

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В.Плеханова
(технический университет)

К.П.ВЛАСОВ, М.К.АНИКИН

ТЕОРИЯ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
ОСОБЫЕ, ДИСКРЕТНЫЕ
И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006

УДК 62-52 (075.80)
ББК 32.965
В 58

Изложены принципиальные подходы к анализу и синтезу систем управления с запаздыванием; кратко представлены системы с распределенными параметрами, с иррациональной функцией и нестационарные системы управления. Описаны дискретные системы управления. Освещены классические методы анализа дискретных систем, z -преобразование, w -преобразование, дан подробный анализ и синтез импульсных систем управления. Большое внимание уделено нелинейным системам управления (классификация нелинейностей, исследование релейных АСУ методом фазовых траекторий, определение условий возникновения и параметров автоколебаний различными методами).

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 210200 «Автоматизация технологических процессов и производств» и может быть полезно студентам других специальностей, изучающих системы автоматического управления.

Рецензенты: кафедра робототехники и автоматизации производственных систем Санкт-Петербургского электротехнического ун-та, проф. *В.Н. Громов* и доц. *В.Д. Латышко* (Военный инженерно-технический ун-г, г. Санкт-Петербург).

Власов К.П.

В 58. Теория автоматического управления. Особые, дискретные и нелинейные системы: Учеб. пособие / *К.П. Власов, М.К. Анкин*; Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет). СПб, 2006. 99 с.

ISBN 5-94211-215-0

УДК 62-52 (075.80)
ББК 32.965

ISBN 5-94211-215-0

© Санкт-Петербургский горный институт им. Г.В.Плеханова, 2006

ВВЕДЕНИЕ

К особым линейным системам относятся системы, содержащие звенья, динамические процессы в которых не описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. К таким звеньям относятся звенья с запаздыванием, реакция которых на входной сигнал появляется через определенное время τ , и звенья с распределенными параметрами, переходные процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, что физически соответствует изменению переменных не только во времени, но и в пространстве. Исследование систем управления, содержащих такие звенья, имеет некоторые особенности, которые необходимо учитывать при их анализе и синтезе.

К особым системам обычно относят и системы, содержащие звенья, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, зависящими от времени. Например, если система управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y &= \\ = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x & \end{aligned}$$

и все или некоторые из коэффициентов этого уравнения a_i, b_j ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$) являются функциями времени, то система называется нестационарной, или системой с переменными параметрами. Наиболее распространенный метод исследования таких систем носит название метода замороженных коэффициентов, который заключается в «замораживании» числовых значений переменных коэффициентов уравнения системы в определенный фиксированный момент времени $t = \vartheta$, что позволяет применять к системе методы анализа и синтеза линейных систем с постоянными параметрами. При этом исследование системы с замороженными коэффициентами должно быть последовательно произведено для различных моментов времени $t = \vartheta$, лежащих в интервале $0 < \vartheta < T$, где T – время работы

системы. Если во всем рабочем диапазоне от 0 до T качество системы управления оказывается приемлемым, то ее считают работоспособной и при изменении коэффициентов в исследованных пределах.

Подчеркнем, что этот метод дает правильные результаты, если в течение переходного процесса (пока функция веса не затухнет практически до нуля) коэффициенты уравнения системы мало изменяют свое значение. Следует отметить, что эффективность рассматриваемого метода также зависит и от правильного выбора фиксированных моментов времени, для которых производится замораживание коэффициентов. Необходимо так выбирать эти моменты, чтобы охватить все возможные варианты значений коэффициентов, обратив внимание на «опасные» точки, в которых происходит значительное изменение коэффициента, его знака и т.п.

Системы, в которых, по крайней мере, между двумя непрерывными ее элементами формирование сигнала производится не непрерывно, а прерывисто, относятся к классу дискретных систем.

Процесс преобразования непрерывного сигнала в дискретный называется квантованием (дискретизацией). Различают три основных вида квантования:

- Квантование по времени. Выделение значений сигнала $x(t)$ происходит в определенные равностоящие моменты времени $t = nT$, где T – период квантования (шаг квантования по времени); $n = \overline{1, \infty}$ (рис.1, а). Системы, в которых реализуется этот вид квантования, называются импульсными. Если те или иные параметры импульсов пропорциональны величине сигнала $x(t)$, то такой вид квантования относится к классу линейной дискретизации сигнала.

- Квантование по уровню. Величина сигнала $x(t)$ изменяется только тогда, когда $x(t)$ проходит через один из уровней квантования x_i (рис.1, б). Разность $(x_i - x_{i-1})$ называется шагом квантования Δx .

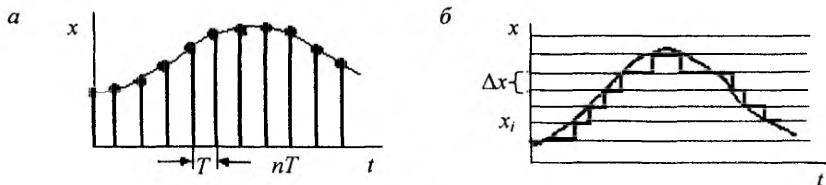


Рис.1

Такой вид квантования имеет место в релейных элементах, например с трехпозиционной безпетлевой характеристикой. Системы, использующие такие элементы, в принципе относятся к классу нелинейных и называются релейными.

- Одновременное квантование по времени и по уровню.

Значения сигнала $x(t)$ фиксируются в равноотстоящие дискретные моменты времени, но их величина округляется до ближайшего уровня x_i (рис.2). Такой вид квантования имеет место при табулировании функции, использовании цифровых машин и т.п. Системы, использующие этот вид квантования, называются цифровыми или релейно-импульсными.

Таким образом, в зависимости от способа квантования сигналов дискретные системы подразделяются на импульсные, релейные и цифровые, а под линейной импульсной системой автоматического управления понимается система, которая кроме звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, содержит звено, реализующее линейное квантование сигнала по времени. Заметим, что цифровые системы управления при малом шаге квантования по уровню сигнала Δx , соизмеримым с погрешностью измерительного устройства, могут рассматриваться как импульсные. Следовательно, к таким системам применимы методы исследования динамических режимов, разработанные для импульсных систем.

Основной смысл введения импульсного управления заключается в освобождении измерительного устройства регулятора от нагрузки на выходе. Это позволяет применить более точное и тонкое измерительное устройство с обеспечением в то же время достаточной мощности управляющего воздействия. Так как в дискретных системах, по сравнению с непрерывными, в принципе происходит потеря информации об изменениях сигнала, то можно ожидать снижения точности функционирования системы. Однако при достаточно малом шаге квантования и при сравнительно мед-

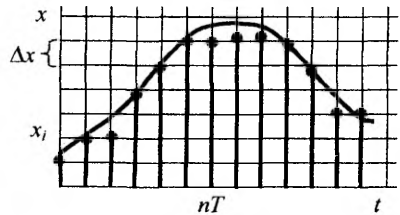


Рис.2

ленно меняющихся сигналах снижение этой точности несущественно. Кроме того, процедура дискретизации сигнала сопровождается отфильтровыванием высоких частот, что увеличивает помехозащищенность системы, а применение вместо непрерывных устройств цифровых преобразователей позволяет существенно снизить приборную погрешность. Таким образом, суммарная точность функционирования дискретной системы, по сравнению с непрерывной, может существенно повыситься.

К классу нелинейных систем управления относятся системы, содержащие хотя бы одно звено, параметры которого зависят от переменных, описывающих поведение системы. Характерной особенностью нелинейной системы является резкое, вплоть до скачков, изменение ее параметров при изменении переменных параметров. Это обстоятельство обуславливает неэффективность линеаризации нелинейных зависимостей путем их разложения в ряд Тейлора, ввиду невозможности обеспечения удовлетворительной точности аппроксимации. В связи с этим возникает необходимость применения специальных методов анализа и синтеза нелинейных систем.

1. ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К системам с запаздыванием относятся такие, в составе которых имеется звено с чистым запаздыванием, т.е. звено, у которого выходная величина $y(t)$ повторяет все изменения входной величины с постоянным сдвигом во времени, равным τ . Уравнение звена с чистым запаздыванием имеет вид

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (1.1)$$

где τ – время запаздывания.

Примером звена с чистым запаздыванием может служить обычный конвейер (рис.1.1), реакция которого $y(t)$ запаздывает по отношению к входному воздействию $x(t)$ на время транспортирования груза τ от места его подачи на конвейер до места выгрузки.

Именно поэтому время τ иногда называют транспортным запаздыванием.

Преобразуем уравнение (1.1) по Лапласу, сделав замену переменной $\theta = t - \tau$, откуда $t = \theta + \tau$. Тогда

$$Y(p) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) e^{-p\tau} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} x(\theta) e^{-p\theta} e^{-p\tau} d\theta = e^{-p\tau} X(p).$$

При этом передаточная функция звена с запаздыванием имеет вид

$$W_{\tau}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = e^{-p\tau}; \quad (1.2)$$

его характеристики: амплитудно-фазочастотная (АФЧХ) $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$, амплитудно-частотная (АЧХ) $A(\omega) = 1$ и фазочастотная (ФЧХ) $\varphi(\omega) = -\omega\tau$ — представлены на рис.1.2. Переходная характеристика звена при $x = 1(t)$ имеет вид, показанный на рис.1.1.

Заметим, что звено с запаздыванием является неминимально-фазовым, так как в отличие от усилительного звена с $A(\omega) = 1$ и $\varphi(\omega) = 0$, звено с запаздыванием имеет сдвиг фаз, отличный от нуля и пропорциональный времени τ .

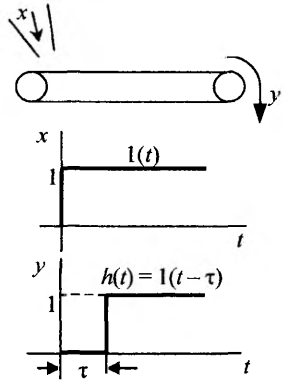


Рис.1.1

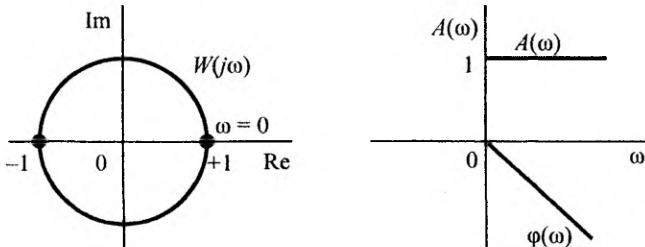


Рис.1.2

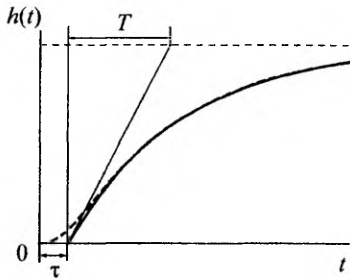


Рис.1.3

Приведенные характеристики показывают, что при любой частоте сигнал на входе звена с чистым запаздыванием передается без искажения, т.е. $A(\omega) = 1$, поэтому понятие полосы пропускания частот в данном случае отсутствует. Физически такое звено, как и дифференцирующее звено, не может быть реализовано. Однако такие элементы, как транспортное устройство системы, достаточно

хорошо аппроксимируются этими звеньями. Кроме того, с помощью этих звеньев в ряде случаев удастся достаточно точно аппроксимировать объекты, описываемые линейными дифференциальными уравнениями (ДУ) высоких порядков.

Если кривая переходной функции $h(t)$, начиная с момента времени $t = \tau$, мало отличается от экспоненты, а до момента $t = \tau$ ординаты ее достаточно малы (рис.1.3), то соответствующее приближенное значение передаточной функции объекта можно записать в виде произведения

$$W(p) = W_a(p)W_\tau(p) = \frac{k}{Tp + 1} e^{-p\tau},$$

а ДУ, преобразованное по Лапласу, в виде

$$(Tp + 1)e^{p\tau}Y(p) = kX(p). \quad (1.3)$$

В выражении (1.3) параметры T и τ определяются по кривой разгона с применением того или иного метода обработки экспериментальных данных.

Заметим, что большое число последовательно включенных звеньев с малыми постоянными времени $T_{\mu i}$ можно заменить на звено с запаздыванием при $\tau = \sum_{i=1}^n T_{\mu i}$. Действительно, пусть система

содержит n последовательно включенных инерционных звеньев

первого порядка с коэффициентом передачи $k = 1$ и постоянной времени $T_\mu = \tau/n$. Тогда эквивалентная передаточная функция

$$W_s(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{1}{(T_\mu p + 1)^n} = \left(1 + \frac{\tau p}{n}\right)^{-n}.$$

Возьмем предел левой части этого выражения при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tau p}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\tau p}{n}\right)^{\frac{n}{\tau p}} \right]^{-\tau p} = e^{-p\tau}.$$

Здесь учтено, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + 1/\alpha)^\alpha = e$ при $\alpha = n/(\tau p)$.

Таким образом, передаточную функцию при достаточно большом числе n ($n > 5 \div 10$), можно аппроксимировать звеном запаздывания с $\tau = nT_\mu$.

