно. Множество многочленов $d \in \mathcal{P}_\mu$, для которых $Q^{-1}\phi d \in \mathcal{W}_k$, обозначим $\mathcal{D}_k$.

Нуль-пространством или ядром $\operatorname{Ker}(\mathcal{LR})$ отображения $\mathcal{LR}$ называется множество всех векторных многочленов $d \in \mathcal{P}_\mu$, для которых $\mathcal{LR}(d) = 0$. Последнее условие равносильно $R\Phi = 0$ при $\Phi = Q^{-1}\phi d$. Поэтому $\operatorname{Ker}(\mathcal{LR}) = \mathcal{D}_{-1}$ и $\mathcal{W}_{-1} = Q^{-1}\phi\mathcal{D}_{-1}$.

Пусть $\Phi = \operatorname{col}(\Phi^y, \Phi^{uv})$ — разбиение вектора $\Phi \in \mathcal{W}_{-k}$ на два вектора размерностей n_y и $n_u + n_v$. Введем проектор $P_{uv}\Phi = \Phi^{uv}$. В произведении $R\Phi = a\Phi^y - (b, c)\Phi^{uv}$ коэффициент при старшей степени $z^{\mu-k}$ равен $\{z^{k-1}\Phi^y\}_\infty$. Поэтому если $R\Phi = 0$, то $\{z^{k-1}\Phi^y\}_\infty = 0$. Введем обозначение для старших коэффициентов компоненты Φ^{uv}

$$\mathcal{G}_{-k} = \{G = \{z^{k-1}P_{uv}\Phi\}_\infty \ : \ \Phi \in \mathcal{W}_{-k}\},$$

так что $\{z^{k-1}\mathcal{W}_{-k}\}_\infty = \operatorname{col}(0, \mathcal{G}_{-k})$. Аналогично определим при $k = 0$

$$\mathcal{W}_0 = \{\Phi = h + Q^{-1}\phi s \ : \ h \in \mathbb{R}^n, \ R\Phi = 0, \ s \in \mathcal{P}_\mu\},$$
$$\mathcal{G}_0 = \{h^{uv} \in \mathbb{R}^{n_u+n_v} \ : \ \exists s \in \mathcal{P}_\mu \ : \ R(h + Q^{-1}\phi s) = 0, \ h = \operatorname{col}(0, h^{uv})\}.$$

Размерность множества $\mathcal{G}_{-k}$ обозначим m_k при $k \geqslant 0$.

5.2. Ортогональное разложение ядра оператора Лурье–Риккати

Докажем, что подпространство $\mathcal{W}_{-1}$ правильных рациональных векторных функций из $\mathcal{W}$ разбивается в прямую сумму непересекающихся подпространств, каждое из которых имеет структуру жордановых блоков. Эти подпространства определяются при помощи матриц старших коэффициентов функций из $\mathcal{W}_{-k}$.

По лемме 12 в разделе П.3 приложения если $\Phi \in \mathcal{W}_{-k}$ и $k \geqslant 1$, то $z\Phi \in \mathcal{W}_{-k+1}$. Отсюда следует, что последовательность $(\mathcal{G}_{-k})$ монотонная: $\mathcal{G}_{-k+1} \supseteq \mathcal{G}_{-k}$ при $k \geqslant 1$. Определим в ней ортогональные дополнения следующим образом. Введем матрицы

$$J = \begin{pmatrix} I_{n_u} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{n_v} \end{pmatrix}, \qquad J_0 = \begin{pmatrix} I_{n_u} & 0 \\ 0 & -I_{n_v} \end{pmatrix},$$
$$J_+ = \begin{pmatrix} I_{n_u} & 0 \\ 0 & \gamma^2 I_{n_v} \end{pmatrix} = JJ_0 = J_0J.$$

Матрица J_+ определяет норму в пространстве $\mathbb{R}^{n_u+n_v}$. При всех $k \geqslant 0$ подпространство $\mathcal{G}_k^0$ определяется как ортогональное дополнение подпространства $\mathcal{G}_{-k-1}$ в пространстве $\mathcal{G}_{-k}$ относительно нормы, порожденной матрицей J_+. Таким образом,

$$\mathcal{G}_{-k} = \mathcal{G}_k^0 \oplus \mathcal{G}_{k+1}^0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_{k_{\max}}^0, \qquad k \geqslant 0,$$

причем все подпространства — ортогональные в норме матрицы J_+. Размерность $\mathcal{G}_k^0$ обозначим m_k^0. Очевидно, что $m_k = m_k^0 + m_{k+1}^0 + \ldots + m_{k_{\max}}^0$. Набор чисел $(m_k^0)_{k=0}^{k_{\max}}$ назовем геометрической размерностью ядра оператора $\mathcal{LR}$.

Для каждого k определим произвольным образом линейное пространство векторных функций $\mathcal{W}_k^0 \subset \mathcal{W}_k$, удовлетворяющее следующим условиям: размерность $\mathcal{W}_k^0$ равна m_k^0, а множество старших коэффициентов $\{z^{k-1}\Phi\}_\infty$ при $\Phi \in \mathcal{W}_k^0$ совпадает с $\mathcal{G}_k^0$. Отображение $\mathcal{W}_k^0 \to \mathcal{G}_k^0$ взаимно однозначно.

Теорема 4. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant k_{\max}$. Тогда подпространство $\mathcal{W}_{-k}$ раскладывается в прямую сумму подпространств*

$$\mathcal{W}_{-k} = \sum_{i=k}^{k_{\max}} \sum_{j=0}^{i-k} z^j \mathcal{W}_i^0,$$

т. е. для любой функции $\Phi \in \mathcal{W}_{-k}$ существует единственный набор функций $\Phi_{i,j} \in \mathcal{W}_i^0$ при $i \geqslant k$ и $0 \leqslant j \leqslant i-k$, для которого

$$\Phi = \sum_{i=k}^{k_{\max}} \sum_{j=0}^{i-k} z^j \Phi_{i,j}.$$

5.3. Φ-решение в случае вырожденного оператора Лурье–Риккати

Параметризация всех решений уравнения объекта в невырожденном случае по теореме 2 осуществлялась при помощи матричной функции $\Phi_0(z)$ со старшим коэффициентом $h_0 = \mathrm{col}(0, I_{n_u+n_v})$. В случае вырожденного оператора Лурье–Риккати такое представление также возможно, но соответствующая функция Φ^0 сложнее устроена. Она также определяется при помощи своей матрицы старших коэффициентов.

Теорема 5. *Существует матричная рациональная функция $\Phi^0 \in \mathcal{W}$ размера $n \times (n_u + n_v)$, которую можно разбить на блоки*

$$\Phi^0 = \left(\Phi_{k_{\max}}^0, \ \ldots, \ \Phi_1^0, \ \Phi_0^0, \ \Phi_{-1}^0, \ldots, \Phi_{-k_{\max}}^0\right),$$

обладающие следующими свойствами:

1. *При $-k_{\max} \leqslant k \leqslant k_{\max}$ рациональная функция Φ_k^0 имеет степень k и размер $n \times m_{|k|}^0$.*
2. *$R\Phi^0 = 0$ и $(\Phi_i^0)^* Q \Phi_j^0 = 0$ при $i + j \neq 0$.*

3. $(\Phi_k^0)^* Q \Phi_{-k}^0 = I_{m^0_{|k|}}$ *при* $1 \leqslant k \leqslant k_{\max}$ *и* $(\Phi_0^0)^* Q \Phi_0^0 = \mathrm{diag}\{I_{n_u - m_1}, -I_{n_v - m_1}\}$.

Доказательство теоремы 5 конструктивное. Указан рекуррентный алгоритм расчета полиномиальных частей функций Φ_k^0 через старшие коэффициенты G_k^0 функций из ядра оператора Лурье–Риккати.

5.4. Параметризация множества всех решений уравнения объекта в общем случае

Пространство функций из $L^2(0,\infty)$ размерности m обозначим L^2_m. Пространство Соболева $W^2_{k,m}$ состоит из всех векторных функций f размерности m, заданных на луче $[0,\infty)$, у которых производные квадратично суммируемы, $f^{(i)} \in L^2(0,\infty)$ при $0 \leqslant i \leqslant k$. Пространство $\mathring{W}^2_{k,m}$ состоит из тех функций $f \in W^2_{k,m}$, у которых $f^{(i)}(0) = 0$ при $0 \leqslant i < k$. Пространство, сопряженное к $W^2_{k,m}$, обозначим $W^2_{-k,m}$.

Квадратная матрица $D = (D_{i,j})_{i,j=-k_{\max}}^{k_{\max}}$ размера $n_u + n_v$ определяется поблочно, размерность блока $D_{i,j}$ равна $m^0_{|i|} \times m^0_{|j|}$. Если $i + j \neq 0$, то $D_{i,j} = 0$ при всех i, j. На диагонали при $1 \leqslant i \leqslant k_{\max}$ матрица $D_{i,-i} = D_{-i,i} = I_{m_i^0}$ — единичная размера m_i^0 и $D_{0,0} = \mathrm{diag}\{I_{n_u - m_1}, -I_{n_v - m_1}\}$. В этих обозначениях $(\Phi^0)^* Q \Phi^0 = D$ по теореме 5.

Теорема 6. *Пусть оператор Лурье–Риккати вырожден и* $(m_k^0)_{k=0}^{k_{\max}}$ *— геометрическая размерность его ядра. Тогда множество* $\mathcal{M}_0$ *всех решений* $x = \mathrm{col}(y,u,v)$ *уравнения объекта из* $L^2(0,\infty)$ *с нулевыми начальными данными может быть параметризовано произвольными функциями* ℓ *из пространства*

$$\mathcal{L} = \mathring{W}^2_{k_{\max}, m^0_{k_{\max}}} \times \ldots \times \mathring{W}^2_{1, m_1^0} \times L^2_{n_u - m_1} \times \times L^2_{n_v - m_1} \times W^2_{-1, m_1^0} \times \ldots \times W^2_{-k_{\max}, m^0_{k_{\max}}}$$

размерности $n_u + n_v$ *при помощи формул*

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi^0(p)\ell(t), \\ \ell(t) &= D^{-1}(\Phi^0)^*(p) Q x(t), \end{aligned}$$

где $p = d/dt$. *Разобьем вектор* $\ell \in \mathcal{L}$ *в соответствии с определением* $\mathcal{L}$ *по блочным компонентам*

$$\ell = \mathrm{col}(\ell_{k_{\max}+}, \ldots, \ell_{1+}, U_0, V_0, \ell_{1-}, \ldots, \ell_{k_{\max}-}).$$

Тогда показатель качества решения x *уравнения объекта равен*

$$\int_0^\infty x(t)^* Q x(t)\, dt = \int_0^\infty |U_0(t)|^2\, dt - \int_0^\infty |V_0(t)|^2\, dt + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \int_0^\infty \ell_{k+}^T(t)\, \ell_{k-}(t)\, dt.$$

Доказательство. Из теоремы 5 следует тождество

$$\begin{pmatrix} R \\ D^{-1}(\Phi^0)^* Q \end{pmatrix} \left(Q^{-1}R^*(\Pi^* Q_0^{-1}\Pi)^{-1}, \ \ \Phi^0\right) = I_n,$$

аналогичное утверждению леммы 6. Далее повторяется доказательство теоремы 2 с заменой функций $\ell \in L^2(0,\infty)$ на функции $\ell \in \mathcal{L}$. □

6. Общее решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления в случае полной информации

Пусть γ_{abs} — наименьшее число $\gamma > 0$, для которого выполнено нестрогое частотное условие В. А. Якубовича [9], состоящее в том, что количество отрицательных собственных чисел матрицы $R(i\omega)Q^{-1}R^*(i\omega)$ одинаково при всех вещественных ω. В соответствии со свойствами линейно-квадратичной игры [9] при $\gamma < \gamma_{\mathrm{abs}}$ игрок u не имеет допустимых стратегий, гарантирующих целевое условие $\mathcal{F}(x) \leqslant 0$ для любых возмущений v и при нулевых начальных данных. Наименьшее число $\gamma > 0$, для которого существует решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления, обозначим γ^0. Из [9] следует, что $\gamma^0 \geqslant \gamma_{\mathrm{abs}}$.

6.1. Свойства оператора Лурье–Риккати и решений задачи управления в зависимости от γ

Полиномиальные операторы Лурье–Риккати зависят от числа γ, эту зависимость будем обозначать $\mathcal{LR}_\gamma$. По теореме 3, если оператор $\mathcal{LR}_\gamma$ — взаимно однозначный, то условие $\gamma^0 \leqslant \gamma$ равносильно невырожденности матричной функции $\Phi_{vv}(z)$ в правой замкнутой полуплоскости.

Лемма 7. *Существует предел $\mathcal{LR}_\infty$ операторов $\mathcal{LR}_\gamma$ при $\gamma \to \infty$, и оператор $\mathcal{LR}_\infty$ биективен на $\mathcal{P}_\mu$.*

Матричная функция $\Phi_{vv} = I_{n_v} - \gamma^{-2}(\phi s_0)_v$ стремится к I_{n_v} при $\gamma \to \infty$. Поэтому при больших γ решение задачи $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления существует. С уменьшением γ нули Φ_{vv} не могут попасть в правую полуплоскость через мнимую ось, как показывает следующая лемма.

Лемма 8. *При $\gamma > \gamma_{\mathrm{abs}}$ квадратная матричная функция $\Phi_{vv}(z)$ невырождена на мнимой оси.*

Нули функции Φ_{vv} попадают в правую полуплоскость через бесконечно удаленную точку. При этом понижается степень столбцов матрицы Φ в соответствии со структурой матрицы Φ^0 из теоремы 5.

С каждым числом $\gamma \geqslant \gamma_{\mathrm{abs}}$ свяжем функцию $\Phi^{0\gamma} = \Phi_0$ из леммы 5, если оператор $\mathcal{LR}$ — взаимно однозначный. Если оператор $\mathcal{LR}$ —

вырожденный, то определим функцию $\Phi^{0\gamma} = \Phi^0$ из теоремы 5 и разобьем ее на блоки (Φ_u, Φ_v), как в теореме 3:

$$\Phi_u = \left(\Phi^0_{k_{\max}}, \ \ldots, \ \Phi^0_1, \ \Phi^0_{0u}\right) = \begin{pmatrix}\Phi_{yu}\\ \Phi_{uu}\\ \Phi_{vu}\end{pmatrix},$$

$$\Phi_v = \left(\Phi^0_{0v}, \ \Phi^0_{-1}, \ldots, \Phi^0_{-k_{\max}}\right) = \begin{pmatrix}\Phi_{yv}\\ \Phi_{uv}\\ \Phi_{vv}\end{pmatrix},$$

где матрица $\Phi^0_0 = (\Phi^0_{0u}, \Phi^0_{0v})$ разбита на блоки из $n_u - m_1$ и $n_v - m_1$ столбцов соответственно.

Теорема 7. *Пусть* $\gamma^0 \neq \gamma_{\text{abs}}$. *Тогда*

1. γ^0 *— наибольшее число* γ *на луче* $[\gamma_{\text{abs}}, +\infty)$, *для которого оператор Лурье–Риккати* $\mathcal{LR}_\gamma$ *не взаимно однозначный.*

2. *При* $\gamma \geqslant \gamma^0$ *матрица* $\Phi^{0\gamma}_{vv}(z)$ *невырождена в правой замкнутой полуплоскости, а при* $\gamma_{\text{abs}} < \gamma < \gamma^0$ *вырождена к некоторых точках этой полуплоскости.*

3. *При* $\gamma \geqslant \gamma^0$ *целевое неравенство* $\mathcal{F}(x) \leqslant 0$ *для любых решений замкнутой системы* $x = \mathrm{col}(y, u, v) \in L^2(0, \infty)$ *обеспечивает допустимый регулятор, задаваемый неявно уравнениями*

$$\begin{aligned} u(t) &= \Phi_{uv}(p)V(t),\\ y(t) &= \Phi_{yv}(p)V(t). \end{aligned}$$

Для любого числа $\gamma > \gamma_{\text{abs}}$ утверждение 2 теоремы 7 указывает критерий, по которому можно определить, больше это число, чем γ^0, или меньше. Минимальное значение показателя качества в задаче $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления — число γ^0 — можно найти, например, дихотомией.

6.2. Алгоритм расчета регулятора через передаточные функции

Пусть $H_{y/u}$ и $H_{y/v}$ — передаточные функции объекта от управления к выходу и от возмущения к выходу. Для заданного γ алгоритм расчета регулятора состоит из следующих этапов.

1. Матричная факторизация. Требуется определить квадратную рациональную функцию H_0 так, чтобы

$$H_0(-z)^T Q_0^{-1} H_0(z) = Q_0^{-1} + H_{y/u}(z)H^T_{y/u}(-z) - \gamma^{-2} H_{y/v}(z)H^T_{y/v}(-z)$$

с дополнительным ограничением на нули и полюсы: функции

$$H_{0y}(z) = H_0(z)^{-1}, \qquad H_{0u} = H^T_{y/u}(-z)H_0(z)^{-1},$$

$$H_{0v} = H^T_{y/v}(-z)H_0(z)^{-1}$$

устойчивы, их полюсы расположены в правой полуплоскости. Кроме того, существует предел $H_0(z)$ при $z \to \infty$ и предельная матрица невырождена.

2. Найти такой матричный многочлен P, что матричная функция

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ I_{n_u}, & 0 \\ 0, & I_{n_v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_0^{-1}[H_{0y}P]_- \\ [H_{0u}P]_- \\ -\gamma^{-2}[H_{0v}P]_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{yu} & \Phi_{yv} \\ \Phi_{uu} & \Phi_{uv} \\ \Phi_{vu} & \Phi_{vv} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению объекта: $(I, -W_{y/u}, -W_{y/v})\Phi = 0$. Здесь операция $[\cdot]_-$ означает взятие правильной части рациональной функции.

Если оказалось, что функция Φ_{vv} имеет нули в правой полуплоскости, то для выбранного γ не существует решений задачи $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления. Если таких нулей нет, то решение существует, и один из субоптимальных регуляторов задается неявно уравнениями $u(t) = \Phi_{u/v}(p)V(t)$, $y(t) = \Phi_{y/v}(p)V(t)$, где $p = d/dt$.

Соответствие данного алгоритма и предыдущих утверждений определяется связями $H_{y/u} = a^{-1}b$, $H_{y/v} = a^{-1}c$, $H_0 = \Pi(a^*)^{-1}$, $P = [\Pi\widetilde{s}^*]_+$.

7. Заключение

В данной работе представлен новый подход к синтезу $\mathcal{H}^\infty$-оптимальных регуляторов по передаточным функциям объекта управления в случае полной информации. Алгоритм расчета содержит только факторизацию и решение линейного уравнения объекта в специальном виде. Если исходные передаточные функции факторизованы в виде $H_{y/u} = a^{-1}b$, $H_{y/v} = a^{-1}c$ с матричными многочленами a, b, c, то все остальные операции осуществляются над матричными многочленами.

Введено понятие полиномиального оператора Лурье–Риккати, обобщающего стандартные матричные уравнения Лурье–Риккати на уравнения в форме вход–выход. Доказано, что задача $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления со строгим неравенством разрешима только при взаимной однозначности оператора Лурье–Риккати. Наибольшее число γ, при котором оператор Лурье–Риккати не взаимно однозначный, является минимальным значением показателя качества в задаче $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления. Исследованы свойства ядра оператора Лурье–Риккати, найдено его разложение в прямую сумму пространств рациональных функций заданных степеней.

Представлена параметризация всех решений уравнения объекта управления при помощи скрытых переменных в рамках поведенческого подхода Я. Виллемса. Уравнение оптимального регулятора получено в том же виде, что и уравнения субоптимальных регуляторов. Установлена связь между линейно-квадратичной игровой задачей управления, рассмотренной В. А. Якубовичем в 1970 г., и более поздней задачей $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления.

Приложение

П.1. Доказательства утверждений о свойствах полиномиального оператора Лурье–Риккати.

Доказательство леммы 1. Отображение ϕ линейно, поэтому достаточно доказать тривиальность его ядра. Пусть $s \in \mathcal{P}_\mu$ и $\phi s = 0$. Тогда функция $R^* Q^{-1}\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+$ есть многочлен. По свойству управляемости пары матричных многочленов $(a, (-b, -c))$ это возможно лишь в случае, когда функция $g = Q^{-1}\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+$ есть многочлен. Однако

$$\lim_{z\to\infty}\Pi(z)^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+(z) \;=\; \lim_{z\to\infty}\Pi(z)^{-1}(\Pi(z)\widetilde{s}^*(z) - [\Pi\widetilde{s}^*]_-(z)) = 0,$$

так как $\widetilde{s}^*(z) = -z^{-1}s(-z^{-1})$. Следовательно, $g = 0$ и $\Pi\widetilde{s}^*$ является правильной рациональной функцией. Функция $z^\mu\widetilde{s}^*(z)$ является многочленом по определению множества $\mathcal{P}_\mu$, а функция $\Pi(z)z^{-\mu}$ стремится при $z \to \infty$ к невырожденной матрице. Отсюда $s = 0$. □

Доказательство леммы 3. Пусть $s_1, s_2 \in \mathcal{P}_\mu$. Требуется доказать, что

$$\langle\mathcal{LR}(s_1), s_2\rangle = \langle s_1, \mathcal{LR}(s_2)\rangle.$$

Введем обозначения

$$r_1 = R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}_1^*]_+, \qquad r_2 = R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}_2^*]_+,$$

так что $\mathcal{LR}(s_1) = -RQ^{-1}[r_1]_-$, $\mathcal{LR}(s_2) = -RQ^{-1}[r_2]_-$. В выражении

$$\begin{aligned}\langle s_1, \mathcal{LR}(s_2)\rangle &= -\{\widetilde{s}_1 RQ^{-1}[r_2]_-\}_\infty = \\ &= -\{[\widetilde{s}_1\Pi^*]_+(\Pi^*)^{-1}RQ^{-1}[r_2]_-\}_\infty - \\ &\quad -\{[\widetilde{s}_1\Pi^*]_-(\Pi^*)^{-1}RQ^{-1}[r_2]_-\}_\infty\end{aligned}$$

второе слагаемое равно нулю, так как вычет вычисляется у произведения двух правильных рациональных функций и ограниченной в бесконечности функции $(\Pi^*)^{-1}R = (z^{-\mu}\Pi^*)^{-1}(z^{-\mu}R)$. Отсюда

$$\langle s_1, \mathcal{LR}(s_2)\rangle = -\{r_1^* Q^{-1}[r_2]_-\}_\infty.$$

Вычет в бесконечности у произведения двух правильных рациональных функций и у произведения многочленов равен нулю. Поэтому в симметричном равенстве

$$\begin{aligned}\langle s_2, \mathcal{LR}(s_1)\rangle &= -\{r_2^* Q^{-1}[r_1]_-\}_\infty = \\ &= -\{[r_2]_+{}^* Q^{-1}[r_1]_-\}_\infty = -\{[r_2]_+{}^* Q^{-1}r_1\}_\infty.\end{aligned}$$

В последнем выражении подставим $[r_2]_+ = r_2 - [r_2]_-$. Первое из получившихся слагаемых нулевое в силу уравнения факторизации:

$$\begin{aligned}\{r_2^* Q^{-1}r_1\}_\infty &= \{[\widetilde{s}_1\Pi^*]_+(\Pi^*)^{-1}RQ^{-1}R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}_1^*]_+\}_\infty = \\ &= \{[\widetilde{s}_1\Pi^*]_+Q_0^{-1}[\Pi\widetilde{s}_1^*]_+\}_\infty = 0.\end{aligned}$$

Далее воспользуемся свойствами $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle^T$ и $\{f^*\}_\infty = -\{f\}_\infty^T$:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{LR}(s_1), s_2\rangle &= \langle s_2, \mathcal{LR}(s_1)\rangle^T = \\ &= \{[r_2]_-{}^*Q^{-1}r_1\}_\infty^T = -\{r_1^*Q^{-1}[r_2]_-\}_\infty = \langle s_1, \mathcal{LR}(s_2)\rangle.\end{aligned}$$

□

Лемма 9. *Выполнены следующие тождества*:

$$\phi(z^{\mu-1}) = [R^*\Pi^{-1}]_- = R^*\Pi^{-1} - e_0, \qquad \mathcal{LR}(z^{\mu-1}) = (a - \Pi^*)Q_0^{-1},$$

где $e_0 = \mathrm{col}(I, 0, 0)$ — *матрица размера* $(n_y + n_u + n_v) \times n_y$.

Доказательство. Разность $a^*(z) - \Pi(z)$ принадлежит $\mathcal{P}_\mu$. Поэтому рациональная функция

$$(R^* - e_0\Pi)\Pi^{-1} = ((R^* - e_0\Pi)z^{-\mu})(\Pi z^{-\mu})^{-1}$$

стремится к нулю при $z \to \infty$. Следовательно, она является правильной и

$$R^*\Pi^{-1} - e_0 = [R^*\Pi^{-1} - e_0]_- = [R^*\Pi^{-1}]_-.$$

Старшая степень $\Pi(z)$ совпадает с $(z^\mu)^*$, поэтому $[\Pi(z)(z^{-\mu})^*]_+ = I$ есть тождественный оператор и

$$\begin{aligned}\phi(z^{\mu-1}) &= [R^*\Pi^{-1}[\Pi(z^{-\mu})^*]_+]_- = [R^*\Pi^{-1}]_-;\\ \mathcal{LR}(z^{\mu-1}) &= -RQ^{-1}\phi(z^{\mu-1}) = -RQ^{-1}(R^*\Pi^{-1} - e_0) = \\ &= -\Pi^*Q_0^{-1} + aQ_0^{-1} = (a - \Pi^*)Q_0^{-1}.\end{aligned}$$

□

Лемма 10. *Определим операцию* ∇ *из множества* $\mathcal{P}_\mu$ *в себя равенством*

$$\nabla s(z) = -[z^{-1}s]_+(z) + z^{\mu-1}\langle \Pi^*, s\rangle, \qquad s \in \mathcal{P}_\mu.$$

Тогда для любой функции $s \in \mathcal{P}_\mu$

$$\begin{aligned}z(\phi s)(z) &= \phi([z^{-1}s]_+)(z) - \langle R, s\rangle + R^*\Pi^{-1}\langle \Pi^*, s\rangle = \\ &= \phi(\nabla s)(z) + \{\phi s\}_\infty,\\ \{\phi s\}_\infty &= \langle \Pi^* e_0^T - R, s\rangle,\end{aligned}$$

где $e_0 = \mathrm{col}(I, 0, 0)$ — *матрица размера* $(n_y + n_u + n_v) \times n_y$.

Доказательство. По определению функции ϕ

$$\phi s = [R^*\Pi^{-1}(\Pi\widetilde{s}^* - [\Pi\widetilde{s}^*]_-)]_- = [R^*\widetilde{s}^*]_- - R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_-,$$

так как последняя функция — правильная рациональная. Отсюда

$$z(\phi s) = [zR^*\widetilde{s}^*]_- - R^*\Pi^{-1}[z\Pi\widetilde{s}^*]_- + \{R^*\widetilde{s}^*\}_\infty - R^*\Pi^{-1}\{\Pi\widetilde{s}^*\}_\infty.$$

Преобразуем отдельно сумму первой пары и второй пары слагаемых. По определению операции $\widetilde{s}$

$$z\widetilde{s}^* = z(-z^{-1})s(-z^{-1}) = -s(z^{-1}) = -s(0) + \widetilde{q}_s, \qquad q_s = -[z^{-1}s]_+.$$

Поэтому сумма первых двух слагаемых в выражении для $z(\phi s)$ равна

$$[zR^*\widetilde{s}^*]_- - R^*\Pi^{-1}[z\Pi\widetilde{s}^*]_- = [R^*\widetilde{q}_s]_- - R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{q}_s]_- = \phi(q_s).$$

Для второй пары слагаемых применим свойства $\{f^*\} = -\{f\}^{T}$ и $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle^{T}$:

$$\{R^*\widetilde{s}^*\}_\infty - R^*\Pi^{-1}\{\Pi\widetilde{s}^*\}_\infty = -\langle R, s\rangle + R^*\Pi^{-1}\langle\Pi^*, s\rangle,$$

что доказывает первое равенство в утверждении леммы. Далее, подставим тождество $R^*\Pi^{-1} = \phi(z^{\mu-1}) + e_0$ из леммы 9 в последнее слагаемое:

$$R^*\Pi^{-1}\langle\Pi^*, s\rangle = \phi(z^{\mu-1})\langle\Pi^*, s\rangle + e_0\langle\Pi^*, s\rangle = \phi(z^{\mu-1})\langle\Pi^*, s\rangle + \langle\Pi^* e_0^T, s\rangle.$$

В результате второе равенство из утверждения леммы следует из третьего, которое доказывается непосредственно:

$$\begin{aligned}\{\phi s\}_\infty &= \{R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_+\}_\infty = \{R^*\widetilde{s}^*\}_\infty - \{R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}^*]_-\}_\infty = \\ &= \{R^*\widetilde{s}^*\}_\infty - \{(\phi(z^{\mu-1}) + e_0)[\Pi\widetilde{s}^*]_-\}_\infty = \\ &= \{(R^* - e_0\Pi)\widetilde{s}^*\}_\infty = \langle\Pi^* e_0^T - R, s\}_\infty.\end{aligned}$$

□

Лемма 11. *Пусть f — собственный вектор сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ с собственным числом λ. Определим $r = -\lambda^{-\mu}\langle a, f\rangle$ при $\lambda \neq 0$ и $r = f(0)$ при $\lambda = 0$. Тогда $r^{T} a(\lambda) = 0$, $r \neq 0$ и для любого $s \in \mathcal{P}_\mu$*

$$\langle f, s\rangle = r^{T} s(\lambda).$$

Доказательство. По условию $\mathcal{A}^* f = \lambda f$. Пусть $f_0 = f(0)$ — свободный член многочлена f. Тогда

$$\lambda f(z) = \frac{f(z) - f_0}{z} - z^{\mu-1}q,$$

где $q = \langle a, f\rangle$. Это — уравнение относительно многочлена f.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Слагаемое со старшей степенью в правой части уравнения равно $z^{\mu-1}q$, поэтому $q = 0$. Из уравнения тогда следует, что $f(z) = f_0$ — постоянная функция. Отсюда $r = f_0 \neq 0$, $r^{T} a(0) = \langle f, a\rangle = q = 0$, и последнее утверждение леммы очевидно.

Пусть $\lambda \neq 0$. Решая уравнение, получим

$$f(z) = \frac{f_0 + z^\mu q}{1 - \lambda z}.$$

Это — многочлен, поэтому числитель должен иметь корень в точке $z = \lambda^{-1}$. Отсюда $f_0 = -\lambda^{-\mu} q$ и для каждой компоненты $f_j(z)$ вектора $f(z)$

$$f_j(z) = -\lambda^{-\mu_j}\sum_{k=0}^{\mu_j-1}\lambda^k z^k q_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Определим $r = -\lambda^{-\mu}q$. Заключение леммы $\langle f, s\rangle = r^{^T} s(\lambda)$ следует из полученной формулы и определения скалярного произведения как произведения коэффициентов при одинаковых степенях.

Докажем, что $r^{^T} a(\lambda) = 0$. Определим $a_1(z) = a(z) - z^\mu$. Поскольку $a_1 \in \mathcal{P}_\mu$, то

$$r^{^T} = -q^{^T}\lambda^{-\mu} = -\langle f, a\rangle\lambda^{-\mu} = -\langle f, a_1\rangle\lambda^{-\mu} = -r^{^T} a_1(\lambda)\lambda^{-\mu},$$

откуда

$$0 = r^{^T} + r^{^T} a_1(\lambda)\lambda^{-\mu} = r^{^T}(\lambda^\mu + a_1(\lambda))\lambda^{-\mu} = r^{^T} a(\lambda)\lambda^{-\mu}$$

и, следовательно, $r^{^T} a(\lambda) = 0$. □

Доказательство теоремы 1. Сначала подставим оператор $\mathcal{LR}$ в полиномиальное уравнение Лурье–Риккати, а затем докажем, что он стабилизирующий. По лемме 10

$$z\,\mathcal{LR}(s) = -RQ^{-1}z(\phi s) = -\,\mathcal{LR}([z^{-1}s]_+) + RQ^{-1}\langle R, s\rangle - \Pi^* Q_0^{-1}\langle \Pi^*, s\rangle.$$

Отсюда и по свойству самосопряженности оператора $\mathcal{LR}$

$$\begin{aligned}\langle s_1, z\,\mathcal{LR}(s_2)\rangle + \langle z\,\mathcal{LR}(s_1), s_2\rangle = {}& \langle s_1, z\,\mathcal{LR}(s_2)\rangle + \langle \mathcal{LR}(s_1), [z^{-1}s_2]_+\rangle = \\ = {}& \langle s_1, z\,\mathcal{LR}(s_2)\rangle + \langle s_1, \mathcal{LR}([z^{-1}s_2]_+)\rangle = \\ = {}& \langle s_1, R\rangle Q^{-1}\langle R, s_2\rangle - \langle s_1, \Pi^*\rangle Q_0^{-1}\langle \Pi^*, s_2\rangle.\end{aligned}$$

Подставим это выражение в сумму первых двух слагаемых в полиномиальном уравнении Лурье–Риккати. По определению оператора $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned}&\langle s_1, \mathcal{A}(\mathcal{LR})(s_2)\rangle + \langle \mathcal{A}(\mathcal{LR})(s_1), s_2\rangle = \\ &\qquad = \langle s_1, z\,\mathcal{LR}(s_2)\rangle + \langle z\,\mathcal{LR}(s_1), s_2\rangle - \\ &\qquad\qquad - \langle s_1, a\rangle\langle z^{\mu-1}, \mathcal{LR}(s_2)\rangle - \langle \mathcal{LR}(s_1), z^{\mu-1}\rangle\langle a, s_2\rangle = \\ &\qquad = \langle s_1, R\rangle Q^{-1}\langle R, s_2\rangle - \langle s_1, \Pi^*\rangle Q_0^{-1}\langle \Pi^*, s_2\rangle - \\ &\qquad\qquad - \langle s_1, a\rangle\langle \mathcal{LR}(z^{\mu-1}), s_2\rangle - \langle s_1, \mathcal{LR}(z^{\mu-1})\rangle\langle a, s_2\rangle.\end{aligned}$$

Подставим определение $R = (a, -b, -c)$ и равенство $\mathcal{LR}(z^{\mu-1}) = (a - {}$ ${}- \Pi^*)Q_0^{-1}$ по лемме 9. Получим

$$\begin{aligned}&\langle s_1, \mathcal{A}(\mathcal{LR})(s_2)\rangle + \langle \mathcal{A}(\mathcal{LR})(s_1), s_2\rangle = \\ &\quad = -\langle s_1, \Pi^*\rangle Q_0^{-1}\langle \Pi^*, s_2\rangle + \langle s_1, R\rangle Q^{-1}\langle R, s_2\rangle - \\ &\quad\quad -\langle s_1.a\rangle Q_0^{-1}\langle a - \Pi^*, s_2\rangle - \langle s_1, a - \Pi^*\rangle Q_0^{-1}\langle a, s_2\rangle = \\ &\quad = -\langle s_1, a - \Pi^*\rangle Q_0^{-1}\langle a - \Pi^*, s_2\rangle + \langle s_1, b\rangle\langle b, s_2\rangle - \gamma^{-2}\langle s_1, c\rangle\langle c, s_2\rangle = \\ &\quad = -\langle s_1, \mathcal{LR}(z^{\mu-1})\rangle Q_0\langle \mathcal{LR}(z^{\mu-1}), s_2\rangle + \langle s_1, b\rangle\langle b, s_2\rangle - \gamma^{-2}\langle s_1, c\rangle\langle c, s_2\rangle.\end{aligned}$$

Равенство первого и последнего выражений в данном преобразовании означает выполнение полиномиального уравнения Лурье–Риккати для оператора $\mathcal{LR}$.

Докажем, что решение $\mathcal{LR}$ — стабилизирующее. Пусть $f \in \mathcal{P}_\mu$ и число λ удовлетворяют уравнению $\Lambda f = \lambda f$. Требуется доказать, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

По определению оператора $\mathcal{A}$ и по лемме 9

$$\begin{aligned}(\Lambda f)(z) &= zf(z) - a(z)Q_0^{-1}\langle z^{\mu-1}, f\rangle + (a(z) - \Pi^*(z))Q_0^{-1}\langle z^{\mu-1}, f\rangle = \\ &= zf(z) - \Pi^*(z)Q_0^{-1}\langle z^{\mu-1}, f\rangle.\end{aligned}$$

По лемме 11 существует такой ненулевой вектор r, что $r^T\Pi^*(\lambda)Q_0^{-1} = 0$. Отсюда $\det(\Pi(-\lambda)) = 0$. Многочлен Π гурвицев по определению, следовательно, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. $\square$

П.2. Доказательства утверждений о параметризации решений уравнения объекта в невырожденном случае.

Доказательство теоремы 2. Пусть $x = \operatorname{col}(y, u, v) \in L^2(0,\infty)$ — решение уравнения объекта с нулевыми начальными данными. Преобразование Лапласа от x обозначим X. Тогда $R(z)X(z) = 0$.

Функция $L(z) = J^{-1}\Phi_0^*(z)QX(z)$ принадлежит пространству L^2 на мнимой оси. Обратное преобразование Фурье от L обозначим ℓ, это функция из $L^2(-\infty,\infty)$. Докажем, что $\ell(t) = 0$ при $t < 0$. Для этого достаточно доказать, что рациональная функция L аналитична в открытой правой полуплоскости.

В соответствии с определением $L(z)$ полюсами функции L в правой полуплоскости могут быть только полюсы функции Φ_0^*. Преобразуем функцию Φ_0 следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= h_0 + Q^{-1}[R^*\Pi^{-1}(\Pi\widetilde{s}_0^* - [\Pi\widetilde{s}_0^*]_-)]_- = \\ &= h_0 + Q^{-1}[R^*\widetilde{s}_0^*]_- - Q^{-1}R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{s}_0^*]_-,\end{aligned}$$

так как последняя функция — правильная рациональная. Поскольку $R(z)X(z) = 0$, то

$$\Phi_0^*QX = h_0^*QX + [R^*\widetilde{s}_0^*]_-{}^*X,$$

и эта функция аналитична в открытой правой полуплоскости. Таким образом, $\ell \in L^2(0,\infty)$ и L есть преобразование Лапласа от ℓ.

По лемме 6

$$\begin{aligned}X &= \left(Q^{-1}R^*(\Pi^*Q_0^{-1}\Pi)^{-1},\ \ \Phi_0\right)\begin{pmatrix} R \\ J^{-1}\Phi_0^*Q\end{pmatrix} X = \\ &= \left(Q^{-1}R^*(\Pi^*Q_0^{-1}\Pi)^{-1},\ \ \Phi_0\right)\begin{pmatrix} 0 \\ L\end{pmatrix} = \Phi_0 L,\end{aligned}$$

что во временной области соответствует уравнению $x(t) = \Phi_0(p)\ell(t)$.

Наоборот, пусть функция $\ell \in L^2(0,\infty)$ и L — преобразование Лапласа от ℓ. Определим $X(z) = \Phi_0(z)L(z)$. Функция X аналитична в правой полуплоскости и поэтому является преобразованием Лапласа от некоторой функции $x \in L^2(0,\infty)$. По лемме 5 $R(z)\Phi_0(z)L(z) = 0$, и поэтому функция x удовлетворяет уравнению объекта $R(p)x(t) = 0$ при $t \geqslant 0$ с нулевыми начальными данными.

Последнее утверждение теоремы следует из равенства

$$X^*(z)QX(z) = L^*(z)(\Phi_0^*(z)Q\Phi_0(z))L(z) = L^*(z)JL(z)$$

и теоремы Парсеваля. $\square$

Доказательство теоремы 3. *Необходимость.* Пусть существует допустимый регулятор, обеспечивающий условие $\mathcal{F}(x) \leqslant 0$.

Определим $\mathcal{L}^0$ как множество всех пар функций $\ell = \mathrm{col}(U, V) \in L^2(0, \infty)$, которые по теореме 2 порождают процессы $x = \mathrm{col}(y, u, 0)$ с $v = 0$. Докажем, что множество M всех первых компонент U пространства $\mathcal{L}^0$ совпадает с $L^2_{n_u}(0, \infty)$. Из параметризации в теореме 2 следует, что линейные пространства $\mathcal{L}^0$, а вместе с ним, и M — замкнутые. Пусть $M \neq L^2_{n_u}(0, \infty)$ и $M_\perp$ — его ортогональное дополнение. Выберем $U_0 \in M_\perp$. Пара $\ell_0 = \mathrm{col}(U_0, 0)$ порождает некоторый процесс $x_0 = \mathrm{col}(y_0, u_0, v_0)$. По условию существует регулятор, который при входном возмущении v_0 порождает решение замкнутой системы $x_1 = \mathrm{col}(y_1, u_1, v_0)$, для которого $\mathcal{F}(x_1) \leqslant 0$. Этому решению по теореме 2 соответствует некоторый параметр $\ell_1 = \mathrm{col}(U_1, V_1)$. В силу линейности уравнений параметризации разности $\ell_2 = \ell_1 - \ell_0 = \mathrm{col}(U_1 - U_0, V_1) = \mathrm{col}(U_2, V_2)$ соответствует процесс $x_2 = x_1 - x_0 = \mathrm{col}(y_2, u_2, 0)$. Из условия $v_2 = 0$ следует, что $\mathcal{F}(x_2) \geqslant 0$ по предположению о положительной определенности функционала и что $U_2 \in M$ по определению множества M. Отсюда функции U_2 и U_0 ортогональны, и поэтому $\|U_1\|^2 = \|U_0\|^2 + \|U_2\|^2$. По теореме 2 $\mathcal{F}(x) = \|U\|^2 - \gamma^2\|V\|^2$ и, в частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1) &= \|U_0\|^2 + \|U_2\|^2 - \gamma^2\|V_1\|^2 \leqslant 0, \\ \mathcal{F}(x_2) &= \|U_2\|^2 - \gamma^2\|V_1\|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_0 = 0$ и $M = L^2_{n_u}(0, \infty)$.

Докажем, что оператор $\Phi_{vv}(p)$ переводит $L^2_{n_v}(0, \infty)$ на себя. Пусть $v \in L^2_{n_v}(0, \infty)$. Стабилизирующий регулятор порождает решение уравнения объекта $x = \mathrm{col}(y, u, v)$ с нулевыми начальными данными, которому по теореме 2 соответствует некоторая пара параметров $\ell = \mathrm{col}(U, V)$. По определению множества M существует такая функция $V_0 \in L^2_{n_v}(0, \infty)$, что пара $\ell_0 = \mathrm{col}(U, V_0)$ определяет процесс $x_0 = \mathrm{col}(y_0, u_0, 0)$. Ввиду линейности параметризации разности $x_1 = x - x_0 = \mathrm{col}(y - y_1, u - u_1, v)$ соответствует пара параметров $\ell_1 = \mathrm{col}(0, V - V_0)$ и, следовательно, $v = \Phi_{vv}(p)V_1$ при $V_1 = V - V_0$.

Завершим доказательство необходимости методом от противного. Пусть матрица $\Phi_{vv}(z_0)$ вырождена и $\mathrm{Re}(z_0) > 0$. Тогда существует такой ненулевой вектор d, что $d^T\Phi_{vv}(z_0) = 0$. Выберем функцию $v \in L^2_{n_v}(0, \infty)$ так, чтобы $d^T\widehat{v}(z_0) \neq 0$, где $\widehat{v}(z)$ — преобразование Лапласа от v. Выше доказано, что тогда существует такая функция

$V \in L^2_{n_v}(0,\infty)$, что $\widehat{v}(z) = \Phi_{vv}(z)\widehat{V}(z)$, где $\widehat{V}(z)$ — преобразование Лапласа от V. Однако в этом случае

$$d^T\widehat{v}(z_0) = d^T\Phi_{vv}(z_0)\widehat{V}(z_0) = 0,$$

что противоречит выбору v.

Достаточность. Пусть матрица $\Phi_{vv}(z)$ невырождена в правой полуплоскости. Тогда для любой функции $v \in L^2(0,\infty)$ существует такая функция $V \in L^2(0,\infty)$, что $v = \Phi_{vv}(p)V$. Действительно, их преобразования Лапласа связаны условием $\widehat{V}(z) = \Phi_{vv}(z)^{-1}\widehat{v}(z)$.

Требуемый регулятор определяется условием $U = 0$. При этом для любой функции $v \in L^2(0,\infty)$ существует единственное решение уравнения объекта в форме $x = \mathrm{col}(y,u,v) = \mathrm{col}(\Phi_{yv}(p), \Phi_{uv}(p), \Phi_{vv}(p))V$ и $\mathcal{F}(x) = -\gamma^2\|V\|^2 \leqslant 0$. □

П.3. Доказательства утверждений о свойствах ядра полиномиального оператора Лурье–Риккати.

В следующих утверждениях матрица e_0 и операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ и ∇ определены в разделе 3.3 и в лемме 10.

Лемма 12. *Пусть* $d \in \mathrm{Ker}(\mathcal{LR})$ *и* $\deg(\phi d) = -k < 0$. *Тогда*

$$z^j(\phi d) = \phi((-\mathcal{A}^*)^j d), \quad (\mathcal{A}^*)^j d \in \mathrm{Ker}(\mathcal{LR}), \quad \langle R - \Pi^* e_0^T, (-\mathcal{A}^*)^{j-1} d\rangle = 0$$

при всех $j = 1,\ldots,k-1$ *и*

$$\begin{aligned} z^k(\phi d) &= \phi((-\mathcal{A}^*)^k d) + \{z^{k-1}(\phi d)\}_\infty; \\ \{z^{k-1}(\phi d)\}_\infty &= \langle \Pi^* e_0^T - R, (-\mathcal{A}^*)^{k-1} d\rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Для любого $d \in \mathrm{Ker}(\mathcal{LR})$ по лемме 9

$$0 = \langle \mathcal{LR}(d), z^{\mu-1}\rangle = \langle d, \mathcal{LR}(z^{\mu-1})\rangle = \langle d, a - \Pi^*\rangle Q_0^{-1},$$

поэтому $\langle d, a\rangle = \langle d, \Pi^*\rangle$. По определению оператора $\mathcal{A}^*$ и ∇ в этом случае $\nabla d = -\mathcal{A}^* d$.

Проведем индукцию по k. При $k = 1$ утверждение следует из леммы 10. Пусть $k > 1$. Тогда $\{\phi d\}_\infty = 0$ и из леммы 10 следует, что $z\phi d = \phi(-\mathcal{A}^* d)$. Определим $d_1 = -\mathcal{A}^* d$. По определению оператора Лурье–Риккати

$$\mathcal{LR}(d_1) = -RQ^{-1}\phi d_1 = -RQ^{-1}z\phi d = z\,\mathcal{LR}(d) = 0,$$

поэтому $d_1 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{LR})$. При этом $\deg(\phi d_1) = \deg(z\phi d) = -k+1$. Все утверждения леммы для d следуют из индукционного предположения для d_1. □

Доказательство теоремы 4. Проведем обратную индукцию по k. При $k = k_{\max}$ утверждение теоремы очевидно, так как $\mathcal{W}_{-k_{\max}} = \mathcal{W}^0_{k_{\max}}$.

Пусть утверждение теоремы доказано для $k+1$ и $\Phi \in \mathcal{W}_{-k}$. Вектор $G_k = \{z^{k-1}\Phi\}_\infty$ единственным образом раскладывается в сумму

$$G_k = G_k^0 + G_{k+1}^0 + \ldots + G_{k_{\max}}^0, \qquad G_i^0 \in \mathcal{G}_i^0, \quad k \leqslant i \leqslant k_{\max}.$$

Каждому вектору G_i^0 однозначно соответствует функция $\Phi_i^0 \in \mathcal{W}_{-i}^0$, для которой $\{z^{i-1}\Phi_i^0\} = G_i^0$ по определению $\mathcal{W}_{-i}^0$. Обозначим $\Phi_{i,i-k} = \Phi_i^0$. Функция

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \Phi_k^0 - z\Phi_{k+1}^0 - \ldots - z^{k_{\max}-k}\Phi_{k_{\max}}^0 = \Phi_k - \sum_{i=k}^{k_{\max}} z^{i-k}\Phi_{i,i-k}$$

принадлежит $\mathcal{W}_{-k}$ и одновременно $\{z^{k-1}\Phi_{k+1}\}_\infty = 0$. Поэтому $\Phi_{k+1} \in \mathcal{W}_{-k-1}$, и остается применить индукционное предположение. □

Лемма 13. *Пусть $h(z)$ — матричный многочлен с n строками. Для того чтобы существовала такая функция $s \in \mathcal{P}_\mu$, что функция $\Phi = h + Q^{-1}\phi s$ принадлежит $\mathcal{W}$, необходимо и достаточно выполнения двух условий: $Rh \in \mathcal{P}_\mu$ и $\{W^*Qh\}_\infty = 0$ для любой функции $W \in \mathcal{W}_{-1}$.*

Доказательство. По определению условие $\Phi = h + Q^{-1}\phi s \in \mathcal{W}$ означает $R\Phi = 0$, что можно также записать в виде $Rh = -RQ^{-1}\phi s$ или $Rh = \mathcal{LR}(s)$. Множество всех значений оператора $\mathcal{LR}$ есть подмножество $\{f \in \mathcal{P}_\mu\}$, определяемое ограничениями $\langle d, f\rangle = 0$ для всех $d \in \operatorname{Ker}(\mathcal{LR})$.

Необходимость условия $Rh \in \mathcal{P}_\mu$ очевидна. Пусть это условие выполнено. Докажем равносильность уравнений $\langle d, Rh\rangle = 0$ и $\{W^*Qh\}_\infty = 0$ при условии $d \in \operatorname{Ker}(\mathcal{LR})$ и $W = Q^{-1}\phi d \in \mathcal{W}_{-1}$. В выражении

$$\langle d, Rh\rangle = \{\widetilde{d}Rh\}_\infty = \{[\widetilde{d}\Pi^*]_-(\Pi^*)^{-1}Rh\}_\infty + \{[\widetilde{d}\Pi^*]_+(\Pi^*)^{-1}Rh\}_\infty$$

первое слагаемое равно нулю, так как

$$(\Pi^*(z))^{-1}(Rh)(z) = (z^{-\mu}\Pi^*(z))^{-1}(z^{-\mu}(Rh)(z)) \to 0 \quad (z \to \infty),$$

и поэтому рациональная функция $(\Pi^*)^{-1}Rh$ — правильная, а вычет в бесконечности от произведения двух правильных рациональных функций равен нулю. Второе слагаемое есть

$$\{[\widetilde{d}\Pi^*]_+(\Pi^*)^{-1}Rh\}_\infty = \{[R^*\Pi^{-1}[\Pi\widetilde{d}^*]_+]_-{}^*h\}_\infty = \{(\phi d)^*h\} = \{W^*Qh\}_\infty.$$

□

П.4. Свойства ортогонального базиса в ядре оператора Лурье–Риккати.

Для каждого $k = 0, 1, \ldots, k_{\max}$ выберем в множестве $\mathcal{G}_k^0$ ортонормальный базис в норме, порожденной матрицей J_+. Матрицу, составленную из столбцов этого базиса, обозначим G_k^0. Если $\mathcal{G}_k^0 = \{0\}$, то соответствующая матрица G_k^0 — пустая. По определению столбцы матрицы

$$G_{-k} = \left(G_{k_{\max}}^0, \ \ldots \ G_{k+1}^0, \ G_k^0\right)$$

образуют ортонормальный базис в множестве $\mathcal{G}_{-k}$.

Столбцам из G_k^0 однозначно соответствуют векторные функции в $\mathcal{W}_k^0$ по определению этого множества. Составим из них как из столбцов матричные функции W_{-k}^0. Из теоремы 4 следует, что столбцы матрицы

$$W_{-k} = \left(z^{k_{\max}-k} W_{-k_{\max}}^0, \ \ldots, \ zW_{-k-1}^0, \ W_{-k}^0\right)$$

составляют базис пространства $z^{k_{\max}-k}\mathcal{W}_{k_{\max}}^0 \oplus \ldots \oplus z\mathcal{W}_{k+1}^0 \oplus \mathcal{W}_k^0$, которое является также алгебраическим дополнением к пространству $\mathcal{W}_{-k-1}$ в пространстве $\mathcal{W}_{-k}$. Матрица старших коэффициентов W_{-k} совпадает с G_{-k}.

Лемма 14. *Для каждого $k = 0, 1, \ldots k_{\max}$ в базисе G_k^0 пространства $\mathcal{G}_k^0$ выделим блоки $G_k^0 = \mathrm{col}(B_k^0, C_k^0)$ с количеством строк n_u и n_v, соответственно. Тогда*

1. *При $i \neq j$: $B_i B_j^T = 0$ и $C_i C_j^T = 0$. В частности, $G_i^T J G_j = 0$ и $G_i J_+ G_j = 0$.*
2. *При $i \geqslant 1$: $B_i B_i^T = \gamma^2 C_i C_i^T$ или $G_i^T J G_i = 0$.*
3. *Пусть B_0 — матрица, столбцы которой составляют ортонормальный базис в множестве векторов в $\mathbb{R}^{n_u}$, ортогональных всем столбцам матриц B_k^0 при $k \geqslant 1$, а C_0 — матрица, столбцы которой составляют ортонормальный базис в множестве векторов в $\mathbb{R}^{n_v}$, ортогональных всем столбцам матриц C_k^0 при $k \geqslant 1$. Тогда столбцы матрицы*

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} B_0, & 0 \\ 0, & \gamma^{-1} C_0 \end{pmatrix}$$

составляют ортонормальный базис в пространстве $\mathcal{G}_0^0$ в норме, порожденной матрицей J_+. Кроме того, матрица $\widehat{G}_0 = (\widehat{G}, G_{-1}, J_0 G_{-1})$ — квадратная размера $n_u + n_v$ и ортогональная в норме, порожденной матрицей J_+.

Доказательство. Условие ортогональности $G_i^T J_+ G_j = 0$ при $i \neq j$ выполнено по определению подпространств $\mathcal{G}_i^0$ и $\mathcal{G}_j^0$. Требуется доказать, что $G_i^T J G_j = 0$ при $i \neq 0$ или $j \neq 0$. Пусть $i > 0$. Матричная функция $\Phi = (W_{-i}^0, W_{-j}^0)$ удовлетворяет условию леммы 4 при $h = (0, h_j)$. Поэтому $\Phi^* Q \Phi = h^T Q h$ и $(W_{-i}^0)^* Q W_{-j}^0 = 0$. Выделим в матрицах $z^i W_{-i}^0$ и $z^j W_{-j}^0$ старшие коэффициенты: $z^i W_{-i}^0 = \mathrm{col}(0, G_i^0) + \Psi_i$, $z^j W_{-j}^0 = \mathrm{col}(0, G_j^0) + \Psi_j$, причем рациональные функции Ψ_i и Ψ_j — правильные. Произведение $(z^i W_{-i}^0)^* Q (z^j W_{-j}^0)$ равно нулю тождественно, а его предел при $z \to \infty$ равен $G_i^T J G_j$, что доказывает утверждения 1 и 2.

Докажем утверждение 3. Пусть G — некоторый столбец матрицы $\widehat{G}$. Тогда вектор $h = \mathrm{col}(0, G)$ удовлетворяет условиям леммы 13, так как h ортогонален всем столбцам матрицы $\{QW_{-1}\}_\infty = \mathrm{col}(0, JG_{-1})$. Поэтому $G \in \mathcal{G}_0$. Условие $G^T J_+ G_{-1} = 0$ также выполнено ввиду диагональности матрицы J_+. Поэтому $G \in \mathcal{G}_0^0$ и столбцы $\widehat{G}$ образуют ортонормальную систему в $\mathcal{G}_0^0$. Докажем, что это базис.

Матрица $M = (JG_{-1}, J_+G_{-1})$ ортогональна $\mathcal{G}_0^0$ по определению и по утверждению 1. Ее ранг равен $2m_1$, где m_1 — количество столбцов в G_{-1}, так как $M^T J_+{}^{-1} M = I$ — единичная матрица. Следовательно, размерность $\mathcal{G}_0^0$ не больше, чем число $n_u + n_v - 2m_1$, которое совпадает с количеством столбцов в $\widehat{G}$. Отсюда $\widehat{G}$ есть базис в $\mathcal{G}_0^0$, матрица $\widehat{G}_0$ — квадратная и $\widehat{G}_0^T J_+ \widehat{G}_0 = I$. □

П.5. Конструктивный способ построения базовой функции Φ^0.

Доказательство теоремы 5. Введем обозначение для блочно-координатной матрицы $e_k = \mathrm{col}(0, I, 0)$ размера $(n_u + n_v) \times m_k^0$, где первый блок содержит m_{k+1} нулевых строк, за которыми следует единичная матрица и снова нулевая матрица. Для произвольной матрицы g с $n = n_y + n_u + n_v$ строками матрица g^y составляется из первых n_y ее строк, а матрица g^{uv} — из последних $n_u + n_v$ строк.

Матричный многочлен $h(z) = h_{k_{\max}} z^{k_{\max}} + \ldots + h_1 z + h_0$ будем строить рекуррентно, начиная со старшей степени. На шаге k определяется коэффициент h_k и вместе с ним многочлен $H_k(z) = [z^{-k}h]_+(z) = h_{k_{\max}} z^{k_{\max}-k} + \ldots + h_{k+1}z + h_k$.

При $k = k_{\max}$ определим $(h_{k_{\max}}^{uv}) = J_0 G_{k_{\max}}^0 e_{k_{\max}}^T$ и $h_{k_{\max}}^y = 0$. Многочлен $RH_{k_{\max}} = -(b, c)h_{k_{\max}}^{uv}$ принадлежит $\mathcal{P}_\mu$.

Пусть $k \geqslant 1$, матричный многочлен H_k построен и $f_k = RH_k \in \mathcal{P}_\mu$. Определим очередной коэффициент h_{k-1} равенствами

$$h_{k-1}^y = -\langle z^{\mu-1}, f_k\rangle, \quad h_{k-1}^{uv} = -J_0 G_{-k}\{(z^k W_{-k})^* Q H_k\}_\infty + J_0 G_{k-1}^0 e_{k-1}^T.$$

Отображение $\mathcal{A}f = zf - a\langle z^{\mu-1}, f\rangle$ переводит $\mathcal{P}_\mu$ в себя, поэтому функция

$$\begin{aligned} RH_{k-1} &= R(zH_k + h_{k-1}) = zf_k + ah_{k-1}^y - (b,\ \ c)\, h_{k-1}^{uv} = \\ &= \mathcal{A}f_k - (b,\ \ c)\, h_{k-1}^{uv} \end{aligned}$$

принадлежит $\mathcal{P}_\mu$.

В результате рекуррентного построения получим матричный многочлен $h = H_0$. Докажем, что многочлен h удовлетворяет условиям леммы 13. Условие $Rh = RH_0 \in \mathcal{P}_\mu$ выполнено по построению. По теореме 4 условие $\{W^* Q h\}_\infty = 0$ достаточно проверить только для матричных функций $W = W_{-k}$ при $1 \leqslant k \leqslant k_{\max}$.

Пусть $1 \leqslant k \leqslant k_{\max}$. Обозначим для краткости $w_k(z) = z^k W_{-k}(z)$. Поскольку $\deg(W_{-k}) = -k$, то

$$\begin{aligned}\{W^*_{-k}Qh\}_\infty &= \{W^*_{-k}Qz^{k-1}[z^{-k+1}h]_+\}_\infty = \{W^*_{-k}Qz^{k-1}H_{k-1}\}_\infty = \\ &= (-1)^k\{(z^kW_{-k})^*Qz^{-1}H_{k-1}\}_\infty = \\ &= (-1)^k\{w_k^*Qz^{-1}(h_{k-1}+zH_k)\}_\infty = \\ &= (-1)^k(\{w_k^*z^{-1}\}_\infty Qh_{k-1} + \{w_k^*QH_k\}_\infty) = \\ &= (-1)^k\big(G^*_{-k}Jh^{uv}_{k-1} + \{w_k^*QH_k\}_\infty\big) = \\ &= (-1)^k\big(G^*_{-k}J(-J_0G_{-k}\{w_k^*QH_k\}_\infty + \\ &\qquad\qquad + J_0G^0_{k-1}e^{T}_{k-1}) + \{w_k^*QH_k\}_\infty\big).\end{aligned}$$

Матрица G_0 ортогональная в норме, порожденной матрицей $J_+ = JJ_0$, поэтому $G^*_{-k}J_+G_{-k} = I$ — единичная матрица и $G^*_{-k}J_+G^0_{k-1} = 0$. Отсюда $\{W^*_{-k}Qh\}_\infty = 0$ при всех $k = 1,\ldots,k_{\max}$. По лемме 13 существует такой матричный многочлен $s \in \mathcal{P}_\mu$, что функция ${W_+}^0 = h + Q^{-1}\phi s$ принадлежит $\mathcal{W}$.

Матрица ${W_+}^0$ содержит $n_u + n_v$ столбцов. Выделим блоки, отвечающие размерностям $\dim W^0_{-k} = m^0_k$:

$${W_+}^0 = \left(W^0_{k_{\max}},\ \ \ldots,\ \ W^0_1,\ \ W^0_0\right).$$

Каждая матричная функция W^0_k из этого набора имеет степень k и матрицу старших коэффициентов $J_0G^0_k$. Определим матричную функцию $\widehat{\Phi}$ размера $n \times (n_u + n_v)$ и квадратную матричную функцию $D = D^*$ размера $n_u + n_v$ равенствами

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi} &= \left(W^0_{k_{\max}},\ \ \ldots,\ \ W^0_1,\ \ W^0_0,\ \ W^0_{-1},\ \ \ldots,\ \ W^0_{-k_{\max}}\right), \\ D &= \widehat{\Phi}^*Q\widehat{\Phi} = (D_{i,j})_{i,j=-k_{\max}}^{k_{\max}},\end{aligned}$$

где $D_{i,j} = (W^0_i)^*QW^0_j$. Функции W^0_k при всех k удовлетворяют уравнению объекта $RW = 0$. По лемме 4 для любой пары столбцов w_1, w_2 из матрицы $\widehat{\Phi}$ произведение $w_1^*Qw_2$ есть многочлен. Поскольку индекс у блочной матрицы указывает на ее степень, то степени элементов D легко оцениваются:

$$\deg(D_{i,j}) = \deg((W^0_i)^*QW^0_j) \leqslant i + j, \qquad -k_{\max} \leqslant i, j \leqslant k_{\max}.$$

Отсюда следует, что матрица D — треугольная относительно косой диагонали: $D_{i,j} = 0$ при $i + j < 0$, а на этой диагонали стоят единичные матрицы, так как

$$D_{i,-i} = D_{-i,i} = (G^0_i)^*JJ_0G^0_i = (G^0_i)^*J_+G^0_i = I_{m^0_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k_{\max}.$$

Можно считать, что базис G^0_0 пространства $\mathcal{G}^0_0$ выбран в соответствии с утверждением 3 леммы 14. Тогда $D_{0,0} = \mathrm{diag}\{I_{n_u - m_1}, -I_{n_v - m_1}\}$. Если $i + j > 0$, то $\deg(D_{i,j}) < i + j$, так как старший коэффициент есть $(G^0_i)^*JJ_0G^0_j = 0$.

Приведем матрицу D к диагональному виду при помощи преобразования столбцов матрицы $\widehat{\Phi}$. Определим $\Phi_{k_{\max}} = \widehat{\Phi}$, $D_{k_{\max}} = D$ и далее по индукции:

$$\Phi_{k-1} = \Phi_k A_k, \qquad D_{k-1} = \Phi_k^* Q \Phi_k = A_k^* D_k A_k, \qquad k = k_{\max}, \ldots, 2, 1,$$

где матрица A_k отличается от единичной только одной блочной строкой,

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{pmatrix} I_{m_{k+1}}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n_u+n_v-m_k-m_{k+1}}, & 0, & 0 \\ 0, & -a_k, & I_{m_k^0}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{m_{k+1}} \end{pmatrix}, \\ a_k &= \left(\tfrac{1}{2}(D_k)_{k,k}, \ \ (D_k)_{k,k-1}, \ \ \ldots, \ \ (D_k)_{k,-k+1}\right). \end{aligned}$$

Умножение справа на матрицу A_k не меняет ограничений на степени блочных столбцов матрицы Φ_k. Степень блока из m_i^0 столбцов, обозначенного индексом i, не превосходит i при $i = k_{\max}, \ldots, 1, 0, -1, \ldots, -k_{\max}$. Старший коэффициент этого блока есть $\mathrm{col}(0, J_0 G_i^0)$ при $i \geqslant 0$ и $\mathrm{col}(0, G_i^0)$ при $i < 0$. По лемме 10 умножение на многочлен не выводит функцию из класса $\mathcal{W}$.

Преобразование на шаге k меняет только k-е блочные строку и столбец матрицы D_k, которые в матрице D_{k-1} становятся нулевыми, кроме неизменяющихся элементов $(D_{k-1})_{k,-k} = (D_{k-1})_{-k,k} = I_{m_k^0}$. В результате работы итеративного алгоритма лишь эти диагональные элементы остаются ненулевыми в матрице $D_0 = \Phi_0^* Q \Phi_0$. Для матричной функции $\Phi^0 = \Phi_0$ выполнены все утверждения теоремы. $\square$

Доказательство леммы 7. В определения полиномиального оператора Лурье–Риккати и полиномиального уравнения Лурье–Риккати число γ входит только в виде γ^{-2}. Обозначим это число γ_2. Нигде не использовалось то, что $\gamma_2 \neq 0$. Поэтому при $\gamma_2 = 0$ все утверждения о свойствах уравнения и оператора Лурье–Риккати остаются справедливыми. Непрерывная зависимость оператора $\mathcal{LR}_\gamma$ от числа γ_2 следует из непрерывной зависимости от γ_2 результата факторизации Π.

Докажем, что оператор $\mathcal{LR}_\infty$ биективен на $\mathcal{P}_\mu$. Предположим от противного, что это не так. Выберем базис векторного нуль-пространства оператора $\mathcal{LR}_\infty$ и составим из него матрицу $d \in \mathcal{P}_\mu$. Таким образом, $\mathcal{LR}_\infty(d) = 0$ и любой вектор $f \in \mathcal{P}_\mu$, для которого $\mathcal{LR}_\infty(f) = 0$, является линейной комбинацией столбцов матрицы d с вещественными коэффициентами.

Подставим $s_1 = s_2 = d$ в полиномиальное уравнение Лурье–Риккати, в котором число γ^{-2} заменено на ноль. Получим

$$\langle d, b\rangle \langle b, d\rangle = 0.$$

Но в соответствии с определением из параграфа 3.2 $\langle d, b\rangle = \langle b, d\rangle^T$ и, следовательно, $\langle d, b\rangle = 0$.

Подставим только $s_1 = d$ в полиномиальное уравнение Лурье–Риккати. Тогда $\langle d, \mathcal{A}\,\mathcal{LR}_\infty(s)\rangle = 0$ для любого $s \in \mathcal{P}_\mu$. Последнее условие равносильно $\langle \mathcal{LR}_\infty(\mathcal{A}^* d), s\rangle = 0$ или $\mathcal{LR}_\infty(\mathcal{A}^* d) = 0$. Отсюда все столбцы матрицы $\mathcal{A}^* d$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы d с вещественными коэффициентами. Следовательно, нуль-пространство оператора $\mathcal{LR}_\infty$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$ и в нем оператор $\mathcal{A}^*$ имеет собственный вектор f и собственное число λ.

По лемме 11 существует такой ненулевой вектор r, что $r^T a(\lambda) = 0$ и $r^T b(\lambda) = \langle f, b\rangle = 0$, так как $b \in \mathcal{P}_\mu$. Последние два равенства означают сократимость слева пары матричных многочленов $(a(z), b(z))$ [1, теорема П.1.1], что противоречит предположению. $\square$

Доказательство леммы 8. Определим $\Phi = \Phi_0$ из леммы 5, если оператор $\mathcal{LR}$ — взаимно однозначный, и $\Phi = \Phi^0$ из теоремы 5, если оператор $\mathcal{LR}$ — вырожденный. В обоих случаях разобьем скрытую переменную $\ell = \mathrm{col}(U, V)$ из теорем 2 и 6 на векторы размерностей n_u и n_v.

Предположим от противного, что матрица $\Phi_{vv}(i\omega_0)$ вырождена при некотором вещественном ω_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая векторная функция $V \in L^2(0,\infty)$, что $\|V\| = 1$ и преобразование Фурье $L_V(i\omega)$ этой функции обладает свойствами $\|\Phi_{vv} L_V\| < \varepsilon$ и $\|\Phi\,\mathrm{col}(0, L_V)\| \leqslant C_0$, где нормы вычисляются в L^2 на мнимой оси и число $C_0 > 0$ не зависит от ε.

По теоремам 2 и 6 паре функций $\ell = \mathrm{col}(0, V) \in L^2(0,\infty)$ соответствует единственный процесс $x = \mathrm{col}(y, u, v) \in L^2(0,\infty)$, который решает уравнение объекта при нулевых начальных данных и у которого преобразование Лапласа можно записать в виде $X(z) = \Phi_0(z)\,\mathrm{col}(0, L_V(z))$. Тогда преобразование Лапласа от функции v есть $\Phi_{vv}(z) L_V(z)$ и по равенству Парсеваля $\|v\| < C_1\varepsilon$. По теоремам 2 и 6 функционал качества на процессе x равен $\mathcal{F}(x) = -\gamma^2\|V\|^2 = -\gamma^2$.

Из условия несократимости слева пары (a, b) следует, что существует другой процесс $x_1 = (y_1, u_1, v)$, решающий уравнение объекта с тем же возмущением v и с условием $\|y_1\| + \|u_1\| \leqslant C_2\|v\| < C_1 C_2 \varepsilon = C_3\varepsilon$, где константа C_2 не зависит от v и определяется только свойствами стабилизирующего регулятора. Определим процесс $x_2 = x - x_1$. Он также решает уравнение объекта при нулевых начальных данных, но в нем возмущения нет, $v_2 = 0$. По предположению о положительной определенности $\mathcal{F}(x_2) \geqslant 0$.