В общем случае передаточная функция линейного звена с запаздыванием τ с учетом (1.2) имеет вид

$$W(p) = W_n(p)W_\tau(p) = \frac{B(p)}{A(p)} e^{-p\tau},$$

а соответствующую частотную функцию при $W(j\omega) = A(j\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ и $W_\tau(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ получим в виде

$$W(j\omega) = A(j\omega)e^{j[\varphi(\omega) - \omega\tau]}. \quad (1.4)$$

Из выражения (1.4) следует, что для построения АФЧХ линейного звена с запаздыванием, необходимо характеристику $W_n(j\omega)$ повернуть на угол $\varphi_n = -\omega\tau$ (по часовой стрелке), что приближает ее к точке $(-1; j0)$, и следовательно, наличие звена с запаздыванием снижает запас устойчивости системы.

Заметим, что реальные переходные процессы в АСУ во многих случаях достаточно точно могут быть описаны как линейными ДУ высокого порядка, так и линейными уравнениями второго порядка с запаздыванием (принцип Ишлинского). В этом случае передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1},$$

где τ , T , ξ и k – подлежат определению по экспериментальным данным. Здесь T – постоянная времени; ξ – коэффициент демпфирования; k – передаточный коэффициент.

Запишем придаточную функцию в виде

$$W(p) = \frac{k}{(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)e^{p\tau}} = \frac{B(p)}{A(p)e^{p\tau}},$$

где $A(p)e^{p\tau}$ – характеристический полином.

Решение и анализ трансцендентного уравнения $A(p)e^{p\tau} = 0$ затруднено. В связи с этим передаточную функцию запаздывающего звена иногда представляют в виде ряда Пада. Учитывая только первые два его члена, $W_\tau(p)$ приближенно заменяют дробно-рациональной функцией вида

$$W_\tau(p) = e^{p\tau} = \frac{a_0 p^2 - a_1 p + 1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1}, \quad (1.5)$$

где $a_0 = \tau^2/12$, $a_1 = \tau/2$.

Заметим, что полученная передаточная функция имеет корни числителя в правой полуплоскости, следовательно, данное звено как и звено с передаточной функцией (1.2) не является минимально-фазовым.

1.2. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

К системам с распределенными параметрами относятся такие, в состав которых входит хотя бы одно звено с распределенными параметрами. В отличие от звеньев с сосредоточенными параметрами, описываемых обыкновенными ДУ (изменениями состояния звена в пространстве в данном случае пренебрегают), звено с распределенными параметрами (т.е. параметрами, зависящими от пространственных координат) описываются ДУ в частных производных. Это обстоятельство приобретает практическое значение при управлении материальными потоками, при пе-

редаче информации, например, в виде электрического сигнала по длинным линиям и т.п.

Пример 1.1. Пусть в системе управления гидротурбиной в качестве связующего элемента между резервуаром воды и гидротурбиной используется трубопровод, по которому протекает жидкость (рис.1.4). Составить структурную схему модели трубопровода.

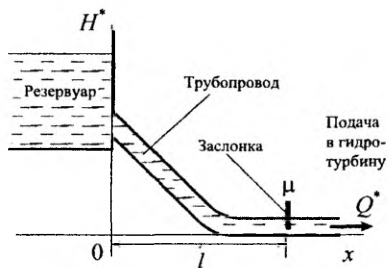


Рис.1.4

Решение. Динамические процессы в трубопроводе, характеризующимися двумя переменными: напором H^* и расходом Q^* , описываются при некоторых допущениях уравнениями Жуковского:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\gamma}{a} \frac{\partial q}{\partial t}; \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{1}{\gamma a} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.6)$$

где $h = H^*/H_0^*$ и $q = Q^*/Q_0^*$ – относительные значения напора и расхода соответственно; H_0^* и Q_0^* – базовые значения H^* и Q^* ; a – скорость распространения звука в трубопроводе; $\gamma = aQ_0^*/(gFH_0^*)$; g – ускорение свободного падения; F – площадь сечения трубопровода.

Преобразуем уравнения (1.6) по Лапласу при нулевых начальных условиях. Учтем, что

$$L\{h(x,t)\} = \int_0^{\infty} h(x,t)e^{-pt} dt = H(p,x);$$

$$L\{q(x,t)\} = \int_0^{\infty} q(x,t)e^{-pt} dt = Q(p,x).$$

Тогда получим

$$\frac{\partial H(p,x)}{\partial x} = -\frac{\gamma}{a} pQ(p,x); \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial Q(p, x)}{\partial x} = -\frac{p}{\gamma a} H(p, x). \quad (1.8)$$

Продифференцировав (1.7) по x и подставив в него (1.8), запишем

$$\frac{\partial^2 H(p, x)}{\partial x^2} = \frac{\gamma}{a} p \frac{\partial Q(p, x)}{\partial x} = -\frac{p^2}{a^2} H(p, x)$$

или

$$\frac{\partial^2 H(p, x)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} H(p, x) = 0. \quad (1.9)$$

Аналогично, исключив из (1.8) функцию $H(p, x)$, найдем

$$\frac{\partial^2 Q(p, x)}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2} Q(p, x) = 0. \quad (1.10)$$

Рассматривая координату x как независимую переменную, решим дифференциальные уравнения (1.9) и (1.10) относительно изображений $H(p, x)$ и $Q(p, x)$. Так как характеристические уравнения ДУ (1.9) и (1.10) одинаковы ($k^2 - p^2/a^2 = 0^*$) и имеют два корня $k_{1,2} = \pm p/a$, то решения этих уравнений получим в виде суммы двух экспонент:

$$H(p, x) = A_1 e^{k_1 x} + A_2 e^{k_2 x}, \quad (1.11)$$

$$Q(p, x) = B_1 e^{k_1 x} + B_2 e^{k_2 x}, \quad (1.12)$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Запишем уравнение (1.11) для граничных условий $x = 0, x = l$:

$$H(p, 0) = A_1 + A_2; \quad (1.13)$$

$$H(p, l) = A_1 e^{\tau p} + A_2 e^{-\tau p}, \quad (1.14)$$

где $\tau = l/a$ – время пробега звуковой волны вдоль трубопровода.

Продифференцировав (1.11) по x , с учетом (1.5) запишем

* Здесь $k = \partial / \partial x$ – операция дифференцирования по переменной x .

$$\frac{\partial H(p, x)}{\partial x} = (A_1 k_1 e^{k_1 x} + A_2 k_2 e^{k_2 x}) = -\frac{\gamma}{a} p Q(p, x).$$

Тогда, при $x = 0$, получим

$$A_1 k_1 + A_2 k_2 = -\frac{\gamma}{a} p Q(p, 0).$$

Подставив в полученное выражение значения k_1 и k_2 , имеем

$$A_1 - A_2 = -\gamma Q(p, 0). \quad (1.15)$$

Совместное решение уравнений (1.13) и (1.15) и дает иско-
мые постоянные интегрирования A_1 и A_2 , подставив которые в вы-
ражение (1.14) окончательно найдем

$$H(p, l) = H(p, 0) \operatorname{sh} \tau p - \gamma Q(p, 0) \operatorname{sh} \tau p, \quad (1.16)$$

где $\operatorname{sh} \tau p = (e^{\tau p} + e^{-\tau p})/2$; $\operatorname{ch} \tau p = (e^{\tau p} - e^{-\tau p})/2$ (гиперболические ко-
синус и синус соответственно).

Аналогично можно получить

$$Q(p, l) = Q(p, 0) \operatorname{sh} \tau p - \frac{1}{\gamma} H(p, 0) \operatorname{sh} \tau p. \quad (1.17)$$

Обычно интересуются зависимостью значений $h(l, t)$ и $q(l, t)$ на выходе трубопровода от напора $h(0, t)$ и относительной степени открытия регулирующей заслонки μ , т.е. рассматривают трубопро-
вод как объект с сосредоточенными параметрами*. В этом случае,
исключая переменную $Q(p, 0)$ из уравнений (1.16) и (1.17) и учиты-
вая, что $\operatorname{ch}^2 \tau p - \operatorname{sh}^2 \tau p = 1$, получим

$$H(p, l) \operatorname{ch} \tau p = H(p, 0) - \gamma Q(p, l) \operatorname{sh} \tau p.$$

Заменяв гиперболические функции экспоненциальными,
запишем

$$H(p, l) = 2H(p, 0)e^{-p\tau} - H(p, l)e^{-p\tau} + \gamma Q(p, l)e^{-2p\tau} - \gamma Q(p, l). \quad (1.18)$$

* Изменение переменных в пространстве целесообразно рассматривать в
случае использования распределенного уравнения.

Так как обратное преобразование Лапласа от $H(p, l)$, $Q(p, l)$ и $e^{-p\tau}$ соответственно

$$L^{-1}\{H(p, l)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(p, l) e^{p\tau} dp = h(l, t);$$

$$L^{-1}\{Q(p, l)\} = q(l, t); \quad L^{-1}\{e^{-p\tau}\} = 1(t - \tau),$$

уравнение (1.18) можно переписать для оригиналов в виде

$$h(l, t) = 2h(0, t - \tau) - h(l, t - 2\tau) + \gamma q(l, t - 2\tau) - \gamma q(l, t). \quad (1.19)$$

Полученное уравнение связывает две искомые величины $h(l, t)$ и $q(l, t)$ в конце трубопровода с напором в его начале $h(0, t)$. Чтобы сделать задачу определенной, к уравнению (1.19) необходимо добавить уравнение расхода

$$q(l, t) = \mu f[h(l, t)] \approx \mu \sqrt{1 + h(l, t)}. \quad (1.20)$$

Совместное решение уравнений (1.19) и (1.20) позволяет определить искомые значения $h(l, t)$ и $q(l, t)$ в конце трубопровода при известных значениях напора $h(0, t)$ в его начале и положение заслонки μ .

Анализ уравнения (1.19) показывает, что протяженный трубопровод можно заменить усилительными звеньями с запаздывани-

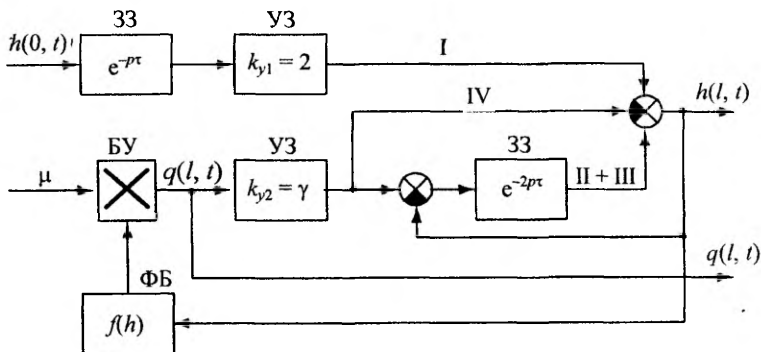


Рис 1.5

ем (так как жидкость в отличие от газа несжимаема), а произведя линеаризацию выражения (1.20), можно применять методы анализа линейных систем с запаздыванием.

Структурная схема модели $h(t)|_{x=l}$ и $q(t)|_{x=l}$, т.е. изменение напора и расхода в точке l (рис.1.5), составляется на базе уравнений (1.19) и (1.20). На вход модели подаем сигналы, пропорциональные $h(0, t)$ и μ , которые, пройдя через звенья модели, преобразуются в искомые переменные $h(l, t)$ и $q(l, t)$. На рис.1.5 ЗЗ – звено с запаздыванием; УЗ – усилительное звено; БУ – блок умножения; ФБ – функциональный блок с входом $h(l, t)$ и выходом $f(h) = \sqrt{1 + h(l, t)}$; I, II, III, IV – слагаемые уравнения (1.19).

Заметим, что звенья с распределенными параметрами можно заменять звеньями с запаздыванием, что вытекает из чисто физических соображений: объект с распределенными параметрами можно представить как n последовательно включенных элементарных звеньев первого порядка, а такие звенья можно представить запаздывающим звеном.

1.3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В силу трансцендентности передаточной функции звена с запаздыванием характеристическое уравнение замкнутой системы будет также трансцендентным, и поэтому алгебраические критерии устойчивости непосредственно использованы быть не могут. В то же время, частотные критерии Михайлова и Найквиста могут быть обобщены и на случай систем с запаздыванием. В этом случае используется уравнение Эйлера: $e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$.

Критерий Михайлова. Пусть имеем систему (рис.1.6), включающую звено с запаздыванием: $W_\tau(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$, а остальная часть системы описывается обыкновенными ДУ и имеет передаточную функцию

$$W_n(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

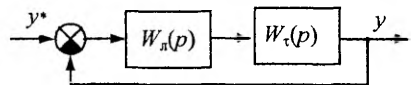


Рис 1.6

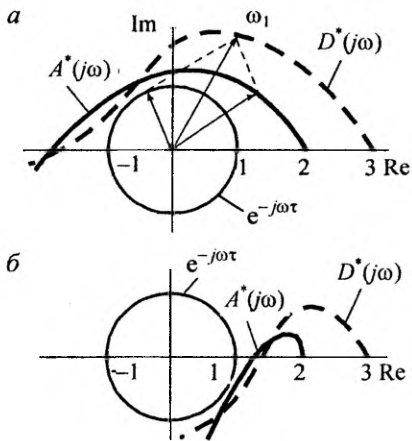


Рис.1.7

Передаточная функция замкнутой системы по каналу $y^* \rightarrow y$ имеет вид

$$W_{y^*y}(p) = \frac{B(p)e^{-p\tau}}{A(p) + B(p)e^{-p\tau}}. \quad (1.21)$$

Воспользовавшись (1.21), запишем характеристический полином системы $D(p) = A(p) + B(p)e^{-p\tau}$, и, положив $p = j\omega$, уравнение кривой Михайлова

$$D(j\omega) = A(j\omega) + B(j\omega)e^{-j\omega\tau}. \quad (1.22)$$

Критерий Михайлова для систем с запаздыванием формулируется практически также, как и для линейных систем без запаздывания: для того, чтобы линейная система, включающая звено с запаздыванием, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора Михайлова $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля до бесконечности, нигде не обращаясь в нуль, повернулся на угол $+n\frac{\pi}{2}$, где n – степень полинома $A(p)$.

Рассмотрим некоторые примеры применения критерия Михайлова к исследованию устойчивости систем с запаздыванием.

1. Пусть $B(j\omega) = c = \text{const}$. Поделив выражение (1.22) на c , получим

$$D^*(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{c} = A^*(j\omega) + e^{-j\omega\tau}, \quad (1.23)$$

где $A^*(j\omega) = A(j\omega)/c$.

На рис.1.7 отдельно построены годографы векторов, входящих в выражение (1.23). Анализ размещения годографов на комплексной плоскости (рис.1.7, а) показывает, что если годограф кривой $A^*(j\omega)$ не пересекает окружность единичного радиуса и проходит последователь-

но n квадрантов, то и годограф $D^*(j\omega)$ проходит квадранты в той же последовательности. Таким образом, в соответствии с критерием Михайлова все корни уравнения $D(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости. Следовательно, система устойчива. Если годограф $A^*(j\omega)$ не отвечает сформулированным требованиям (рис.1.7, б), то система с запаздыванием будет неустойчива для любых τ .

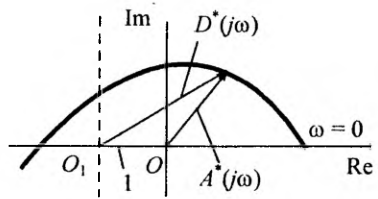


Рис.1.8

При $\tau = 0$ система называется предельной, а кривая Михайлова принимает вид

$$D^*(j\omega) = A^*(j\omega) + 1. \quad (1.24)$$

Из (1.24) вытекает, что годограф Михайлова представляет собой вспомогательную кривую $A^*(j\omega)$, смещенную на комплексной плоскости на единицу вправо (рис.1.8), что эквивалентно смещению оси ординат на единицу влево (точка O_1). Таким образом, расположение кривой $A^*(j\omega)$ относительно нового начала координат O_1 позволит судить об устойчивости предельной системы: для того чтобы система была устойчива кривая Михайлова должна охватывать точку O_1 .

2. Рассмотрим случай, когда предельная система устойчива, а кривая $A^*(j\omega)$ пересекает окружность единичного радиуса в точке k (рис.1.9, а). Частота ω_k , при которой произошло пересечение двух годографов $e^{-j\omega\tau}$ и $A^*(j\omega)$, называется критической. Если время запаздывания $\tau = \tau_k$ таково, что $\omega_k\tau_k = \pi - \psi_k$, то, как следует из рис.1.9, а, $|D^*(j\omega_k)| = 0$ и система находится на границе устойчивости. При этом $\tau_k = (\pi - \psi_k)/\omega_k$,

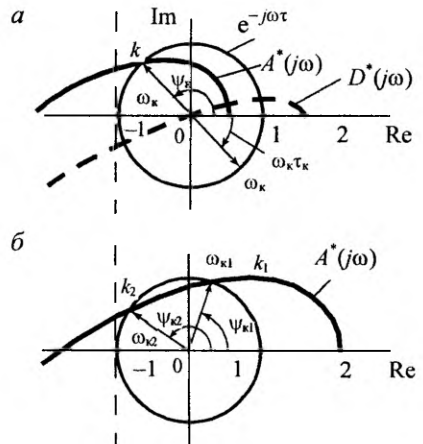


Рис.1.9

и следовательно, для того чтобы кривая Михайлова охватывала начало координат, необходимо выполнение условия $\tau < \tau_k$.

Таким образом, в рассматриваемом случае, для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор $A^*(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ последовательно проходил n квадрантов в положительном направлении и, кроме того, выполнялось условие $\tau < \tau_k$.

Заметим, что если годограф вектора $A^*(j\omega)$ пересекает окружность единичного радиуса дважды (рис.1.9, б), то имеем две критические частоты ω_{k1} и ω_{k2} и два критических времени τ_{k1} и τ_{k2} . В этом случае дополнительное условие устойчивости имеет вид: $\tau < \tau_{k\min}$. Для случая, изображенного на рис.1.9, б, имеем $\psi_{k2} > \psi_{k1}$ и $\omega_{k2} > \omega_{k1}$, следовательно,

$$\tau_{k\min} = \tau_{k2} = \frac{\pi - \psi_{k2}}{\omega_{k2}}.$$

3. Рассмотрим более общий случай, когда $B(j\omega) \neq \text{const}$. В этом случае соотношение (1.22) записывается в виде

$$D(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi_A(\omega)} + B(\omega)e^{j[\varphi_B(\omega) - \omega\tau]}.$$

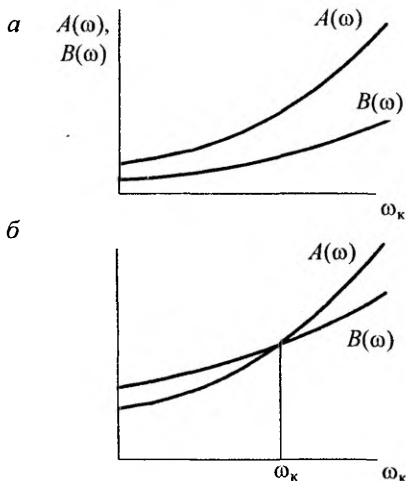


Рис.1.10

Построив зависимости частотных характеристик $A(\omega)$ и $B(\omega)$, рассмотрим три случая:

- кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$ (рис.1.10, а) не пересекаются, и устойчивость системы при любом времени запаздывания полностью определяется устойчивостью предельной системы;

- кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$ пересекаются (рис.1.10, б), и система будет устойчивой, если предельная система устойчива и $\tau < \tau_k$. Здесь

$$\tau_K = \frac{\pi - \varphi_A(\omega_K) + \varphi_B(\omega_K)}{\omega_K},$$

где $\varphi_A(\omega_K)$ и $\varphi_B(\omega_K)$ – аргументы комплексных чисел $A(j\omega)$ и $B(j\omega)$ при частоте $\omega = \omega_K$, которая соответствует точке пересечения кривых;

- кривые $A(\omega)$ и $B(\omega)$ пересекаются дважды, и в случае устойчивой предельной системы необходимым и достаточным условием устойчивости является неравенство $\tau < \tau_{K \min}$, где $\tau_{K \min}$ соответствует $\omega_{K \max}$.

Критерий Найквиста. Этот критерий, обобщенный для системы с запаздыванием, формулируется так же, как и для линейных систем: чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора АФЧХ разомкнутой системы $W_p(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывал точку $(-1; j0)$.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = W_n(p)e^{-p\tau}. \quad (1.25) \quad a$$

В соответствии с критерием Найквиста, для устойчивой предельной системы годограф частотной характеристики для разомкнутой системы $W_p(j\omega) = W_n(j\omega)$ не должен охватывать точку $(-1; j0)$. При запаздывании ($\tau > 0$), в соответствии с (1.25) частотная характеристика разомкнутой системы получается перемножением частотных характеристик $W_n(j\omega)$ и $e^{-j\omega\tau}$, причем эта процедура заключается в повороте каждого вектора $W_n(j\omega)$ на угол $(-\omega\tau)$. При этом возможны два случая:

- Разомкнутая предельная система устойчива и годограф вектора $W_p(j\omega)$ не пересекается с кру-

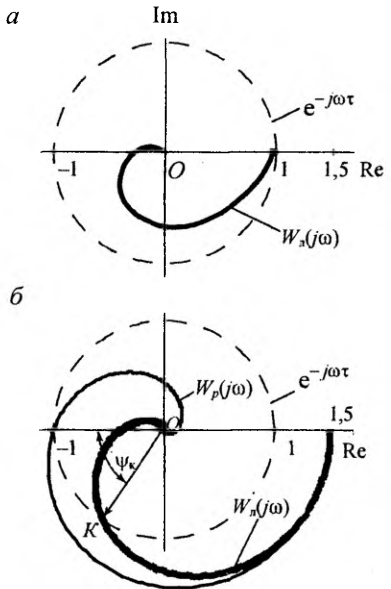


Рис.1.11

гом единичного радиуса (рис.1.11, а). В этом случае замкнутая система будет устойчива при любом запаздывании, так как никакой поворот любых векторов $W_n(j\omega)$ на любой угол не приводит к обхвату точки $(-1; j0)$.

• Если имеет место пересечение упомянутых характеристик (рис.1.11, б), то при повороте вектора OK на угол $\pi - \psi_k$ (здесь $\psi_k = \omega_k \tau_k$) характеристика $W_p(j\omega) = W_n(j\omega)e^{-j\omega\tau}$ попадает в точку $(-1; j0)$, т.е. система окажется на границе устойчивости. Следовательно, чтобы система была устойчивой, необходимо ввести дополнительное условие $\tau < \tau_k = \psi_k / \omega_k$.

Заметим, что если частотная функция разомкнутой системы более сложна, чем (1.25), например,

$$W_p(j\omega) = \frac{B_1(j\omega)e^{j\omega\tau} + B_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}}{A_1(j\omega)e^{j\omega\tau} + A_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}},$$

то исследование устойчивости целесообразно проводить при помощи критерия Михайлова.

Пример 1.2. Пусть передаточная функция разомкнутой системы с запаздыванием имеет вид

$$W_p(p) = W_n(p)W_\tau(p) = \frac{k_n}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3} e^{-p\tau}, \quad (1.26)$$

где $a_0 = 0,01 \text{ с}^3$; $a_1 = 0,09 \text{ с}^2$; $a_2 = 0,5 \text{ с}$; $a_3 = 1,0$; $k_n = 1,6$. Определить критическое значение величины запаздывания $\tau = \tau_k$, определяющее границу устойчивости.

Решение. Построим частотную характеристику разомкнутой предельной системы. Воспользовавшись (1.26), имеем

$$W_n(j\omega) = \frac{1,6}{0,01(j\omega)^3 + 0,09(j\omega)^2 + 0,5(j\omega) + 1}.$$

Годограф вектора $W_n(j\omega)$ представлен на рис.1.12. Пересечение кривой $W_n(j\omega)$ с окружностью единичного радиуса происходит при критической частоте $\omega_k = 4,6 \text{ с}^{-1}$. Следовательно, для

того чтобы замкнутая система, содержащая звено с запаздыванием $W_\tau(p) = e^{-p\tau}$, была устойчива, должно удовлетворяться неравенство

$$\tau < \tau_k = \frac{\psi_k}{\omega_k} = \frac{0,967}{4,6} = 0,21 \text{ с.}$$

Заметим, что при $|\psi_k| < \pi$, точка пересечения годографов

$W_\Delta(j\omega)$ и $e^{-p\tau}$ всегда будет лежать во втором квадранте комплексной плоскости, т.е. годограф $W_p(j\omega)$ при любом значении τ будет охватывать точку $(-1, j0)$, и следовательно, достаточное условие устойчивости не выполняется.

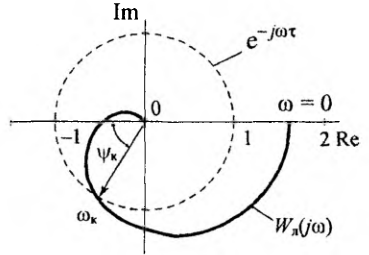


Рис.1.12

1.4. КОРРЕКЦИЯ АСУ ОБЪЕКТАМИ С БОЛЬШИМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для многих технологических процессов в металлургической, химической, горной, транспортной и других отраслях промышленности характерным признаком является существенное время запаздывания (до нескольких десятков минут) реакции объекта (изменения выходной величины y) на изменение управляющего воздействия u . Как показывают расчеты, при определенной величине отношения времени запаздывания объекта τ_0 к его постоянной времени T_0 (например, при $\tau_0/T_0 > 0,5$) эффективность законов управления резко снижается из-за большой статической (П-, ПД-законы) или динамической (И-, ПИ- и ПИД-законы) ошибки, и в некоторых случаях система может потерять устойчивость. В связи с этим были разработаны специальные (неклассические) законы управления: пропорционально-интегрально-разностный (ПИР-закон) и пропорционально-интегральный по предыстории (ПИП-закон). В отличие от классических законов управления, использующих только информацию об отклонении управляемой величины y от заданного ее значения y^* ($\Delta = y^* - y$), здесь используется также априорные све-

дения об управляемом объекте, на базе которых в классический закон управления вносится определенная коррекция. В случае параллельной коррекции передаточную функцию скорректированного закона управления $W_y^{\text{ск}}(p)$ можно записать в виде

$$W_y^{\text{ск}}(p) = W_\delta(p) + W_\kappa(p), \quad (1.27)$$

где $W_\delta(p)$, $W_\kappa(p)$ – передаточные функции базового регулятора и корректирующего звена.

Обычно в качестве базового принимается ПИ-регулятор с передаточной функцией, которую в данном случае удобно записать в виде

$$W_\delta(p) = k_y + \frac{k_y}{T_y p} = \frac{k_y(T_y p + 1)}{T_y p}, \quad (1.28)$$

где k_y и T_y – параметры настройки ПИ-регулятора.