Полученная совокупность неравенств

$$\mathcal{F}(x) = -\gamma^2, \qquad \mathcal{F}(x_2) \geqslant 0, \qquad \|x - x_2\| < C_3\varepsilon, \qquad \|x\| \leqslant C_0$$

не может быть выполнена при всех $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности формы $\mathcal{F}$. $\square$

Доказательство теоремы 7. Пусть γ^* — наибольшее из чисел $\gamma > \gamma_{\mathrm{abs}}$, для которых оператор $\mathcal{LR}_\gamma$ — не взаимно однозначный. Числу γ^* соответствует функция Φ^0 из теоремы 5. Выберем такое $k \geqslant 1$, что матрица Φ^0_{-k} — непустая. Пусть e_1 — первый орт в $\mathbb{R}^{m_k^0}$ и $\delta(t)$ — дельта-функция. Функция $\ell^0 = e_1\delta(t)$ принадлежит W^2_{-k,m_k^0}. По теореме 5 функция $x^0 = \mathrm{col}(y^0, u^0, v^0) = \Phi^0_{-k}(p)e_1\delta(t)$ является решением уравнения объекта при нулевых начальных данных, $x \in \mathcal{M}_0$. Докажем, что v^0 — наихудшее возмущение в задаче $\mathcal{H}^\infty$-оптимального управления.

Пусть $x = \mathrm{col}(y, u, v) \in \mathcal{M}_0$ — произвольная векторная функция с таким же возмущением, $v = v^0$. Тогда $x - x^0 = \Delta x \in \mathcal{M}_0$ и по теореме 6 существует такая обобщенная функция $\ell \in \mathcal{L}$, что $\Delta x = \Phi^0(p)\ell$. По теореме 6 $\mathcal{F}_{\gamma^*}(x^0) = 0$ и

$$\int_0^\infty (x^0)^T(t)Q_{\gamma^*}\Delta x(t)\,dt = \int_0^\infty \delta(t)e_1^T\ell_{k-}(t)\,dt = e_1^T\ell_{k-}(0) = 0,$$

так как функция $\ell_{k-} \in \mathring{W}^2_{k,m_k^0}$ равна нулю при $t = 0$. Кроме того, $\mathcal{F}(\Delta x)_{\gamma^*} \geqslant 0$ по предположению о положительной определенности функционала при нулевом возмущении, так как $\Delta v = v - v^0 = 0$. Отсюда

$$\mathcal{F}_{\gamma^*}(x) = \int_0^\infty (x^0(t) + \Delta x(t))^T Q_{\gamma^*}(x^0(t) + \Delta x(t))\,dt \geqslant 0 = \mathcal{F}_{\gamma^*}(x^0).$$

Если $\gamma < \gamma^*$, то $\mathcal{F}_\gamma(x) = \mathcal{F}_{\gamma^*}(x) + ((\gamma^*)^2 - \gamma^2)\|v^0\|^2 > 0$ для любого решения x уравнения объекта с выбранным возмущением $v = v^0$. Следовательно, для числа γ задача $\mathcal{H}^\infty$-субоптимального управления не имеет решений. Поэтому $\gamma^* \geqslant \gamma^0$. Обратное неравенство $\gamma^0 \geqslant \gamma^*$ следует из теоремы 3.

Если $\gamma < \gamma^0$ и оператор $\mathcal{LR}_\gamma$ взаимно однозначный, то по теореме 3 матричная функция $\Phi^{0\gamma}_{vv}(z)$ должна иметь нули в правой замкнутой полуплоскости. Множество чисел γ, для которых оператор $\mathcal{LR}_\gamma$ не взаимно однозначный, состоит из изолированных точек, для которых это свойство выполнено по непрерывности.

Пусть $\gamma \geqslant \gamma^0$. Разобьем скрытую переменную на функции $\ell = \mathrm{col}(U, V)$ с n_u и n_v столбцами, как в теореме 2. Требуемый регулятор определяется уравнением $U = 0$. В этом случае $y(t) = \Phi^{0\gamma}_{yv}(p)V(t)$, $u(t) = \Phi^{0\gamma}_{uv}(p)V(t)$, $v(t) = \Phi^{0\gamma}_{vv}(p)V(t)$. Отображение $v \to V$ взаимно однозначно, что следует из невырожденности матрицы $\Phi^{0\gamma}_{vv}(z)$ в замкнутой правой полуплоскости. □

Список литературы

1. *Барабанов А. Е.* Синтез минимаксных регуляторов. — СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996.
2. *Барабанов А. Е.* Факторизация матричных полиномов с ограничением на степени // АиТ. — 1997. — № 3. — С. 86–100.

3. *Барабанов А. Е., Первозванский А. А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям (Н-теория) // АиТ. — 1992. — № 9. — С. 3–32.
4. Г. В. Щипанов и теория инвариантности // Сост. Лезина З. М., Лезин В. И. — М.: Физматлит, 2004.
5. *Кухтенко А. И.* Проблема инвариантности в автоматике. — Киев: Гос. изд-во техн. лит-ры. УССР, 1963.
6. *Матвеев А. С.* Теория оптимального управления в работах В. А. Якубовича // АиТ. — 2006. — № 10. — С. 120–174. [1])
7. *Михайлов А. В.* О методе проектирования автоматических регуляторов, предложенном проф. Г. В. Щипановым // АиТ. — 1940. — № 5. — С. 129–143.
8. *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // ДАН СССР. — 1970. — Т. 194, № 3. — С. 532–535.
9. *Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195, № 2. — С. 296–299.
10. *Якубович В. А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // АиТ. — 1984. — № 8. — С. 5–45.
11. *Якубович В. А.* Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // Докл. РАН. — 1995. — Т. 343, № 2. — С. 172–175.
12. *Якубович В. А.* Синтез стабилизирующих регуляторов, обеспечивающих независимость выходной переменной системы управления от внешнего воздействия // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 27–30.
13. *Barabanov A. E.* Canonical matrix factorization and polynomial Riccati equations // Europ. J. Control. — 1997. — № 1. — P. 47–67.
14. *Barabanov A. E.* Minimax control of delayed systems // Тр. Ин-та мат. Минск. — 2004. — Т. 12, № 2. — С. 26–32.
15. *Barabanov A. E., Ghulchak A. M.* Numerical solution and operator approach to H^∞ control of linear delayed systems // The 39th IEEE Conf. Decision and Control. Sydney. Australia. December 13–15. 2000.
16. *Basar T., Barnhard P.* H^∞-optimal control and related minimax design problems. A dynamic game approach. — Birkhauser, 1995.
17. *Callier F. M.* On polynomial matrix spectral factorization by symmetric extraction // IEEE Trans. Aut. Cont. — 1985. — V. AC-30. — P. 453–464.
18. *Davis M. S.* Factoring the spectral matrix // IEEE Trans. Automat. Control. — 1963. — V. AC-8. — P. 296–305.
19. *Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P. P., Francis B. A.* State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1989. — V. AC-34, № 8. — P. 831–847.
20. *Kwakernaak H.* The polynomial approach to H_∞-optimal regulation // C.Foias, B.Francis, J.W.Helton, H.Kwakernaak, J.B.Pearson. H -Control Theory. Lecture Notes in Mathematics. V. 1496. — Springer-Verlag, 1990. P. 142–221.

[1]) См. также настоящий сборник, с. 534.

21. *Polderman J. W., Willems J. C.* Introduction to mathematical systems theory: a behavioral approach. — Springer-Verlag, 1998.
22. *Willems J. C.* Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1991. — V. 36. — P. 259–294.
23. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses // IEEE Trans. Automat. Control. — 1981. — V. AC-26. — P. 301–320.

А. С. Матвеев[†]

Теория оптимального управления в работах В. А. Якубовича[*]

Аннотация: дается обзор основных результатов Владимира Андреевича Якубовича по теории оптимального управления, а также соответствующих исследований, выполненных представителями основанной им школы.

1. Введение

Название и тематическая направленность данного обзора нуждаются в пояснениях. Во-первых, он не затрагивает либо касается очень бегло тех аспектов поднятой темы, подробному освещению которых посвящены другие работы данного выпуска [21, 32]. Во-вторых, в нем прослеживается развитие результатов и идей В. А. Якубовича в исследованиях его ближайших учеников и сотрудников. Иными словами, по замыслу статья ориентирована на обзор соответствующих результатов школы В. А. Якубовича. Автор заранее приносит извинения коллегам, чьи исследования, возможно, не нашли отражения в данном тесте в связи с возникшими проблемами (потерей связи с некоторыми представителями школы, отсутствием ранних работ в электронных базах данных и т. п.).

Наиболее существенно коррелирована с [21, 32] тема, затрагиваемая в параграфе 2: линейно-квадратичная теория оптимального управления и частотная теорема. В параграфе 2 акцент сделан на связях указанных теории и теоремы соответственно и направлениях, лежащих в стороне от основной тематики [21, 32]. Существенно более подробный параграф 3 посвящен недавним исследованиям специального класса задач невыпуклой глобальной оптимизации: линейно-квадратичным задачам оптимального управления с квадратичными ограничениями. Изложение во многом основано на обзорной работе [91] автора данной статьи и

[†]) Санкт-Петербургский университет.

[*]) Оригинал статьи опубликован в специальном выпуске журнала «Автоматика и телемеханика». — 2006. — № 10. — С. 120–174.

В. А. Якубовича, адресованной математической аудитории. В параграфе 4 рассматриваются работы по нелинейному оптимальному управлению. При подготовке этого параграфа были использованы материалы книги [92]. Наконец, параграф 5 содержит обзор исследований, связанных с предложенной В. А. Якубовичем концепцией универсального оптимального регулятора.

Мне приятно выразить признательность А. Е. Барабанову, С. В. Гусеву, А. Л. Лихтарникову, П. В. Пакшину, А. В. Проскурникову, А. В. Савкину, А. Л. Фрадкову и А. И. Шепелявому за ценные замечания и помощь при подготовке данной статьи.

2. Линейно-квадратичная теория оптимального управления и частотная теорема

Предметом изучения данной теории являются разнообразные задачи оптимального управления, сводимые к минимизации выпуклого квадратичного функционала на аффинном пространстве. Ее основы были заложены исследованиями Р. Калмана [189], Н. Н. Красовского [51, 52] и А. М. Летова [63] (а в части, касающейся стохастических объектов, — исследованиями А. Н. Колмогорова [50], Н. Винера [230], Р. С. Бьюси [168]). Значительный вклад в ее развитие внесли B.D.O. Anderson, В.И. Зубов, В. М. Кунцевич, А. Б. Куржанский, V. Kučera, J.L. Lions, А. И. Лурье, В. И. Уткин, В. А. Якубович, J. C. Willems, W. M. Wonham и многие другие ученые.[1] Методически эта область имеет важные связи с комплексным анализом, теорией устойчивости, стабилизации и оптимизации нелинейных динамических систем ([126, 166, 203, 204, 219–221, 224] и др.). Общеизвестно и практическое значение линейно-квадратичной теории оптимального управления [207, 240]. Оно во многом объясняется эффективностью развитых в ней методов.

В настоящее время любой человек, занявшийся серьезным изучением современной теории управления, вряд ли избежит близкого знакомства с частотной теоремой (леммой Якубовича–Калмана) — настолько фундаментальны связи этого результата с различными разделами данной теории. Это касается и линейно-квадратичной теории оптимального управления, причем в особой степени. Вместе с тем исторически частотная теорема появилась в результате решения [29, 122, 190, 212] задачи нелинейной матричной алгебры, возникающей при исследовании нелинейных систем автоматического регулирования (подробнее об этом см. [32]). Это — задача о существовании квадратичной функции

$$V(x) = x^\top P x, \tag{2.1}$$

[1] Об истории линейно-квадратичной теории оптимального управления см. обзоры в [94, 160, 188].

являющей функцией Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 0$$

для любой системы, описываемой уравнениями

$$x' = Ax + Bu, \qquad u = \varphi(x,t), \tag{2.2}$$

где дифференциальное уравнение (определяемое матрицами A и B) задано, а «нелинейность» $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{G}(x,u) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad u = \varphi(x,t)$$

и в рамках этого требования произвольна. Здесь $\mathcal{G}(x,u)$ — заданная (незнакоопределенная) квадратичная форма переменных x и u. Кратко эти требования выражаются условием

$$\frac{dV}{dt} = 2x^\top P(Ax + Bu) \leqslant 0 \Longleftarrow \mathcal{G}(x,u) \leqslant 0. \text{ [1]} \tag{2.3}$$

Оно означает, что одна квадратичная форма неотрицательна всякий раз, когда неотрицательна другая форма. Анализ этого условия выгодно свести к стандартной алгебраической задаче: к проверке неотрицательности квадратичной формы на всей области определения. Это можно сделать с помощью специального приема, получившего название S-процедуры. [2] Именно: можно показать, что (2.3) равносильно существованию такого числа $\tau \geqslant 0$, что

$$2x^\top P(Ax + Bu) - \tau\mathcal{G}(x,y) \leqslant 0 \qquad \forall x, u.$$

Несложный анализ показывает, что при неограничительных предположениях случай $\tau = 0$ неинтересен [127]. При $\tau > 0$, сделав замену неизвестной $P := -\tau^{-1}P$, приходим к следующему вопросу алгебраического характера.

При каких условиях на заданные матрицы A, B и квадратичную форму $\mathcal{G}(x,u)$ существует такая матрица $P = P^\top$, что

$$2x^\top P(Ax + Bu) + \mathcal{G}(x,y) \geqslant 0 \qquad \forall x, u \text{ ?} \tag{2.4}$$

Ответ на этот вопрос и дает частотная теорема. При этом анализ нелинейных систем регулирования, как правило, не требует вычисления матрицы P. Здесь важен сам факт существования и качественные свойства этой матрицы, например сведения о ее знакоопределенности.

---

[1] Так как речь идет о функции Ляпунова, естественен вопрос о положительности матрицы P. Вместе с тем в ряде случаев, например при исследовании дихотомии решений системы (2.2), полезно применение незнакоопределенной формы (2.1). Поэтому указанный вопрос естественно выделить в отдельное рассмотрение. Подробнее с затронутой темой можно ознакомиться в обзорах [22, 32].

[2] С подробностями можно ознакомиться в [32] и параграфе 3.5 данной статьи.

Оказывается, к очень близкому вопросу приводит и стандартная линейно-квадратичная задача оптимального управления. Для пояснения деталей рассмотрим линейную систему

$$x' = Ax + Bu, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad x(0) = a, \tag{2.5}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление [1)], A и B — постоянные вещественные матрицы и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ задан. Допустимым считаем любое управление $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее следующему требованию «устойчивости»:

$$|x(\cdot)| + |u(\cdot)| \in L_2(0, \infty), \tag{2.6}$$

в котором $x(\cdot)$ определено по $u(\cdot)$ из (2.5). Задача состоит в том, чтобы найти допустимое управление $u(\cdot)$ из условия минимизации

$$\mathfrak{G}[x(\cdot), u(\cdot)] := \int\limits_0^\infty \mathcal{G}\left[x(t), u(t)\right]\, dt \to \inf, \tag{2.7}$$

где, как и ранее, $\mathcal{G}(x, u)$ — заданная квадратичная форма

$$\mathcal{G}(x, u) = x^\top G x + 2x^\top Q u + u^\top \Gamma u \tag{2.8}$$

с постоянными коэффициентами $G = G^\top, Q$ и $\Gamma = \Gamma^\top$. В дальнейшем для простоты предполагаем, что пара (A, B) вполне управляема. Тогда множество $\mathfrak{M}(a)$ допустимых процессов (т. е. пар $[x(\cdot), u(\cdot)]$, удовлетворяющих (2.5) и (2.6)) непусто и, значит, задача осмыслена.

Этой задаче посвящены многочисленные исследования (например, [51, 52, 63, 93–95, 127, 142, 160, 188, 189] и многие другие), начатые, по-видимому, Р. Калманом [189], Н. Н. Красовским[52] и А. М. Летовым [63]. В первых работах этого цикла рассматривался случай, когда в (2.7) квадратичная форма $\mathcal{G}$ неотрицательна или, более того, положительно определена: $\mathcal{G}(x, u) > 0$ при $|x| + |u| > 0$. Последнее условие гарантирует как существование, так и единственность оптимального процесса, а также справедливость (2.4) с $P := 0$. Впоследствии в связи с потребностями приложений значительное внимание уделялось случаю незнакоопределенной формы $\mathcal{G}$. Для нее оптимум может и не достигаться. Точнее, в рассматриваемом случае вполне управляемой пары (A, B) возможна одна и только одна из следующих трех ситуаций. Первая, когда

$$\inf_{\mathfrak{M}(a)} \mathfrak{G} = -\infty \quad \text{для любого} \quad x(0) = a, \tag{2.9}$$

неинтересна: задача не имеет решения. Вторая характеризуется тем, что для любого a задача (2.5)–(2.7) имеет, причем единственное, решение; в этом случае ее называют *регулярной*. Наконец, возможна

[1)] Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначают множества вещественных и комплексных чисел соответственно.

третья ситуация, когда $\inf_{\mathfrak{M}(a)} \mathfrak{G} > -\infty$ для любого a, но задача нерегулярна. В этом случае она называется *сингулярной* и может при некоторых a не иметь обычного решения. Тогда решение можно найти в виде либо обобщенного процесса, либо последовательности обычных процессов, минимизирующей функционал (2.7) в пределе [93, 94, 142].

Возникает вопрос: как узнать, какая из перечисленных трех ситуаций имеет место для данной задачи. В случае, когда решение существует, возникает вопрос о его нахождении. Оказывается, все эти вопросы имеют прямое отношение к разрешимости неравенства (2.4). Именно [1]: (при выполнении малоограничительных «рамочных» предположений) задача регулярна тогда и только тогда, когда разрешимо относительно $P = P^\top$ строгое неравенство, аналогичное (2.4):

$$2x^\top P(Ax + Bu) + \mathcal{G}(x, u) > 0 \qquad \forall x, u : | x | + | u | \neq 0. \tag{2.10}$$

Если это неравенство неразрешимо, но разрешимо исходное нестрогое неравенство (2.4), то задача сингулярна. Неразрешимость (2.4) равносильна (2.9).

Вопрос о построении оптимального управления связан со спецификацией неравенства (2.4) в виде

$$2x^\top P(Ax + Bu) + \mathcal{G}(x, u) = |\Gamma^{1/2}u - h_*^\top x|^2 \quad (\forall x, u). \tag{2.11}$$

Здесь h_* — неизвестная $n \times m$-матрица, которая, как и P, подлежит построению, и Γ — матрица из (2.8). [2] Соотношение (2.11) влечет (2.4). Оказывается, связь между ними глубже: они разрешимы только одновременно. Далее для простоты ограничимся регулярным случаем. Тогда $\Gamma > 0$ и среди решений (2.11) найдется пара (P, h_*), для которой $A + Bh^\top$ (где $h := h_*\Gamma^{-1/2}$) — гурвицева матрица. Это решение (называемое *стабилизирующим*) единственно и непосредственно связано с задачей оптимального управления. Именно оптимальный процесс порождается регулятором

$$u(t) = h^\top x(t), \tag{2.12}$$

где $h := h_*\Gamma^{-1/2}$, а матрица P дает минимальное значение функционала качества:

$$\inf_{\text{при ограничениях (2.5),(2.6)}} \int_0^\infty \mathcal{G}\,[x(t), u(t)]\; dt = a^\top Pa. \tag{2.13}$$

Напомним, что a — начальное состояние из (2.5).

---

[1] Обоснование излагаемых в данном и следующем абзацах фактов можно найти в [52, 63, 94, 127, 142, 160, 188, 189, 234].

[2] Обсуждаемый вопрос о построении оптимального процесса не имеет смысла в случае (2.9). В остальных случаях $\Gamma \geqslant 0$, и поэтому матрица $\Gamma^{1/2} \geqslant 0$ корректно определена.

Замечание 2.1. В терминах коэффициентов квадратичных форм и матрицы $h := h_*\Gamma^{-1/2}$ равенство (2.11) приобретает форму матричных уравнений Лурье (the algebraic Riccati equation)

$$PA + A^\top P + G = h\Gamma h^\top, \quad PB + Q + h\Gamma = 0. \tag{2.14}$$

Итак, вопрос о разрешимости неравенства (2.4) имеет непосредственное отношение к линейно-квадратичной задаче (2.5)–(2.7), а после трансформации к виду (2.11) фактически сводится к вопросу о нахождении ее решения.

Частотная теорема предоставляет эффективные средства нахождения ответов на эти вопросы. Она также раскрывает связи между поднятыми и некоторыми другими вопросами, естественно возникающими в обсуждаемой области. В современной теории управления сложилась точка зрения [1)], согласно которой та или иная задача управления считается в принципе решенной, если ее удалось свести к одному или нескольким разрешимым уравнениям Лурье. Частотная теорема предоставляет удобные условия разрешимости. В настоящее время известны весьма эффективные методы вычисления стабилизирующего решения (P, h) уравнений Лурье (с образцами и обзорами которых можно ознакомиться в [6, 7, 20, 49, 57, 58, 115, 127, 159, 162, 194, 206]). Интерес к частотной теореме стимулировал поиски новых доказательств, которые в ряде случаев послужили идейным фундаментом для некоторых из упомянутых вычислительных методов. Один из наиболее эффективных алгоритмов [2)] такого рода предложен В. А. Якубовичем [122]. Иногда (см., например, [127]) его формулировку интерпретируют как часть частотной теоремы.

Переходя к подробностям формулировки этой теоремы, отметим, что при сохранении основных характеристик она претерпела ряд модификаций с течением времени. [3)] Приведем одну из поздних формулировок, акцентируя моменты, ориентированные на линейно-квадратичную оптимизацию, и внося уместные упрощения. Изложение следует, в основном, параграфу 2 гл. 2 книги [92] и статьям [94, 234].

Теорема 2.1. *Пусть пара* (A, B) *стабилизируема и* $\Gamma > 0$. *Следующие утверждения равносильны*:

(I) *Задача* (2.5)–(2.7) *регулярна.*

[1)] С ее образцами можно ознакомиться, например, в [160, 163–165, 170, 173, 179, 181, 204, 214, 220, 221, 224, 226, 243].

[2)] С его изложением можно ознакомиться в [127] и параграфе 2.2 книги [92].

[3)] Подробнее об истории частотной теоремы см. [32].

(II) *Для любого $x(0) = a \in \mathbb{R}^n$ существует экспоненциально убывающее при $t \to +\infty$ решение $x(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, $u(\cdot)$ системы*

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}\right)^\top, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)^\top, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0, \tag{2.15}$$

где $\mathcal{H}(\cdot)$ — гамильтониан $\mathcal{H}(x, u, \psi) = \psi^\top(Ax + bu) - \frac{1}{2}\mathcal{G}(x, u)$.

(III) *Выполнено строгое частотное условие: при некотором $\delta > 0$*

$$\mathcal{G}(\widehat{x}, \widehat{u}) \geqslant \delta \left(|\widehat{x}|^2 + |\widehat{u}|^2\right) \tag{2.16}$$

для любых $\omega \in \mathbb{R}, \widehat{x} \in \mathbb{C}^n$, $\widehat{u} \in \mathbb{C}^m$, удовлетворяющих равенству $\imath\omega\widehat{x} = A\widehat{x} + B\widehat{u}$. При этом в (2.16) рассматривается расширение квадратичной формы $\mathcal{G}$ до эрмитовой.

(IV) *Линейная гамильтонова система* (2.15) *не имеет мнимых собственных чисел, т. е.* $\det(K - \imath\omega I) \neq 0 \;\; \forall \omega \in \mathbb{R}$, *где*

$$K := \begin{bmatrix} A - B\Gamma^{-1}Q^\top & B\Gamma^{-1}B^\top \\ G - Q\Gamma^{-1}Q^\top & -A^\top + Q\Gamma^{-1}B^\top \end{bmatrix}$$

и G, Q, Γ — матричные коэффициенты квадратичной формы (2.8).

(V) *Уравнения Лурье* (2.14) *имеют стабилизирующее решение* (P, h).

(VI) *Существует стабилизирующее решение* (P, h) *уравнения* (2.11), *где $h_* := h\Gamma^{1/2}$.*

(VII) *Существует постоянная вещественная $n \times n$ матрица $P = P^\top$, удовлетворяющая неравенству* (2.4) *в усиленной форме* (2.10).

(VIII) *Функционал* (2.7) *положительно определен на подпространстве процессов $\mathfrak{M}(0)$ с нулевым начальным состоянием $x(0) = 0$:*

$$\exists \delta > 0 : \int\limits_0^\infty \mathcal{G}(x, u)\, dt \geqslant \delta \int\limits_0^\infty (|x|^2 + |u|^2)\, dt$$

$$\forall\, [x(\cdot), u(\cdot)] \in L_2 \times L_2 : x' = Ax + bu, \quad x(0) = 0.$$

Пусть выполнено любое из этих условий (а, значит, и все остальные). Тогда существует только одна пара матриц P и h со свойствами, оговоренными в (V). *То же верно в отношении* (VI), *причем соответствующие пары матриц тождественны.* [1] *Для*

[1] Матрица P из (VII) может отличаться от аналогичной матрицы в (V) и (VI).

этих матриц справедливо равенство (2.13) *и оптимальный процесс при любом* $x(\cdot) = a$ *вырабатывается регулятором* (2.12). *В утверждении* (II) *решение* $x(\cdot), \psi(\cdot), u(\cdot)$ *определяется однозначно и* $x(\cdot), u(\cdot)$ — *оптимальный процесс.*

Предположим теперь, что пара (A, B) *вполне управляема. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Условия* (I) *и* (III) *по-прежнему равносильны, т. е. строгое частотное неравенство* (2.16) *необходимо и достаточно для регулярности задачи* (2.5)–(2.7);

(ii) *Эта задача сингулярна в том и только в том случае, если указанное строгое неравенство* (2.16) *нарушается, но справедливо аналогичное нестрогое неравенство, т. е.*

$$\mathcal{G}(\widehat{x}, \widehat{u}) \geqslant 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R},\ \widehat{x} \in \mathbb{C}^n,\ \widehat{u} \in \mathbb{C}^m : \imath\omega\widehat{x} = A\widehat{x} + B\widehat{u}; \tag{2.17}$$

(iii) *Соотношение* (2.9) *имеет место тогда и только тогда, когда условие* (2.17) *нарушается.*

Частотные условия (2.16) и (2.17) представляют собой удобные для проверки тесты, допускающие простую алгебраическую интерпретацию. Например, несложно показать [127], что (2.16) приводится к виду

$$\Gamma > 0 \quad \text{и} \quad \det\left[|\chi(\imath\omega)|^2\pi(\imath\omega)\right] \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Здесь $\chi(\imath\omega) := \det(\imath\omega I - A)$ и $\pi(\imath\omega)$ — матрица эрмитовой формы $\mathcal{G}\left[(\imath\omega I - A)^{-1}Bu, u\right]$, т. е.

$$\begin{aligned}\pi(\imath\omega) = \left[(\imath\omega I - A)^{-1}B\right]^* G(\imath\omega I - A)^{-1}B + \\ + \left[(\imath\omega I - A)^{-1}B\right]^* Q + Q^*(\imath\omega I - A)^{-1}B + \Gamma,\end{aligned}$$

где * — эрмитово сопряжение. В (2.18) $|\chi(\imath\omega)|^2\pi(\imath\omega)$ — матричный многочлен от ω (так как им является $\chi(\imath\omega)(\imath\omega I - A)^{-1}$). Значит, проверка (2.18) сводится к двум стандартным алгебраическим задачам: проверке положительности симметричной матрицы и проверке отсутствия вещественных корней у многочлена.

Замечание 2.2. 1. Условие (IV) является переформулировкой строгого частотного неравенства (2.16), так как характеристический многочлен матрицы K лишь скалярным множителем отличается от детерминанта из (2.18) [92, 127].

2. Леммой Якубовича–Калмана обычно называют утверждение, констатирующее эквивалентность (III)–(VII), а также близкое утверждение, касающееся нестрогих неравенств (2.4) и (2.17).

Сформулированная теорема касается в основном регулярного случая. Вместе с тем сингулярные линейно-квадратичные задачи оптимального управления также представляют значительный интерес. (Подробнее об этом см. [93, 94, 141, 142, 188].) Их исследованию разными методами посвящены многочисленные работы (с обзорами которых можно ознакомиться в [71, 94, 185, 188, 228, 231]). Для задачи (2.5)–(2.7) в определенном смысле наиболее общие и законченные результаты получены, по-видимому, в [93–95, 142]. [1] Соответствующие матрицы P и h_* из представления (2.11) по-прежнему играют важную роль в построении решения задачи оптимального управления [93–95, 142]. Однако по сравнению с регулярным случаем, процедура построения и само понятие решения усложняются. В сингулярном случаем решение может пониматься как обобщенный процесс ($x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ — обобщенные в смысле Шварца функции) либо как минимизирующая последовательность обычных процессов [93–95, 142]. Важные для исследования сингулярного случая условия полуограниченности абстрактного квадратичного функционала получены в [18, 136].

Теорема 2.1 касается стационарной детерминированной задачи на бесконечном временно́м интервале. Эта теорема также естественно связана с решением более общих задач с аддитивно возмущенным объектом и линейными слагаемыми в функционале [8–10] (подобные задачи в разных постановках в случае дискретной модели времени изучались в [11–13] с помощью «дискретного» аналога частотной теоремы), а также задач на конечном временном интервале [16, 119, 145], разнообразных стохастических линейно-квадратичных задач управления [35, 94, 141], а также нахождением оптимальных стратегий управления в динамических играх с непрерывной [123, 124] и дискретной [17] моделями времени.

В настоящее время интересы теории управления распространяются на широкий спектр разнообразных систем. Они описываются не только стационарными обыкновенными дифференциальными уравнениями, но и уравнениями других типов: нестационарными, с запаздывающим аргументом, разностными, дифференциально-разностными, интегро-дифференциальными, в частных производных и т. д. Это стимулировало многочисленные исследования, посвященные обоснованию аналогов частотной теоремы для таких систем. Ее связь с линейно-квадратичной теорией оптимального управления оказалась весьма эффективным инструментом подобных обобщений. Соответствующие достижения подробно освещены в [32]. Поэтому остановимся лишь очень кратко на некоторых направлениях таких исследований, акцентируя внимание на работах, представляющих школу В. А. Якубовича. Установлены аналоги частотной теоремы для стационарных систем с дискретной моделью времени в случае, когда пространства состояний и управлений как конечномерны [54, 103, 127, 191, 222, 223] [2], так и

[1] Лемма Якубовича–Калмана уже в своих исходных формах охватывала сингулярный случай, имея дело с нестрогими неравенствами (2.4) и (2.17).

[2] Дискретный вариант леммы Якубовича–Калмана начал развиваться практически одновременно с непрерывным и может быть выведен из последнего простым преобразованием; подробнее об этом см. в [32].

бесконечномерны [15, 67, 128]. Подобные обобщения получены и для систем с непрерывной моделью времени и бесконечномерными пространствами состояний и управлений [68, 69, 128]. Обобщениям частотной теоремы на линейные системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, и ее связям с линейно-квадратичной оптимизацией посвящены работы [143–145]. Аналогичные результаты, относящиеся к случаю произвольно изменяющихся во времени ограниченных коэффициентов, получены в [217, 218]. Более полные и подробные сведения, а также библиография приведены в [32].

3. Невыпуклые задачи глобальной оптимизации в теории управления

3.1. Введение

В 90-х г. цикл работ по линейно-квадратичной теории оптимального управления получил органичное продолжение в исследованиях, посвященных распространению методов этой теории на задачи с квадратичными ограничениями. Точнее, речь идет об определенном общем подходе, позволяющем стандартным образом строить эффективные алгоритмы решения специальных невыпуклых задач глобальной оптимизации на базе методов линейно-квадратичной теории оптимального управления. В отличие от большинства известных методов невыпуклой глобальной оптимизации, которые в основной массе являются вычислительными, часто основаны на эвристических идеях и не всегда сопровождаются гарантией сходимости, упомянутые алгоритмы основаны на математической теории, являются в наиболее существенной части аналитическими и гарантированно приводят к нахождению глобального оптимума. В основе этого подхода лежит полученное В. А. Якубовичем и его учениками частичное решение проблемы Халмоша [183]. Она касается обобщения на случай большего числа форм знаменитой теоремы Теплица–Хаусдорфа [184], утверждающей, что две эрмитовы формы трансформируют единичную сферу в выпуклое множество. Обсуждаемый подход был предложен В. А. Якубовичем в 1992 г. [146, 234, 235] [1]; его дальнейшему развитию посвящены работы [40, 45, 82–85, 199, 201, 202].

Упомянутый подход ориентирован на специальный класс невыпуклых задач глобальной оптимизации. Этот класс включает многие задачи, получаемые внесением в постановку традиционных линейно-квадратичных задач оптимального управления дополнительных квадратичных ограничений (вообще говоря, невыпуклых). Для иллюстрации приведём простой пример [234] задачи этого класса, связанный

[1] Начальные элементы подхода встречаются в более ранней работе [117].

с проблемой оптимальной стабилизации крена летательного аппарата [31, с.227]:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = \alpha x_2 + \beta u \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0), \tag{3.1}$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \theta, \quad |x_1| + |x_2| + |u| \in L_2(0, +\infty), \tag{3.2}$$

$$\boxed{\int\limits_0^\infty x_1^2\, dt \leqslant \gamma \int\limits_0^\infty u^2\, dt} \quad (\gamma > 0), \quad \int\limits_0^\infty u^2\, dt \to \min. \tag{3.3}$$

Здесь α, β, θ — заданные константы, x_1 — угол крена и u — угол отклонения элеронов. Минимум ищем на множестве *процессов*, т. е. троек $[x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)]$ функций $x_i(\cdot), u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих всем ограничениям из постановки задачи.

Нетрадиционный момент этой постановки — ограничение, обведенное рамкой: опуская его, получаем стандартную линейно-квадратичную задачу оптимального управления. В ней речь идет о стабилизации крена при естественном требовании минимизации затрат на управление. Отметим, впрочем, что эта задача сингулярна в смысле [94]; в частности, при $\theta \neq 0$ минимум функционала не достигается ни на одном процессе. Формальное решение этой задачи дается регулятором [234] $u = hx_2$, где $h = 0$ при $\alpha < 0$ и $h = -2\alpha\beta^{-1}$ при $\alpha > 0$. Так как при этом $x_1(\cdot) \overline{\in} L_2(0, +\infty)$ для $\theta \neq 0$, данное решение неверно. Можно, однако, показать [94], что указанный регулятор, во-первых, порождает обобщенный оптимальный процесс и, во-вторых, аппроксимируется последовательностью регуляторов, которая порождает последовательность процессов, минимизирующих функционал в пределе [94].

Таким образом, даже при отсутствии ограничения, обведенного рамкой, рассматриваемая задача хотя и стандартна, но решается не слишком просто. Это само по себе создает пессимистическое настроение при оценке перспектив решения более сложной задачи с ограничением. Это настроение усиливается ввиду невыпуклости ограничения: оно задается невыпуклым функционалом и задает невыпуклое множество процессов [85, 91]. Значит, (3.1)–(3.3) — невыпуклая задача глобальной оптимизации. Как хорошо известно [215], такие задачи обычно с трудом поддаются решению, даже если решение понимать как численное.