Для сокращения времени переходного процесса t_p и снижения его колебательности (сокращения числа перерегулирований) скорость нарастания интегральной составляющей управляющего воздействия u должна уменьшаться с течением времени. В простейшем случае этим требованиям отвечает корректирующее звено с передаточной функцией

$$W_\kappa(p) = -\frac{k_y k_\kappa}{T_y p} e^{-p\tau_\kappa}, \quad (1.29)$$

где k_κ и τ_κ – параметры настройки корректирующего звена.

С учетом (1.28) и (1.29) выражение (1.27) для ПИР-регулятора можно записать в виде

$$W_\kappa(p) = k_y + \frac{k_y}{T_y p} (1 - k_y e^{-p\tau_\kappa}). \quad (1.30)$$

Для иллюстрации сказанного на рис.1.13 приведена переходная функция $u(t)$ ПИР-регулятора (сплошная линия) при подаче на него входного сигнала ошибки $\Delta(t) = 1(t)$. Штриховыми линиями показаны составляющие этой функции: пропорциональная 1, инте-

гральная 2 ($\operatorname{tg}\alpha = k_k / T_y$) и интегральная составляющая 3 с запаздыванием ($\operatorname{tg}(\pi - \beta) = -k_k k_y / T_y$, $k_k < 1$). Как видно из рис.1.13, при $t > \tau_k$ скорость роста управляющего сигнала снижается, что, как указывалось выше, улучшает качество переходного процесса.

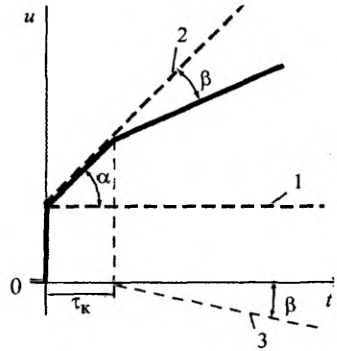


Рис.1.13

Пример 1.3. Найти параметры ПИР-регулятора, предназначенного для стабилизации температуры в металлургической печи. Структурная схема АСУ представлена на рис.1.14. Передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_o(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1} e^{-p\tau_o}. \quad (1.31)$$

Значения параметров (1.31), определенные по кривой разгона: $k_o = 1,0$; $T_o = 80$ с; $\tau_o = 28$ с.

Решение. Соотношение динамических характеристик объекта $\tau_o / T_o = 0,35 < 0,5$ в принципе позволяет применять стандартный ПИ-регулятор. Для удобства расчетов аппроксимируем передаточную функцию запаздывающего звена рядом Пада (1.5).

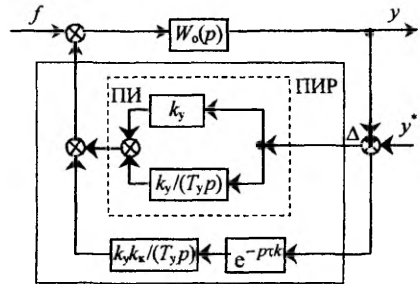


Рис.1.14

$$e^{-p\tau_o} = \frac{a_o p^2 - a_1 p + 1}{a_o p^2 + a_1 p + 1} = \frac{65,3 p^2 - 14 p + 1}{65,3 p^2 + 14 p + 1}.$$

Тогда передаточная функция объекта управления (1.31) запишется в виде

$$W_o(p) = \frac{65,3 p^2 - 14 p + 1}{(80 p + 1)(65,3 p^2 + 14 p + 1)}.$$

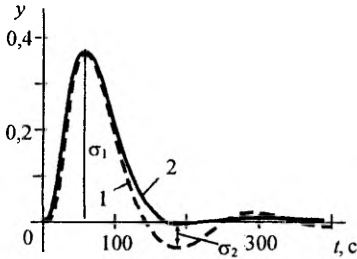


Рис.1.15

Определим параметры ПИ-регулятора (k_y , T_y) с передаточной функцией (1.30) при $k_k = 0$, обеспечивающее минимум колебательности переходного процесса, характеризуемой отношением σ_2/σ_1 , где σ_1 и σ_2 – величина предыдущего и последующего перерегулирования. Как показали расчеты наименьшее соотношение $\sigma_2/\sigma_1 = 0,16$ достигается при следующих значениях параметров ПИ-регулятора: $k_y = 1,7$, $T_y = 50$ с, время регулирования $t_p = 350$ с. Кривая переходного процесса $y(t)$, полученная на модели при подаче на вход объекта ступенчатого возмущения $f(t) = A1(t)$, представлена на рис.1.15 (кривая 1).

Дальнейшее улучшение переходного процесса производится путем введения корректирующего звена (1.29), параметры которого можно определить путем постановки вычислительного эксперимента. Обработка полученных результатов позволила найти оптимальные значения параметров корректирующих звеньев: $k_k = 0,19$, $\tau_k = 21$. Кривая скорректированного переходного процесса приведена на рис.1.15 (кривая 2). Исследование модели ПИР-регулятора показывает, что оптимальные его параметры, в основном, определяются соотношением τ_o/T_o . Сравнение кривых переходного процесса свидетельствуют о том, что введение корректирующего звена позволяет существенно улучшить качество переходного процесса. В частности, колебательность процесса уменьшилась примерно на порядок, в результате чего переходный процесс практически стал монотонным. Кроме того, реализация ПИР-закона регулирования позволила почти в 2 раза сократить время регулирования.

В случае применения пропорционально-интегрального по предыстории алгоритма управления (ПИП-регулятор) передаточная функция корректирующего звена имеет вид

$$W_k(p) = -k_y \left(k_1 + \frac{k_2}{T_y p} \right) W_o(p) = W_1(p) W_o(p), \quad (1.32)$$

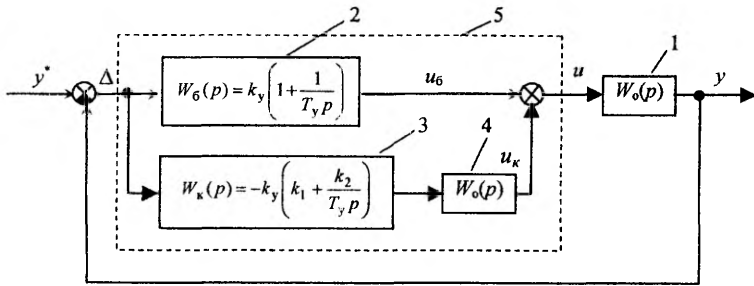


Рис.1.16

1 – объект управления; 2 – ПИ-регулятор; 3 и 4 – корректирующие звенья;
5 – ПИП-регулятор

где $W_1(p) = -k_y \left(k_1 + \frac{k_2}{T_y p} \right)$; k_1 и k_2 – параметры настройки корректирующего звена; $W_0(p)$ – передаточная функция объекта с запаздыванием.

Передаточная функция скорректированного устройства управления в соответствии с (1.27) и с учетом (1.28) и (1.32) имеет вид

$$W_y^{\text{СК}}(p) = k_y \{ 1 - k_1 W_0(p) + (1/T_y p) [1 - k_2 W_0(p)] \}. \quad (1.33)$$

Анализ структурной схемы АСУ с ПИП-регулятором (рис.1.16) показывает, что управляющее воздействие u формируется как алгебраическая сумма составляющей на выходе ПИ-регулятора u_0 и составляющей звеньев параллельной коррекции u_k . Введение составляющей ослабляет пропорциональную и интегральную части базовой составляющей (k_1 и k_2 меньше единицы) при $t > \tau_0$. Последнее условие обеспечивается введением звена 4, представляющего собой модель объекта управления. Таким образом ПИП-регулятор обеспечивает высокий уровень управляющего воздействия $u = u_0$ при $t < \tau_0$ и плавное снижение этого уровня при $t > \tau_0$ ($u = u_0 - u_k$). Как и в случае применения ПИР-регулятора, реализация ПИП-закона управления улучшает качество переходного процесса и увеличивает запас устойчивости по амплитуде и фазе по

сравнению с ПИ-регулятором. Кроме того, настройка параметров корректирующего звена k_1 и k_2 в силу линейной их связи с пропорциональной и интегральной составляющими выходного сигнала корректирующего звена 3 осуществляется достаточно просто. К основным недостаткам ПИП-регулятора можно отнести необходимость достаточно точного знания математической модели объекта, что в ряде случаев вызывает определенные затруднения.

2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

2.1.1. Разностные уравнения

Основным математическим аппаратом для описания дискретных (импульсных) систем служат разностные уравнения (уравнения в конечных разностях). Неоднородные линейные разностные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A_0 \Delta^m y(nT) + A_1 \Delta^{m-1} y(nT) + \dots + A_i \Delta^{m-i} y(nT) + \dots + A_m \Delta y(nT) + \\
 + A_m y(nT) = B_0 \Delta^\ell x(nT) + B_1 \Delta^{\ell-1} x(nT) + \dots + B_j \Delta^{\ell-j} x(nT) + \\
 + \dots + B_\ell x(nT), \quad i = \overline{0, m}; \quad j = \overline{0, \ell}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

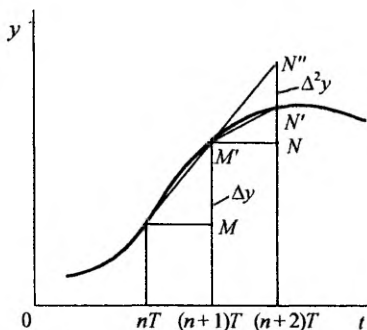


Рис.2.1

Здесь $x(nT)$ – входной сигнал системы, определяемый для дискретных моментов времени $t = nT$; $y(nT)$ – выходной сигнал системы, свойства которого аналогичны $x(nT)$; A_i и B_j – постоянные коэффициенты разностного уравнения; $\Delta^i y(nT)$ – конечная разность i -го порядка.

Так как $T = \text{const}$, то функция $x(nT)$ является функцией целочисленного аргумента n и

называется решетчатой функцией. Проиллюстрируем сказанное. Пусть, например, функция $y(t)$ изменяется так, как показано на рис.2.1. Первая разность этой функции $\Delta y(nT) = y[(n+1)T] - y(nT)$, т.е. равна длине отрезка MM' , представляющего собой геометрическую интерпретацию первой разности. Заметим, что при $T \rightarrow 0$ первая разность функции $y(t)$ стремится к ее дифференциалу.

Вторая разность представляет собой разность первых разностей:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(nT) &= \Delta y[(n+1)T] - \Delta y[nT] = y[(n+2)T] - y[(n+1)T] - \\ &- y[(n+1)T] + y(nT) = y[(n+2)T] - 2y[(n+1)T] + y(nT), \end{aligned}$$

т.е. равна длине отрезка $N''N'''$ – геометрической интерпретации второй разности ($[N''N'''] = [MM'] - [NN']$).

В общем случае i -я разность (при $t = nT$)

$$\Delta^i y(nT) = \Delta^{i-1} y[(n+1)T] - \Delta^{i-1} y(nT).$$

В дальнейшем, понижая порядок разности, можно представить разность любого порядка в виде алгебраической суммы функции $y(t)$ для различных моментов времени. Можно показать, что в этом случае

$$\Delta^i y(nT) = \sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k y[(v+i-k)T], \quad (2.2)$$

где $C_i^k = \frac{i!}{k!(i-k)!}$ – число сочетаний из i элементов по k .

Для примера определим, воспользовавшись формулой (2.2), вторую разность, положив $i = 2$. Тогда $C_2^0 = C_2^2 = 1$; $C_2^1 = 2$ и $\Delta^2 y(nT) = y[(n+2)T] - 2y[(n+1)T] + y(nT)$, что совпадает с результатом, полученным выше.

Применив линейное преобразование (2.2) ко всем членам разностного уравнения (2.1), запишем его в виде

$$\begin{aligned} a_0 y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + \dots + a_m y(n+m-i) + \dots \\ + a_{m-1} y(n+1) + a_m y(n) = b_0 x(n+\ell) + \dots + b_\ell x(n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Можно показать, что коэффициенты уравнений (2.1) и (2.3) связаны отношением

$$a_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} A_k C_{m-k}^{i-k}.$$

Отметим, что если в уравнении (2.3) коэффициент $a_m = 0$, то, в отличие от дифференциальных уравнений, можно понизить его порядок, заменив $n + 1 = k$.

Решение однородного разностного уравнения (2.3) при $x(t) = 0$, описывающее свободное движение импульсной системы, ищется в виде показательной функции

$$y(\bar{t}) = z^{\bar{t}}, \quad (2.4)$$

где z – число, подлежащее определению; $\bar{t} = n$; $n = \overline{0, \infty}$.

После подстановки (2.4) в (2.3) получим

$$a_0 z^{(n+m)} + a_1 z^{(n+m-1)} + a_2 z^{(n+m-2)} + \dots + a_{m-1} z^{(n+1)} + a_m z^n = 0. \quad (2.5)$$

Сократив (2.5) на z^n , получим

$$a_0 z^m + a_1 z^{(m-1)} + \dots + a_{m-1} z + a_m = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется характеристическим уравнением разностного уравнения (2.3), решение которого и дает искомые числа z . Если корни характеристического уравнения равны z_i ($i = \overline{1, m}$), то получим m независимых решений типа (2.4). Следовательно, решение уравнения (2.3) может быть представлено в виде суммы:

$$y(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_i z_i^n + \dots + C_m z_m^n, \quad (2.7)$$

где C_i – произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Корни характеристического уравнения z_i в общем случае комплексные числа, которые могут быть представлены в виде $z_i = A_i e^{j\varphi_i}$. Тогда уравнение (2.7) можно записать в виде

$$y(n) = \sum_{i=1}^m C_i A_i^n e^{j\varphi_i n}. \quad (2.8)$$

Из выражения (2.8) следует, что при модулях комплексных чисел z_i , меньших единицы, все свободные составляющие затухают, т.е. система устойчива. Таким образом, условие

$$|z_i| = \text{mod } z_i = A_i < 1 \quad (2.9)$$

является условием устойчивости импульсных систем, которое можно сформулировать следующим образом: все корни z_i характеристического уравнения (2.6) должны быть расположены на комплексной плоскости корней z_i внутри круга единичного радиуса (рис.2.2).

В зависимости от вида корней характеристического уравнения (2.6) переходный процесс может иметь аperiodический или колебательный характер.

Пример 2.1. Решить линейное однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0. \quad (2.10)$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение выражения (2.10):

$$z^2 + a_1z + a_2 = 0. \quad (2.11)$$

Запишем корни уравнения (2.11):

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Тогда в соответствии с (2.7) решение разностного уравнения (2.10) будет иметь вид

$$x(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n,$$

где C_1 и C_2 – постоянные величины, определяемые из начальных условий: при $\bar{t} = 0$ $x(n) = x(0)$; при $\bar{t} = 1$ $x(n+1) = x(1)$.

Подставив начальные условия в полученное решение, имеем $x(0) = C_1 + C_2$; $x(1) = C_1 z_1 + C_2 z_2$, откуда

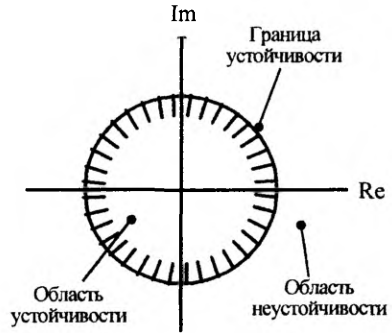
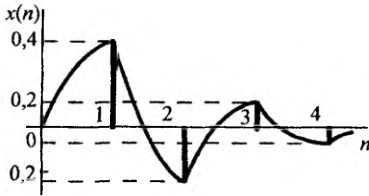


Рис.2.2

а



б

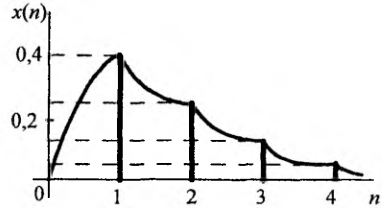


Рис.2.3

$$C_1 = \frac{z_2 x(0) - x(1)}{z_2 - z_1}; \quad C_2 = \frac{x(1) - x(0)z_1}{z_2 - z_1}.$$

Допустим, что корни характеристического уравнения $z_1 = -0,1$; $z_2 = -0,5$. Пусть при импульсном возмущении начальные условия имеют вид $x(0) = 0$; $x(1) = 0,4$. Тогда постоянные $C_1 = 1$ и $C_2 = -1$, и решение уравнения примет вид $x(n) = (-0,1)^n - (-0,5)^n$. График изменения решетчатой функции $x(n)$ при объекте управления, описываемом уравнением первого порядка, представлен на рис.2.3, а. При $z_1 = 0,1$; $z_2 = 0,5$ и тех же начальных условиях получим $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Тогда $x(n) = (0,5)^n - (0,1)^n$ и переходный процесс примет апериодический характер (рис.2.3, б).

Пример 2.2. Решить систему разностных уравнений

$$x(n+1) + x(n) = b_{01}y(n), \quad (2.12)$$

$$y(n+1) + a_{12}y(n) = b_{02}x(n). \quad (2.13)$$

Решение. Исключим переменную x из приведенной системы уравнений, записав уравнение (2.13) для $n+1$ интервала:

$$y(n+2) + a_{12}y(n+1) = b_{02}x(n+1). \quad (2.14)$$

Из уравнений (2.13) и (2.14) определим $x(n)$ и $x(n+1)$ и, подставив найденные значения в (2.12), получим

$$y(n+2) + (1 + a_{12})y(n+1) + (a_{12} - b_{01}b_{02})y(n) = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) решается аналогично (2.10).

Заметим, что если $a_{12} = b_{01}b_{02}$, то, произведя замену переменных $n + 1 = k$, уравнение (2.15) можно записать в виде $y(k + 1) + (1 + a_{12})y(k) = 0$. Полученное уравнение является разностным уравнением первого порядка, т.е. порядок исходного уравнения (2.15) понизился.

Рассмотренный метод решения разностных уравнений относится к классическим. Более эффективным методом решения этих уравнений является метод, использующий так называемое z -преобразование, играющее для анализа дискретных систем ту же роль, что и преобразование Лапласа для линейных систем.

2.1.2. Прямое z -преобразование

Запишем последовательность ординат функции $x(t)$ для дискретных моментов времени $t = nT$, $n = 0, \infty$ в виде (здесь верхний индекс $*$ – знак дискретности функции)

$$x^*(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nT),$$

где

$$\delta(t - nT) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq nT; \\ \delta(nT), & \forall t = nT. \end{cases} \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) формализует запись решетчатой функции $x^*(t)$ (рис.2.4). Преобразуем (2.16) по Лапласу:

$$X^*(p) = \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-pt} dt.$$

Так как $\delta(t - nT) = 0$ при $t \neq nT$, то значение интеграла на этих отрезках времени равно нулю и, следовательно, вместо $x(t)e^{-pt}$ можно подставить $x(nT)e^{-pnT}$, а

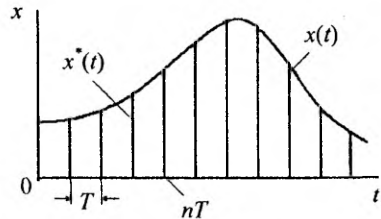


Рис.2.4

затем вывести его из-под интеграла. С учетом сказанного, имеем

$$X^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) \delta(t - nT) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT} \int_0^{\infty} \delta(t - nT) dt. \quad (2.17)$$

Так как $\int_0^{\infty} \delta(t - nT) dt = 1$ по определению, то (2.17) можно записать в виде

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT}. \quad (2.18)$$

Поскольку правая часть уравнения (2.18) представляет собой дискретную функцию целочисленного элемента n , то знак дискретности может быть опущен.

Выражение (2.18) введено Я.З.Цыпкиным и носит название дискретное преобразование Лапласа или D -преобразование: $X(p) = D\{x(nT)\}$. Заметим, что функция $x(nT)$, как и в случае преобразования Лапласа, должна тождественно равняться нулю при $n < 0$.

Обозначим $pT = q$. Тогда $e^q = z$ является комплексным числом и выражение (2.18) можно записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-pnT} = X(z) = Z\{x(nT)\}. \quad (2.19)$$

Функция $X(z)$ комплексного аргумента z , полученная в соответствии с (2.19), носит название z -преобразования решетчатой функции $x(nT)$.

Пример 2.3. Найти z -преобразование некоторых решетчатых функций: 1) единичной ступенчатой – $x(nT) = 1(nT)$, представленной на рис.2.5, а; 2) экспоненциальной – $x(nT) = e^{-anT}$ (рис.2.5, б); 3) линейной – $x(nT) = nT$ (рис.2.5, в).

Решение. Найдем z -преобразование для всех трех случаев, воспользовавшись выражением (2.19).

1. Для единичной ступенчатой функции можно записать

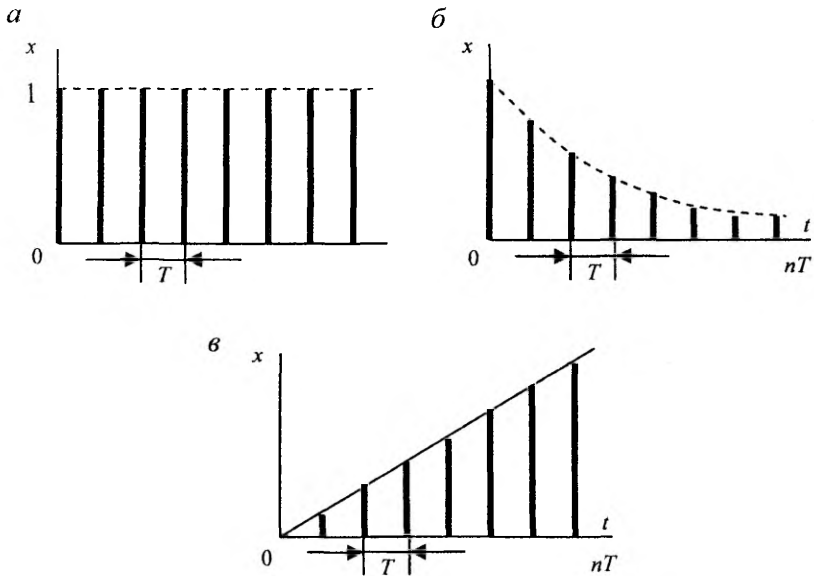


Рис.2.5

$$Z\{1(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1(nT)z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots$$

Правая часть полученного выражения представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем z^{-1} . Тогда

$$Z\{1(nT)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

2. Для экспоненциальной функции справедливо

$$Z\{e^{-anT}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots + e^{-anT} z^{-n} + \dots$$

В данном случае знаменатель геометрической прогрессии равен $e^{-aT} z^{-1}$. Тогда

$$Z\{e^{-anT}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}.$$

3. Для линейной функции получим

$$\begin{aligned} Z\{nT\} &= \sum_{n=0}^{\infty} nTz^{-n} = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots + nTz^{-n} + \dots = \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots + nz^{-(n-1)} + \dots). \end{aligned}$$

Выражение в скобках в правой части полученного уравнения представляет собой разложение биннома Ньютона вида $(1 - z^{-1})^{-2}$. Тогда

$$Z\{nT\} = Tz^{-1}(1 - z^{-1})^{-2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}.$$

Заметим, что во всех рассмотренных примерах коэффициенты при общем члене ряда, представляет собой оригинал решетчатой функции $x(nT)$.

Основные свойства z-преобразования следующие:

1. Свойство линейности. Из определения (2.19) следует

$$Z\left\{\sum_{j=1}^m a_j x_j(nT)\right\} = \sum_{j=1}^m a_j Z\{x_j(nT)\}. \quad (2.20)$$

Это свойство позволяет применять z-преобразования к каждому члену разностного уравнения.

2. Теорема сдвига (смещение аргумента в области оригинала на $\tau = mT$). Пусть $\tau = T$. Найдем z-преобразование решетчатой функции $x(nT + T)$. Имеем

$$\begin{aligned} Z\{x(nT + T)\} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + T)z^{-n} = |k = n + 1| = z \sum_{k=1}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - zx(0) = z[X(z) - x(0)]. \end{aligned}$$

В общем случае

$$Z\{x(nT + mT)\} = z^m \left[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(kT)z^{-k} \right]. \quad (2.21)$$

Соотношения (2.20) и (2.21) позволяют получить z -преобразование разностных уравнений.

Замечание. Применение z -преобразования для решения разностных уравнений (как и применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений) позволяет алгебраизировать разностные уравнения и автоматически учесть начальные условия.

3. Теорема запаздывания (смещение аргумента в области оригинала в сторону $\tau = -mT$). Разностные уравнения можно записать, используя смещения в сторону запаздывания. В общем случае, учитывая, что $k - m = n$, имеем

$$\begin{aligned} Z\{x[(k - m)T]\} &= \sum_{\substack{k=0 \\ n=-m}}^{\infty} x(nT)z^{-k} = \left| z^{-k} = z^{-m} z^{-n} \right| = \\ &= z^{-m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} + \sum_{n=-m}^{-1} x(nT)z^{-n} \right] = z^{-m} \left[X(z) + \sum_{n=1}^m x(-nT)z^n \right]. \end{aligned}$$

Так как при $nT < 0$ по определению $x(nT) = 0$, то второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю. Тогда

$$Z\{x[(k - m)T]\} = z^{-m}X(z). \quad (2.22)$$

4. Теорема о конечном значении. Конечное значение функции $x(nT)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(nT) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z). \quad (2.23)$$

Для доказательства справедливости приведенного выражения (2.23) найдем z -преобразование первой разности:

$$\begin{aligned} Z\{x[(n + 1)T] - x(nT)\} &= \\ &= z[X(z) - x(0)] - X(z) = (z - 1)X(z) - zx(0). \end{aligned} \quad (2.24)$$

С другой стороны z -преобразование этой же разности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& Z\{x[(n+1)T] - x(nT)\} = \\
& = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \{x[(n+1)T] - x(nT)\} z^{-n}. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Приравняв правые части уравнений (2.24) и (2.25) и взяв от обеих частей предел при $z \rightarrow 1$, получим

$$\begin{aligned}
& \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z) - zx(0)] = \\
& = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \{x[(n+1)T] - x(nT)\} z^{-n} \right\} = \\
& = \lim_{k \rightarrow \infty} \{x(T) - x(0) + x(2T) - x(T) + x(3T) - x(2T) + \dots + \\
& \quad + x[(k+1)T] - x(kT)\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{-x(0) + x[(k+1)T]\}.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\lim_{z \rightarrow 1} z^{-n} = 1$ и произведено сокращение подобных членов в фигурных скобках. Взяв предел от полученного выражения, окончательно получим

$$\lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] = x(\infty),$$

что и требовалось доказать.