На этом фоне нетривиальной и до известной степени неожиданной представляется установленная В. А. Якубовичем [234] возможность аналитического [1)] решения задачи (3.1)–(3.3) с ограничением. Точнее, в [234] доказано, что справедливы следующие утверждения:

i) в задаче (3.1)–(3.3) оптимальный процесс существует и единствен;

ii) этот процесс порождается регулятором

$$u = -\operatorname{sgn}\beta \sqrt{\gamma^{-1}(\eta - 1)}\, x_1 - \beta^{-1}(\alpha + |\alpha|\zeta) x_2, \tag{3.4}$$

[1)] С точностью до вычисления корня полинома четвертой степени.

где
$$\eta := \frac{1}{4}\beta^{-2}\left[4\beta^2 + \alpha^4\gamma(\zeta^2-1)^2\right]$$
и ζ — единственный на полуоси $\zeta \geqslant 0$ корень уравнения
$$(\zeta^2-1)(\zeta+|\alpha|)(3\zeta+|\alpha|) = 4\alpha^{-4}\beta^2\gamma^{-1}. \tag{3.5}$$

Подчеркнем, что эти утверждения не являются изолированными фактами, касающимися одного частного примера. Они являются проявлением общего феномена и реализацией общего подхода, открытого и предложенного в работах В. А. Якубовича [146, 234, 235].

3.2. Правило решения задач невыпуклой глобальной оптимизации

Предложенный в [146, 234, 235] подход состоит в обосновании основных соотношений теории выпуклой двойственности для рассматриваемых невыпуклых задач оптимизации и в применении основанного на них правила решения задачи. Изложим его, следуя работе [201] и применительно к общей задаче оптимизации:
$$\mathfrak{G}_0(z) \to \inf \quad \text{в области} \quad z \in Z\,, \quad \mathfrak{G}(z) \lessdot 0_{\mathbb{R}^s}. \tag{3.6}$$
Здесь Z — произвольное множество [1]), функции $\mathfrak{G}_0(\cdot) : Z \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{G}(\cdot) : Z \to \mathbb{R}^s$ и число $k = 0, \dots, s$ заданы, и
$$y = (y_i) \lessdot \overline{y} = (\overline{y}_i) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boxed{y_i \leqslant \overline{y}_i \text{ при } i \leqslant k \text{ и } y_i = \overline{y}_i \text{ при } i > k}. \tag{3.7}$$

Пояснение 3.1. 1. В приложениях Z — множество всех возможных процессов в некоторой (обычно линейной) управляемой динамической системе.

2. В терминах скалярных компонент вектор-функции $\mathfrak{G}(\cdot) = [\mathfrak{G}_1(\cdot), \dots, \mathfrak{G}_s(\cdot)]$ последнее соотношение из (3.6) равносильно следующей системе неравенств и уравнений:
$$\mathfrak{G}_1(z) \leqslant 0, \dots, \mathfrak{G}_k(z) \leqslant 0, \qquad \mathfrak{G}_{k+1}(z) = \ldots = \mathfrak{G}_s(z) = 0. \tag{3.8}$$
(При $k = s$ отсутствуют равенства, а при $k = 0$ — неравенства.)

Введем *функцию Лагранжа*
$$S(\tau, z) := \mathfrak{G}_0(z) + \tau^\top \mathfrak{G}(z), \tag{3.9}$$
где $\tau \in \mathbb{R}^s$ — *множитель Лагранжа*. Далее
$$y \underset{k}{\gtrsim} z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boxed{y_i \geqslant z_i \text{ при } i \leqslant k}.$$

[1]) Обычно Z — аффинное подпространство вещественного линейного пространства X, т. е. сдвиг $Z = \mathfrak{M} + a$ некоторого линейного подпространства $\mathfrak{M}$.

Упомянутое правило состоит в выполнении следующих действий.

(I) *Для $\tau \succeq_{\mathfrak{K}} 0$ решаем задачу*

$$S(\tau, z) \to \inf \quad \text{в области} \quad z \in Z, \tag{3.10}$$

ограничиваясь нахождением величины

$$S_0(\tau) := \inf_{z \in Z} S(\tau, z). \tag{3.11}$$

(II) *Находим какое-либо решение τ_0 двойственной задачи*

$$S_0(\tau) \to \max \quad \text{в области} \quad \tau \succeq_{\mathfrak{K}} 0, \tag{3.12}$$

где максимум обязательно достигается.

(III) *Находим все решения z^0 задачи* (3.10) *с $\tau := \tau_0$ и затем отбрасываем решения z^0, не удовлетворяющие хотя бы одному из следующих соотношений*

$$\mathfrak{G}(z^0) \trianglelefteq 0, \quad \tau_0^\top \mathfrak{G}(z^0) = 0.$$

Множество оставшихся точек $\{z^0\}$ совпадает с множеством всех решений исходной задачи (3.6).

(IV) *Пусть $\inf_{z \in D} \mathfrak{G}_0(z) > -\infty$, где $D := \{z \in Z : \mathfrak{G}(z) \trianglelefteq 0\}$. Последовательность $\{z_n\} \subset Z$ является минимизирующей в задаче* (3.6), *т. е.*

$$\mathfrak{G}_0(z_n) \to \inf_{z \in D} \mathfrak{G}_0(z) \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad \text{и} \quad z_n \in D \quad \forall n,$$

в том и только том случае, если она минимизирующая в задаче (3.10) *с $\tau := \tau_0$, т. е.*

$$S(\tau_0, z_n) \to \inf_{z \in Z} S(\tau_0, z) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и при этом $\mathfrak{G}(z_n) \trianglelefteq 0 \ \forall n$, $\lim_{n \to \infty} \tau_0^\top \mathfrak{G}(z_n) = 0$.

Пояснение 3.2. Пункт (IV) интересен, если исходная задача (3.6) не имеет решений. Тогда выполнение действий (I)–(III) приводит к пустому множеству.

Для удобства ссылок в рамках данной статьи правило (I)–(IV) далее называем *правилом Якубовича*.

Это правило сводит решение исходной, вообще говоря, невыпуклой задачи к решению задач (3.10) и (3.12). Вторая из них, как несложно убедиться, является задачей конечномерной выпуклой оптимизации и обычно сравнительно легко решается методами выпуклого программирования. Поэтому общая дееспособность метода во многом определяется возможностью эффективного решения задачи (3.10). Она в отличие от (3.6) не содержит ограничения $\mathfrak{G}(z) \trianglelefteq 0$ и в этом смысле проще. Более того, для многих линейно-квадратичных задач оптимального управления с квадратичными ограничениями (3.10) — это некоторая задача, изученная в классической линейно-квадратичной теории оптимального управления и допускающая эффективное решение. Этим и объясняется привлекательность обсуждаемого правила в рассматриваемой области.

Вместе с тем вопрос о самой применимости этого правила нетривиален: известны случаи, когда оно некорректно, т. е. дает неправильный ответ, а сформулированные в (I)–(IV) утверждения неверны. Интерес к правилу (I)–(IV) объясняется прежде всего тем, что удалось обнаружить много практически интересных классов невыпуклых задач, допускающих его применение.

3.3. Критерии корректности правила Якубовича

Отметим прежде всего, что эта корректность равносильна справедливости *соотношения лагранжевой двойственности*

$$\max_{\tau \geqslant 0} \inf_{z \in Z} S(\tau, z) = \inf_{z \in D} \mathfrak{G}_0(z), \tag{3.13}$$

где *множество допустимых процессов* D определено в **(IV)**.

Проблеме двойственности в задачах оптимизации посвящены многочисленные исследования (K. J. Arrow, L. Hurwicz, D. G. Luenberger, I. Ekeland, R. Temam, Е. Г. Гольштейн, В. Н. Соловьев, В. М. Тихомиров и многие другие.) В них, в частности, были предложены общие критерии справедливости лагранжевой двойственности, проверка которых обычно составляет отдельную и часто нетривиальную задачу, а также явно выделены некоторые типы задач, для которых эта двойственность имеет место и, значит, правило Якубовича корректно. Среди них — задача (3.6) с выпуклыми функциями $\mathfrak{G}_0(\cdot)$ и $\mathfrak{G}(\cdot)$ [1]) (Z — линейное пространство), задачи, сводимые к выпуклым посредством определенного приема, именуемого «релаксацией» [121], а также некоторые другие случаи (см. [209]). В контексте данной работы особый интерес представляют следующие два случая справедливости правила Якубовича (см. [117, 126]), так как они касаются невыпуклых линейно-квадратичных задач оптимизации с квадратичными ограничениями.

В общей форме такие задачи можно записать в виде (3.6), где $Z = X$ — линейное пространство, а функции $\mathfrak{G}_0(\cdot)$ и $\mathfrak{G}(\cdot)$ *квадратичны*, т. е.

$$\mathfrak{G}_0(z) = \mathfrak{B}_0(z) + l_0^* z + \gamma_0, \qquad \mathfrak{G}(z) = \mathfrak{B}(z) + Az + \gamma. \tag{3.14}$$

Здесь $l_0^* : X \to \mathbb{R}$ и $A : X \to \mathbb{R}^s$ — линейные операторы, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^s$, а $\mathfrak{B}_0(\cdot) \in \mathbb{R}$ и $\mathfrak{B}(\cdot) \in \mathbb{R}^s$ — скалярная и векторная квадратичные формы соответственно. Другими словами,

$$\mathfrak{B}(z) = [\mathfrak{B}_1(z), \ldots, \mathfrak{B}_s(\cdot)], \qquad \mathfrak{B}_i(z) = B_i(z, z), \qquad i = 0, \ldots, s, \tag{3.15}$$

где $B_i(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ — билинейное симметричное отображение.

---

[1]) Здесь и далее считаем, что ограничения из (3.6) совместны в некотором усиленном смысле.

Утверждение 3.1 ([117, 126]). *В случае* (3.14) *правило Якубовича корректно, если*

1. *в* (3.6) Z *— вещественное линейное пространство и имеется только одно ограничение* $s = 1$ *либо*
2. Z *— комплексное линейное пространство, число ограничений* $s = 2$, *формы* $\mathfrak{B}_i(\cdot)$ *эрмитовы, а операторы* l_0^* *и* A *линейны, если* Z *рассматривать как вещественное пространство.*

Подчеркнем, что эти утверждения верны для произвольных (не обязательно знакоопределенных) форм. Как уже отмечалось, предполагается, что ограничения совместны в некотором усиленном смысле (см. определение 3.1 далее).

В оставшейся части параграфа приведен обзор основных результатов В. А. Якубовича и его учеников, полученных в 1990-х годах и касающихся расширения сферы применимости правила (I)–(IV) в теории невыпуклой глобальной оптимизации. Обсуждаются также приложения к теории управления.

Полученные критерии применимости правила Якубовича можно разделить на априорные и апостериорные. Критерии первого типа позволяют убедиться в применимости правила до начала его применения на основе (обычно несложной) проверки определенных свойств исходных данных задачи. Такие критерии представляют наибольший интерес. Проверка критериев второго типа опирается на предварительное выполнение вычислений в соответствии с обсуждаемым правилом и состоит в анализе результата. Эти критерии существенно сложнее для проверки, однако выделяют более широкий класс задач.

Начнем с простого апостериорного критерия [201]. Заметим, что соображения, на которых он основан, встречаются во многих работах по теории двойственности (см., [113, 195, 198, 216] и др.).

Теорема 3.1. *Предположим, что двойственная задача* (3.12) *имеет решение* τ_0. *Если множество* $\mathfrak{Z} = \{z^0\}$, *получаемое в результате выполнения перечисленных в* (I)–(III) *операций, непусто*: $\mathfrak{Z} \neq \varnothing$, *то оно совпадает с множеством всех решений исходной задачи* (3.6). *Кроме того, верны соотношение двойственности* (3.13) *и утверждения, сформулированные в* (IV).

Данная теорема предполагает, что двойственная задача (3.12) имеет решение. Это заведомо верно, если исходная задача обладает следующим свойством.

Определение 3.1. Задачу (3.6) назовем *правильной*, если справедливы следующие два утверждения:

(i) разрешима относительно $z_* \in Z$ система соотношений

$$\mathfrak{G}_1(z_*) < 0, \dots, \mathfrak{G}_k(z_*) < 0, \quad \mathfrak{G}_{k+1}(z_*) = \dots = \mathfrak{G}_s(z_*) = 0, \tag{3.16}$$

(ii) нулевой набор $\tau_{k+1} = \ldots = \tau_s = 0$ — единственное решение $(\tau_{k+1}, \ldots, \tau_s)$ системы неравенств

$$\sum_{i=k+1}^{s} \tau_i \mathfrak{G}_i(z) \geqslant 0 \qquad \forall z \in Z.$$

Здесь $\mathfrak{G}_i(\cdot)$ — функции из (3.8).

Пояснение 3.3. Если в задаче отсутствуют ограничения в виде равенств $k = s$, утверждение (ii) и равенства в (3.16) следует опустить. Если в (3.8) отсутствуют ограничения в виде неравенств $k = 0$, то в (3.16) следует опустить неравенства.

Замечание 3.1. Некоторые эффективные критерии правильности, относящиеся к рассматриваемому классу задач, приведены в [85, 91].

Следующая теорема показывает, что правильность задачи влечет, как уже отмечалось, справедливость одного из условий теоремы 3.1.

Теорема 3.2 ([202]). *Пусть исходная задача* (3.6) *правильна. Тогда двойственная задача* (3.12) *имеет решение* τ^0.

Приведем в заключение этого параграфа один полезный технический результат. Он иллюстрирует, что в определенной ситуации правило Якубовича может быть полезно при исследовании вопроса о существовании и единственности решения основной задачи (3.6) с невыпуклыми ограничениями. [1)]

Лемма 3.1 ([85, 91]). *Пусть в задаче* (3.6) $Z \subset X$ — *замкнутое аффинное подпространство* (*т. е. сдвиг* $Z = \mathfrak{M} + c$ *линейного подпространства* $\mathfrak{M}$) *вещественного гильбертова пространства* X, *функционалы* $\mathfrak{G}_0(\cdot)$ *и* $\mathfrak{G}(\cdot)$ *квадратичны* (3.14), *причем в* (3.15) *билинейные симметричные отображения* $B_i(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ *и линейные операторы* $l^* \in X^*$, $A : X \to \mathbb{R}^s$ *непрерывны. Предположим также, что*

(i) *для указанной задачи правило Якубовича корректно и*

(ii) *для некоторого решения* τ_0 *двойственной задачи* (3.12) *квадратичная форма* $\mathfrak{B}_{\tau_0}(z) := \mathfrak{B}_0(z) + \tau_0^\top \mathfrak{B}(z)$ *положительно определена на подпространстве* $\mathfrak{M}$, *т. е.*

$$\mathfrak{B}_{\tau_0}(h) \geqslant \delta |h|^2 \qquad \forall h \in \mathfrak{M}.$$

Здесь $|\cdot|$ — *норма гильбертова пространства* X *и число* $\delta > 0$ *не зависит от* $h \in \mathfrak{M}$.

Тогда исходная задача (3.6) *имеет, причем единственное, решение.*

[1)] С подробностями и дополнениями можно ознакомиться в [85, 91, 201].

3.4. Априорные условия корректности правила Якубовича

Имеются разные априорные условия применимости этого правила [82, 85, 146, 199, 201, 234]. Приведём один просто формулируемый критерий, принадлежащий В. А. Якубовичу, и один более громоздкий критерий, область применения которого шире.

Теорема 3.3 ([146]). *Пусть в задаче* (3.6) *ограничения в виде равенств в* (3.8) *отсутствуют* $k = s$ *и* $Z \subset X$ *— аффинное подпространство вещественного гильбертова пространства* X, *т. е.* $Z = \mathfrak{M} + c$, *где* $\mathfrak{M} \subset X$ *— некоторое линейное подпространство. Предположим также, что* $\mathfrak{G}_0(\cdot)$ *и* $\mathfrak{G}(\cdot)$ *— скалярный и векторный квадратичные функционалы* (3.14) *и существует бесконечная последовательность линейных ограниченных операторов* $T_j : X \to X$, $j = 1, 2, \ldots$, *со свойствами*:

(i) $(T_j x_1, x_2) \to 0$ *при* $j \to \infty$ *для любых* $x_1, x_2 \in X$;

(ii) *подпространство* $\mathfrak{M}$ *инвариантно относительно любого рассматриваемого оператора* $T_j \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$;

(iii) *квадратичные формы* $\mathfrak{B}_0(\cdot)$ *и* $\mathfrak{B}(\cdot)$ *из* (3.14) *непрерывны и асимптотически инвариантны*:

$$\mathfrak{B}_0(T_j z) \to \mathfrak{B}_0(z), \qquad \mathfrak{B}(T_j z) \to \mathfrak{B}(z) \quad \text{при} \quad j \to \infty \quad \forall z \in \mathfrak{M}.$$

Если, к тому же, задача (3.6) *правильна, то для неё правило Якубовича корректно. Кроме того, для любого множителя Лагранжа* $\tau \succeq_{\mathfrak{K}} 0$ *с конечной величиной* (3.11) *лагранжиан* (3.9) *— выпуклая на* Z *функция.*

Из этой теоремы В. А. Якубовича немедленно следует применимость обсуждаемого правила в важном случае стационарной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с квадратичными ограничениями в виде неравенств, рассматриваемой на бесконечном интервале времени:

$$x' = Ax + Bu, \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad x(0) = a, \tag{3.17}$$

$$|x(\cdot)| + |u(\cdot)| \in L_2(0, +\infty), \quad \mathfrak{G}_1 \leqslant 0, \ldots, \mathfrak{G}_k \leqslant 0, \quad \mathfrak{G}_0 \to \min. \tag{3.18}$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление, A и B — вещественные матрицы,

$$\mathfrak{G}_i := \int_0^\infty \mathcal{G}_i\big[x(t), u(t)\big]\, dt - \gamma_i, \qquad i = 0, \ldots, k, \tag{3.19}$$

$\mathcal{G}_i(x, u)$ — квадратичная форма от x, u, числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ и вектор $a \in \mathbb{R}^n$ заданы, $\gamma_0 = 0$. Допустимым считаем любое измеримое управление $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее включению и неравенствам из (3.18). (В (3.18) $x(\cdot)$ определено по $u(\cdot)$ из (3.17).) Задача состоит в том, чтобы найти допустимое управление $u(\cdot)$ из условия $\mathfrak{G}_0 \to \min$.

Особенность этой задачи — присутствие (вообще говоря, невыпуклых) ограничений $\mathfrak{G}_1 \leqslant 0, \ldots, \mathfrak{G}_k \leqslant 0$: отбрасывая их, получаем одну из задач, всесторонне изученных в классической линейно-квадратичной теории оптимального управления. Задача оптимальной стабилизации крена летательного аппарата (3.1)–(3.3) является частным случаем (3.17), (3.18).

Поясним, каким образом из теоремы 3.3 вытекает факт корректности обсуждаемого правила применительно к задаче (3.17)–(3.18). Эта задача — частный случай задачи (3.6) с ограничениями (3.8):

$$X := L_2\left([0, +\infty) \to \mathbb{R}^n\right) \times L_2\left([0, +\infty) \to \mathbb{R}^m\right), \quad z = [x(\cdot), u(\cdot)],$$
$$Z := \left\{z \in X : \text{ выполнено (3.17)}\right\}, \tag{3.20}$$

в (3.8) $k = s$ и функционалы $\mathfrak{G}_i(\cdot)$ определены согласно (3.19). Они квадратичны, причем в (3.14) $l_0^* = 0, A = 0, \mathfrak{B}(\cdot) = [\mathfrak{B}_1(\cdot), \ldots, \mathfrak{B}_k(\cdot)]$ и $\mathfrak{B}_i(z)$ равно правой части (3.19) с $\gamma_i := 0$. Подпространство $\mathfrak{M}$ состоит из процессов $z = [x(\cdot), u(\cdot)] \in X$, удовлетворяющих (3.17) с нулевым начальным состоянием $a = 0$. В качестве операторов T_j следует взять сдвиги: $T_j z = [y(\cdot), v(\cdot)]$ эквивалентно $y(t) = x(t - j)$ и $v(t) = u(t - j)$ при $t \geqslant j$, $y(t) = 0, v(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant j$. Справедливость (ii) и (iii) теоремы 3.3 вытекает из стационарности системы (3.17) и независимости интеграндов в (3.19) от времени, причем формы инвариантны не только асимптотически, но и в более сильном обычном смысле. Справедливость (i) проверяется несложной выкладкой (подробности см. в [146]). В итоге теорема 3.2 легко влечет следующий вывод [146].

- *Если задача* (3.17), (3.18) *правильна, то правило Якубовича для нее корректно.*

Подчеркнем, что это справедливо независимо от того, выпуклы или нет функционалы $\mathfrak{G}_i$ в (3.18).

На разбираемом примере легко пояснить привлекательность обсуждаемого правила в области линейно-квадратичной оптимизации с квадратичными ограничениями. Действительно, оно сводит решение задачи (3.17), (3.18) к решению задач (3.10) и (3.12). Сейчас согласно (3.9) и (3.19)

$$S(\tau, z) = \int_0^\infty \mathcal{G}_\tau\big[x(t), u(t)\big]\, dt - \gamma_\tau, \tag{3.21}$$
$$\text{где} \quad \gamma_\tau := \sum_{i=1}^k \tau_i \gamma_1, \quad \mathcal{G}_\tau(x, u) := \mathcal{G}_0(x, u) + \sum_{i=1}^k \mathcal{G}_i(x, u)$$

— квадратичная форма от x, u, и τ_i — компоненты вектора τ. Следовательно, (3.10) — это стандартная линейно-квадратичная задача оптимального управления вида (2.5)–(2.7): *минимизировать квадратичный функционал из* (3.21) *на траекториях системы* (3.17), *удовлетворяющих включению из* (3.18). Для решения таких задач развиты весьма эффективные методы. В то же время двойственная задача (3.12), которую также необходимо решить в процессе выполнения метода, является, как уже отмечалось, задачей конечномерной выпуклой оптимизации. Такие задачи обычно сравнительно легко решаются методами выпуклого программирования.

Например, приведенное в п. 3.1 решение задачи оптимальной стабилизации крена летательного аппарата (3.1)–(3.3) получено в [234] за счет аналитического решения первой вспомогательной задачи (3.10) методами линейно-квадратичной теории оптимального управления. Это приводит к формуле (3.4) для оптимального регулятора и к аналитическому выражению для минимума функционала в этой задаче, т. е. для функции (3.11), определяющей двойственную задачу (3.12). Уравнение (3.5) для нахождения параметра ζ оптимального регулятора, по сути, представляет собой условие Ферма в этой задаче.

Теорема 3.3 инициировала серию исследований [40, 45, 82–85, 199, 201], нацеленных на дальнейшее расширение сферы действия априорных критериев применимости правила Якубовича. Для примера приведем один из установленных более общих критериев. Отметим, что в отличие от теоремы 3.3, он применим к задачам с квадратичными не только неравенствами, но и равенствами.

Теорема 3.4 ([82, 85]). *Пусть в задаче* (3.6) Z — *аффинное подпространство вещественного локально выпуклого пространства* X, *т. е. сдвиг* $Z = \mathfrak{M} + c$ *некоторого линейного подпространства* $\mathfrak{M} \subset$ $\subset X$. *Предположим, что*

$$\mathfrak{G}_0(z) = \mathfrak{B}_0(z) + \Phi_0(z), \quad \mathfrak{G}(z) = \mathfrak{B}(z) + \Phi(z).$$

Здесь $\Phi(\cdot) = [\Phi_1(\cdot), \ldots, \Phi_s(\cdot)]$, $\mathfrak{B}(\cdot) = [\mathfrak{B}_1(\cdot), \ldots, \mathfrak{B}_s(\cdot)]$ *и* $\mathfrak{B}_i(\cdot)$ — *квадратичные формы* (3.15). *Обозначим*

$$\Upsilon_+ := \{(\theta, \tau) : \theta \geqslant 0, \tau \gtrsim_{\mathfrak{k}} 0, \mathfrak{B}_{\theta,\tau}(h) := \theta\mathfrak{B}_0(z) + \tau^\top \mathfrak{B}(z) \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathfrak{M}\} \tag{3.22}$$

и предположим, что справедливы следующие утверждения:

A) *функции* $\Phi_0 : X \to \mathbb{R}$, $\Phi : X \to \mathbb{R}^s$ *непрерывны на* Z;

B) *для любой пары* $(\theta, \tau) \in \Upsilon_+$ *функция* $\Phi_{\theta,\tau}(z) := \theta\Phi_0(z) + \tau^\top \Phi(z)$ *выпукла на* Z;

C) *для любого* $z \in Z$ *и* $i = 0, \ldots, s$ *линейные операторы* $B_i(z, \cdot)$ *непрерывны на подпространстве* $\mathfrak{M}$, *где* $B_i(\cdot, \cdot)$ — *билинейные симметричные отображения из* (3.15);

D) *для любых* $\theta \geqslant$, $\tau \gtrsim_{\mathfrak{k}} 0$ *квадратичная форма из* (3.22) *обладает следующим свойством*:

$$\text{существует } h \in \mathfrak{M}, \text{ для которого } \mathfrak{B}_{\theta,\tau}(h) < 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \{h_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M} \ : \ h_j \to 0 \text{ при } j \to \infty \quad \text{и} \quad \liminf_{j\to\infty} \mathfrak{B}_{\theta,\tau}(h_j) < 0. \tag{3.23}$$

Если к тому же задача (3.6) *правильна, то правило Якубовича для нее корректно. Кроме того для любого множителя Лагранжа* $\tau \succsim_{\mathfrak{K}} 0$ *с конечной величиной* (3.11) *лагранжиан* (3.9) *— выпуклая на* Z *функция.*

Замечание 3.2. i) Условия теоремы не предполагают, что формы $\mathfrak{B}_0(\cdot)$, $\mathfrak{B}(\cdot)$ и функции $\mathfrak{G}_0(\cdot)$, $\mathfrak{G}(\cdot)$ выпуклы.

ii) Сформулированные в A) и B) требования к функциям $\Phi_i(\cdot)$ заведомо выполнены, если эти функции непрерывны, выпуклы при $i \leqslant k$ и линейны при $i > k$.

В некоторых случаях условие D) можно переформулировать в терминах отрицательного индекса инерции квадратичной формы $\mathfrak{B}_*(\cdot)$ на подпространстве $\mathfrak{M}$:

$$N_-{}^{\mathfrak{M}}[\mathfrak{B}_*(\cdot)] := \sup_{L \subset \mathfrak{M}: \mathfrak{B}_*(x) < 0\, \forall x \in L, x \neq 0} \dim L,$$

где L — линейные подпространства. Именно: пусть X — вещественное гильбертово пространство, подпространство $Z \subset X$ замкнуто и формы $\mathfrak{B}_0(\cdot)$ и $\mathfrak{B}(\cdot)$ непрерывны относительно нормы пространства X. Снабдим X слабой топологией. Тогда условие D) сводится к тому, что для любых $\theta \geqslant 0, \tau \succsim_{\mathfrak{K}} 0$ справедлива импликация

$$N_-^{\mathfrak{M}}\left[\mathfrak{B}_{\theta,\tau}(\cdot)\right] \neq 0 \Longrightarrow N_-^{\mathfrak{M}}\left[\mathfrak{B}_{\theta,\tau}(\cdot)\right] = \infty.$$

Однако даже в такой ситуации предположение D) часто удобнее проверять в форме (3.23).

Последние утверждения теорем 3.3 и 3.4 (функция (3.9) выпукла) означают, что глобальный оптимум в рассматриваемой невыпуклой задаче можно найти методами выпуклой оптимизации. Действительно, это правило сводит указанную задачу к двум вспомогательным: (3.10) и (3.12). Ранее уже отмечалось, что вторая из них (3.12) — конечномерная задача выпуклого программирования. Ее можно переписать в виде

$$S_0(\tau) \to \max \quad \text{при} \quad \tau \in EFF := \left\{\tau \succsim_{\mathfrak{K}} 0 : S_0(\tau) > -\infty\right\}.$$

(При $EFF = \varnothing$ из сформулированных в (I)–(IV) утверждений легко следует, что инфимум функционала $\mathfrak{G}_0(\cdot)$ в задаче (3.6) равен $-\infty$, т. е. эта задача решений не имеет.) Для нахождения величины $S_0(\tau)$ при $\tau \in EFF$ необходимо решить задачу (3.10), которая выпукла согласно последним утверждениям из теорем 3.3 и 3.4. В этой задаче, к тому же ограничения линейны (они выражаются включением $z \in Z$, где, напомним, Z — аффинное подпространство). Отметим, что в настоящее время известна целая серия весьма эффективных методов выпуклой оптимизации.

При выполнении предположений теоремы 3.3 условие D) теоремы 3.4 выполнено применительно к слабой топологии пространства X. При этом в (3.23) следует взять $h_j := T_j h$, где T_j — операторы из теоремы 3.3.

С другими априорными критериями можно ознакомиться в [40, 82, 84, 85, 146, 199, 201]. В [82, 85, 199], в частности, показано, что условие D) теоремы 3.4 может быть ослаблено. В [234] рассматривался случай, когда в постановке задачи (3.6) неравенство $\mathfrak{G}(z) \trianglelefteq 0$ заменено включением $\mathfrak{G}(z) \in K_+$, где K_+ — телесный выпуклый конус, лежащий в линейном нормированном пространстве $Y \ni \mathfrak{G}(z)$. [1]) В [201] получены обобщения на случай, когда минимальное аффинное подпространство, содержащее K_+, замкнуто и имеет конечную коразмерность и внутренность конуса K_+ в этом подпространстве непуста. [2]) Определенные особенности стохастических систем предоставляют дополнительные возможности расширения сферы применимости метода [40].

3.5. S-процедура

Обсуждаемый вопрос о корректности правила Якубовича связан с проблемой неущербности так называемой S-процедуры. Термин *S-процедура* был введен М. А. Айзерманом и Ф. Р. Гантмахером [5] для обозначения специального приема, использованного А. И. Лурье при построении функций Ляпунова в задачах об абсолютной устойчивости [72]. [3]) Последнее понятие, родившееся, по-видимому, в 1950-е годы, играет заметную роль в современных теоретических и прикладных исследованиях. Оно представляет собой понятие устойчивости, отражающее неопределенность в знании исследуемой динамической системы. Абсолютная устойчивость — это устойчивость «в целом» общего решения каждой системы из некоторого класса, равномерная по этому классу. Класс определяется имеющимися (неполными) сведениями о системе и обычно включает все системы, для которых эти сведения верны. (Во многих исследованиях, относящихся к обсуждаемой области, систему разделяют на известную линейную часть и неизвестную нелинейную, которую называют «нелинейностью». Тогда класс систем определяется классом нелинейностей. Последний определяется имеющейся информацией о нелинейности.) В [29, 125] содержание термина S-процедура было сильно расширено и ему был придан следующий смысл, который в настоящее время является практически общепринятым.

Пусть заданы функции $\mathfrak{F}(\cdot) : Z \to \mathbb{R}$ и $\mathfrak{G}(\cdot) : Z \to \mathbb{R}^s$, где $Z = \{z\}$ — некоторое множество. S-процедура — это замена условия

$$\mathfrak{F}(z) \geqslant 0 \quad \text{в области} \quad \{z \in Z : \mathfrak{G}(z) \trianglelefteq 0\} \tag{3.24}$$

[1]) В приложениях это соответствует наличию в постановке задачи бесконечного числа ограничений в виде неравенств.

[2]) В приложениях этому соответствует случай, когда в постановке задачи наряду с, возможно, бесконечным числом ограничений в виде неравенств присутствует конечное число равенств.

[3]) Термин S-процедура родился случайно. Он отразил тот факт, что в [5, с. 18] символом S была обозначена функция, играющая ключевую роль в этом приеме. По смыслу она аналогична функции Лагранжа.

следующим условием:

существует такой множитель Лагранжа $\tau \in \mathbb{R}^s$, что $\tau \succsim_k 0$ и

$$\mathfrak{F}(z) + \tau^\top \mathfrak{G}(z) \geqslant 0 \qquad \forall z \in Z. \tag{3.25}$$

В приложениях к задачам об абсолютной устойчивости соотношение $\mathfrak{G}(z) \trianglelefteq 0$ из (3.24) обычно описывает множество траекторий некоторой динамической системы или целого класса таких систем, а само условие (3.24) означает наличие функции Ляпунова, которая обеспечивает определенный характер поведения траекторий. (Например, в (3.24) неравенство $\mathfrak{F}(z) \geqslant 0$ может представлять собой соотношение, гарантирующее невозрастание некоторой функции. Тогда условие (3.24) означает, что эта функция не возрастает на траекториях любой системы рассматриваемого класса, т. е. является функцией Ляпунова.) В приложениях функции $\mathfrak{F}(\cdot), \mathfrak{G}(\cdot)$ обычно зависят от некоторых «конструктивных» параметров, которые нужно выбрать так, чтобы обеспечить (3.24). Часто сделать это трудно. Поэтому задачу искусственно упрощают и ищут параметры, для которых справедливо (3.25) (в чем, как отмечалось, и состоит S-процедура). Так как, очевидно, (3.25) $\Rightarrow$ (3.24), для найденных параметров будет справедливо и (3.24).

К настоящему времени S-процедура зарекомендовала себя как эффективный прием и применяется достаточно широко прежде всего в теории неопределенных систем. (Об этом см. в [131, 138, 139, 204, 219–221, 224, 236]. Эти ссылки отражают лишь часть соответствующей литературы.) S-процедура используется не только при анализе устойчивости или других динамических свойств системы, но и при разработке методов синтеза систем с требуемыми динамическими свойствами [219, 220], в исследованиях, посвященных оптимизации неопределенных систем [205, 220, 221] или оценке определенных спектральных характеристик линейных систем [176] (связанных с изучением «запаса устойчивости» системы).

S-процедура порождает естественный вопрос: эквивалентны ли условия (3.24) и (3.25)? Как уже отмечалось, (3.25) $\Rightarrow$ (3.24). Однако в общем случае обратная импликация (3.24) $\Rightarrow$ (3.25), а значит, и эквивалентность (3.24) $\Leftrightarrow$ (3.25), несправедливы [26, 117, 125]. В тех случаях, когда указанная эквивалентность имеет место, S-процедуру называют *неущербной*. Тогда она оказывается особенно эффективной, так как приводит к исчерпывающему решению задачи, например к нахождению не просто достаточных, а необходимых и достаточных критериев абсолютной устойчивости [126, 203, 236] или к нахождению не просто некоторого регулятора, стабилизирующего заданную неопределенную систему, а оптимального стабилизирующего регулятора [220] и т. п. Именно к вопросу о неущербности S-процедуры имеют отношение результаты, обсуждаемые в данном параграфе.

Именно, имеет место следующий факт.

Теорема 3.5 ([117, 126, 201]). *Следующие два утверждения равносильны.*

А) *Правило Якубовича решения задачи* (3.6) *корректно, т. е. оно дает правильный ответ, а сформулированные в* (I)–(IV) *утверждения верны.*

Б) *Неущербна S-процедура для функций* $\mathfrak{G}(\cdot)$ *и* $\mathfrak{F}(\cdot) := \mathfrak{G}_0(\cdot) - \varphi$ *при любом* $\varphi \in \mathbb{R}$.