5. Теорема о начальном значении. Начальное значение функции $x(t)$ равно конечному значению ее z -преобразования $X(z)$:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (2.26)$$

Действительно, по определению имеем

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots$$

Взяв предел от этого выражения при $z \rightarrow \infty$, получим выражение (2.26).

Пример 2.4. Пусть система описывается разностным уравнением второго порядка $x(n+2) + a_1x(n+1) + a_2x(n) = 0$. Найти его z -преобразование.

Решение. Воспользовавшись свойством линейности (2.20), запишем:

$$Z\{x(n+2)\} + a_1Z\{x(n+1)\} + a_2Z\{x(n)\} = 0.$$

На основании теоремы сдвига (2.21), получим

$$z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] + a_1z[X(z) - x(0)] + a_2X(z) = 0,$$

откуда:

$$X(z) = Z\{x(n)\} = \frac{x(0)z^2 + [a_1x(0) + x(1)]z}{z^2 + a_1z + a_2}.$$

Замечание. Разностное уравнение второго порядка, данное в примере 2.4, обозначив $n + m = k$, при $m = 2$ можно переписать в виде $x(k) + a_1x(k-1) + a_2x(k-2) = 0$.

2.1.3. Обратное z-преобразование

Нахождение оригинала $x(nT)$ по известному z-преобразованию $X(z)$ называется **обратным z-преобразованием**: $Z^{-1}\{Z(z)\} = x(nT)$.

Эта операция осуществляется следующими способами:

1. С помощью таблиц прямого и обратного z-преобразования.

Приведем в качестве примера часть такой таблицы:

$x(nT)$	$X(z)$
$1(n)$	$\frac{z}{z-1}$
nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-\alpha nT}$	$\frac{z}{z - e^{-\alpha T}}$
$\sin \beta nT$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$

$$\begin{aligned} \cos \beta nT & \frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1} \\ 1 - e^{-\alpha nT} & \frac{(1 - e^{-\alpha T})z}{(z - 1)(z - e^{-\alpha T})} \end{aligned}$$

2. Разложением z -преобразования $X(z)$ в ряд по степеням z^{-1} в окрестностях рабочей точки $z_0 = 0$. Так как из определения z -преобразования следует, что коэффициент при z^{-n} разложения в ряд функцию $X(z)$ равен значению $x(nT)$, то, воспользовавшись соотношением (2.19) и записав z -преобразование в виде ряда, получим

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(nT)z^{-n} + \dots \quad (2.27)$$

Коэффициент при общем члене ряда (2.27) искомой функции $x(nT)$.

3. Общим методом нахождения оригинала. Ряд вида (2.27) относится к ряду Лорана. Известно, что коэффициент этого ряда C_{-n} при z^{-n} вычисляется по формуле

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{n-1} dz = Z^{-1}\{X(z)\}. \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) является обратным z -преобразованием, аналогичным обратному преобразованию Лапласа.

Воспользовавшись (2.28), можно показать, что в случае, если $X(z)$ является дробно-рациональной функцией, т.е.

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)},$$

где $B(z)$ и $A(z)$ – алгебраические полиномы, причем степень полинома $B(z)$ меньше степени полинома $A(z)$, то оригинал $x(nT)$ можно найти по формуле

$$x(nT) = \sum_{k=1}^N \frac{B(z_k)}{A'_z(z_k)} z_k^{n-1}, \quad (2.29)$$

где z_k – корни характеристического уравнения $A(z) = 0$; N – общее количество корней того же уравнения; $A'_z(z)$ – производная полинома $A(z)$ по z .

Выражение (2.29) является аналогом теоремы разложения Хевисайда – Карсона, используемой для нахождения оригинала в операционном исчислении.

Пример 2.5. Пусть $X(z) = \frac{Tz^2}{(1-z)^2}$. Найти $x(nT)$.

Решение. Представим $X(z)$ в виде ряда, для чего z^2 поделим на $(1-z)^2$:

$$\frac{z^2}{z^2 - 2z + 1} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots + (n+1)z^{-n} + \dots$$

Тогда можно записать

$$X(z) = T [1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots + (n+1)z^{-n} + \dots],$$

откуда $x(nT) = (n+1)T$.

Пример 2.6 Пусть z -преобразование решетчатой функции $x(nT)$ задано в виде (см. пример 2.4)

$$Z\{x(nT)\} = \frac{x(0)z^2 + [a_1x(0) + x(1)]z}{z^2 + a_1z + a_2}. \quad (2.30)$$

Примем, что числовые значения коэффициентов $a_1 = -1$; $a_2 = 3/16$, а начальные условия имеют вид $x(0) = 0$; $x(1) = 2$.

Найти решетчатую функцию $x(nT)$.

Решение. Подставив числовые значения параметров в выражение (2.30), получим

$$X(z) = \frac{2z}{z^2 - z + \frac{3}{16}}.$$

Вычислим корни характеристического уравнения $A(z) = z^2 - z + \frac{3}{16} = 0$:

$$z_1 = 0,75, \quad z_2 = 0,25.$$

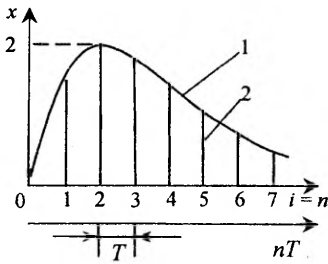


Рис.2.6

Так как $|z_i| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$, следовательно, система устойчива.

Воспользовавшись теоремой разложения (2.29), запишем

$$x(n) = \sum_{k=1}^2 \frac{B(z_k)}{z_k A'_z(z_k)} z_k^n = \frac{2z_1}{z_1(2z_1 - 1)} z_1^n + \frac{2z_2}{z_2(2z_2 - 1)} z_2^n. \quad (2.31)$$

Здесь коэффициенты при z_i^n представляют собой постоянные величины C_n . После подстановки числовых значений z_1 и z_2 найдем $C_1 = 4$, $C_2 = -4$. Тогда выражение (2.31) примет вид

$$x(n) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n = 4[(0,75)^n - (0,25)^n]. \quad (2.32)$$

Переходный процесс в системе, построенный в соответствии с выражением (2.32), представлен на рис.2.6. Здесь кривая 1 представляет собой график весовой функции $w(t)$ непрерывной системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, а решетчатая функция 2 – график дискретной весовой функции $w(n)$ для той же системы.

Заметим, что обычное z -преобразование позволяет определять значения $x(nT)$ по известному $X(z)$ только для дискретных моментов времени $t = nT$, где $T = \text{const}$.

2.2. ИМПУЛЬСНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Импульсным фильтром (ИФ), или разомкнутой импульсной цепью, называют устройства, состоящие из последовательно включенных импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ). Импульсный элемент (рис.2.7) предназначен для дискретизации сигналов во времени. Заметим,

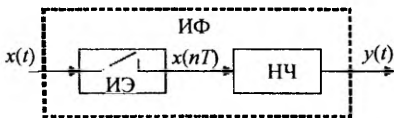


Рис.2.7

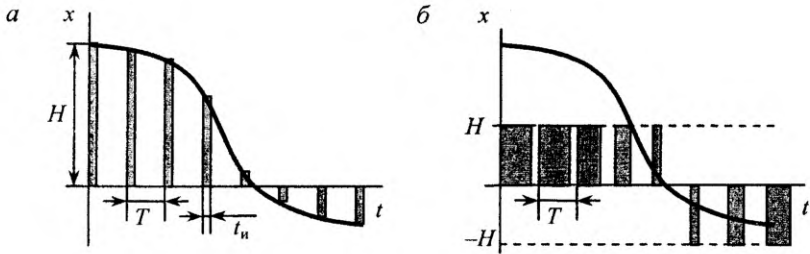


Рис.2.8

что в соответствии с теоремой Котельникова, непрерывный сигнал можно полностью (без потери информации) восстановить по его дискретным значениям, если интервал дискретности $T = \Delta = \pi/\omega_{\max}$, где ω_{\max} – это максимальная частота гармоники, присутствующей в непрерывном сигнале. Если $T > \pi/\omega_{\max}$, то высокочастотные составляющие восстановить нельзя, т.е. дискретная система отфильтровывает высокие частоты и, следовательно, обладает повышенной помехоустойчивостью.

Идеальные ИЭ преобразуют непрерывный сигнал в последовательность импульсов типа δ -функции, величина которых (интеграл) пропорциональна непрерывному сигналу $x(t)$ в момент времени $t = nT$. В реальных системах ИЭ формируют импульсы разнообразной формы, которые характеризуются определенными параметрами. Изменение параметров импульсов в функции входного воздействия $x(t)$ называют импульсной модуляцией.

Основные виды модуляции прямоугольных импульсов (рис.2.8) следующие:

1. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ). Этот вид модуляции характеризуется (рис.2.8, а) постоянным периодом квантования $T = \text{const}$ и длительностью (шириной) импульса $t_n = \text{const}$. Амплитуда импульса H пропорциональна величине входного сигнала $x(t)$ в дискретный момент времени $t = nT$, т.е. $H = kx(nT)$, где k – коэффициент пропорциональности.

2. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ). Этот вид модуляции характеризуется (рис.2.8, б) постоянными периодом квантования ($T = \text{const}$) и абсолютной величиной амплитуды импульса

$H = c \operatorname{sign} x(nT)$; $c = \text{const}$. Ширина импульса t_n пропорциональна абсолютному значению входного сигнала $x(t)$ в момент времени $t = nT$, т.е. $t_n = k |x(nT)|$, где k – коэффициент пропорциональности.

3. Время-импульсная модуляция. Различают частотно-импульсную ($T = \text{var}$) и фазоимпульсную ($\varphi = \text{var}$, где φ – сдвиг импульса относительно начала периода nT) модуляции. Эти виды модуляции применяются, в основном, в радиотехнике.

Определим математический оператор, связывающий входную $x(t)$ и выходную $y(t)$ переменные импульсного фильтра (см. рис.2.7). Известно, что входная и выходная переменные в непрерывных системах связаны между собой интегралом Дюамеля (свертки):

$$y(t) = \int_0^t w(\theta)x(t - \theta)d\theta,$$

где $w(\theta)$ – функция веса непрерывного звена.

Можно показать, что интеграл Дюамеля можно записать в дискретной форме:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n w(kT)x(nT - kT)$$

или более компактно:

$$y_n = \sum_{k=0}^n w_k x_{n-k}. \quad (2.33)$$

Найдем z -преобразование от выражения (2.33), для чего воспользуемся теоремой свертки, доказательство которой базируется на теореме запаздывания. Пусть $Z\{f_1(kT)\} = F_1(z)$; $Z\{f_2(nT)\} = F_2(z)$. Запишем произведение правых частей этих уравнений в виде

$$F_1(z)F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)z^{-k}F_2(z).$$

В соответствии с теоремой запаздывания $z^{-k}F_2(z) = Z\{f_2(nT - kT)\}$, тогда

$$F_1(z)F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) \sum_{n=0}^{\infty} f_2(nT - kT)z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) f_2(nT - kT) \right\} z^{-n} = Z \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) f_2(nT - kT) \right\}.$$

Так как $f(nT) \equiv 0$ при $n < 0$, то $f_2(nT - kT) \equiv 0$ ($k > n$). Следовательно, верхний бесконечный предел суммы, стоящей в фигурных скобках, можно заменить на конечный, равный n . Тогда получим

$$F_1(z)F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n f_1(kT) f_2(nT - kT) \right\} z^{-n}. \quad (2.34)$$

Выражение (2.34) является математической формулировкой теоремы свертки в дискретном виде.

Возьмем z -преобразование от выражения (2.33). Тогда с учетом (2.34), получим $Z\{y_n\} = Z\{w_k\}Z\{x_{n-k}\}$. Обозначив $Z\{w_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^{-k} = W^*(z)$, можно записать

$$W^*(z) = \frac{Z\{y_n\}}{Z\{x_n\}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (2.35)$$

Выражение (2.35), при условии что $x(t) \equiv 0$ ($t < 0$), представляет собой дискретную передаточную функцию. В случае подстановки в (2.35) $z = e^{pT}|_{p=j\omega} = e^{j\omega T}$, получим дискретную частотную функцию $W^*(e^{j\omega T})$, позволяющую производить частотный анализ дискретных систем.

Пример 2.7. Пусть непрерывная часть импульсного фильтра представляет собой интегрирующее звено с передаточной функцией $W(p) = k/p$. Найти дискретную передаточную функцию импульсного фильтра W_{Φ}^* .

Решение. Запишем функцию веса непрерывной части системы:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\} = L^{-1}\{k/p\} = k.$$

При этом дискретная весовая функция представляет собой ступенчатый дискретный сигнал: $w_n = k(nT)$, аналогичный представленному на рис.2.5, а, но с амплитудой, равной k . Тогда, имея в виду, что $Z\{1(nT)\} = z/(z-1)$, получим

$$Z\{k(nT)\} = \frac{kz}{z-1} = W_{\Phi}^*(z).$$

Это выражение и представляет собой искомую передаточную функцию импульсного фильтра, которая является дискретным оператором преобразования двух последовательно включенных элементов: импульсного элемента и непрерывной части.

Подчеркнем, что дискретная передаточная функция последовательно включенных непрерывных звеньев не равна произведению дискретных передаточных функций этих звеньев, так как для этого требовалось бы иметь импульсные элементы перед каждым непрерывным звеном. Поэтому для нахождения передаточной функции сложной дискретной системы необходимо с помощью структурных преобразований или графов свести всю непрерывную часть в одно непрерывное звено, на входе которого стоит один импульсный элемент.