Таким образом, критерии корректности рассматриваемого правила могут быть легко преобразованы в критерии неущербности S-процедуры.

3.6. Некоторые конкретные классы задач, допускающих применение правила Якубовича

В данном подпараграфе будут охарактеризованы некоторые классы задач, для которых удалось обосновать априорную применимость (корректность) этого правила на основе развитой общей теории. С другими подобными классами можно ознакомиться, например, в [40, 45, 85, 146, 199, 234, 235, 238]. Отметим, в частности, что в случае бесконечного интервала времени указанное правило применимо к определенным стохастическим аналогам стационарной линейно-квадратичной задачи (3.17), (3.18) [40, 45, 146, 235], к аналогичным детерминированным и стохастическим задачам с дискретным временем [238], а также к некоторым детерминированным задачам с непериодическими коэффициентами [85, 199]. В [45, 85, 199, 234, 235] можно ознакомиться с дополнительными примерами решения задач обсуждаемым методом.

В данном подпараграфе представлены невыпуклые задачи оптимального управления с ограничениями, для которых

p1) правило Якубовича корректно;

p2) функция Лагранжа (3.9) выпукла на подпространстве Z из (3.6) всякий раз, когда $\tau \succsim_{k} 0$ и эта функция ограничена снизу на Z.

Пояснение 3.4. Как уже отмечалось, утверждения p1) и p2) означают, что глобальный оптимум в рассматриваемой невыпуклой задаче можно найти методами выпуклой оптимизации.

Для большинства рассматриваемых далее задач этот вывод можно усилить. Именно для них

p3) первая из двух вспомогательных задач, используемых правилом Якубовича, (именно (3.10)) относится к числу задач, всесторонне изученных в линейно-квадратичной теории оптимального управления (или сводится к такой задаче).

Следовательно, к ней применимы разработанные в этой теории эффективные методы решения.

Напомним, что вторая из упомянутых вспомогательных задач является конечномерной задачей выпуклого программирования.

Для определенности далее рассматриваем системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Вместе с тем аналогичные примеры легко построить и для других типов систем, например, описываемых разностными, дифференциально-разностными, интегральными, стохастическими и другими уравнениями.

3.6.1. Детерминированные системы на бесконечном интервале времени. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} \mathfrak{G}_0 \to \min \quad \text{при ограничениях} \\ \mathfrak{G}_1 \leqslant 0, \dots, \mathfrak{G}_k \leqslant 0, \quad \mathfrak{G}_{k+1} = 0, \dots, \mathfrak{G}_s = 0, \end{gathered} \tag{3.26}$$

$$\begin{gathered} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x = x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u = u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad 0 \leqslant t < \infty, \end{gathered} \tag{3.27}$$

$$x(0) = a, \quad |x(\cdot)| + |u(\cdot)| \in L_2, \tag{3.28}$$

$$\mathfrak{G}_i := \int_0^\infty \mathcal{G}_i(t, x, u)\, dt + \int_0^\infty \phi_i(t, x, u)\, dt - \gamma_i \quad (i = 0, \dots, s). \tag{3.29}$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы соответствующих размеров,

$$\mathcal{G}_i(t, x, u) = x^\top G_i(t)x + 2x^\top Q_i(t)u + u^\top \Gamma_i(t)u \tag{3.30}$$

— квадратичная форма переменных x и u, функция $\phi_i(t, x, u)$, по меньшей мере, выпукла по x, u, и $\gamma_0, \dots, \gamma_s$ — заданные числа, $\gamma_0 = 0$. Матричные функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $G_i(\cdot) = G_i(\cdot)^\top$, $Q_i(\cdot)$, $\Gamma_i(\cdot) = \Gamma_i(\cdot)^\top$ и скалярная функция $\phi_i(\cdot, x, u)$ (при любых x, u) кусочно непрерывны по t. Далее на $\mathcal{G}_i(\cdot)$ и $\phi_i(\cdot)$ накладываются дополнительные требования, которые, в частности, обеспечивают сходимость интегралов в (3.29) для любых $x(\cdot) \in L_2$ и $u(\cdot) \in L_2$. Подчеркнем, что эти условия не влекут выпуклости форм $\mathcal{G}_i(\cdot)$ и функционалов $\mathfrak{G}_i$. Таким образом, рассматриваемые задачи являются, вообще говоря, невыпуклыми задачами глобальной оптимизации.

В общем случае правило Якубовича к задаче (3.26)–(3.29) неприменимо [199]. Поэтому его корректность может иметь место лишь для специальных случаев этой задачи. Первый из них уже упоминался ранее в ситуации, когда квадратичные ограничения в виде равенств отсутствуют.

Теорема 3.6. *Пусть в* (3.27) $A(t) = A$, $B(t) = B$ *и в* (3.30) $G_i(t) = G_i$, $Q_i(t) = Q_i$, *и* $\Gamma_i(t) = \Gamma_i$ *— постоянные матрицы. Предположим, что пара* (A, B) *стабилизируема и* $\phi_i(t, x, u) = r_i(t)^\top x + \rho_i(t)^\top u$, *где* $r_i(\cdot) \in L_2\left([0, +\infty) \to \mathbb{R}^n\right)$, $\rho_i(\cdot) \in L_2\left([0, +\infty) \to \mathbb{R}^m\right)$. *Предположим также, что задача* (3.26)–(3.29) *правильна в смысле определения* 3.1. *Тогда для нее справедливы утверждения* p1), p2).

Замечание 3.3. Как отмечалось ранее, для нее справедливо и утверждение р3).

В частном случае отсутствия ограничений в виде равенств $k = s$ теорема 3.6 установлена в [234]. На общий случай она распространена в [85], хотя необходимая для этого общая теория была построена уже в [201].

Пример 1 [91, 234]. Рассмотрим следующую модификацию задачи оптимальной стабилизации крена летательного аппарата, отличающуюся от (3.1)–(3.3) квадратичным ограничением. Объект описывается уравнениями

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = \alpha x_2 + \beta u, \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = \theta. \tag{3.31}$$

Требуется найти управление $u(\cdot)$ из условий

$$|x_1(\cdot)|, |x_2(\cdot)|, |u(\cdot)| \in L_2(0, +\infty), \tag{3.32}$$

$$\int\limits_0^\infty x_1^2\, dt \leqslant \gamma, \qquad \int\limits_0^\infty u^2\, dt \to \inf \qquad (\gamma > 0). \tag{3.33}$$

Установим вначале, что задача правильна. Для этого выберем малый параметр $\varepsilon > 0$ и положим

$$x_1(t) := \begin{cases} \theta t - \frac{\theta}{2\varepsilon} t^2 & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ \frac{\theta\varepsilon}{4}[\cos(t-\varepsilon)+1] & \text{при} \quad \varepsilon < t \leqslant \pi + \varepsilon\ , \\ 0 & \text{при} \quad \pi + \varepsilon < t; \end{cases}$$

$$x_2(\cdot) := x_1'(\cdot), \quad u(\cdot) := \beta^{-1}\big[x_2' - \alpha x_2\big].$$

Легко проверить, что процесс $[x_1(\cdot), x_2(\cdot), u(\cdot)]$ удовлетворяет (3.31) и (3.32). Подставляя $x_1(\cdot)$ в левую часть неравенства из (3.33), убеждаемся, что при малых ε оно выполнено строго. Это доказывает, что задача правильна в смысле определения 3.1.

В свою очередь по теореме 3.6 это гарантирует применимость правила Якубовича. В рассматриваемом случае задача (3.10) имеет вид

$$\int\limits_0^\infty \left(\tau x_1^2 + u^2\right) dt - \gamma\tau \to \min \ \text{при ограничениях (3.31) и (3.32)}, \ \tau \geqslant 0. \tag{3.34}$$

Это — частный случай стандартной линейно-квадратичной задачи оптимального управления. Используя соответствующую теорию (см., например, [94, 145, 234]), легко убедиться, что при $\tau \geqslant 0$

$$S_0(\tau) = \frac{\alpha\theta^2}{\beta^2} + \frac{|\alpha|\theta^2\zeta}{\beta^2} - \frac{\alpha^4\gamma(\zeta^2-1)^2}{4\beta^2}, \tag{3.35}$$

где $\zeta^2 = 1 + 2\alpha^{-2}|\beta|\sqrt{\tau} \geqslant 1$ и $\tau \geqslant 0$. При этом для $\tau > 0$ оптимальный процесс в задаче (3.34) существует, единствен и порождается регулятором

$$u = -\sqrt{\tau}\ \operatorname{sgn}\beta x_1 - \beta^{-1}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\sqrt{\tau}\,|\beta|}\right)x_2, \tag{3.36}$$

а функционал из (3.34) положительно определен на множестве процессов, удовлетворяющих (3.31) при $\theta = 0$ и (3.32). [1] На интервале $\zeta \in [1, +\infty)$ функция (3.35) достигает максимума в точке $\zeta = \zeta_0$, являющейся корнем уравнения

$$\zeta(\zeta^2 - 1) = |\alpha|^{-3}\gamma^{-1}\theta^2, \tag{3.37}$$

единственным на полуоси $\zeta \geqslant 1$. Соответствующее значение τ равно $\tau_0 = \theta^4(2\alpha\beta\gamma\zeta_0)^{-2}$. Так как $\tau_0 > 0$, отвечающий ему функционал (3.34), как уже отмечалось, положительно определен на $\mathfrak{M}$. Отсюда и леммы 3.1 следует, что в исходной задаче (3.31)–(3.33) существует, причем единственный, оптимальный процесс. В соответствии с (III) он совпадает с решением задачи (3.34) и, значит, порождается регулятором (3.36) с $\tau = \tau_0$. Несложные преобразования показывают, что этот регулятор имеет вид

$$u = -\frac{\theta^2 \operatorname{sgn}\beta}{2|\alpha\beta|\gamma\zeta_0}x_1 - \frac{\alpha + |\alpha|\zeta_0}{\beta}x_2,$$

где, напомним, ζ_0 — корень уравнения (3.37) на полуоси $\zeta \geqslant 1$.

В работах [91, 234] приведены другие примеры решения обсуждаемым методом стационарных линейно-квадратичных задач оптимального управления с квадратичными ограничениями.

Укажем более общий класс задач вида (3.27)–(3.29), для которых правило Якубовича корректно. Он образован задачами с почти периодическими коэффициентами [2] и исчезающими на бесконечности выпуклыми слагаемыми в неравенствах и минимизируемом функционале.

Теорема 3.7 ([85, 199]). *Предположим, что*

(i) *в* (3.27), (3.30) $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $G_i(\cdot)$, $Q_i(\cdot)$ *и* $\Gamma_i(\cdot)$ — *почти периодические функции* [3];

(ii) *в* (3.29) *при* $i > k$

$$\begin{gathered}\phi_i(t,x,u) = r_i(t)^\top x + \rho_i(t)^\top u,\\ r_i(\cdot) \in L_2\left([0,+\infty) \to \mathbb{R}^n\right),\ \rho_i(\cdot) \in L_2\left([0,+\infty) \to \mathbb{R}^m\right);\end{gathered} \tag{3.38}$$

[1] В рассматриваемом примере — это множество $\mathfrak{M}$ из теоремы 3.4 и леммы 3.1.

[2] Здесь и далее термин *почти периодическая* означает *почти периодическая по Бору* [61].

[3] Точнее, каждая из них допускает продолжение до почти периодической функции, заданной на вещественной оси.

(iii) *при $i \leqslant k$ функция $\phi_i(t,x,u)$ выпукла по x и u для почти всех t и при этом*

$$|\phi_i(t,x,u)| \leqslant \alpha_i(t)\left(|x|^2+|u|^2\right)+\beta_i(t)\left(|x|+|u|\right)+\gamma_i(t),$$

где $\alpha_0(\cdot)\geqslant 0,\dots,\alpha_k(\cdot)\geqslant 0$ — непрерывные функции переменной $t\in[0,\infty)$, причем $\alpha_i(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\beta_i(\cdot)\in L_2\big([0,\infty)\to \to\mathbb{R}\big)$, $\gamma_i(\cdot)\in L_1\big([0,\infty)\to\mathbb{R}\big)$, $\beta_i(\cdot)\geqslant 0$, $\gamma_i(\cdot)\geqslant 0$;

(iv) *система* (3.27) *стабилизируема, т. е. существует такая ограниченная непрерывная $m\times n$-матричная функция $C(t)$, $0\leqslant t< <\infty$, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши*

$$x'=(A+BC)\,x+f(t),\quad 0\leqslant t<\infty,\quad x(0)=0,$$

принадлежит $L_2\left[[0,\infty)\to\mathbb{R}^n\right]$ для любого $f(\cdot)\in L_2\left[[0,\infty)\to\mathbb{R}^n\right]$. Предположим также, что задача (3.26)–(3.29) *правильна в смысле определения* 3.1. *Тогда для нее справедливы утверждения* p1), p2).

Если (3.38) верно для всех i и все перечисленные в (i) функции периодичны с общим периодом, то для задачи (3.26)–(3.29) справедливо и утверждение p3). Действительно, вспоминая (3.20), заключаем, что тогда первая из двух вспомогательных задач, используемых правилом Якубовича, (именно (3.10)) — это задача минимизации при ограничениях (3.27), (3.28) функционала

$$S(\tau,z)=\int\limits_0^\infty \mathcal{G}_\tau[t,x(t),u(t)]\;dt+\int\limits_0^\infty r_\tau(t)x(t)\;dt+\int\limits_0^\infty \rho_\tau(t)u(t)\;dt-\gamma_\tau$$
$$(z=[x(\cdot),u(\cdot)]),$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_\tau[t,x,u]:=\sum_{i=0}^s\tau_i\mathcal{G}_i[t,x,u],\quad r_\tau(\cdot):=\sum_{i=0}^s\tau_i r_i(\cdot)\in L_2,\\ \rho_\tau(\cdot):=\sum_{i=0}^s\tau_i\rho_i(\cdot)\in L_2,\quad \gamma_\tau:=\sum_{i=1}^s\tau_i\gamma_i\in\mathbb{R}\quad (\text{ здесь } \tau_0:=1).\end{gathered}\tag{3.39}$$

При этом коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{G}_\tau[t,x,u]$ и дифференциального уравнения из (3.27) — периодические функции с общим периодом. Такая задача была всесторонне изучена, например, в [144, 145], т. е. справедливо утверждение p3).

С другими случаями корректности правила Якубовича для задач вида (3.26)–(3.29) можно ознакомиться в [85].

3.6.2. Линейно-квадратичная задача управления с квадратичными ограничениями, связанная с оптимальным гашением вынужденных колебаний в линейных системах. Один из вариантов математической постановки проблемы оптимального гашения вынужденных колебаний в линейных системах формулируется в виде следующей задачи оптимального управления [147, 152]:

$$x' = A(t)x + B(t)u + f(t), \quad x = x(t), \quad u = u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.40}$$

$$\mathfrak{G}_1 \leqslant 0, \ldots, \mathfrak{G}_k \leqslant 0, \quad \mathfrak{G}_{k+1} = 0, \ldots, \mathfrak{G}_s = 0, \tag{3.41}$$

$$\mathfrak{G}_0 \to \min, \tag{3.42}$$

$$\mathfrak{G}_j := \mathfrak{G}_j\left[x(\cdot), u(\cdot)\right] := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \mathcal{G}_j\left[t, x(t), u(t)\right]\, dt - \gamma_j. \tag{3.43}$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление, $f(\cdot)$ — внешнее возмущение, $\mathcal{G}_i(t, x, u)$ — квадратичная форма (3.30) относительно x и u, а $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — заданные числа, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $G_j(\cdot)$, $Q_j(\cdot)$, $\Gamma_j(\cdot)$ и $f(\cdot)$ — заданные почти периодические матричные функции. Минимум ищем на множестве всех пар $[x(\cdot), u(\cdot)]$ почти периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих (3.40) и (3.41). (Так как подынтегральная функция в (3.43) почти периодична [61, с. 11], предел в (3.43) существует [61, с. 27].) Заметим, что при сделанных предположениях функционалы (3.43), вообще говоря, невыпуклы.

Напомним, что уравнение $x' = A(t)x$ с ограниченной по t функцией $A(\cdot)$ называется *экспоненциально дихотомическим* (на $\mathbb{R}$), если для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму $\mathbb{R}^n = L_+ \oplus L_-$ линейных подпространств $L_+, L_- \subset \mathbb{R}^n$, причем для $\sigma = \pm$ решения $x(\cdot)$ рассматриваемого уравнения с $x(t_0) \in L_\sigma$ подчиняются оценке

$$|x(t)| \leqslant C_\sigma e^{-\nu_\sigma |t-s|} |x(s)| \quad \text{при} \quad \sigma(t-s) \geqslant 0$$

с некоторым показателем $\nu_\sigma > 0$. [1)]

Экспоненциальная дихотомичность стационарного уравнения $x' = Ax$ равносильна отсутствию у матрицы A мнимых собственных чисел. Для экспоненциальной дихотомичности уравнения $x' = A(t)x$ с периодическим коэффициентом $A(\cdot)$ необходимо и достаточно, чтобы спектр матрицы монодромии не пересекался с единичной окружностью [34, с. 288].

Теорема 3.8 ([83]). *Пусть в задаче* (3.40)–(3.43) *коэффициенты* $A(\cdot), B(\cdot)$ *дифференциального уравнения из* (3.40), *а также коэффициенты* $G_j(\cdot)$, $Q_j(\cdot)$, $\Gamma_j(\cdot)$ *квадратичных форм* $\mathcal{G}_j(\cdot)$ *из* (3.43) — *почти периодические функции. Предположим, что существует такая почти периодическая* $m \times n$ *матричная функция* $C(\cdot)$, *что уравнение* $x' = [A(t) + B(t)C(t)]\, x$ *экспоненциально дихотомично* (*на* $\mathbb{R}$).

[1)] В общем случае стандартное определение экспоненциальной дихотомичности содержит еще одно требование [34, с. 225]. Однако при сделанном предположении об ограниченности $A(\cdot)$ его можно опустить [34, с. 237].

Предположим также, что рассматриваемая задача правильна в смысле определения 3.1. *Тогда для нее справедливы утверждения* p1), p2).

Если функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $G_j(\cdot)$, $Q_j(\cdot)$, $\Gamma_j(\cdot)$ постоянны, для задачи (3.40)–(3.42) справедливо и утверждение p3). Действительно, тогда $\mathcal{G}_i(t,x,u) = \mathcal{G}_i(x,u)$, $z = [x(\cdot), u(\cdot)]$, а в силу (3.9) и (3.43)

$$S(\tau, z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \mathcal{G}_\tau[x(t), u(t)]\, dt - \gamma_\tau, \tag{3.44}$$

где $\mathcal{G}_\tau[x,u]$ и γ_τ определены согласно (3.39). Здесь $\mathcal{G}_\tau[x,u]$ — квадратичная форма переменных x и u. Поэтому сейчас первая из двух вспомогательных задач, используемых правилом Якубовича (именно (3.10)) — это задача минимизации функционала (3.44) при ограничениях (3.40), причем коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{G}_\tau[x,u]$ из (3.44) и коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ дифференциального уравнения (3.40) постоянны. Решение такой задачи получено в [10, 147, 152]. [1]) Таким образом, справедливо p3).

3.6.3. Задачи управления детерминированными системами на конечном интервале времени. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered} \mathfrak{G}_0 \to \min \quad \text{при ограничениях} \\ \mathfrak{G}_1 \leqslant 0, \dots, \mathfrak{G}_k \leqslant 0, \quad \mathfrak{G}_{k+1} = 0, \dots, \mathfrak{G}_s = 0, \end{gathered} \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered} x' = A(t)x + B(t)u, \\ x = x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u = u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \end{gathered} \tag{3.46}$$

$$x(t_0) = a, \quad |u(\cdot)| \in L_2\left([t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m\right), \tag{3.47}$$

$$\mathfrak{G}_i := \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{G}_i(t,x,u)\, dt + x(t_1)^\top M_i x(t_1) - \gamma_i + \int\limits_{t_0}^{t_1} r_i(t)^\top x\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1} \rho_i(t)^\top u\, dt. \tag{3.48}$$

Здесь $\mathcal{G}_i(t,x,u)$ — квадратичная форма (3.30) относительно x, u с коэффициентами, зависящими от $t \in [t_0, t_1]$, а $n \times n$-матрица M_i симметрична и $t_0 < t_1, \gamma_0, \dots, \gamma_s$ — заданные числа, $\gamma_0 = 0$. Кроме того,

---

[1]) В [10, 147, 152] минимум найден на более широком, чем сейчас, множестве D допустимых процессов. (Например, в [152] $D := \{[x(\cdot), u(\cdot)] : \text{выполнено (3.40) и } t^{-1/2}|x(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty\}$ и в (3.43) вместо lim рассмотрен $\overline{\lim}$.) Вместе с тем с учетом почти периодичности функции $f(\cdot)$ из найденного в [152] семейства оптимальных процессов легко выделяется почти периодический процесс. Он, очевидно, доставляет минимум на рассматриваемом сейчас более узком классе почти периодических процессов.

$A(t)$, $B(t)$ и коэффициенты форм $\mathcal{G}_i(t,x,u)$ — кусочно-непрерывные матричные функции переменной t, $r_i(\cdot) \in L_1([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n)$, $\rho_i(\cdot) \in \in L_2([t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m)$. Хотя далее на $\mathcal{G}_i(\cdot)$ накладываются дополнительные требования, они не влекут выпуклости функционалов $\mathfrak{G}_i$.

В общем случае правило Якубовича к задаче (3.45)–(3.48) неприменимо. Поэтому корректность этого правила может иметь место лишь для специальных случаев рассматриваемой задачи. Укажем два из них, начав с простейшего.

Для $\theta \in \mathbb{R}, \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^s$ обозначим

$$\Gamma_{\theta,\tau}(t) := \theta\Gamma_0(t) + \sum_{i=1}^{s} \tau_i \Gamma_i(t)$$

и определим $G_{\theta,\,\tau}(t)$, $Q_{\theta,\tau}(t)$, $M_{\theta,\tau}$, $\mathcal{G}_{\theta,\tau}(t,x,u)$, $r_{\theta,\tau}(t)$, $\rho_{\theta,\tau}(t)$, $\gamma_{\theta,\tau}$ аналогично. Очевидно,

$$\mathcal{G}_{\theta,\tau}(t,x,u) = x^\top G_{\theta,\tau}(t)x + 2x^\top Q_{\theta,\tau}(t)u + u^\top \Gamma_{\theta,\tau}(t)u.$$

Теорема 3.9 ([85]). *Пусть*

$$\begin{gathered} Q_i(\cdot) \equiv 0, \quad G_i(\cdot) \equiv 0, \quad M_i = 0 \quad \forall i > k, \\ Q_i(\cdot) \equiv 0, \quad M_i \geqslant 0, \quad G_i(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in [t_0,t_1], \quad i \leqslant k. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Если к тому же эта задача правильна в смысле определения 3.1, *то для нее справедливы утверждения* p1), p2).

Заметим, что для рассматриваемой задачи справедливо и утверждение p3). Это верно для любых форм $\mathcal{G}_i(\cdot)$, коэффициентов $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и матриц M_i независимо от того, выполнено условие (3.49) или нет. Действительно, в рассматриваемой задаче $z = [x(\cdot), u(\cdot)]$ и в силу (3.48)

$$\begin{gathered} S(\tau,z) := \mathfrak{G}_0(z) + \tau_1\mathfrak{G}_1(z) + \cdots + \tau_{k+l}\mathfrak{G}_s(z) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{G}_{1,\tau}[t,x(t),u(t)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} r_{1,\tau}^\top(t)x(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \rho_{1,\tau}^\top(t)u(t)\,dt - \gamma_\tau, \end{gathered} \tag{3.50}$$

где $\mathcal{G}_\tau[x,u]$ — квадратичная форма переменных x и u. Поэтому сейчас первая из двух вспомогательных задач, используемых правилом Якубовича (именно (3.10)), — это задача минимизации функционала (3.50) при ограничениях (3.46), (3.47). Эта задача хорошо изучена и для ее решения построены эффективные методы (см., например, [9, 10, 145, 241] и др.).

Эту теорему несложно обобщить и на несколько иную, в определенном отношении более распространенную, ситуацию. Для ее описания введем два множества:

$$\begin{gathered} \Xi_+ := \{(\theta,\tau) : \theta \in \mathbb{R}, \tau = \{\tau_i\} \in \mathbb{R}^s, \tau_i \geqslant 0 \\ \forall i \leqslant k, \quad \theta \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \Gamma_{\theta,\tau}(t \pm 0) \geqslant 0 \quad \forall t\}. \\ {\Xi_+}^0 := \{(\theta,\tau) \in \Xi_+ : \Gamma_{\theta,\tau}(t \pm 0) \geqslant \delta I \quad \forall t \text{ при некотором } \delta > 0\}. \end{gathered} \tag{3.51}$$

Упомянутая ситуация состоит прежде всего в том, что

(i) *если* $\Xi \neq \varnothing$, *то и* ${\Xi_+}^0 \neq \varnothing$;

(ii) *система* (3.46) *управляема на любом подынтервале* $[t', t''] \subset \subset [t_0, t_1]$, $t' < t''$.

Пусть ${\Xi_+}^0 \neq \varnothing$, рассмотрим $(\theta, \tau) \in {\Xi_+}^0$. Согласно (3.51) при любом $t \in \in [t_0, t_1]$ существует $\Gamma_{\theta,\tau}(t \pm 0)^{-1} \leqslant \delta^{-1} I$. Поэтому матричные функции

$$\mathcal{A}_{\theta,\tau}(t) := A(t) - B(t)\Gamma_{\theta,\tau}(t)^{-1} Q_{\theta,\tau}(t)^\top,$$
$$\mathcal{D}_{\theta,\tau}(t) := G_{\theta,\tau}(t) - Q_{\theta,\tau}(t)\Gamma_{\theta,\tau}(t)^{-1} Q_{\theta,\tau}(t)^\top,$$
$$\mathcal{C}_{\theta,\tau}(t) := B(t)\Gamma_{\theta,\tau}(t)^{-1} B(t)^\top$$

определены и кусочно-непрерывны при $t \in [t_0, t_1]$. Определим $n \times n$-матричные функции $X_{\theta,\tau}(t)$ и $\Psi_{\theta,\tau}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ как решение следующей задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_{\theta,\tau}(t) \\ \Psi_{\theta,\tau}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\theta,\tau}(t) & \mathcal{C}_{\theta,\tau}(t) \\ \mathcal{D}_{\theta,\tau}(t) & -\mathcal{A}_{\theta,\tau}(t)^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\theta,\tau}(t) \\ \Psi_{\theta,\tau}(t) \end{pmatrix},$$

$$X_{\theta,\tau}(t_1) = I, \quad \Psi_{\theta,\tau}(t_1) = -M_{\theta,\tau}.$$

Теорема 3.10 ([85]). *Пусть выполнены условия* (i), (ii) *и для любой пары* $(\theta, \tau) \in {\Xi_+}^0$

$$\det X_{\theta,\tau}(t) \neq 0 \qquad \forall t \in (t_0, t_1].$$

Предположим также, что задача (3.45)–(3.48) *правильна в смысле определения* 3.1. *Тогда для нее справедливы утверждения* p1), p2).

Как было установлено ранее, в предположениях сформулированной теоремы утверждение p3) также справедливо.

Пример 1 [202]. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{gathered} x' = \alpha x + u, \\ x = x(t) \in \mathbb{R}, \quad u = u(t) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = a, \\ |x(\cdot)| + |u(\cdot)| \in L_2, \quad \int_0^T x^2\, dt \leqslant \eta \int_0^T u^2\, dt, \\ \int_0^T u^2\, dt \to \min, \end{gathered} \tag{3.52}$$

где числа $\alpha, a \in \mathbb{R}$ и $\eta > 0, T > 0$ заданы. Она представляет собой частный случай линейно-квадратичной задачи оптимального управления с квадратичными ограничениями на конечном временном интервале (3.45)–(3.48) сейчас;

$$\begin{aligned}
&t_0 = 0, \quad t_1 = T, \quad n = m = k = s = 1,\\
&A = \alpha, \quad B = 1, \quad \mathcal{G}_0(x,u) = u^2, \quad \mathcal{G}_1(x,u) = x^2 - \eta u^2,\\
&M_i = 0, \quad Q_i(\cdot) \equiv 0, \quad G_0(t) = 0, \quad G_1(t) = 1,\\
&\Gamma_0(t) = 1, \quad \Gamma_1(t) = -\eta, \quad \gamma_1 = 0, \quad r_i(\cdot) \equiv 0, \quad \rho_i(\cdot) \equiv 0.
\end{aligned}$$

Несложно убедиться, что эта задача правильна в смысле определения 3.1. [1]) Значит, по теореме 3.9 для нее правило Якубовича корректно.

Применим его. Сейчас $\tau \in \mathbb{R}$ и задача (3.10) имеет вид

$$\begin{aligned}
&x'(t) = \alpha x(t) + u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = a,\\
&S\left[\tau, x(\cdot), u(\cdot)\right] = \int\limits_0^T \Big[\tau x^2 + (1 - \eta\tau)u^2\Big]\, dt \to \min .
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Она представляет собой частный случай классической линейно-квадратичной задачи оптимального управления на конечном интервале времени, исследовавшейся во многих работах. Применяя соответствующую теорию (см., например, [145]) и производя простые вычисления, устанавливаем, что

$$S_0(\tau) = \begin{cases} a^2\varphi(\tau), & \text{если } 0 \leqslant \tau \leqslant \eta^{-1},\\ -\infty, & \text{если } \eta^{-1} < \tau. \end{cases}$$

Здесь

$$\varphi(\tau) := \begin{cases} \tau\frac{e^{\nu T} - e^{-\nu T}}{(\nu+\alpha)e^{-\nu T} + (\nu-\alpha)e^{\nu T}}\,, & |\alpha| + \tau > 0, \quad 0 \leqslant \tau < \eta^{-1},\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , & \alpha = \tau = 0, \end{cases} \tag{3.54}$$

$$\nu := \sqrt{\alpha^2 + \frac{\tau}{1 - \eta\tau}}\,. \tag{3.55}$$

Кроме того, при $0 \leqslant \tau < \eta^{-1}$ в задаче (3.53) существует и единствен оптимальный процесс и этот процесс порождается регулятором

$$u = r_\tau(t)x, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.56}$$

где

$$r_\tau(t) = -\frac{\tau}{1 - \eta\tau}\, \frac{e^{\nu(T-t)} - e^{-\nu(T-t)}}{(\nu + \alpha)e^{-\nu(T-t)} + (\nu - \alpha)e^{\nu(T-t)}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.57}$$

если $|\alpha| + \tau > 0$ и $r_\tau(\cdot) \equiv 0$, если $|\alpha| + \tau = 0$.

---

[1]) Подробное обоснование этого факта приведено в [91, 202].

С учетом полученного выражения для $S_0(\tau)$ двойственная задача (3.12) принимает вид

$$\varphi_a(\tau) := a^2\varphi(\tau) \to \max, \quad \tau \in \left[0, \eta^{-1}\right]. \tag{3.58}$$

Здесь, очевидно, $\varphi(\eta^{-1}) = \varphi(0) = 0$ и $\varphi(\tau) > 0$ для $\tau \in \left(0, \eta^{-1}\right)$. Поэтому $\max_{\tau\in[0,\eta^{-1}]} \varphi(\tau)$ достигается в некоторой точке

$$\tau^0 \in \left(0, \eta^{-1}\right), \tag{3.59}$$

которая и является решением двойственной задачи (3.58). В силу (3.59) подынтегральная квадратичная форма в (3.53) положительно определена. Это позволяет применить лемму 3.1 и заключить, что *в исходной задаче* (3.52) *оптимальный процесс существует и единствен*. В соответствии с (III) он может быть найден следующим образом. *Находим решение $\tau = \tau^0$ задачи*

$$\varphi(\tau) \to \max, \qquad \tau \in \left(0, \eta^{-1}\right),$$

где функция $\varphi(\cdot)$ определена согласно (3.55) *и* (3.54). *Решение τ^0 обязательно существует. Оптимальный процесс порождается регулятором* (3.56) *при $\tau = \tau^0$ с коэффициентом* (3.57), *где ν определено в* (3.55).

Подчеркнем, что в двойственной задаче (3.58) максимизируемая функция в соответствии с общей теорией вогнута. Таким образом, это задача конечномерного выпуклого программирования. В то же время исходная задача (3.52), вообще говоря, невыпукла.

С другими примерами решения невыпуклых задач оптимального управления на конечном интервале времени обсуждаемым методом можно ознакомиться в [85, 91, 202].

3.6.4. Распределенное оптимальное управление системой гиперболического типа. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + u(t,\theta), \qquad 0 \leqslant t < \infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{3.60}$$

$$x(0,\theta) = x_0(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}(0,\theta) = x_1(\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{3.61}$$

$$x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3.62}$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi u^2\, dt\, d\theta \leqslant \nu \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi x^2\, dt\, d\theta, \tag{3.63}$$

$$\mathfrak{G}_0 := \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \left(u^2 + \sigma x^2\right)\, dt\, d\theta \to \min. \tag{3.64}$$

Числа $\nu > 0, \sigma > 0$, а также функции $x_0(\cdot) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$, $x_1(\cdot) \in L_2(0,\pi)$ заданы, $x = x(t,\theta) \in \mathbb{R}$ и $u = u(t,\theta) \in \mathbb{R}$ — искомые состояние и управление соответственно, $x(\cdot) \in L_2$, $u(\cdot) \in L_2$, где $L_2 := L_2([0,\infty) \times [0,\pi])$. Известно [59, 60, 66], что для $u(\cdot) \in L_2$ существует, причем единственное, обобщенное решение начально-краевой задачи (3.60)–(3.62), т. е. функция $x(\cdot,\cdot)$, для которой

$$\begin{gathered} x(\cdot,\cdot) \in C\big[[0,\infty) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)\big], \quad \frac{\partial x}{\partial t}(\cdot,\cdot) \in C\left[[0,\infty) \to L_2(0,\pi)\right], \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(\cdot,\cdot) \in L_2^{\mathrm{loc}}\left[[0,\infty) \to H^{-1}(0,\pi)\right] \end{gathered} \tag{3.65}$$

и выполнены равенства (3.60), (3.61), где производные понимаются как обобщенные. [1]) Минимум ищем на множестве $\mathbb{D}$ всех удовлетворяющих ограничению (3.63) пар $[x(\cdot), u(\cdot)] \in L_2 \times L_2$, в которых $x(\cdot,\cdot)$ — обобщенное решение начально-краевой задачи (3.60)–(3.62). Ввиду ограничения (3.63) множество $\mathbb{D}$ невыпукло [91], что, как уже неоднократно отмечалось, осложняет решение задачи по сравнению с выпуклым случаем.

В случае когда ограничение (3.63) отсутствует, решение задачи (которая тогда описывается соотношениями (3.60)–(3.62), (3.64)) легко получить методом моментов. Действительно, в терминах коэффициентов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} x_n(t) &:= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x(t,\theta)\sin(n\theta)\,d\theta, \\ u_n(t) &:= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u(t,\theta)\sin(n\theta)\,d\theta, \end{aligned}\right\}$$

$$x_n^i := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi x_i(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta, \tag{3.66}$$

[1]) Элементами пространства $H^{-1}(0,\pi)$ являются распределения (обобщенные функции) на отрезке $[0,\pi]$, т. е. линейные функционалы на пространстве Шварца $\mathcal{D}(0,\pi)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций $z : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, непрерывные относительно определенной локально выпуклой линейной топологии в этом пространстве. Обсуждаемое пространство $H^{-1}(0,\pi)$ содержит те и только те распределения, которые непрерывны в топологии, индуцированной на $\mathcal{D}(0,\pi)$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$; его можно отождествить с пространством, сопряженным к $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\pi)$ [66].

начально-краевая задача (3.60)–(3.62) распадается в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_n''(t) = -n^2 x_n(t) + u_n(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad x_n(0) = x_n^0, \quad x_n'(0) = x_n^1, \tag{3.67}$$

а минимизируемый функционал принимает вид

$$\mathfrak{G}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \left(u_n^2 + \sigma x_n^2\right) dt.$$

Поэтому задача (3.60)–(3.62), (3.64) без ограничения (3.63) распадается в бесконечную систему независимых подзадач для коэффициентов Фурье

$$\int\limits_0^{\infty} \left(u_n^2 + \sigma x_n^2\right) dt \to \min \quad \text{при ограничениях (3.67).}$$

Каждая из них представляет собой частный случай классической линейно-квадратичной задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени и несложно решается методами, развитыми в классической линейно-квадратичной теории оптимального управления. В случае, когда ограничение (3.63) присутствует (который далее и рассматриваем), исследуемая задача уже не распадается в систему независимых подзадач для коэффициентов Фурье, так как указанное ограничение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} u_n^2 \, dt \leqslant \nu \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x_n^2 \, dt$$

не распадается в систему независимых ограничений на отдельные коэффициенты Фурье $x_n(\cdot)$, $u_n(\cdot)$. Вместе с тем правило Якубовича позволяет легко преодолеть отмеченное затруднение, разбить задачу на систему независимых подзадач для коэффициентов Фурье, применить метод моментов и получить решение.

Опуская подробности (с которыми можно ознакомиться в [201]), отметим, что корректность правила Якубовича устанавливается на основе теоремы 3.3. Приведем ответ, полученный этим методом.

Решение задачи (3.60)–(3.62) *существует и единственно. Оно может быть получено следующим образом.*

1. *На интервале* $[0, \sigma/\nu]$ *находим точку максимума* τ *функции*

$$S_0(\tau) = (1+\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{2}\, n^3 \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\mu}{n^4}} - 1}\, \sqrt{1 + \frac{\mu}{n^4}} \left(x_n^0\right)^2 + \right.$$

$$+2n^2\left[\sqrt{1+\frac{\mu}{n^4}}-1\right]x_n^0x_n^1+\sqrt{2}\,n\sqrt{\sqrt{1+\frac{\mu}{n^4}}-1}\,\left(x_n^1\right)^2\Bigg\}, \quad (3.68)$$

где $\mu := \frac{\sigma-\nu\tau}{1+\tau}$, σ *и* ν — *коэффициенты из* (3.63), (3.64) *и* x_n^i — *коэффициенты Фурье* (3.66) *для начальных данных* $x_0(\cdot)$, $x_1(\cdot)$ *из* (3.61).

2. *По найденному* τ *определяем функции*

$$h(\theta,s) := \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[\sqrt{1+\frac{\mu}{n^4}}-1\right]\sin(n\theta)\cdot\sin(ns),$$

$$p(\theta,s) := \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,n\sqrt{\sqrt{1+\frac{\mu}{n^4}}-1}\,\sin(n\theta)\cdot\sin(ns),$$

где выписанные ряды суммируемы в $L_2\left([0,\pi]\times[0,\pi]\right)$.

Оптимальный процесс задается обратной связью

$$u(t,\theta) = -\int_0^{\pi} h(\theta,s)x(t,s)\,ds - \int_0^{\pi} p(\theta,s)\frac{\partial x}{\partial t}(t,s)\,ds.$$

Отметим, что в (3.68) функция $S_0(\tau)$ вогнута. Поэтому для поиска точки τ можно использовать весь богатый арсенал методов одномерной выпуклой оптимизации.

С приложениями к разнообразным задачам управления стохастическими системами можно ознакомиться в [40, 42, 45]. В [157] обсуждаемый метод был применен для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления на бесконечном временном интервале при наличии ограничений на величину выхода системы в заданные моменты времени.

3.7. Связь с теоремой Теплица–Хаусдорфа и родственными результатами

Охарактеризованные ранее априорные критерии корректности правила Якубовича связаны с результатами о выпуклости образов квадратичных отображений. Охарактеризуем вкратце эту связь, а также соответствующие результаты. [1)]

Назовем подмножество $C\subset\mathbb{R}^r$ *почти выпуклым*, если существует такое выпуклое множество $\mathfrak{C}\subset\mathbb{R}^r$, что $\mathfrak{C}\subset C\subset\overline{\mathfrak{C}}$. Другими словами, C отличается от некоторого выпуклого множества $\mathfrak{C}\subset C$ не более чем кусками относительной границы $\overline{\mathfrak{C}}\setminus \operatorname{ri}\mathfrak{C}$ последнего.

Замечание 3.4. Часто различие между свойствами выпуклости и почти выпуклости несущественно, так как они используются лишь для обоснования применимости теорем отделимости. В то же время основные

[1)] С более подробным обсуждением можно ознакомиться в [32, 85].

теоремы об отделимости выпуклых подмножеств конечномерного пространства распространяются на почти выпуклые множества. Например, два почти выпуклых множества (нестрого) отделимы гиперплоскостью, если относительные внутренности этих множеств не пересекаются.

Возвратимся к общей задаче оптимизации (3.6). Из фигурирующих в (3.6) функций образуем отображение

$$z \mapsto \widehat{\mathfrak{G}}(z) := \big[\mathfrak{G}_0(z), \mathfrak{G}(z)\big] \in \mathbb{R}^{s+1} \tag{3.69}$$

и рассмотрим его *надобраз*

$$\widehat{\mathfrak{G}}(Z)^+ := \big\{y \in \mathbb{R}^{s+1} : \exists z \in Z, \mathfrak{G}(z) \trianglelefteq y\big\}. \tag{3.70}$$

Здесь $\trianglelefteq$ определено согласно (3.7), где сейчас $i = 0, \dots, s$.

Начнем со следующего факта (см., например, [1, 30, 85, 116, 197, 201]).

Лемма 3.2. *Пусть задача* (3.6) *правильна* (*см. определение* 3.1) *и надобраз* $\widehat{\mathfrak{G}}(Z)^+$ *— почти выпуклое множество. Тогда для этой задачи корректно правило Якубовича.*

Замечание 3.5. Очевидно, $\widehat{\mathfrak{G}}(Z)^+ = \widehat{\mathfrak{G}}(Z) + K_+$, где $K_+ := \{y \in \mathbb{R}^{s+1} : 0 \trianglelefteq y\}$ и рассматривается алгебраическая сумма множеств. Так как K_+ — выпуклый конус, почти выпуклость образа $\widehat{\mathfrak{G}}(Z)$ влечет, как легко убедиться, почти выпуклость надобраза $\widehat{\mathfrak{G}}(Z)^+$.

Итак, корректность обсуждаемого правила вытекает из выпуклости образа или надобраза отображения (3.69). Для линейно-квадратичных задач оптимизации с квадратичными ограничениями это отображение квадратичное.

Ряд классических результатов констатирует, что в определенной ситуации выпуклость является прямым следствием квадратичности. Именно: теорема Теплица–Хаусдорфа [184, 227] утверждает, что две непрерывные эрмитовы формы трансформируют сферу комплексного гильбертова пространства в выпуклое множество. По теореме Дайнса [172] две квадратичные формы отображают вещественное линейное пространство в выпуклое множество. В соответствии с близким результатом [117, 167] три эрмитовы формы преобразуют комплексное линейное пространство в выпуклое множество. [1]) Помимо теории управления результаты такого рода представляют интерес для определенных разделов математики, например теории операторов (по этому вопросу можно обратиться к обзорам в [177, 187, 213, 229]).

Для многих приложений представляет интерес распространение упомянутых классических теорем на случай большего числа форм.

---

[1]) С последними двумя фактами идейно связано утверждение 3.1 Точнее, оно основано на их обобщении на случай квадратичных функционалов (3.14).

Оно составляет содержание соответствующей проблемы, поставленной П. Халмошом [183]. Простые примеры показывают, что ни в одной из этих теорем число форм в общем случае увеличить нельзя. Поэтому упомянутое распространение неизбежно связано с дополнительными требованиями к формам.

Имеется целый ряд результатов такого рода [1, 158, 161, 167, 169, 171, 205, 211]. [1] Обсуждаемые в данной работе априорные критерии применимости правила Якубовича опираются на ряд аналогичных результатов, полученных В. А. Якубовичем и его учениками в 1990-х годах. Для примера приведем два соответствующих факта. Они связаны с теоремами 3.3 и 3.4.

Теорема 3.11 ([82, 85, 146]). *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.3 *либо* 3.4, *за исключением условия правильности задачи. Тогда надобраз* (3.70) *отображения* (3.69) *— почти выпуклое множество.*

Отметим, что сформулированная теорема и упомянутые результаты относятся к разным ситуациям и не охватывают друг друга. Обобщающие критерии, охватывающие [2] многие из этих фактов, включая классические результаты Теплица–Хаусдорфа и Дайнса, установлены в [84, 85].

4. Абстрактная теория оптимального управления

4.1. Введение

Одним из центральных результатов современной теории оптимального управления является принцип максимума Понтрягина [101]. Его авторы рассматривали объекты управления, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вскоре выяснилось, что для объектов, описываемых уравнениями других типов (с запаздываниями, интегральными, в частных производных и т. д.), необходимые условия оптимальности имеют форму, аналогичную принципу максимума. Разнообразие соответствующих математических моделей столь велико, что, по-видимому, единственный способ их объединения состоит в переходе на более высокий уровень абстракции с использованием аппарата функционального анализа. Этот путь привел к рождению абстрактных теорий оптимального управления. [3] Для них характерен выбор в качестве основного объекта изучения некоторой абстрактной модели, описываемой языком функционального анализа. Полученные для такой модели результаты предлагается затем

---

[1] С обзором и более подробной библиографией можно ознакомиться в [32, 84, 85].

[2] С точностью до замены выпуклости на почти выпуклость.

[3] Здесь и далее этим термином обозначаются теории, ориентированные на необходимые условия оптимальности, аналогичные принципу максимума.

интерпретировать применительно к тем конкретным моделям, с которыми сталкивается исследователь. Таким образом, при работе с приложениями этот подход позволяет сократить объем рассуждений, так как их значительная часть уже проделана раз и навсегда в рамках абстрактной теории. Достоинство абстрактного подхода состоит и в единообразии процедуры вывода условий оптимальности. Методически он дает возможность изложить основные идеи более доступно и просто, так как они не заслоняются антуражем конкретной модели. Разумеется, достоинства той или иной абстрактной теории определяются ее общностью и удобством применения.

Подобные абстрактные теории были предложены в работах В. Г. Болтянского, Дж. Варги, Р. В. Гамкрелидзе и Г. Л. Харатишвили, А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина, А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова, Л. Нейштадта, Х. Халкина и других авторов. В.А. Якубович разрабол оригинальный подход к построению абстрактной теории оптимального управления [129, 130, 132–134]. Как отмечено в [130], ряд его ключевых моментов лежит в русле идей основополагающей работы [101]. Характеристическая черта этого подхода состоит в разработке и систематическом использовании аппарата исчисления дифференциалов по пучкам кривых в условиях, когда кривые пучка, вообще говоря, недифференцируемы. На этой основе для абстрактной модели задачи оптимального управления устанавливается «абстрактный принцип максимума». Он, в частности, поясняет, почему принципы максимума, аналогичные понтрягинскому, естественно возникают как необходимые условия оптимальности в очень, на первый взгляд, разных задачах, выделяя общие свойства задачи, предопределяющие указанную форму ответа. Как показано в [90], обсуждаемый подход позволяет единообразно строить теорию необходимых условий как первого, так и высших порядков: все они оказываются частями некоторого единого условия.

В работах В. А. Якубовича и его учеников, выполненных в основном в конце 1970-х и в течение 1980-х годов, этот подход был развит в разных направлениях и с его помощью был получен ряд новых самодостаточных результатов. Определенные итоги этого развития были систематизированы в монографии [90] и учебном пособии [92], принадлежащих перу В. А. Якубовича и автора данной статьи. Монография [90] в основном посвящена изложению теории, в то время как книга [92] ориентирована на приложения. По замыслу цель пособия [92] состояла в том, чтобы научить читателя самостоятельно применять абстрактную теорию к новым задачам. Книга содержит 75 задач на применение этой теории. Некоторые из них соответствуют уровню научных публикаций недавнего прошлого, вместе с тем, с ними успешно справляются студенты 4 курса математико-механического факультета Санкт Петербургского университета, которые в течение ряда лет в случайном порядке получают эти задачи в качестве самостоятельной работы по курсу лекций «Теоретическая кибернетика», связанному с материалами книги [92].

4.2. Основополагающие работы [129, 130, 132–134]

4.2.1. Абстрактная задача оптимального управления. В качестве базового объекта изучения абстрактной теории В. А. Якубович предложил следующую модель задачи оптимального управления:

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \to \min, \qquad F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{U}_\partial. \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ — элементы некоторых линейных нормированных пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{U}$ соответственно, $\mathbb{U}_\partial \subset \mathbb{U}$ и $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{Y}, \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}$ — заданное множество и функции, а $\mathbb{Y} = \{\boldsymbol{y}\}$ — еще одно линейное нормированное пространство (значений функции $F(\cdot)$). Ввиду типичных интерпретаций данной модели элементы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ названы *состоянием* и *управлением* соответственно, $\mathbb{U}_\partial$ — *множеством допустимых управлений*, пары $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$ — *процессами*, а процессы, удовлетворяющие уравнению и включению из (4.1), — *допустимыми процессами*. Таким образом, задача состоит в нахождении допустимого процесса $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0]$, на котором функционал из (4.1) достигает наименьшего среди всех таких процессов значения.

В указанную схему, очевидно, укладывается множество разнообразных «конкретных» задач оптимального управления. Поясним основные моменты соответствующей интерпретации на примере следующей стандартной задачи:

$$x'(t) = f[x(t), u(t), t], \quad u(t) \in \Omega, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad x(t_0) = a, \tag{4.2}$$

$$\varphi_0[x(t_1)] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \varphi[x(t), u(t), t]\, dt \to \min\,. \tag{4.3}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Начальное состояние a, начальный t_0 и конечный t_1 моменты времени, а также множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и функции $f(x, u, t), \varphi_0(x), \varphi(x, u, t)$ заданы. Рассматриваются кусочно-непрерывные управления $u(\cdot)$. Минимум ищем на множестве пар $[x(\cdot), u(\cdot)]$ заданных на $[t_0, t_1]$ функций, удовлетворяющих соотношениям (4.2).

В этом случае $\boldsymbol{x} = x(\cdot)$ и пространство $\mathbb{X}$ состоит из всех дифференцируемых (в подходящем смысле) функций $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$. Аналогично, $\boldsymbol{u} = u(\cdot)$ и $\mathbb{U}$ — пространство всех кусочно-непрерывных функций $u(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$. Множество $\mathbb{U}_\partial$ допустимых управлений выделяется из него включением $u(t) \in \Omega \ \forall t$ из (4.2). Уравнение $F[x(\times \times), u(\cdot)] = 0$ равносильно равенствам из (4.2), для чего функция $F(\cdot)$ определена так:

$$F[x(\cdot), u(\cdot)] := [y(\cdot); y_0], \tag{4.4}$$

где $\quad y(t) := x'(t) - f[x(t), u(t), t], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad y_0 := x(t_0) - a.$

Она принимает значения в пространстве $\mathbb{Y}$ пар $\boldsymbol{y} = [y(\cdot), y_0]$, у которых первый элемент — функция $y(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, а второй — вектор $y_0 \in \in \mathbb{R}^n$. Значение $\Phi[x(\cdot), u(\cdot)]$ тождественно левой части в (4.3).

Наряду с базовой абстрактной задачей (4.1) в [133, 134] рассматривалась более общая задача, получаемая добавлением в (4.1) дополнительного ограничения, записываемого в виде неравенства.

Заявленная цель абстрактной теории — изучение общих методов решения задач вида (4.1) с упором на необходимые условия оптимальности, аналогичные принципу максимума. Соответствующие содержательные результаты опираются на определенные предположения о задаче. Их характерная черта — отсутствие симметрии в требованиях к состоянию $\boldsymbol{x}$ и управлению $\boldsymbol{u}$. Например, все функции из (4.1) предполагаются гладкими по $\boldsymbol{x}$. В то же время никаких условий гладкости по $\boldsymbol{u}$ не накладывается.

Замечание 4.1. 1. Подобная асимметрия типична для исследований, посвященных принципу максимума. Например, при изучении задачи (4.2), (4.3) обычно предполагают, что функции $f(x, u, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi(x, u, t)$ дифференцируемы по x и непрерывны по u.

2. Применительно к $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ из (4.1) наименования «состояние» и «управление» отражают типичную, но далеко не единственно возможную интерпретацию в приложениях. Например, $\boldsymbol{x}$ может состоять из «истинного» состояния управляемой системы и подлежащего оптимизации постоянного (во времени) параметра уравнений динамики объекта управления. В работах [92] и [81] подробно обсуждается методика выбора пространств, функций и множества из (4.1), обеспечивающая сведение разнообразных «конкретных» задач к абстрактной задаче (4.1), удовлетворяющей всем необходимым предположениям.

4.2.2. Пучки кривых и дифференцирование по ним. Для получения необходимых условий оптимальности процесса $[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0]$ предлагается задать в множестве $\mathbb{U}_\partial$ некоторый пучок кривых $\boldsymbol{u}(\varepsilon \mid \mu) \in \mathbb{U}_\partial$ с вершиной в точке $\boldsymbol{u}^0$. Здесь $\varepsilon \in [0, \varepsilon_\mu]$ — параметр, определяющий точку на кривой, а μ — элемент некоторого множества $\mathfrak{M}$, «нумерующий» кривые. При этом точка $\boldsymbol{u}^0$ называется вершиной, если $\boldsymbol{u}(\varepsilon \mid \mu) \to \to \boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(0 \mid \mu)$ при $\varepsilon \to +0$.

В отличие от классического вариационного исчисления не предполагается, что кривые $\boldsymbol{u}(\cdot \mid \mu)$ имеют касательные при $\varepsilon = 0$. (Иными словами, производной $d\boldsymbol{u}(\varepsilon \mid \mu)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ может не быть.) Накладывается более слабое требование: определенные отображения $P(\boldsymbol{u})$, связанные с задачей (4.1), *дифференцируемы по пучку*, т. е. для любого $\mu \in \mathfrak{M}$ существует предел

$$\delta P(\boldsymbol{u}^0 \mid \mu) := \lim\nolimits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-1} \{P[\boldsymbol{u}(\varepsilon \mid \mu)] - P(\boldsymbol{u}^0)\}, \tag{4.5}$$

называемый *дифференциалом отображения P вдоль кривой $\boldsymbol{u}(\cdot \mid \mu)$*.

На первый взгляд естественно потребовать, чтобы дифференцируемы были обе функции $F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u})$, $\Phi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u})$ из (4.1) (при фиксированном $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}^0$). Однако в типичных ситуациях обеспечить справедливость этого предположения непросто. Для примера вновь обратимся к задаче (4.2), (4.3). Для нее принцип максимума был установлен в [101] с помощью игольчатых вариаций $\boldsymbol{u}(\varepsilon|\mu) = u_{\text{иг}}(\cdot, \varepsilon|\mu)$. В простейшем случае

$$u_{\text{иг}}(t, \varepsilon|\mu) := \begin{cases} v & \text{при} \quad t \in (\overline{t} - \varepsilon, \overline{t}], \\ u^0(t) & \text{при} \quad t \notin (\overline{t} - \varepsilon, \overline{t}], \end{cases} \quad \mu = [\overline{t}, v],\ \overline{t} \in (t_0, t_1],\ v \in \Omega, \tag{4.6}$$

где $u^0(\cdot)$ — оптимальное управление. Вспоминая, что $\Phi[x(\cdot), u(\cdot)]$ тождествененно левой части в (4.3), легко убедиться, что функция $\Phi(\cdot)$ дифференцируема по пучку и

$$\delta_u \Phi(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0 \mid \mu) = \varphi[x^0(\overline{t}), v, \overline{t}] - \varphi[x^0(\overline{t}), u^0(\overline{t} - 0), \overline{t}]. \ ^{1)}$$

Однако определяемая согласно (4.4) функция $F(\cdot)$ по этому пучку недифференцируема. [2)]

В базовом варианте разработанной в [129, 130, 132–134] теории требование дифференцируемости по пучку предъявлено другим и не столь очевидным функциям. Для их построения свяжем с уравнением $F = 0$ и функционалом Φ из (4.1) *множители Лагранжа* l^* и $\lambda \geqslant 0$ соответственно. Здесь l^* — линейный ограниченный функционал на пространстве $\mathbb{Y}$ значений функции F. Составим *функцию Лагранжа* (*лагранжиан*)

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) := \lambda \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + l^* F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{4.7}$$

Вспоминая, что функции F, Φ, а значит, и L — гладкие по x, запишем *абстрактное сопряженное уравнение*

$$L'_x(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0) = 0 \tag{4.8}$$

относительно неизвестных множителей Лагранжа. (Здесь производная L'_x понимается в обычном смысле, например по Фреше.) Ключевое требование к пучку состоит в том, что

> *для любого решения* l^*, λ *уравнения* (4.8) *лагранжиан* (4.7) *дифференцируем по используемому пучку кривых.*

Замечание 4.2. 1. Уравнение (4.8) линейно относительно неизвестных l^*, λ. При выполнении некоторых естественных «рамочных» предположений [129, 130, 132] множество решений имеет конечный базис и поэтому дифференцируемость достаточно проверить у конечного набора лагранжианов, отвечающих элементам

---

1) Индекс $_u$ в выражении δ_u подчеркивает, что дифференцирование затрагивает только переменную u.

2) Точнее, это верно, если предел в (4.5) рассматривать относительно «удобных» стандартных норм, например норм лебеговых пространств $L_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$.

базиса. Например, в случае (4.2), (4.3) дифференцируемость достаточно проверить у одного лагранжиана [130].

2. Название уравнения (4.8) объясняется тем, что в приложениях к «конкретным» задачам оптимального управления оно переходит (или содержит) соответствующее «конкретное» сопряженное уравнение.
3. Как легко убедиться [90, 130], для задачи (4.2), (4.3) и пучка игольчатых вариаций (4.6) сформулированное требование выполнено.

Определение 4.1. Лагранжиан, отвечающий некоторому решению уравнения (4.8) и рассматриваемый со знаком минус как функция управления $H(\boldsymbol{u}) := -L[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}]$, назван в [90] *гамильтоновым функционалом* задачи (4.1).

Обсуждаемое требование к пучку состоит в том, что по нему должен быть дифференцируем любой гамильтонов функционал.

Вопрос о построении пучков вынесен в отдельный раздел предложенной в [129, 130, 132–134] теории и решается применительно к типичным, хотя и более специальным, чем в (4.1), ситуациям.

4.2.3. Описание основного результата теории. Как показал В. А. Якубович, при выполнении неограничительных предположений о задаче (4.1), а также для ряда ее обобщений необходимые условия оптимальности (НУО) процесса $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0)$ имеют следующий вид.

НУО. *Существуют такие одновременно не обращающиеся в нуль* $|\lambda| + \|l^*\| \neq 0$ *множители Лагранжа, что выполнено абстрактное сопряженное уравнение* (4.8), $\lambda \geqslant 0$ *и*

$$\delta_u L(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0 \mid \mu) \geqslant 0 \quad (\forall \mu \in \mathfrak{M}). \tag{4.9}$$

Неравенство (4.9) в типичных случаях преобразуется в некоторый «принцип максимума» (подробнее об этом см. далее).

Сформулированное утверждение справедливо, естественно, при выполнении ряда условий. Предположения, принятые в стартовой работе [130], подразумевают, что уравнение $F[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = 0$ из (4.1) имеет, причем единственное, решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{u}}$ при любом заданном допустимом управлении $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}_\partial, \boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u}^0$. Это, например, верно для задачи (4.2), (4.3) [1], так как согласно (4.4) равенство $F[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = 0$ равносильно дифференциальному уравнению и начальному условию из (4.2). Однако если добавить в ее постановку еще одно ограничение: $x(t_1) = b$ (где вектор b задан), обсуждаемое предположение, вообще говоря, нарушается: не всякое управление переводит объект из состояния a в b. «Комплект» предположений, ориентированный на подобные случаи, предложен в [132]. В этой работе рассматривались уравнения $F = 0$, распадающиеся

[1] При естественных предположениях относительно функции $f(\cdot)$.

в систему

$$F[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = 0 \Leftrightarrow \boxed{F_1[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = 0, \quad F_2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] = 0,}$$

где стоящее справа от знака $\Leftrightarrow$ первое уравнение удовлетворяет прежнему условию однозначной разрешимости относительно $\boldsymbol{x}$, а второе распадается в конечную систему скалярных равенств $F_2[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] \in \mathbb{R}^k$. В этом случае обоснование основного необходимого условия существенно усложняется. Оно опирается на дополнительные требования к пучку и топологические аргументы (теорему Брауэра [25, с. 573]). В работах [133, 134] теория обобщена на случай, когда в постановку задачи (4.1) дополнительно внесено ограничение в виде неравенства

$$G[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}] \leqslant 0. \tag{4.10}$$

Таким образом, минимум ищется на множестве процессов, удовлетворяющих этому неравенству, а также уравнению и включению из (4.1). Для задачи (4.2), (4.3) ограничение такого сорта может, например, иметь вид $\eta[x(t_1)] \leqslant 0$: минимум ищем среди управлений $u(t) \in \Omega$, переводящих объект из состояния a в область, описываемую неравенством $\eta(x) \leqslant 0$. В этом случае пространство $Z = \mathbb{R}$ конечномерно. Другой пример — ограничение

$$g[x(t)] \leqslant 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{4.11}$$

Оно означает, что траектория системы должна лежать в заданной области $\{x : g(x) \leqslant 0\}$ в любой момент времени. В этом случае Z — пространство заданных на $[t_0, t_1]$ непрерывных скалярных функций, упорядоченное конусом $K_+ := \{z(\cdot) : z(t) \geqslant 0 \; \forall t\}$. [1]) Это пространство бесконечномерно.

В ориентированном на случай бесконечномерного пространства Z варианте предположений о задаче требования к пучку усилены: дифференцируемы должны быть не только лагранжианы, но и сами функции $F(\cdot)$, $G(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$. Значительная часть статьи [134] посвящена построению пучка (названного пучком гребенчатых вариаций), удовлетворяющего этому требованию в определенной «базовой» ситуации и приводящего к условию оптимальности, аналогичному принципу максимума. Эти вариации существенно сложнее игольчатых. Обеспечение справедливости обсуждаемой усиленной дифференцируемости часто требует специальных приемов при сведении конкретной задачи к абстрактной. Например, в случае (4.2), (4.3) следует воспользоваться не естественной записью уравнений из (4.2) в виде $F = 0$ с помощью функции (4.4),

[1]) Таким образом, $z(\cdot) \leqslant 0 \Leftrightarrow z(t) \leqslant 0 \; \forall t$.

а предварительно свести их к интегральному уравнению и определить F так:

$$F[x(\cdot), u(\cdot)] := y(\cdot), \quad \text{где} \quad y(t) := a + \int_{t_0}^{t} f[x(\theta), u(\theta), \theta]\, d\theta \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

В [134, 140] получены простейшие абстрактные достаточные условия оптимальности.

4.2.4. Абстрактные принципы максимума. Для многих приложений условие (4.9) преобразуется в форму, аналогичную принципу максимума. Детали этой формы определяются исключительно видом гамильтонова функционала $H(\boldsymbol{u}) = -L[\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}]$ и используемым пучком, выбор которого существенно коррелирован с видом пространства допустимых управлений $\mathbb{U}_\partial$. При этом многообразие встречающихся в «конкретных» задачах оптимального управления типов гамильтоновых функционалов и пространств $\mathbb{U}_\partial$ существенно меньше разнообразия самих задач. Это позволяет выделить некоторые основные типы и указать для каждого из них отвечающий ему тип принципа максимума. Его естественно назвать абстрактным принципом максимума, так как он опирается на конкретизацию лишь ограниченного набора компонент абстрактной задачи (4.1).

Например, в работе [130] выделены следующие типы абстрактного принципа максимума.

1. $\mathbb{U} = \{u(\cdot)\}$ — пространство кусочно-непрерывных функций $u(\times \times) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, подмножество $\mathbb{U}_\partial$ состоит из функций $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ со значениями в заданном множестве Ω и
$$H[u(\cdot)] = \text{const} + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{H}[t, u(t)]\, dt, \tag{4.12}$$
где $\mathcal{H}[t, u]$ — непрерывная функция. В качестве пучка в [130] рекомендованы игольчатые вариации. Условие (4.9) преобразуется к виду, аналогичному классическому принципу максимума:
$$\mathcal{H}[t, u(t \pm 0)] = \max_{v \in \overline{\Omega}} \mathcal{H}[t, v] \qquad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{4.13}$$

2. Пространство $\mathbb{U}$ и множество $\mathbb{U}_\partial$ — те же, функционал имеет вид
$$H[u(\cdot)] = \text{const} + \int_{t_0+\tau}^{t_1} \mathcal{H}[t, u(t), u(t-\tau)]\, dt,$$
где τ, $0 < \tau < t_1 - t_0$, — заданное число. Рекомендованы игольчатые вариации с несколькими точками варьирования t_j, составляющими τ-периодическую цепочку $t_j = t_0 + j\tau$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, t_j \in [t_0, t_1]$. Условие (4.9) преобразуется к другому абстрактному принципу максимума:

$$\sum_j \mathcal{H}[t_j, u^0(t_j \pm 0), u(t_j - \tau \pm 0)] = \max_{v_j \in \overline{\Omega}} \sum_j \mathcal{H}[t_j, v_j, v_{j-1}]. \quad (4.14)$$

Здесь сумма берется по $j : t_j \in [t_0 + \tau, t_1]$, а у v_j индекс j пробегает все возможные для данной цепочки значения. Приведенное равенство выполнено для любой τ-периодической цепочки $\{t_j\}$.

Этот тип принципа максимума характерен для задач с запаздываниями в управлениях.

3. Управление $u(\cdot)$ — функция не времени t, а заданного выхода $\sigma \in \mathbb{R}$ системы. Пространство $\mathbb{U} = \{u(\cdot)\}$ и множество $\mathbb{U}_\partial$ такие же, как в примере 1, с заменой интервала $[t_0, t_1]$ на $[\sigma_0, \sigma_1]$ и

$$H[u(\cdot)] = \mathrm{const} + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{H}\{t, u[\sigma^0(t)]\}\, dt.$$

Выход $\sigma^0(\cdot) : [t_0, t_1] \to [\sigma_0, \sigma_1]$, отвечающий оптимальному процессу, удовлетворяет ряду естественных требований. Рекомендованы игольчатые вариации. Условие (4.9) преобразуется к виду

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\mathcal{H}[t_j, u^0(\sigma \pm 0)]}{\left|\dot{\sigma}^0(t_j)\right|} = \max_{v \in \overline{\Omega}} \sum_{j=1}^{N} \frac{\mathcal{H}[t_j, v]}{\left|\dot{\sigma}^0(t_j)\right|}, \quad (4.15)$$

где $t_1, \ldots, t_N$ — все корни уравнения $\sigma^0(t) = \sigma$ и равенство (4.15) верно при любом $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, для которого число этих корней конечно и $\dot{\sigma}^0(t_j) \neq 0 \quad \forall j$.

Замечание 4.3. Принцип максимума вида (4.15) впервые обнаружен в обсуждаемой работе В. А. Якубовича. В [33, 88, 135, 137, 233] на основе развитой абстрактной теории соответствующие «конкретные» принципы максимума установлены для «конкретных» задач оптимального управления по заданному выходу системы.

Некоторые варианты абстрактного принципа максимума и пучки, соответствующие системам с распределенными параметрами, рассматривались в [74, 79, 89].

Замечание 4.4. Абстрактные принципы максимума допускают единообразную формулировку [90, 92]:

$$H(\boldsymbol{u}^0) = \max_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}_\partial} H(\boldsymbol{u}).$$

В приложениях она, как правило, соответствует тому, что иногда называют «интегральным принципом максимума». Например, в случае 2 указанное соотношение принимает вид

$$\int_{t_0+\tau}^{t_1} \mathcal{H}[t, u^0(t), u^0(t-\tau)]\, dt = \max_{u(\cdot) \in \mathbb{U}_\partial} \int_{t_0+\tau}^{t_1} \mathcal{H}[t, u(t), u(t-\tau)]\, dt.$$

Идея В. А. Якубовича об абстрактном принципе максимума получила систематическое воплощение в книге [92]. В ней все предназначенные «потребителю» итоговые результаты абстрактной теории сформулированы в виде абстрактного принципа максимума. [1] Как следствие этих результатов выведены «конкретные» принципы максимума в разнообразных случаях. Среди них задачи управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, уравнениями с разрывными правой частью или фазовыми траекториями, уравнениями с несколькими переменными запаздываниями в управлении и состоянии, интегральными уравнениями, уравнениями в частных производных гиперболического типа. Рассмотрены разные постановки задачи, например с нефиксированными (начальным, конечным, промежуточными) моментами времени [2], минимаксные задачи и задачи многокритериального оптимального управления, задачи с переменным множеством допустимых управлений $\Omega = \Omega(t)$ и с ограничениями вида

$$g[x(t), u(t), t] \leqslant 0, \quad p[x(t), u(t), t] = 0 \quad \forall t, \tag{4.16}$$

в силу которых это множество зависит от состояния. Исследовались случаи не только кусочно-непрерывных, но и измеримых, кусочно-постоянных, кусочно-гладких и некоторых других управлений.

4.2.5. Пример применения абстрактной теории. С многочисленными приложениями этой теории можно ознакомиться, например, в [33, 43, 44, 90, 92, 102, 130, 132–135, 137, 233]. В данном подпараграфе кратко иллюстрируются основные моменты процедуры применения указанной теории на примере классической задачи (4.2), (4.3). Несмотря на то, что технические детали [3] (в том числе проверка предположений абстрактной теоремы) опускаются, надеемся, что даже такая «усеченная» иллюстрация позволит читателю оценить, насколько естественно предложенный в раьотах [129, 130, 132–134] формализм соотносится с конкретными задачами, а абстрактный принцип максимума легко перетекает в конкретный.