2.3. УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

2.3.1. Условия устойчивости систем

Для облегчения анализа функционирования сложной импульсной системы ее следует привести к виду, представленному на рис.2.9. Пусть дискретная передаточная функция импульсного фильтра $W_{\Phi}^*(z)$ известна. Тогда передаточная функция замкнутой системы с единичными отрицательной обратной связью примет вид

$$W^*(z) = \frac{W_{\Phi}^*(z)}{1 + W_{\Phi}^*(z)}$$

Воспользовавшись полученным выражением, можем записать $Y(z) = W^*(z)X(z)$, что позволяет найти оригинал, выходного сигнала $y(nT) = Z^{-1}\{Y(z)\}$.

Известно, что для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(nT) = \varepsilon, \quad (2.36)$$

где $\Delta = (y^* - y)$ – величина рас-
согласования, для астатических
систем $\Delta = 0$; ε – константа.

Чтобы найти $y(nT)$, воспользуемся теоремой разложения
(2.29). Тогда

$$y(nT) = \sum_{k=1}^N \frac{B(z_k)}{z_k A'(z_k)} z_k^n = \sum_{k=1}^N C_k z_k^n, \quad (2.37)$$

где z_k – корни характеристического уравнения замкнутой системы
 $1 + W_{\Phi}^*(z) = 0$; N – количество корней этого уравнения ($k = \overline{1, N}$);

$B(z)/A(z) = W^*(z)$ – дискретная передаточная функция системы;

$C_k = \frac{B(z_k)}{z_k A'(z_k)} = \text{const}$; n – относительное дискретное время.

Из выражения (2.37) следует, что для устойчивой системы, отве-
чающей требованию (2.36), необходимо чтобы выполнялось условие

$$|z_k| = \text{mod } z_k < 1. \quad (2.38)$$

Рассмотрим условия устойчивости импульсных систем, опи-
сываемых уравнениями I и II порядка.

Пример 2.8. Найти условия, при которых импульсная систе-
ма, описываемая разностным уравнением первого порядка
 $y(n+1) + a_1 y(n) = 0$, будет устойчива. Решить ту же задачу для слу-
чая, когда уравнение системы имеет вид $y(n+1) + a_1 y(n) + a_2 y(n) = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение системы
для первого случая: $z + a_1 = 0$. Корень этого уравнения $z_1 = -a_1$. То-
гда в соответствии с (2.38) условие устойчивости системы примет
вид $|a_1| < 1$.

Во втором случае характеристическое уравнение системы
имеет вид

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0, \quad (2.39)$$

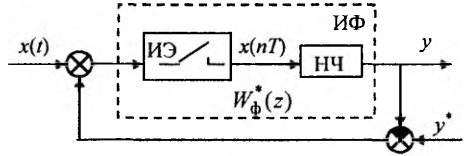


Рис.2.9

и условие устойчивости $|z_i| < 1$ ($i = \overline{1, 2}$) можно разбить на три условия: 1) $z_1 < 1$; 2) $z_2 > -1$; 3) $\text{mod } z_i < 1$. Первые два условия должны выполняться в случае вещественных корней уравнения (2.39), третье – в случае комплексных сопряженных корней.

В общем случае корни характеристического уравнения (2.39)

$$z_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Тогда условия устойчивости для всех трех случаев запишутся в виде

$$1) z_{1,2} = -a_1/2 + \sqrt{a_1^2/4 - a_2} < 1, \quad (2.40)$$

откуда $1 + a_1 + a_2 > 0$;

$$2) z_{1,2} = -a_1/2 - \sqrt{a_1^2/4 - a_2} > -1, \quad (2.41)$$

откуда $1 - a_1 + a_2 > 0$;

3) при $a_2 > a_1$ $z_{1,2} = -a_1/2 \pm j\sqrt{a_2 - a_1^2/4}$. Модуль комплексного числа z_i ($i = 1, 2$)

$$\text{mod } z_i = \left(\frac{a_1^2}{4} + a_2 - \frac{a_1^2}{4} \right)^{1/2} = a_2^{1/2},$$

тогда в соответствии с (2.38), условие устойчивости

$$a_2^{1/2} < 1 \text{ или } 1 - a_2 > 0. \quad (2.42)$$

Таким образом, условия (2.40)-(2.42) являются условиями устойчивости импульсной системы второго порядка при любых типах переходного процесса.

2.3.2. w-преобразование

Так как непосредственный анализ влияния коэффициентов разностных уравнений на корни характеристического уравнения третьего и четвертого порядков достаточно громоздок, а выше четвертого порядка в принципе невозможен, то для облегчения решения задачи целесообразно воспользоваться такими критериями, которые позволяют непосредственно по коэффициентам уравнения судить об устойчивости системы. С этой целью используют w-преобразование, которое позволяет непосредственно применять известные критерии устойчивости непрерывных линейных систем.

При применении w-преобразования окружность единичного радиуса на комплексной плоскости z отображается на мнимую ось комплексной плоскости w (рис. 2.10). Для этого используется подстановка

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (2.43)$$

где $w = (z-1)/(z+1)$.

Выражение (2.43) на границе области устойчивости при $z = e^{j\omega T} = e^{j\omega^*}$, где $\omega^* = \omega T$, (рис.2.10, а), примет вид

$$w = \frac{e^{j\omega^*} - 1}{e^{j\omega} + 1}. \quad (2.44)$$

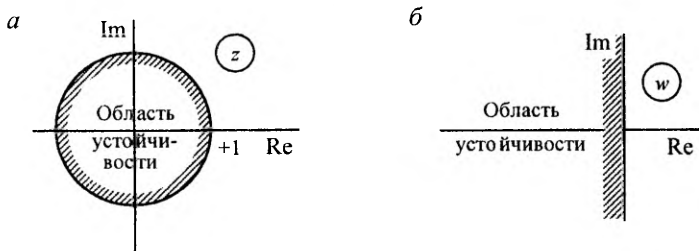


Рис.2.10

Имея в виду, что $e^{j\omega^*} = \cos\omega^* + j\sin\omega^*$, и умножив числитель и знаменатель правой части выражения (2.44) на число, сопряженное знаменателю, окончательно получим

$$w = \frac{j \sin \omega^*}{1 + \cos \omega^*} = j \operatorname{tg} 0,5\omega^* = j\lambda, \quad (2.45)$$

где $\lambda = \operatorname{tg} 0,5\omega^*$ – так называемая относительная псевдочастота (при малых частотах $\operatorname{tg} 0,5\omega^* \approx 0,5\omega^*$).

Из (2.45) вытекает, что при изменении частоты ω^* от $-\pi$ до $+\pi$ псевдочастота λ пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, а комплексная величина w движется по оси мнимых от $-j\infty$ до $+j\infty$. Эта ось, отображающая окружность $z = e^{j\omega^*}$ на плоскости z , и является границей устойчивости на плоскости w (рис.2.10, б). Заметим, что прямая $w = j\lambda$ является конформным отображением (образом) окружности $z = e^{j\omega^*}$. Таким образом, для устойчивой системы корни ее характеристического уравнения после подстановки в него преобразования (2.43) должны лежать на комплексной плоскости w слева от оси мнимых. Это и позволяет для w -преобразованных дискретных передаточных функций $W^*(w)$ использовать обычные критерии устойчивости, применяемые для непрерывных линейных систем.

2.3.3. Частотные критерии устойчивости

Для анализа устойчивости импульсных систем могут быть использованы классические частотные методы, используемые в линейной теории управления.

Ранее было введено обозначение $pT = q$ и $e^{pT} = e^q = z$, что позволяет записать $W^*(z) = W^*(e^q) = W^*(q) = B^*(q)/A^*(q)$. Тогда для замкнутой импульсной системы (см. рис.2.9) характеристическое уравнение $1 + W_\Phi^*(z) = 0$, опуская индекс и учитывая, что $z = e^q$, можно записать в виде

$$1 + W^*(e^q) = 0, \quad (2.46)$$

где $W^*(e^q)$ – дискретная передаточная функция разомкнутой системы (импульсного фильтра).

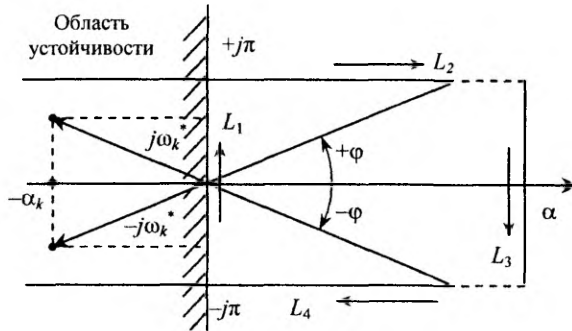


Рис.2.11

В соответствии с условием устойчивости $|z_k| < 1$, корни уравнения (2.46) q_k должны лежать в левой полуплоскости комплексного переменного $q = (\alpha \pm j\omega)T = \alpha^* \pm j\omega^*$. Это утверждение вытекает из условия (2.38); при $|z_k| = |e^{q_k}| = |e^{\alpha_k^*}| |e^{j\omega_k^*}| < 1$, величина α^* должна быть отрицательной. Следовательно, корни q_k должны лежать на комплексной плоскости q слева от оси мнимых.

Заметим, что так как $\sin \omega^* = \sin(\omega^* + 2\pi m)$, то корни уравнения (2.46) $q_k = \alpha_k^* \pm j\omega_k^*$ ($m = 0$), лежащие в левой полуплоскости, ограниченной прямыми $+j\pi$ и $-j\pi$ (рис.2.11), принято называть главными. При этом остальные корни ($m = 1, 2, \dots$) будут также лежать в левой полуплоскости, так как величина α_k^* остается отрицательной. Следовательно, для определения устойчивости системы достаточно исследовать расположение на комплексной плоскости только главных корней.

Трансцендентность характеристического уравнения (2.46) свидетельствует о целесообразности использования частотных критериев для определения устойчивости системы. Например, при обобщении критерия Найквиста на импульсные системы, характеристический полином замкнутой системы имеет вид $1 + W^*(j\omega^*)$. При этом формулировка критерия Найквиста для импульсной системы аналогична формулировке этого критерия для непрерывных систем: для того, чтобы замкнутая импульсная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы $W^*(j\omega^*)$ при изменении ω^* от 0 до $+\pi$

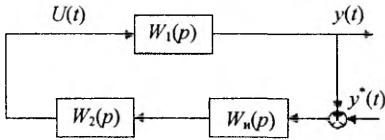


Рис.2.12

не охватывала точку $(-1, j0)$. В случае использования w -преобразования формулировка рассматриваемого критерия отличается от приведенного выше тем, что при $\omega^* = j\lambda$ псевдочастота λ изменяется от 0 до ∞ .

Пример 2.9. Дана структурная схема системы автоматического управления (рис 2.12). Передаточные функции звеньев следующие: объекта управления

$$W_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1};$$

исполнительного механизма

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p};$$

импульсного пропорционального регулятора, реализующего АИМ,

$$W_n(p) = k_n,$$

где k_n – коэффициент передачи импульсного элемента.

Проверить устойчивость системы.

Решение. Запишем передаточную функцию непрерывной части системы:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_n(p) = \frac{k}{T_2 p(T_1 p + 1)},$$

где $k = k_1 k_2 k_n$.

Введя безразмерные величины $\beta_1 = T/T_1$, $\beta_2 = T/T_2$ и $q = pT$, где T – период квантования импульсного элемента, получим

$$W(q) = \frac{k\beta_1\beta_2}{q(q + \beta_1)} = \frac{B(q)}{A(q)}.$$

Решив уравнение $q(q + \beta_1) = 0$, найдем корни характеристического уравнения разомкнутой системы: $q_1 = 0$, $q_2 = -\beta_1$.

Функцию веса $w(t) = L^{-1}\{W(q)\}$ получим, воспользовавшись теоремой разложения

$$w(t) = \sum_{k=1}^{N=2} \frac{B(q_k)}{A'_q(q_k)} e^{q_k t} = k\beta_2 - k\beta_2 e^{-\beta_1 t}.$$

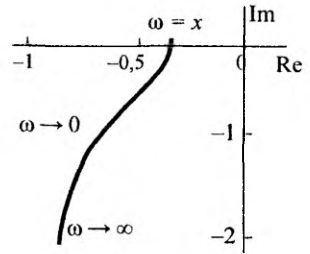


Рис.2.13

Последовательность функций веса для дискретных моментов времени $t = nT$ запишется в виде

$$w(t) = w(n) = k\beta_2(1 - e^{-\beta_0^n}),$$

где $\beta_0 = \beta_1 T$.

По таблице прямого z-преобразования найдем

$$Z\{w(n)\} = W^*(z) = k\beta_2 \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1} e^{-\beta_0}} \right).$$

Заменяя z на $e^{j\omega^*}$ ($\alpha^* = 0$), найдем частотную функцию разомкнутой системы:

$$W^*(j\omega^*) = k\beta_2 \left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega^*}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega^*} e^{-\beta_0}} \right). \quad (2.47)$$

Предположим, что числовые значения параметров системы следующие: $\beta_0 = \beta_2 = 1$, $k = 1$. Подставив эти значения в выражение (2.47), можно построить годограф частотной характеристики разомкнутой системы при изменении ω^* от нуля до $+\pi$. Как видно из рис.2.13 годограф $W^*(j\omega^*)$ не охватывает точки $(-1, j0)$, что свидетельствует об устойчивости системы.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

В системах управления встречаются различные типы нелинейностей, которые можно характеризовать соответствующей нелинейной функцией $y(x)$, связывающей входную x и выходную y величины нелинейного звена в статическом режиме. При этом будем считать, что имеет место одномерная нелинейность, т.е. переменная y представляет собой функцию только одной переменной x . Заметим, что если параметры нелинейного звена зависят от скорости изменения выходной величины или от более высоких ее производных, то такая нелинейность проявляется только в переходных режимах, в связи с чем ее относят к классу динамических.