Для задачи (4.2), (4.3) функция F определена согласно (4.4) и принимает значения в пространстве пар $\boldsymbol{y} = [y(\cdot), y_0]$, где $y(\cdot) : [t_0, t_1] \to \to \mathbb{R}^n$ и $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Поэтому линейный функционал $l^* : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$l^*\boldsymbol{y} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi(t)^\top y(t)\, dt + c^\top y_0, \tag{4.17}$$

где $c \in \mathbb{R}^n$ и $\psi(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — некоторая функция. Подставляя сюда выражения для $y(\cdot)$ и y_0 из (4.4) и вспоминая, что $\Phi[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$ равно выражению в левой части (4.3), находим лагранжиан (4.7):

[1] Аппарат пучков кривых и дифференциалов по ним излагается только для объяснения «происхождения» этих результатов.

[2] К ним, например, относится задача (4.2), (4.3), в которой момент t_1 и/или t_0 не заданы, а ищутся из условия минимума функционала.

[3] С ними можно ознакомиться в [90, 92].

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) := \lambda\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + l^*F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \lambda\varphi_0[x(t_1)] + \lambda\int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi[x(t),u(t),t]\,dt+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(t)^\top\Big(x'(t) - f[x(t),u(t),t]\Big)\,dt + c^\top[x(t_0)-a] =$$

$$= \lambda\varphi_0[x(t_1)] + \int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(t)^\top x'(t)\,dt -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}H[\psi(t),x(t),u(t),t]\,dt + c^\top[x(t_0)-a], \quad (4.18)$$

где $H(\cdot) := \psi^\top f[x,u,t] - \lambda\varphi[x,u,t]$ — функция Гамильтона. Поэтому абстрактное сопряженное уравнение (4.8) означает, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\psi(t)^\top h'(t)\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial x}[\psi(t),x^0(t),u^0(t),t]h(t)\,dt+$$

$$+\lambda\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}[x^0(t_1)]h(t_1) + c^\top h(t_0) = 0 \quad (4.19)$$

для любой дифференцируемой функции $h(\cdot)$. Отсюда по лемме Дюбуа–Реймона [53, 90, 92] следует, что функция $\psi(\cdot)$ дифференцируема и

$$\psi'(t) = -\nabla_x H[\psi(t),x^0(t),u^0(t),t], \qquad \psi(t_1) = -\lambda\nabla\varphi_0[x^0(t_1)], \quad (4.20)$$

$$\psi(t_0) = c \quad (4.21)$$

(эти соотношения легко получить, интегрируя в (4.19) по частям и используя произвольность $h(\cdot)$). Согласно (4.18) гамильтонов функционал $H(\boldsymbol{u}) = -L(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{u})$ имеет вид (4.12) с $\mathcal{H}(t,u) := H[\psi(t),x^0(t),u,t]$. Поэтому верен абстрактный принцип максимума (4.13), т. е.

$$H[\psi(t),x^0(t),u^0(t\pm 0),t] = \max_{v\in\overline{\Omega}} H[\psi(t),x^0(t),v,t], \quad t\in[t_0,t_1]. \quad (4.22)$$

Так как $|\lambda| + \|l^*\| \neq 0$ и $\lambda \geqslant 0$, то в силу (4.17) либо $|c| + \lambda > 0$, либо $\psi(\cdot) \not\equiv 0$. Отсюда следует, что $\lambda > 0$, так как в противном случае

$$\lambda = 0 \xRightarrow{(4.20)} \psi(\cdot) \equiv 0 \xRightarrow{(4.21)} c = 0$$

в нарушение установленных соотношений. Поэтому, умножая $\psi(\cdot)$, c, λ на подходящую общую константу, можно обеспечить равенство $\lambda = 1$.

Таким образом, приходим к следующему выводу. Для оптимального процесса справедливо соотношение (4.22), в котором $\psi(\cdot)$ — решение задачи Коши (4.20). При этом всюду $\lambda = 1$. Это — классический принцип максимума Понтрягина [101].

4.3. Дальнейшее развитие абстрактной теории и ее приложения

Определенные итоги этого развития подведены в монографии [90] В. А. Якубовича и автора данной статьи. Монография посвящена развернутому изложению абстрактной теории оптимального управления. При сохранении базовых принципов подхода в нее внесен ряд дополнений и модификаций. Они делают более естественной и простой процедуру применения абстрактной теории к конкретным задачам и расширяют сферу ее применимости. В частности, они позволяют построить единообразную теорию необходимых условий оптимальности как первого, как и высших порядков.

Поясним вкратце последнее утверждение, начав с терминологии. В самых общих чертах необходимое условие экстремума порядка k — это условие, в формулировке которого участвуют производные до указанного порядка. Например, уравнение Ферма $f'(x^0) = 0$ в задаче $f(x) \to \min,\ x \in \mathbb{R}$, — условие первого порядка, а неравенство $f^{(2)}(x^0) \geqslant 0$ — условие второго порядка. [1] Порядки $k \geqslant 2$ часто называют высшими. Условия таких порядков представляют интерес, если условий первого порядка оказывается недостаточно для решения или исследования задачи. (Например, уравнению Ферма удовлетворяют точки локального не только минимума, но и максимума; для их различения можно применить условие второго порядка: $f^{(2)}(x^0) \geqslant 0$ в точке минимума и $f^{(2)}(x^0) \leqslant 0$ в точке максимума.) Принцип максимума представляет собой условие первого порядка. Соответственно в задачах управления интерес к условиям высших порядков обычно возникает в тех случаях, когда в указанном смысле недостаточен принцип максимума. Условиям (как необходимым, так и достаточным) высших порядков в задачах оптимизации посвящена обширная литература. С ее обзором, а также обзором упомянутых случаев можно ознакомиться, например, в [4, 14, 19, 62].

Оказывается, что в рамках развитого в работе [90] подхода условия разных порядков «извлекаются» как части из некоторого единого «базового» условия, которое при поверхностном рассмотрении имеет первый порядок. Для пояснения возвратимся к абстрактной задаче (4.1). В [90] для ее исследования применяются пучки кривых $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu)$ в пространстве процессов $\mathbb{W} = \{\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]\}, x \in \mathbb{X}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{U}_\partial$. (Пучки $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\varepsilon|\mu)$ в $\mathbb{U}_\partial$ можно интерпретировать как их специальный случай $\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) := [\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}(\varepsilon|\mu)]$.) Вершиной пучка является оптимальный процесс $\boldsymbol{w}^0 = [\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{u}^0]$; его кривые по-прежнему могут не иметь касательных. Как показано в [90], справедливо следующее естественное «расширение» условия оптимальности НУО процесса $\boldsymbol{w}^0$, сформулированного в п. 4.2.3.

---

[1] В общем случае, охватывающем, в частности, задачи управления, адекватное определение порядка не столь просто. С вариантом соответствующей теории можно ознакомиться, например, в [62].

- *Существуют такие одновременно не обращающиеся в нуль* $|\lambda| + \|l^*\| \neq 0$ *множители Лагранжа, что выполнено абстрактное сопряженное уравнение* (4.8), $\lambda \geqslant 0$ *и*

$$\delta L(\boldsymbol{w}^0 \mid \mu) \geqslant 0 \quad (\forall \mu \in \mathfrak{M}). \tag{4.23}$$

Данное утверждение, разумеется, верно при выполнении ряда предположений [90]. Отметим среди них два ключевых требования к пучку. Во-первых, для любого решения абстрактного сопряженного уравнения (4.8) производная по пучку из (4.23) должна существовать. Во-вторых, функции F и Φ из (4.1) должны удовлетворять липшицевым оценкам на кривых пучка:

$$|F[\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) - F[\boldsymbol{w}^0]| \leqslant c_{F,\mu}\varepsilon, \quad |\Phi[\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) - \Phi[\boldsymbol{w}^0]| \leqslant c_{\Phi,\mu}\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4.24}$$

Выполнение аналогичных оценок для расстояния от $\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu)$ до $\boldsymbol{w}^0$ необязательно.

Для простоты ограничим общность рассмотрения. Пусть в (4.1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^k$ — эвклидовы пространства, а $\mathbb{U}_\partial$ состоит из одной точки $\boldsymbol{u}^0$. Это позволяет абстрагироваться от управления $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{x}$ и интерпретировать (4.1) как обычную задачу математического программирования.

Покажем теперь, что условие (4.23) содержит в себе условия экстремума разных порядков, хотя само оно сформулировано в терминах первой производной (4.5) по пучку. Действительно, запишем вначале (4.23) для пучка, содержащего только одну тривиальную кривую $\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) \equiv \boldsymbol{w}^0$. Тогда неравенство (4.23) неинформативно, так как его левая часть равна нулю. Само сформулированное необходимое условие оптимальности сводится к правилу множителей Лагранжа: если $\boldsymbol{x}^0$ — решение задачи (4.1) (где, напомним, $\boldsymbol{u}$ игнорируется), то найдутся такие одновременно не обращающиеся в нуль множители Лагранжа $l \in \mathbb{R}^k, \lambda \geqslant 0$, что $L'(\boldsymbol{x}^0) = 0$, где $L(\cdot) := l^\top F(\cdot) + \lambda\Phi(\cdot)$. Это — условие первого порядка.

Далее ограничимся рассмотрением случая, когда ранг якобиана $F'(\boldsymbol{x}^0)$ равен k. Тогда, как легко убедиться, $\lambda > 0$ и уравнение $L'(\boldsymbol{x}^0) = 0$ гарантирует импликацию

$$F'(\boldsymbol{x}^0)\mu = 0 \Rightarrow \Phi'(\boldsymbol{x}^0)\mu = 0. \tag{4.25}$$

Подставим в (4.23) более интересный пучок:

$$\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) \equiv \boldsymbol{x}(\varepsilon|\mu) := \boldsymbol{x}^0 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\mu,$$

кривые которого занумерованы параметром $\mu \in \mathbb{R}^n$. Ввиду разложения

$$\Phi[\boldsymbol{w}(\varepsilon|\mu) - \Phi[\boldsymbol{w}^0] = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\Phi'(\boldsymbol{x}^0)\mu + \frac{\varepsilon}{2}\mu^\top\Phi''(\boldsymbol{x}^0)\mu + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

где $\Phi''(\boldsymbol{x}^0)$ — матрица вторых производных (Гессиан), и аналогичного разложения для функции F, требование (4.24) вынуждает ограничиться кривыми, для которых $\Phi'(\boldsymbol{x}^0)\mu = 0,\ F'(\boldsymbol{x}^0)\mu = 0$. Впрочем, согласно (4.25) первое равенство следует из второго. Приведенное разложение гарантирует также, что по указанным кривым функции $\Phi(\cdot)$, $F(\cdot)$, а значит, и $L(\cdot)$ имеют производную (4.5), причем $\delta L(\boldsymbol{w}^0 \mid \mu) = \frac{1}{2}\mu^\top L''(\boldsymbol{x}^0)\mu$. Поэтому условие (4.23) переходит в хорошо известное условие второго порядка в задаче математического программирования:

$$\mu^\top L''[\boldsymbol{x}^0]\mu \geqslant 0 \qquad \forall \mu : F'[\boldsymbol{x}^0]\mu = 0.$$

Итак, соотношение (4.23) «содержит в себе» условия как первого, как и второго порядка. Применяя другие пучки, можно получить условия третьего [90, §4.4] и более высокого порядков.

Отметим, впрочем, что сформулированное абстрактное условие оптимальности, содержащее (4.23), непригодно для получения условий высших порядков в более интересных случаях (особенно, если в задаче есть ограничения вида $G(\boldsymbol{w}) \leqslant 0$). Для преодоления этого недостатка требуется ослабить ряд ее предположений, в частности, требование дифференцируемости по пучку. С соответствующими подробностями можно ознакомиться в [90, гл. 2].

Для иллюстрации возможностей абстрактной теории в [90] выведены необходимые условия экстремума высшего порядка в анормальной гладкой задаче (в модели (4.1) $\boldsymbol{u}$ отсутствует, функции F, Φ — гладкие). Они несколько уточняют некоторые результаты [2–4], полученные другим методом. В качестве другой иллюстрации выведены необходимые условия оптимальности высшего порядка, обобщающие принцип максимума и установленные ранее другим методом в [97–100]. Кроме того, выведены основные условия второго порядка классического вариационного исчисления.

Монография [90] отражает не все направления развития обсуждаемой абстрактной теории. В [89] и [74, 77, 79] предложены варианты абстрактной теории, ориентированные на задачи оптимизации систем, описываемых уравнениями в частных производных. Первый из них — ближе к исходным работам [129, 130, 132–134] и предназначен для задач с конечным числом ограничений в виде неравенств; в качестве иллюстрации установлен аналог принципа максимума для задачи управления объектом, описываемым уравнением в частных производных второго порядка параболического типа. Работы [74, 77, 79] ориентированы на более сложный случай, когда в постановке задачи присутствуют аналоги ограничений (4.11) и (4.16) (часто именуемых фазовыми и смешанными соответственно), включая так называемые нерегулярные [19, 47, 92] смешанные ограничения. В [74] введен аппарат верхних производных по пучку для функций, принимающих значения в бесконечномерном упорядоченном пространстве. В [77, 79] в связи с требуемой модификацией теории развит аппарат гладкого анализа в пространствах с векторными нормами, а построение пучков опирается на теорию счетно-аддитивных вектор-функций. В [74, 75, 79, 86, 87] с помощью развитой в [74, 77, 79] теории установлены аналоги принципа максимума для задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных разных типов, с фазовыми/смешанными ограничениями. В [200] с помощью принципа максимума получено аналитическое решение задачи такого рода. В [73, 76] с помощью развитого в [74] аппарата верхних производных установлен содержательный аналог принципа максимума для задачи (4.2), (4.3) с дополнительным граничным условием $x(t_1) = b$ и фазовым ограничением $g[x(t)] \leqslant 0\, \forall t$ в случае, когда начальное и/или конечное состояние лежит на границе допустимой фазовой области $\{x : g(x) \leqslant \leqslant 0\}$. Необходимость специального исследования этого случая объясняется тем, что применение к нему некоторых стандартных методов вывода необходимых условий оптимальности приводит к бессодержательному утверждению. (Подробнее с мотивацией, а также с обзором других исследований в этом направлении можно ознакомиться, например, в [19, Гл.2], а также в [46, 73, 76].)

В работах [33, 88, 135, 137, 233] при разных предположениях рассматривалась задача оптимального управления, в которой в отличие от стандартной постановки управление $u(\cdot)$ является функцией не времени t, а заданного выхода системы $u = u(\sigma), \sigma = g[x(t)]$. С помощью абстрактной теории получены аналоги принципа максимума. В некоторых специальных случаях он принимает форму, отличную от (4.15) [88]. В [102] принцип максимума получен для задачи с фазовыми ограничениями вида $g[x(t), x(\theta), t, \theta] \leqslant 0$, где переменные t, θ независимо пробегают заданный интервал $[t_0, t_1]$.

Отдельный цикл работ [36–39, 41, 43, 44] посвящен приложениям к разнообразным задачам управления стохастическими объектами. В частности в [44] установлен принцип максимума в сложном случае, когда ограничения накладываются на математические ожидания некоторых зависящих от процесса функций в каждый момент времени.

Центральная часть обсуждаемой абстрактной теории посвящена выводу необходимых условий оптимальности. Поскольку при решении задач оптимального управления основная цель — это нахождение оптимального процесса, то возникает вопрос, как эти условия позволяют его найти. Иногда это удается сделать за счет преобразования необходимых условий и получить ответ в виде явных формул. Однако такая возможность возникает лишь для специальных, относительно простых задач оптимизации. В прочих случаях нахождение оптимального процесса связано с численным решением уравнений и соотношений, составляющих необходимые условия оптимальности, либо с применением численных методов для непосредственного решения исходной задачи оптимизации.

В работе [92] для абстрактной задачи (4.1) предложен единый метод последовательных приближений, позволяющий находить процесс, удовлетворяющий абстрактному принципу максимума с любой заранее заданной точностью. Основное достоинство этого метода состоит в том, что он относится к абстрактной задаче оптимизации (4.1) и поэтому охватывает в рамках единой схемы самые разные конкретные оптимизационные задачи. Подобно тому, как применительно к таким задачам «расшифровка» абстрактного принципа максимума приводит к разным конкретным необходимым условиям, так и указанный метод имеет различные конкретные реализации. Переход к ним от общей схемы происходит совершенно единообразно и основан на формулах и фактах, которые естественно устанавливаются в ходе применения развитой абстрактной теории необходимых условий оптимальности. Для абстрактной модели (4.1) в [92] установлены условия сходимости метода к процессу, удовлетворяющему абстрактному принципу максимума с заданной точностью δ, а также условия, гарантирующие, что такой процесс приближается к оптимальному при $\delta \to +0$.

В работе [78] предложен вариант абстрактной теории, позволяющий, в частности, получать условия оптимальности в задачах с фазовыми и смешанными ограничениями в основном на базе фактов, которые естественно устанавливаются при исследовании задач с более простыми конечномерными ограничениями. Этот вариант полезен там, где переход к фазовым и смешанным ограничениям связан с техническими или принципиальными осложнениями, например для задач с несоизмеримыми [1)] запаздываниями в управлениях, задач управления системами с распределенными параметрами и в некоторых других случаях. В качестве примера установлен аналог принципа для задачи с фазовыми ограничениями и несколькими переменными и с несоизмеримыми запаздываниями в управлениях, задаваемыми произвольными кусочно-коммутирующими функциями.

5. Оптимальное гашение вынужденных колебаний и оптимальные системы слежения

5.1. Введение

Отдельный цикл работ В. А. Якубовича [64, 65, 148–151, 153–156, 196, 237] (включая соавторские работы [107–112, 120]) посвящен решению специальных линейно-квадратичных задач оптимального управления в условиях неопределенности. Такие задачи возникают, например, при разработке систем подавления вынужденных колебаний, а также систем слежения в ситуации, когда возбуждающее колебания внешнее возмущение не измеряется и отслеживаемый сигнал априори (т. е. при разработке системы слежения) неизвестен. Известны лишь их неко-

---

[1)] Этот термин понимается в обобщенном смысле, обсуждаемом, например, в [92, гл.6, §2], [80].

торые характеристики. Обсуждаемый цикл основан на предложенной В. А. Якубовичем концепции универсального оптимального регулятора. Это — регулятор, который не зависит от неизвестного возмущения (сигнала), но в замкнутой этим регулятором системе при любом внешнем возмущении (для любого сигнала) из заданного класса реализуется минимально возможное при этом возмущении (сигнале) значение функционала качества. Таким образом, один и тот же регулятор дает решение для целого множества отдельных оптимизационных задач, каждая из которых соответствует конкретному возмущению (сигналу).

В обсуждаемом цикле исследований показано, что для целого ряда специальных практически важных задач такой регулятор существует. Более того, его можно выбрать среди стандартных линейных регуляторов и обеспечить при этом стабилизацию системы, грубость (параметрическую устойчивость) оптимального регулятора, а также выполнение других важных требований. Синтез универсального регулятора может быть выполнен аналитическими методами.

В постановке задачи на построение оптимального универсального регулятора можно обнаружить признаки сходства с задачей инвариантности, которая на протяжении длительного времени привлекала к себе пристальное внимание специалистов. [1]) В обоих случаях речь идет о построении регулятора, не зависящего от неизвестных параметров, но обеспечивающего цель управления для любых их значений из определенного класса. В задаче инвариантности цель состоит в обеспечении (возможно, в асимптотическом смысле) требуемого выхода системы независимо от значений входного сигнала. Применение концепции универсального регулятора к подобной ситуации означает ориентацию на более общую цель: добиться, чтобы для любого входного сигнала отклонение выхода системы от требуемого значения оказалось минимальным среди всех возможных при данном входном сигнале. Кроме того, этот подход допускает и другие целевые функционалы, учитывающие, например, наряду с указанным отклонением затраты на управление.

Более подробно с обсуждением различных аспектов концепции универсального оптимального регулятора можно ознакомиться в [151, 237].

Объединение задач подавления колебаний с задачами отслеживания сигнала в общем цикле работ объясняется тем, что в определенной идеализации они близки друг к другу и могут быть исследованы едиными методами.

5.2. Оптимальное гашение вынужденных колебаний при неизвестном внешнем воздействии

Рассмотрим более подробно эту задачу для пояснения постановки вопроса, предложенного подхода и характера полученных результатов. В [148] была исследована следующая задача оптимизации,

---

[1]) Подробнее с существом и историей вопроса можно ознакомиться, например, в [27, 55, 56].

связанная с проблемой демпфирования внешнего колебательного возмущения и, в частности, шумоподавления:

$$x'(t) = Ax(t) + bu(t) + cv(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$|x(t)| \leqslant \text{const}, \quad |u(t)| \leqslant \text{const}, \quad |v(t)| \leqslant \text{const},$$
$$\mathcal{J} := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \mathcal{G}[x(t), u(t)]\, dt \to \min_{x(\cdot), u(\cdot)}. \tag{5.1}$$

Здесь состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$ доступно измерению, $u(t) \in \mathbb{R}$ — управление, $v(t) \in \mathbb{R}$ — внешнее воздействие, A, b, c — постоянные матрица и векторы соответствующих размеров, $\mathcal{G}(x, u)$ — квадратичная форма. В типичном случае $\mathcal{G} := |e^\top x|^2 + \nu |u|^2$, где $e \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор и $\nu \geqslant 0$, функционал $\mathcal{J}$ оценивает мощность колебаний системы и затраты на управление. Накладывается ряд естественных требований, в частности, строгое частотное условие (2.16). Напомним, что оно гарантирует существование и единственность стабилизирующего решения P, h уравнений Лурье (2.14).

Если внешнее возмущение отсутствует, $v(\cdot) \equiv 0$, и в (5.1) требования $|x(t)| \leqslant \text{const}$, $|u(t)| \leqslant \text{const}$ заменены на $|x(\cdot)| + |u(\cdot)| \in L_2(0, +\infty)$, $x(0) = a$, а функционал задан формулой $\mathcal{J} = \int_0^\infty \mathcal{G}\, dt$, то рассматриваемая задача трансформируется в классическую линейно-квадратичную задачу оптимального управления. Ее решение дает регулятор $u = h^\top x$ (см. теорему 2.1). Что касается задачи (5.1) в исходной постановке, то в случае, когда возмущение $v(t)$ известно, ее решение дается регулятором [9, 10]

$$u(t) = h^\top x(t) - \Gamma^{-1} b^\top s(t), \tag{5.2}$$

где Γ — коэффициент из (2.8) (строгое частотное неравенство (2.16) гарантирует, что $\Gamma > 0$ [127]) и $s(t)$ — однозначно определенное ограниченное на $[0, \infty)$ решение уравнения

$$-s'(t) = (A^\top + hb^\top)s(t) + Pcv(t).$$

Подчеркнем еще раз, что данный регулятор доставляет значение функционала, минимально возможное при заданном внешнем возмущении $v(\cdot)$.

Серьезный недостаток указанного регулятора в рассматриваемом контексте состоит в том, что в общем случае функция $s(t)$, а значит, и управление $u(t)$ зависят от возмущения $v(\cdot)$ и, более того, от его будущих значений $v(\tau)$, $\tau \geqslant t$. Следовательно, он неприменим, если эти значения неизвестны.

Если имеется априорная информация о помехе ($v(\cdot) \in V$), то можно изменить задачу, следуя стандартным подходам. Например, можно перейти к поиску физически реализуемого регулятора, доставляющего минимум функционалу $\sup_{v(\cdot)\in V} \mathcal{J}$. Этот подход ориентирован на помеху, наихудшую в классе V. Естественно, что для произвольно выбранного и фиксированного $v(\cdot) \in V$ достижение максимально возможного при данной реализации помехи $v(\cdot)$ качества управления ничем не гарантировано.

Основной вывод обсуждаемой работы [148] состоит в том, что при неограничительных предположениях для практически важного класса $V = V_N$ полигармонических внешних воздействий

$$v(t) = v_1 e^{\imath\omega_1 t} + \ldots + v_N e^{\imath\omega_N t} \tag{5.3}$$

с известным спектром $\{\omega_j\}$, но неизвестными амплитудами v_j возможно построение «хорошего» регулятора, который для каждой реализации $v(\cdot)$ внешнего воздействия из этого класса обеспечивает качество управления, максимально возможное для данной реализации. При изменении помехи $v(\cdot)$ меняется как оптимальное значение функционала, оценивающего это качество, так и оптимальный процесс $[x(\cdot), u(\cdot)]$. Однако это значение и процесс порождаются прежним регулятором, хотя и в новых условиях (задаваемых слагаемым $cv(t)$ в первом уравнении из (5.1)). Таким образом, один и тот же регулятор дает решение для целого множества отдельных оптимизационных задач, зависящих от параметра $v(\cdot)$. Такой регулятор предложено называть *универсальным*: он доставляет оптимум при любых условиях. Особый интерес это свойство приобретает в случае, когда условия заранее неизвестны.

Примененный для характеристики регулятора эпитет «хороший» раскрывается следующим образом [148]. Во-первых, регулятор линеен: он описывается соотношениями (5.2) и

$$\alpha(p)s = \beta(p)x, \qquad p = \frac{d}{dt},$$

где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — надлежащим образом выбранные $n \times n$-матричные полиномы, $\det \alpha(\lambda) \not\equiv 0$. Во-вторых, система, замкнутая этим регулятором, устойчива. В-третьих, оптимальный регулятор параметрически устойчив по отношению к частотам ω_j (является грубым).

Как показано в [148], последнее обстоятельство приобретает особое значение в рассматриваемом контексте. Действительно, естественна идея использования идентификационного подхода: построить оценки неизвестных амплитуд v_j из (5.3) и в этом смысле «найти» возмущение $v(t)$ при всех t и затем воспользоваться упомянутым ранее решением задачи в случае полностью известного $v(t)$. Однако даже если допустить, что оценка выполнена идеально и амплитуды найдены со сколь угодно высокой точностью, соответствующий регулятор оказывается негрубым, т. е. неоптимальным на практике. Именно: сколь угодно малая погрешность в используемой при построении регулятора информации о любой из частот ω_j приводит к скачкообразному увеличению на конечную немалую величину значения функционала $\mathcal{J}$ по сравнению с оптимумом [148]. В этом смысле указанное решение практически неоптимально, т. е. неудовлетворительно в отличие от регулятора, предложенного в [148].

В работе [149] охарактеризованные результаты обобщены на случай, когда управление и возмущение не обязательно скалярны: $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $v(t) \in \mathbb{R}^l$, а непосредственному измерению доступен не обязательно весь вектор состояния $x(t)$, а лишь заданный выход $y(t) = Mx(t) \in \mathbb{R}^k$. Условия существования универсального оптимального регулятора помимо естественных содержат дополнительные требования, из которых основным является неравенство $k \geqslant l$: размерность вектора возмущений не превышает числа измеряемых выходов системы. В [154] эти факты перенесены на случай объекта с запаздываниями в состоянии и управлении и показано, что с практической точки зрения неравенство $k \geqslant l$ необходимо для существования универсального регулятора: при его нарушении он существует лишь в исключительных случаях, описываемых системой уравнений в пространстве параметров задачи. В [149, 154] описано множество всех универсальных оптимальных регуляторов. В [64] основные охарактеризованные результаты перенесены на случай линейных систем с дискретной моделью времени.

В работах [151, 156] исследован аналог задачи (5.1) в случае, когда внешнее возмущение $v(t) \in \mathbb{R}^l$ — стационарный случайный процесс. (В [156] рассмотрено неполное измерение $y(t) = Mx(t) \in \mathbb{R}^k$.) Решение подобных задач хорошо известно в ситуации, когда спектральная плотность возмущения — дробно-рациональная известная функция. Здесь используется либо факторизационная техника Винера, либо метод пространства состояний, теорема разделения, уравнения Лурье. Соответствующее решение предполагает знание спектральной плотности и, как правило, инфимум функционала качества в классе $\mathfrak{P}$ всех процессов (т. е. пар случайных функций $[x(\cdot), u(\cdot)]$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению из (5.1) и некоторым естественным требованиям устойчивости) строго меньше инфимума в классе $\mathfrak{PR}$ процессов, порождаемых физически реализуемыми стабилизирующими линейными регуляторами с дробно-рациональной передаточной функцией (применительно к которым и решается задача оптимизации).

В работах [151, 156] исследована отличная от традиционной постановка задачи: спектральная плотность внешнего воздействия, вообще говоря, неизвестна; известна лишь ее верхняя граница, которая быстро (например, экспоненциально) убывает при увеличении частоты. Показано, что в отличие от упомянутого «традиционного» случая нижние грани функционала качества в классах $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{PR}$ одинаковы, причем в классе $\mathfrak{PR}$ нижняя грань не достигается. Установлены условия существования и предложен метод синтеза ε-субоптимального универсального физически реализуемого стабилизирующего линейного регулятора с дробно-рациональной передаточной функцией. Этот регулятор не зависит от неизвестной спектральной плотности внешнего воздействия. Вместе с тем для любого воздействия с плотностью, подчиняющейся известной границе, он обеспечивает значение функционала качества, отличное от инфимума при данном воздействии не более чем на заданную малую величину $\varepsilon \approx 0$.

5.3. Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания сигналов

В [65, 106, 110, 112, 120, 150, 153, 155, 196] исследована задача построения следящей системы в разных постановках. Такие задачи хорошо изучены как в случае стохастических, так и детерминированных отслеживаемых сигналов. Например, для линейной стационарной системы и бесконечного временного интервала известны необходимые и достаточные условия, гарантирующие возможность экспоненциального отслеживания произвольного детерминированного гармонического сигнала с известным спектром (см., например, [160, 178, 192], где также приведены дополнительные ссылки). В [65, 106, 110, 112, 120, 150, 153, 155, 196] исследована более общая ситуация, когда условия, гарантирующие экспоненциальное отслеживание, вообще говоря, не выполнены. В этом случае естественно поставить вопрос о построении оптимального регулятора, минимизирующего среднеквадратичное уклонение заданного выхода системы от требуемого (отслеживаемого) сигнала. (В [65, 106, 110, 112, 196] оптимальность отслеживания понимается в смысле более общего функционала, который помимо упомянутого уклонения содержит дополнительные квадратичные слагаемые. Они могут учитывать, например, затраты на управление.) При естественных предположениях получены условия существования универсального оптимального регулятора, для которого замкнутая система осуществляет оптимальное отслеживание произвольного заранее неизвестного полигармонического детерминированного сигнала с заданным и известным спектром. В случае объекта управления с аддитивным полигармоническим внешним возмущением с известным спектром [65, 150, 196], а также такого объекта и сенсора с аналогичным шумом [112, 120] упомянутая универсальность имеет место по отношению к априори неизвестным амплитудам не только отслеживаемого сигнала, но также возмущения и шума. Другими словами, регулятор не зависит от упомянутых амплитуд, но для любых их значений обеспечивает значение функционала качества, наилучшее из возможных при данных амплитудах. Предложенные регуляторы линейны, приведены явные формулы для их коэффициентов, описано множество всех универсальных оптимальных регуляторов. При этом в [65, 196] рассматривались системы с дискретным, а во всех остальных работах, — с непрерывным временем. Обобщение основных охарактеризованных результатов на системы с запаздываниями получены в [106, 112]. В [106] исследован случай, когда отслеживается стационарный стохастический сигнал с неизвестной спектральной плотностью. Как и в аналогичной ситуации в задаче демпфирования вынужденных колебаний, предполагается, что плотность подчиняется известной верхней границе, которая быстро (например, экспоненциально) убывает с ростом частоты.

Как уже отмечалось в подпараграфе 5.1, задача слежения в рассматриваемой постановке смыкается с задачей инвариантности (подробнее об этом см. [106, 153]). Это дает основание для применения к ним общих методов. Соответствующие исследования задачи инвариантности проведены в [65, 104–107, 109–111, 153, 155, 196]. В частности найдены условия существования и разработаны методы синтеза регулятора, обеспечивающего независимость выхода z системы от сигнала $\varphi(t)$ на входе в асимптотическом смысле: $|z(t)| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ для произвольного, достаточно гладкого сигнала. Эти условия жестче, чем упомянутые условия существования оптимального универсального регулятора. В общем случае для обеспечения инвариантности на вход регулятора следует подавать сигнал $\varphi(\cdot)$ [104, 107]. В [106, 111] найдены условия, при выполнении которых от этого требования можно избавиться. В [104, 107] аналогичные условия найдены применительно к свойству приближенной инвариантности с заданной точностью в предположении, что известны оценки сигнала $\varphi(\cdot)$ и его производных. В [105] найдена удобная характеристика указанного свойства в терминах импульсной переходной функции системы. Обобщения основных охарактеризованных результатов на случай систем с запаздываниями получены в [106, 109].

В [239] развитая теория применена для решения задачи отслеживания требуемой траектории автономным транспортным средством в ситуации, когда динамические параметры объекта (масса, момент инерции и др.) неизвестны, но лежат в определенных известных границах.

6. Заключительные замечания

Рамки любой работы неизбежно ограничены. Настоящий обзор сфокусирован на творчестве В. А. Якубовича, а также на ближней области его влияния: исследованиях его непосредственных учеников и сотрудников. «Дальние взаимодействия», за редким исключением, не обсуждались ввиду приоритета, данного конкретике изложения над расширениями темы. Вместе с тем, рассмотренный цикл работ тесно взаимосвязан с общим контекстом развития теории оптимального управления и смежных дисциплин последней четверти 20 века. Обсуждение этих взаимосвязей — интересная и обширная тема. Автор надеется, что ему предоставится возможность обратиться к ней впоследствии.

Список литературы

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
2. *Аваков Е. Р.* Условия экстремума в гладких задачах с ограничениями типа равенств // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. — 1985. — Т. 25, № 5. — С. 680–693.

3. *Аваков Е. Р.* Необходимые условия экстремума для гладких анормальных задач с ограничениями типа равенств и неравенств // Мат. заметки. — 1989. — Т. 45, № 6. — С. 3–11.
4. *Аваков Е. Р.* Необходимые условия экстремума для анормальных задач // Дис. д–ра физ.–мат. наук. 01.01.02. М.: 1990.
5. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: Изд-во АН СССР, 1963.
6. *Алиев Ф. А.* Соотношение Басса для решения алгебраического уравнения Риккати // ДАН АзССР. — 1980. — № 9. — С. 3–7.
7. *Алиев Ф. А., Бордюг Б. А., Ларин В. Б.* Спектральный метод решения матричных алгебраических уравнений Риккати // ДАН СССР. — 1987. — Т. 209, № 4. — С. 783–787.
8. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* Синтез оптимальных управлений для линейных неоднородных систем в задаче минимизации квадратичных функционалов // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 2. — С. 258–261.
9. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в задаче минимизации квадратичного функционала // ДАН СССР. — 1972. — Т. 202, № 6. — С. 1247–1250.
10. *Андреев В. А., Казаринов Ю. Ф., Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в задаче минимизации квадратичного функционала // Electron. Inform. Kybernetik. — 1972. — V. 8, № 6/7. — P. 391–428.
11. *Андреев В. А., Шепелявый А. И.* Синтез оптимальных управлений для дискретных систем в задаче минимизации квадратичного функционала // Electron. Inform. Kybernetik. — 1972. — V. 8, № 8/9. — P. 549–567.
12. *Андреев В. А., Шепелявый А. И.* Синтез оптимальных управлений для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизации функционалов квадратичного типа // УМН. — 1972. — Т. 27, №. 6. — С. 225–226.
13. *Андреев В. А., Шепелявый А. И.* Синтез оптимальных управлений для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизации среднего значения квадратичного функционала // Сиб. матем. ж. — 1973. — Т. 14, №. 2. — С. 250–276.
14. *Анрион Р.* Теория второй вариации и ее приложения в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1979.
15. *Антонов В. Г., Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1975. — Вып. 1. — С. 22–31.
16. *Антонов В. Г., Шепелявый А. И.* Оптимальное управление на конечном интервале времени для дискретных систем в задаче минимизации неоднородного квадратичного функционала (случай фиксированных концов) // АиТ. — 1973. — №. 4. — С. 43–50.
17. *Антонов В. Г., Якубович В. А.* Об определении оптимальных стратегий в линейных дискретных играх с квадратичным функционалом платежа // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1975. — Вып. 19. — С. 7–17.
18. *Аров Д. З., Якубович В. А.* Условия полуограниченности квадратичных функционалов на пространствах Харди // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1982. — Вып. 1. — С. 11–18.

19. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. — М.: Факториал, 1997.
20. *Барабанов А. Е.* Факторизация матричных полиномов с ограничением на степени // АиТ. — 1997. — № 3. — С. 86–100.
21. *Барабанов А. Е.* Полиномиальный синтез стратегий в линейно-квадратичной игре // АиТ. — 2006. — № 10. [1])
22. *Барабанов Н. Е., Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Лихтарников А. Л., Матвеев А. С., Смирнова В. Б., Фрадков А. Л.* Частотная теорема в теории управления (обзор) // АиТ. — 1996. — № 10. — С. 3–40.
23. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. — М.: Наука, 1971.
24. *Блехман И. И.* Что может вибрация? — М.: Наука, 1988.
25. *Болтянский В. Г.* Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1955. — Т. 57.
26. *Вершик А. М.* Квадратичные формы, положительные на конусе, и квадратичная двойственность // Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1984. — Т. 134. — С. 59–83.
27. *Г. В. Щипанов и теория инвариантности.* / Сост. З. М. Лезина, В. И. Лезин. — М.: Физматгиз, 2004.
28. *Галлести А., Левентхолл Х. Г., Роберт Дж., Юллермоз М.* Развитие работ по активному гашению шума // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 1990. — № 4. — С. 12–26.
29. *Гантмахер Ф. Р., Якубович В. А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем // Тр. II Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. — М.: Наука, 1965.
30. *Гольштейн Е. Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. — М.: Наука, 1971.
31. *Горбатенко С. А., Макашов Е. М., Полушкин Ю. Ф., Шефтель Л. В.* Синтез и анализ движения летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1976.
32. *Гусев С. В., Лихтарников А. Л.* Очерк истории частотной теоремы и S-процедуры // АиТ. — 2006. — № 10. [2])
33. *Гусев Д. Е., Якубович В. А.* Принцип максимума в задаче оптимизации регуляторов для случая векторного выхода системы // Кибернетика и вычислительная техника. — 1981. — Вып. 51. — С. 3–11.
34. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
35. *Докучаев Н. Г.* Частотный критерий существования оптимального управления для линейных уравнений Ито // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1983. — Вып. 1. — С. 38–43.
36. *Докучаев Н. Г.* Об условиях трансверсальности для стохастического принципа максимума // Диф. уравн. — 1988. — Т. 24. — С. 1266–1269.
37. *Докучаев Н. Г.* Разрешимость уравнений, являющихся аналогами уравнений Беллмана в задаче управления диффузионными процессами с инте-

[1]) См. также настоящий сборник, с. 500.

[2]) См. также настоящий сборник, с. 77.

гральными ограничениями и неполной обратной связью // Диф. уравн. — 1991. — Т. 27, № 3. — С. 403–414.

38. *Докучаев Н. Г.* Существование оптимальных управлений и необходимые условия оптимальности для частично наблюдаемых диффузионных процессов // Диф. уравн. — 1994. — Т. 30, № 9. — С. 1498–1507.
39. *Докучаев Н. Г.* Параболические уравнения без граничного условия Коши и задачи управления диффузионными процессами // Диф. уравн. — 1994. — Т. 30, № 10. — С. 1738–1749.
40. *Докучаев Н. Г.* S-процедура для нелинейных стохастических задач управления // Вестн. СПбГУ, сер.1. — 1995. — Вып. 2, № 8. — С. 18–22.
41. *Докучаев Н. Г.* Управление диффузией кордесовского типа с неполным наблюдением и в игровой задаче // Диф. уравн. — 1996. — Т.32, № 8. — С. 1051–1062.
42. *Докучаев Н. Г.* Оптимальная остановка случайного процесса в задаче с дополнительными ограничениями // Теор. вероят. и ее примен. — 1996. — Т. 41, № 4. — С. 685–697.
43. *Докучаев Н. Г., Якубович В. А.* Принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений с детерминированным управлением // Кибернетика и вычислительная техника. № 5. — Киев: Наук. Думка, 1983. С. 72–78.
44. *Докучаев Н. Г., Якубович В. А.* Оптимальное программное управление стохастическим объектом в случае ограничения на состояние для каждого момента времени // АиТ. — 1984. — № 7. — С. 49–57.
45. *Докучаев Н. Г., Якубович В. А.* Стохастическая линейно-квадратичная задача оптимального управления для стационарных систем с квадратичными ограничениями // Изв. РАН, сер. техн. киберн. — 1992. — № 6. — С. 135–145.
46. *Дубовицкий А. Я., Дубовицкий В. А.* Критерий существования содержательного принципа максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Диф. уравн. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1634–1640.
47. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. — М.: 1981. — С. 6–47.
48. *Ишлинский А. Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985.
49. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Наука, 1976.
50. *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование случайных последовательностей // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1941. — № 5. — С. 3–14.
51. *Красовский Н. Н.* Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механ. — М.: Наука, 1965. С. 77–93.
52. *Красовский Н. Н.* Задача стабилизации управляемого движения // Добавление 4 в кн. "Теория устойчивости движения". Под ред. И. Г. Малкина. — М.: Наука, 1976.
53. *Коша А.* Вариационное исчисление. — М.: Наука, 1983.
54. *Кунцевич В. М., Чеховой Ю. И.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. — Киев: Техника, 1970.

55. *Кухтенко А. И.* Проблема инвариантности в автоматике. — Киев: Гостехиздат УССР, 1963.
56. *Кухтенко А. И.* // Автоматика. — 1984. — № 2. — С. 3–13; № 6. — С. 3–14.
57. *Кучера В.* Матричное уравнение Риккати // Экспресс-информация. Техн. киберн. — 1973. — № 16.
58. *Ларин В. Б.* Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Изв. АН СССР, сер. техн. киберн. — 1983. — №2. — С. 186–199.
59. *Ладыженская О. А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гостехиздат, 1953.
60. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
61. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
62. *Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Условия высших порядков локального минимума в задаче с ограничениями // УМН. — 1978. — Т. 33, № 6. — С. 85–148.
63. *Летов А. М.* Аналитический синтез регуляторов // АиТ. — 1960. — № 4. — С. 436–446; № 5. — С. 561–571.
64. *Линдквист А., Якубович В. А.* Универсальные регуляторы для оптимального гашения вынужденных колебаний в линейных дискретных системах // Докл. РАН. — 1997. — Т. 352, № 3. — С. 314–317.
65. *Линдквист А., Якубович В. А.* Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания сигналов в линейных дискретных системах // Докл. РАН. — 1998. — Т. 361, № 2. — С. 177–180.
66. *Лионс Ж. Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
67. *Лихтарников А. Л., Пономаренко В. И., Якубович В. А.* Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1976. — Вып. 19. — С. 69–76.
68. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // Сиб. матем. ж. — 1976. — Т.17, № 5. — С. 1069–1085.
69. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Частотная теорема и теорема о стабилизации для неограниченных операторов // УМН. — 1978. — Т. 33, № 2. — С. 195–196.
70. *Лихтарников А. Л., Якубович В. А.* Дихотомия и устойчивость неопределенных нелинейных систем в гильбертовых пространствах // Алгебра и анализ. — 1996. — Т. 9, № 6. — С. 132–155.
71. *Лукьянов А. Г., Уткин В. И.* Синтез оптимальных линейных систем с вырожденным критерием // АиТ. — 1982 —. № 7. — С. 42–50.
72. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: ГИТТЛ, 1951.
73. *Матвеев А.С.* Необходимые условия экстремума в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // М., 1979. Деп. в ВИНИТИ 18.07.79., № 2640–79.

74. *Матвеев А. С.* Задачи оптимального управления с бесконечномерными ограничениями в виде неравенств // Дис. к–та физ.–мат. наук. 01.01.09. Л.: 1980.
75. *Матвеев А. С.* Оптимальное управление распределенными системами в присутствие фазовых ограничений // Оптимизация управляемых систем. — Минск: 1980. — С. 96–98.
76. *Матвеев А.С.* О необходимых условиях экстремума в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Диф. уравн. — 1987. — Т. 23, № 4. — С. 629–640.
77. *Матвеев А. С.* К абстрактной теории оптимального управления системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. ж. — 1988. — Т. 29, № 1. — С. 94–107.
78. *Матвеев А. С.* Задачи оптимального управления с запаздываниями общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1200–1229.
79. *Матвеев А. С.* Вариационный анализ в задачах оптимизации систем с распределенными параметрами и вектор-функции множества // Сиб. матем. ж. — 1990. — Т. 31, № 6. — С. 127–141.
80. *Матвеев А. С.* О неэквивалентности поточечного и интегрального принципов максимума для систем с запаздываниями в управлениях // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 4. — С. 143–173.
81. *Матвеев А. С.* Методические указания по курсу "Теоретическая кибернетика". — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
82. *Матвеев А. С.* Лагранжева двойственность в теории невыпуклой оптимизации и модификации теоремы Теплица-Хаусдорфа // Алгебра и анализ. — 1995. — Т. 7, № 5. — С. 126–159.
83. *Матвеев А. С.* Лагранжева двойственность в специальной невыпуклой задаче глобальной оптимизации // Вестн. СПбУ, сер. 1. — 1996. — Вып. 2, № 8. — С. 37–43.
84. *Матвеев А. С.* О выпуклости образов квадратичных отображений // Алгебра и анализ. — 1998. — Т. 10, №2. — С. 159–196.
85. *Матвеев А. С.* Критерии выпуклости образов квадратичных отображений в теории оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями // Дисс. док-ра физ.-мат. наук, 01.01.02. СПб.: 1998.
86. *Матвеев А. С., Попов В. А.* Оптимальное управление системой с распределенными параметрами в области с движущейся границей и при наличии фазовых ограничений // М., Деп. в ВИНИТИ 19.02.81., № 3015–81.
87. *Матвеев А. С., Сугак Д. В.* Аналог принципа максимума Понтрягина для задачи управления системой эллиптического типа с фазовыми ограничениями // Вестн. СПбГУ, сер.1, матем., мех., астрон. — 2001. — Вып. 3. — С. 19–28.
88. *Матвеев А. С., Шраго И. Л.* Необходимые условия в вариационной задаче оптимизации регуляторов // Вест. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1982. — № 13. — С. 46–51.
89. *Матвеев А. С., Якубович В. А.* Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. ж. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1109–1140.

90. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления. — СПб.: Изд-во С.Петерб. ун-та, 1994.

91. *Матвеев А. С., Якубович В. А.* Невыпуклые задачи глобальной оптимизации в теории управления // Итоги науки и техники, серия «Современная математика» и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНИТИ, 1998. Т. 60. — С. 128–175.

92. *Матвеев А.С., Якубович В. А.* Теория оптимальных систем управления. — СПб.: Изд-во С.Петерб. ун-та, 2002.

93. *Мегрецкий В. А.* Сингулярные линейно-квадратичные задачи оптимального управления // Дис. канд. физ-мат. наук. Л.: 1988.

94. *Мегрецкий В. А., Якубович В. А.* Сингулярная стационарная линейно-квадратичная задача оптимального управления // Тр. Лен. мат. об-ва. — 1990. — Т. 1. — С. 134–174.

95. *Мегрецкий В. А., Якубович В. А.* Сингулярные линейно-квадратичные задачи оптимизации // В кн. Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Под ред. В. М. Матросова. — Новосиб.: Наука, 1991. — С. 170–175.

96. *Мееров В. М.* Синтез структур автоматического регулирования высокой точности. — М.: Физматгиз, 1959.

97. *Осмоловский Н. П.* Необходимые и достаточные условия высших порядков в оптимальном управлении. Часть I : Основные результаты, общая теория, основная константа. — М., 1986. Деп. в ВИНИТИ 01.04.86., N2190–В.

98. *Осмоловский Н. П.* Необходимые и достаточные условия высших порядков в оптимальном управлении. Часть II: Расшифровка основной константы, условия сильного минимума, условия типа Якоби. — М., 1986. Деп. в ВИНИТИ 01.04.86., N 2191—В.

99. *Осмоловский Н. П.* Необходимые и достаточные условия высшего порядка для понтрягинского и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления // Tanung Von System / Leipzig Technischen Hochschule. — 1987. — V. 4. — P. 94–96.

100. *Осмоловский Н. П.* Необходимые и достаточные условия высшего порядка для понтрягинского и ограниченно-сильного минимумов в задаче оптимального управления // ДАН СССР. — 1988. — Т. 303, № 5. — С. 1052–1056.

101. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.

102. *Попов В. А., Якубович В. А.* Задача оптимизации при фазовых ограничениях в разные моменты времени // АиТ. — 1983. — № 1. — С. 50–59.

103. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970.

104. *Проскурников А. В.* О построении регуляторов, обеспечивающих почти инвариантность системы управления // Вестн. СПбГУ, сер.1. — 2002. — Вып. 4. — С. 37–43.

105. *Проскурников А. В.* О свойствах системы управления, обеспечивающих малость установившегося выхода // Вестн. СПбГУ, сер.1. — 2004. — Вып. 1. — С. 43–49.

106. *Проскурников А. В.* Развитие теории универсальных регуляторов в задачах инвариантности и отслеживания // Дисс. кан-та физ.-мат. наук, СПб.: 2005.
107. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Задача об инвариантности систем управления // Докл. РАН. — 2003. — Т. 389, № 6. — С. 742–746.
108. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Приближенное решение задачи об инвариантности систем управления // Докл. РАН. — 2003. — Т. 392, № 6. — С. 750–754.
109. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Задача об инвариантности для систем управления с запаздыванием // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 5. — С. 610–614.
110. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Синтез стабилизирующего регулятора в задаче отслеживания // Докл. РАН. — 2005. — Т. 404, № 3. — С. 321–325.
111. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Задача об инвариантности системы управления по части выходных переменных // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 1.
112. *Проскурников А. В., Якубович В. А.* Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания полигармонических сигналов в системах с запаздываниями // Докл. РАН. — 2006. — Т. 406, № 2.
113. *Соловьев В. Н.* Двойственность в невыпуклых задачах оптимизации // ДАН СССР. — 1990. — Т. 314, № 1. — С. 135–138.
114. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987.
115. *Фомин В. Н.* Операторные методы теории линейной фильтрации случайных процессов. — СПб.: Изд-во СПбУ, 1996.
116. *Фрадков А. Л.* Теоремы двойственности в некоторых невыпуклых экстремальных задачах // Сиб. матем. ж. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 357–383.
117. *Фрадков А. Л., Якубович В. А.* S-процедура и соотношения двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1973. — Вып. 1. — С. 101–109.
118. *Фролов К. В., Фурман Ф. А.* Прикладная теория виброзащитных систем. — М.: Машиностроение, 1980.
119. *Шепелявый А. И.* Минимизация функционалов квадратичного типа в задаче управления дискретными системами с нефиксированным конечным состоянием // В сб. «Операторные уравнения и функции множеств». — Сыктывкар, 1985.
120. *Ширяев А. С., Якубович В. А.* Оптимальное отслеживание гармонических сигналов в линейных системах при наличии помех в измерениях // Докл. РАН. — 1997. — Т. 353, № 1. — С. 29–33.
121. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979.
122. *Якубович В. А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. — 1962. — Т. 143, № 6. — С. 1304–1307.
123. *Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1970. — Т. 195, № 2. — С. 296–299.

124. *Якубович В. А.* О синтезе оптимальных управлений в линейной дифференциальной игре на конечном интервале времени с квадратичным функционалом платежа // ДАН СССР. — 1971. — Т. 200, № 3. — С. 548–551.
125. *Якубович В. А.* S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1971. — № 1. — С. 62–77.
126. *Якубович В. А.* Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209. — С. 1039–1042.
127. *Якубович В. А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. матем. ж. — 1973. — Т. 14. — С. 384–420.
128. *Якубович В. А.* Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений — гильбертовы, и ее применения в некоторых задачах синтеза оптимального управления. I, II // Сиб. матем. ж. — 1974. — Т. 15, № 3. — С.639–668; 1976. — Т.16, № 5. — С. 1081–1102.
129. *Якубович В. А.* Некоторые варианты абстрактного принципа максимума // ДАН СССР. — 1976. — Т. 229, № 4. — С. 816–819.
130. *Якубович В.А.* К абстрактной теории оптимального управления I // Сиб. матем. ж. — 1977. — Т.18, № 3. — С. 685–707.
131. *Якубович В. А.* К абстрактной теории абсолютной устойчивости нелинейных систем // Вест. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1977. — Вып. 13. — С. 100–113.
132. *Якубович В.А.* К абстрактной теории оптимального управления II // Сиб. матем. ж. — 1978. — Т. 19, № 2. — С. 436–460.
133. *Якубович В. А.* К абстрактной теории оптимального управления III // Сиб. матем. ж. — 1979. — Т. 20, № 4. — С. 385–410.
134. *Якубович В. А.* К абстрактной теории оптимального управления IV // Сиб. матем. ж. — 1979. — Т. 20, № 5. — С. 1131–1159.
135. *Якубович В. А.* Принцип максимума в задаче оптимизации регуляторов // Вест. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1980. — Вып. 7. — С. 55–60.
136. *Якубович В. А.* Условия полуограниченности квадратичного функционала на подпространстве гильбертова пространства // Вест. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1981. — Вып. 19. — С. 50–53.
137. *Якубович В. А.* Задача оптимального управления движением для случая, когда управление — функция заданного выхода системы // Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. — М.: Наука, 1981.
138. *Якубович В. А.* Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применения I // Сиб. матем. ж. — 1982. — Т. 23, № 4. — С. 103–121.
139. *Якубович В. А.* Абстрактные критерии абсолютной устойчивости нелинейных систем по линейному выходу и их применения II // Сиб. матем. ж. — 1983. — Т. 24, № 5. — С. 129–148.
140. *Якубович В. А.* Достаточные условия в задачах оптимального управления // Вест. ЛГУ, сер. матем., мех., астрон. — 1984. — № 1. — С. 53–58.
141. *Якубович В. А.* Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления // АиТ. — 1984. — № 8. — С. 5–45

142. *Якубович В. А.* Сингулярная задача оптимального управления линейной стационарной системой с квадратичным функционалом // Сиб. матем. ж. — 1985. — Т. 26, № 1. — С. 189–200.

143. *Якубович В. А.* Частотная теорема для периодических систем // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 1. — С. 70–73.

144. *Якубович В. А.* Линейно-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периодических систем. I, II // Сиб. матем. ж. — 1986. — Т. 27, № 4, С. 181–200; 1990. — Т. 31, № 6. — С. 176–191.

145. *Якубович В. А.* Частотная теорема для периодических систем и теория аналитического конструирования регуляторов // В кн. Методы функций Ляпунова в анализе динамики систем. Под ред. В. М. Матросова, Л. Ю. Анапольского. — Новосиб.: Наука, 1987. С. 281–290.

146. *Якубович В. А.* Об одном методе решения специальных задач глобальной оптимизации // Вест. СПбУ, сер.1. — 1992. — С. 58–68.

147. *Якубович В. А.* Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний при неизвестных гармонических внешних возмущениях // Докл. РАН. — 1993. — Т. 333. — С. 170–172.

148. *Якубович В. А.* Линейно-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебаний при неизвестном гармоническом внешнем воздействии // Докл. РАН. — 1993. — Т. 333, № 2. — С. 170–172.

149. *Якубович В. А.* Оптимальное гашение вынужденных колебаний по заданному выходу системы // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 3. — С. 323–327.

150. *Якубович В. А.* Задача об оптимальном отслеживании детерминированных гармонических сигналов с известным спектром // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 4. — С. 463–466.

151. *Якубович В. А.* Универсальный регулятор для оптимального гашения вынужденных стохастических колебаний в линейной системе // Докл. РАН. — 1994. — Т. 338, № 1. — С. 19–24.

152. *Якубович В. А.* Оптимальное гашение вынужденных колебаний по заданному выходу системы // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337. — С. 323–327.

153. *Якубович В. А.* Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // Докл. РАН. — 1995. — Т. 343, № 2. — С. 172–175.

154. *Якубович В. А.* Универсальный регулятор для оптимального гашения вынужденных колебаний в линейных системах с запаздыванием // Докл. РАН. — 1996. — Т. 346, № 3. — С. 319–323.

155. *Якубович В. А.* Универсальные регуляторы в линейно-квадратичной задаче оптимального отслеживания // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 3. — С. 313–317.

156. *Якубович В. А.* Универсальные регуляторы в стохастических задачах оптимального управления линейными стационарными объектами // АиТ. — 1997. — № 6. — С. 170–182.

157. *Якубович В. А., Якубович Е. Д.* Оптимальная стабилизация системы управления при наличии ограничений на выходную переменную // АиТ. — 1993. — № 9. — С. 79–83.

158. *Agrachev A. A., Sarychev A. V. Abnormal sub-Riemannian geodesics*: *Morse index and rigidity* // Annales de l'institut Henri Poincaré — Analys non linéare.

159. *Anderson B.D.O., Hitz K.L., Diem N.D.* Recursive algorithm for spectral factorization // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1974. — V. AC-6. — P. 742–750.
160. *Anderson B., Moore J.B.* Optimal control: linear quadratic methods. — London: Prentice-Hall, 1990.
161. *Au-Yeung Y.H.* A simple proof of the convexity of the field of values defined by two Hermitian forms // Aequationes Math. — 1975. — V. 12. — P. 82–83.
162. *Barabanov A.E.* Canonical matrix factorization and polynomial Riccati equations // European Journal of Control. — 1997. — № 1. — P. 47–67.
163. *Basar T.* A dynamics game approach to control design: disturbance rejection in discrete time // Proc. 28th IEEE Conf. on Decision and Control. — Tampa, 1989. — P. 407–414.
164. *Basar T., Bernhard P.* H^{∞}-optimal control and related minimax design problems. — Boston: Birkhäuser, 1991.
165. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQC control with H_{∞} performance bound: a Ricati equation approach // IEEE Trans. Autom. Control. — 1989. — V. 34. — P. 283–305.
166. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan A.V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
167. *Brickman L.* On the field of values of a matrix // Proc. Amer. Math. Soc. — 1961. — V. 12. — P. 61–66.
168. *Bucy R.S., Joseph P.D.* Filtering of stochastic processes with application to guidance. — N.Y., 1968.
169. *Cassier G.* Image numérique simultanée d'une famile d'opérateurs sur l'espace de Hilbert // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser.I, Math., Série I. — 1987. — T. 305, № 15. — P. 681–684.
170. *Curtain R.F., Pritchard A.J.* Infinite dimensional linear systems theory // Lecture Notes in Control Inform., Sci. V. 8. — Berlin: Springer-Verlag, 1978.
171. *Dash A.T.* Joint numerical range // Glasnik Mat. — 1972. — V. 7, № 1. — P. 75–81.
172. *Dines L.* On the mapping of quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. — 1944. — V. 17. — P. 494–498.
173. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.* State-space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1989. — V. 34. — P. 831–847.
174. *Doyle L.J., Francis B.A., Tannenbaum A.R.* Feedback control theory. — N.Y.: Macmillan, 1992.
175. *Emborg U., Ross C.F.* Active control in the Saab 340 // Proc. 2nd Conf. Recent Adv. Active Contr. Sound Vib. — Blackburg, 1993. — P. S67-S73.
176. *Fan M.K., Tits A.L., Doyle J.C.* Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics // IEEE Trans. Automatic Control. — 1991. — № 1. — P. 25–38.
177. *Farenick D.R.* Matricial extensions of the numerical range: a brief survey // Linear and Multilinear Algebra. — 1993. — V. 34, № 3–4. — P. 197–211.
178. *Francis B.A.* The linear multivariable regulator problem // SIAM J. Contr. Optim. — 1977. — V. 15. — P. 486–505.
179. *Francis B.F.* A Course in H_{∞} control theory // Lecture Notes in Control Inform. Sci., Vol.88. — Berlin: Springer-Verlag, 1987.

180. *Glover J. R.* Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc. — 1977. — V. ASSP-25, № 6. — P. 484–491.
181. *Grimble M. J.* Optimal H_∞ robustness and the relationship to LQC design problems // Inter. J. Control. — 1986. — V. 43. — P. 351–372.
182. *Hall S. R., Wereley N. M.* Performance of higher harmonic control algorithms for helicopter vibration reduction // J.Guidance, Control, and Dynamics. — 1993. — V. 16, № 4. — P. 793–793.
183. *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book. — London: D.Van Nostrand Company Inc., 1982.
184. *Hausdorff F.* Der wertvorrat einer bilinearform // Math. Z. — 1919. — V. 3. — P. 314–316.
185. *Hautus M. H.J., Silverman L. M.* System structure and singular control // Linear Algebra and Appl. — 1983. — V. 50. — P. 369–402.
186. *Hermes H., LaSalle J. P.* Functional analysis and time optimal control. — New-York, London: Academic Press, 1969.
187. *Horn R., Johnson C.* Topics in matrix analisys. — Cambridge: University Press, 1991.
188. *Jacobson D. H., Marton D. H., Pachter M., Geveci T.* Extensions of linear-quadratic optimal control. Lecture notes in control and information sciences. V. 27. — N.Y.: Springer-Verlag, 1980.
189. *Kalman R. E.* Contributions to the theory of optimal control // Bol. Soc. Math. Mexicana. — 1960. — V. 5, № 2. — P. 102–119.
190. *Kalman R. E.* Liapunov functions for the problem of Lur'e in automatic control // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1963. — V. 49.
191. *Kalman R. E., Szegõ G.* Sur la stabilité absolue d'un sistéme d'équations aux differences finies // C. R. Acad. Sc. — 1963. — V. 257. — P. 388–390.
192. *Krener A.* The construction of optimal linear and nonlinear regulators // In Systems, Models, and Feedback: Theory and Applications. Eds. A. Isidori, T.J. Tarn. — Boston: Birkhäuzer, 1992. P. 301–322.
193. *Kwakernaak H., Sivan R.* Modern signals and systems. — London: Prentice Hall, 1991.
194. *Laub A. J.* Shur method for solving algebraic Riccati equations // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1979. — V. AC-24. — P. 913–920.
195. *Lindberg P. O.* Optimeringslära, en introduktion. Preprint. — Stockholm: Kungl Tekniska Högskolan, Institutionen för Matematik, KTH and Optimeringslära & systemteory, 1988.
196. *Lindquist A., Yakubovich V. A.* Universal regulators for optimal tracking in discrete-time systems affected by harmonic disturbances // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1999. — V. 44, № 9. — P. 1688–1704.
197. *Luenberger D. G.* Optimization by vector space methods. — N.Y.: Wiley & Sons, 1969.
198. *Mangasarian O. L.* Pseudo-convex functions // SIAM J. Control, ser.A. — 1965. — V. 3, № 2. — P. 281–290.
199. *Matveev A. S.* Spectral approach to duality in nonconvex global optimization // SIAM J. Control and Optim. — 1998. — V. 36, № 1. — P. 336–378.

200. *Matveev A. S., Yakubovich V. A.* Application of the abstract theory of optimization to the solution of the optimal control problem of a system with distributed parameters // Partial dif. equations. Proc. Conf. Novosybirsk, 1978. — P. 186–188.

201. *Matveev A. S., Yakubovich V. A.* Nonconvex problems of global optimization // St.Petersburg Math. J. — 1993. — V. 4, № 6. — P. 1217–1243.

202. *Matveev A. S., Yakubovich V. A.* Nonconvex problems of global optimization: linear-quadratic control problems with quadratic constraints // Dynamics & Control. — 1997. — V. 7, № 2. — P. 99–134.

203. *Megretsky A.* Necessary and sufficient conditions of stability: A multiloop generalization of the circle criterion // IEEE Trans. Automat. Control. — 1993. — V. 38, № 5. — P. 753–756.

204. *Megretski A., Khammash M.* Lagrange multtipliers method in robust control: the l^1-setting // Proc. of 1994'th Amer. Control Conf., 1994. — P. 3171–3175.

205. *Megretsky A., Treil S.* Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems // J. Math. Systems, Estimation, Control. — 1993. — V. 3, № 3. — P. 301–319.

206. *Michelsen M.* On the eigenvalue-eigenvector method for solution of the stationary matrix Riccati equation // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1979. — V. AC-24, № 3. — P. 481–488.

207. *Morari M.* Some control problems in the process industries // In Essays on control: perspectives in theory and applications. Eds. H.L. Trentelman, J.C. Willems J.C. Progress in System and Control Theory. — 1993. — V. 14. — P. 55–77.

208. Nissan auto glides as quiet as a bluebird; noise suppressor silences 4-cylinder cars // Nikon Keizai Shimbun. — November 9, 1991. — P. 12.

209. *Outrata J. V., Jarušěk I.* Duality theory in mathematical programming and control // Kybernetika. Supplement. — 1984/85. — V. 20/21.

210. *Phillips E.* Tests show active flaps reduce helicopter noise // Aviation Week and Space Technology. — 1994. — P. 38–41.

211. *Polayk B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. of Optim. Theory and Appl. — 1998. — V. 99, №. 3. — P. 553–583.

212. *Popov V. M.* Hyperstability of automatic control systems with several nonlinear elements // Rev. Roumaine sci. tech. — 1964. — V. 1.

213. The numerical range and numerical radius // Special Issue. Linear and Multilinear Algebra. — 1994. — V. 37, № 1–3.

214. *Ravi R., Nagpal K. N., Khargonekar P. P.* Control of linear time-varying systems: a state space approach // SIAM J.Control and Optim. — 1991. — V. 29. — P. 1394–1413.

215. *Rinnooy Kan A. H.G., Boender C. G.E., Timmer G. T.* Computational mathematical programming. Ed. K. Schittkowski. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 281–308.

216. *Rissanen J.* On duality without convexity // J. Math. Anal. & Appl. — 1967. — V. 18. — P. 269–275.

217. *Savkin A. V.* The Kalman-Yakubovich lemma for nonstationary systems and its applications // Inter. J. of Adaptive Control and Signal Processing. — 1992. — V. 6, № 3. — P. 253–257.
218. *Savkin A. V.* Optimal control of nonstationary linear systems on an infinite time interval // J. of Computer and Systems Sciences International. — 1993. — V. 31, №. 5. — P. 83–86.
219. *Savkin A. V., Petersen I. R.* Nonlinear versus linear control in the absolute stabilizability of uncertain systems with structured uncertainty // Proc. of 32nd IEEE Conf. on Decision & Control. — San-Antonio, 1993.
220. *Savkin A. V., Petersen I. R.* Minimax optimal control of uncertain systems with structured uncertainty // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1995. — V. 5, № 2. — P. 119–138.
221. *Savkin A. V., Petersen I. R.* Robust control via rejection of harmonic disturbances // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1995. — V. 40, № 11. — P. 1968–1970.
222. *Szegõ G.* Sur la stabilité absolue d'un sistéme non lineare discret // C. R. Acad. Sc. — 1963. — V. 257, № 3. — P. 1749–1751.
223. *Szegõ G.* On absolute stability of sampled data control systems // Proc. Nat. Acad. Sc. USA. — 1963. — V. 50, № 11. — P. 558–560; C. R. Acad. Sc. — 1963. — V. 257, № 3. — P. 1749–1751.
224. *Shamma J. S.* Robust stability of time-varying systems using time-varying quadratic forms // Systems & Control Letters. — 1995. — V. 24. — P. 13–17.
225. *Simonich J., Lavrich P., Sofrin T., Topol D.* Active aerodynamic control of wake-airfoil interaction noise-experiment // AIAA Journal. — 1993. — V. 31. — P. 1761–1768.
226. *Tadmor G.* The standard H_∞ problem and the maximum principle: the general linear case // SIAM J. Control and Optim. — 1993. — V. 31. — P. 813–846.
227. *Toeplitz O.* Das algebraische analogen zu einen satze von Fejêr // Math. Z. — 1918. — V. 2. — P. 187–197.
228. *Trentelman H. L.* Families of linear-quadratic problems: continuity properties // IEEE Trans. Autom. Cont. — 1987. — V. 32. — P. 323–329.
229. *Uhlig F.* A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions. A survey // Linear Algebra and Applications. — 1979. — V. 25. — P. 219–237.
230. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. — Cambridge, 1949.
231. *Willems J. C., Kitapci A., Silverman L. M.* Singular optimal control: a geometric approach // SIAM J. Control. — 1986. — V. 24. — P. 323–337.
232. *Wonham W.* Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. — N.Y.: John Wiley & Sons, 1979.
233. *Yakubovich V. A.* Maximum principle for a problem of controller optimization // Proc. 8th IFAC World Congress, 1981.
234. *Yakubovich V. A.* Nonconvex optimization problems: the infinite-horizon linear-quadratic problems with quadratic constraints // Systems & Control Letters. — 1992. — V. 16. — P. 13–22.

235. *Yakubovich V. A.* Linear-quadratic optimization problems with quadratic constraints // Proc. 2nd European Control Conf. The Netherlands, 1993. — P. 346–359.
236. *Yakubovich V. A.* Absolute stability of nonlinear discrete systems // Review Roumanie de Mathematique ques Pures et Appliques, ed. Acad. Roumanie. — 1994. — Tome 39, № 4. — P. 385–389.
237. *Yakubovich V. A.* Universal regulators in linear-quadratic optimization problems // In "Trends in Control". Ed. A. Isidori. — N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
238. *Yakubovich, V.A.* Nonconvex global optimization problems: constrained infinite-horizon linear-quadratic control problems for discrete systems // Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. Eds. A. Rantzer, C.I. Byrnes. LNCIS 286. — 2002. — P. 359–382.
239. *Yakubovich V. A., Paromtchik I. E., Hirosi A.* Towards a universal controller for robust path following // Proc. 4th International Symposium on Advanced Vechicle Control. — Nagoya, Japan, 1998. — P. 13–16.
240. *Yamamoto S., Hashimoto I.* Present state and future needs: review of Japaneese industry // Proc. 4th International Conf. on Chemical Processes Control. — South Padre Island, 1991. — P. 21–28.
241. *Zezza P. L.* The Jacobi condition in optimal control theory, stochastic analysis and applications. — N.Y.: Word Sci. Publishing, 1991. — P. 137–149.
242. *Zhang K., Wickens C. D.* Effects of noise and workload on performance with two object displays vs separated displays // Proc. of the Human Factors Society, 34th Annual Metting. — Orlando, 1990. — P. 1499–1503.
243. *Zhou K., Khargonekar P. P.* An algebraic Riccati approach to H_∞-optimization // Systems Control Letters. — 1988. — V. 11. — P. 85–92.

Верстка: Игорь А. Макаров