Нелинейные звенья можно классифицировать по различным показателям: симметрии, гладкости, однозначности характеристик.

Симметрия. Для нелинейных характеристик можно указать два типа симметрии:

1) если функция $y(x)$ удовлетворяет условию

$$y(x) = y(-x), \quad (3.1)$$

то такую характеристику называют симметричной относительно оси ординат или четно-симметричной (рис.3.1, а). При однозначной зависимости такие характеристики могут быть представлены рядом

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i} x^{2i},$$

где C_{2i} – постоянные коэффициенты;

2) если функция $y(x)$ удовлетворяет условию

$$y(x) = -y(-x), \quad (3.2)$$

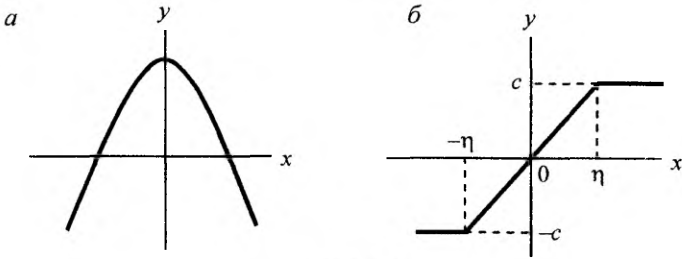


Рис.3.1

то характеристику называют симметричной относительно начала координат или нечетно-симметричной (рис.3.1, б). При однозначной зависимости $y(x)$ такие характеристики могут быть представлены рядом

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{2(i+1)} x^{2(i+1)} .$$

Характеристики, не удовлетворяющие ни одному из приведенных условий относятся к несимметричным.

В ряде случаев путем перемещения координат несимметричные характеристики могут быть приведены к симметричным. Например, для характеристики $y_1(x_1)$, представленной на рис.3.2, а, можно путем подстановки $x_1 = x_0 + x$ и $y_1 = y_0 + y$ получить нечетно-симметричную характеристику $y(x)$, как на рис.3.2, б. Структурная схема, соответствующая рассмотренному преобразованию координат, приведена на рис.3.2, в. Заметим, что здесь нелинейный элемент, в отличие от линейного, обозначен двойной рамкой.

Гладкость. Если в любой точке характеристики $y(x)$ существует производная dy/dx ,

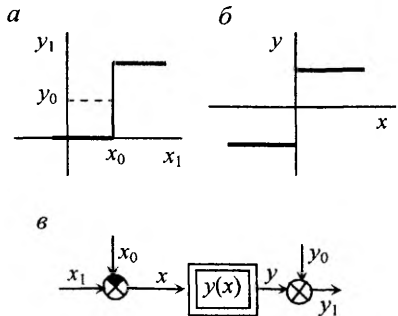


Рис.3.2

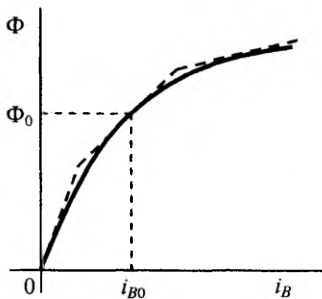


Рис.3.3

машины $\Phi(i_B)$, где Φ и i_B – магнитный поток и ток возбуждения соответственно (рис.3.3, сплошная линия), которая путем соответствующей аппроксимации может быть сведена к ломаной кусочно-линейной характеристике (рис.3.3, штриховая линия).

Однозначность. Если каждому значению x соответствует одно, определенное значение y , характеристика является однозначной. Если таких значений y несколько (в зависимости от предшествовавшего режима), то характеристика относится к классу многозначных. При этом число возможных значений y может лежать в пределах от двух до бесконечности. Примерами однозначных характеристик могут являться характеристики, приведенные на рис.3.1.

Рассмотрим наиболее распространенные нелинейные звенья, характеристики которых при некоторых допущениях симметричны относительно начала координат и могут быть достаточно хорошо представлены кусочно-линейными кривыми. Иногда эти звенья называют типовыми.

Звенья с однозначными непрерывными характеристиками. Различают звенья с зоной нечувствительности, с ограничением и с ограничением и зоной нечувствительности.

Характеристики звена с зоной нечувствительности представлены на рис.3.4, а. Такими характеристиками обладают некоторые электронные, магнитные, гидравлические усилители в области слабых входных сигналов $|x| < \eta$. Простейшей механической моделью зоны

то такая характеристика относится к гладким. Если на характеристике имеются изломы, в которых производная dy/dz имеет разрыв, то характеристика относится к ломаным. Большую группу ломаных характеристик составляют кусочно-линейные характеристики.

Примером гладкой характеристики может служить кривая намагничивания электрической

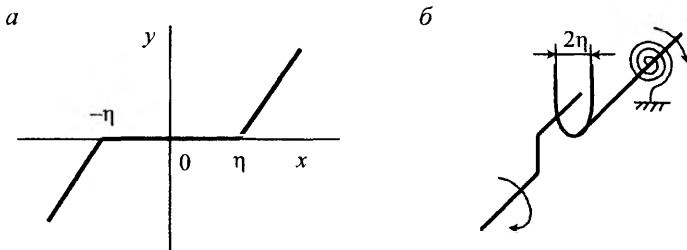


Рис.3.4

нечувствительности является система соединения двух валов с пружинным возвратом ведомого вала в нейтральное положение при наличии участка свободного хода (люфта) в системе передачи (рис.3.4, б).

Формализованную запись характеристики (рис.3.4) можно представить следующим образом:

$$y = \begin{cases} 0 & \forall |x| \leq \eta; \\ k(x - \eta) & \forall x > \eta; \\ k(x + \eta) & \forall x < -\eta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Характеристиками звена с ограничением (насыщением) обладают практически все усилители, ограниченные по мощности в области больших входных сигналов (рис.3.5, а). Примером простейшей механической модели ограничения является система соединения двух валов через упругую пружину при наличии системы упоров в системе ведомого вала (рис.3.5, б). Характеристика этого звена описывается следующим уравнением

$$y = \begin{cases} kx & \forall |x| \leq x^0; \\ c \operatorname{sign} x & \forall |x| > x^0, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1 & \forall x \geq 0; \\ -1 & \forall x < 0. \end{cases}$

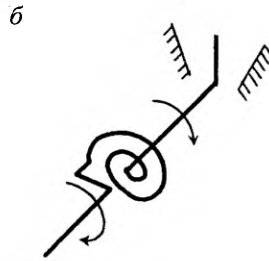
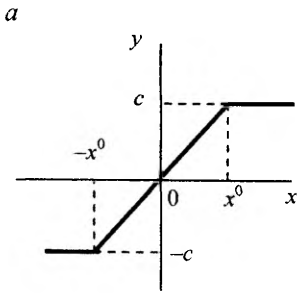


Рис. 3.5

Многие нелинейные элементы, используемые в АСУ, обладают как зоной нечувствительности, так и ограничением выходного сигнала (рис.3.6) и описываются уравнением

$$y = \begin{cases} 0 & \forall |x| \leq \eta; \\ k(x - \eta) & \forall x^0 > |x| > \eta; \\ k(x + \eta) & \forall -x^0 > |x| > -\eta; \\ c \operatorname{sign} x & \forall |x| > x^0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Звено, описываемое выражением (3.5), представляет собой достаточно общий случай однозначной непрерывной нелинейности.

Звенья с однозначными разрывными характеристиками. К ним относится релейное трехпозиционное звено без петли возврата (гистерезиса). Однозначная разрывная характеристика этого звена показана на рис.3.7, а. Формализованная запись этой характеристики имеет вид

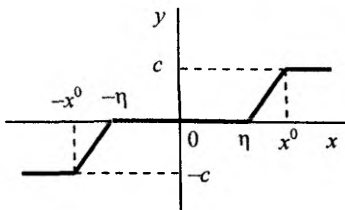


Рис.3.6

$$y = \begin{cases} c \operatorname{sign} x & \forall |x| > \eta; \\ 0 & \forall |x| < \eta. \end{cases} \quad (3.6)$$

При анализе и синтезе различных релейных систем часто используются идеализированные двухпозиционные реле, уравнение

каждого можно получить, если в выражение (3.6) положить $\eta = 0$. Тогда

$$y = c \operatorname{sign} x. \quad (3.7)$$

Характеристика этого звена представлена на рис.3.7, б.

К числу нелинейных

звеньев с однозначными разрывными характеристиками относится звено со ступенчатой характеристикой, преобразующее аналоговую величину в дискретную с квантованием по уровню (аналого-цифровой преобразователь без петли возврата). Формализованное выражение такой характеристики (рис.3.8) может быть записано в виде

$$y = E(x - 0,5 \operatorname{sign} x),$$

где $E(\zeta)$ – целая часть $\zeta = x - 0,5 \operatorname{sign} x$.

Звенья с двузначными характеристиками. Рассмотрим характеристику трехпозиционного реле с петлей возврата (рис.3.9, а). На участках $-\eta < x < -m\eta$ и $m\eta < x < \eta$ ($-1 < m < 1$) трех-

позиционная характеристика неоднозначна, так как переход от $y = 0$ к $y = \pm c$ происходит при $x = \pm\eta$, а возврат при $x = \pm m\eta$. Эту зависимость можно выразить соотношением

$$y = \begin{cases} c \operatorname{sign} x & \forall |x| > \eta; \\ 0 & \forall |x| < m\eta. \end{cases} \quad (3.8)$$

При использовании уравнения (3.8.) необходимо иметь в виду, что на участках, указанных выше, величина y имеет два значения.

Классическим примером звена с трехпозиционной релейной характери-

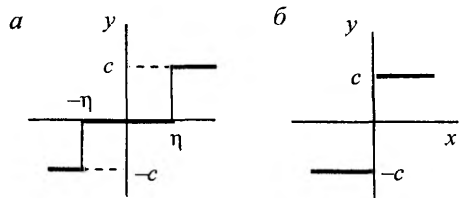


Рис. 3.7

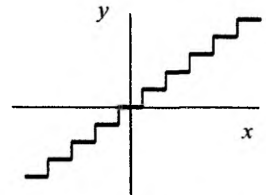


Рис. 3.8

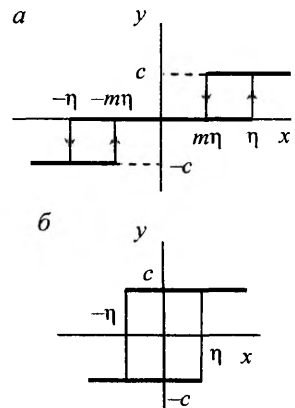


Рис.3.9

стикой является поляризованное реле с переключающейся контактной группой.

Если положить $m = -1$, то получим двухпозиционную петлевою релейную характеристику с шириной петли 2η (рис.3.9, б). Типичным представителем звена с такой характеристикой является обычное электромагнитное реле, напряжение срабатывания которого U_c всегда больше напряжения возврата U_v . При этом $U_c - U_v = 2\eta$. Заметим, что релейная характеристика, представленная на рис.3.9, а, позволяет получить любой вид характеристик этого типа. Например, положив $m = 1$, получим идеальную трехпозиционную релейную характеристику (см. рис.3.7, а), а при $\eta = 0$ – идеальную двухпозиционную (см. рис.3.7, б).

Звенья с многозначными характеристиками. Наиболее распространенными представителями этих нелинейных звеньев являются звенья с зазором (люфтом), часто встречающиеся в механических передачах. Механическая модель такого звена представлена на рис.3.10, а. Согласно характеристике, отражающей зависимость

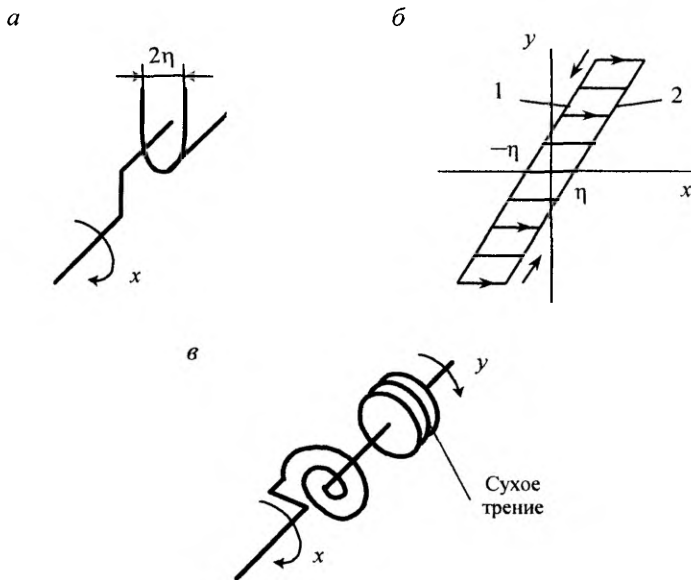


Рис.3.10

между положениями ведущего x и ведомого y валов (рис.3.10, б), каждому положению ведущего вала x соответствует множество положений ведомого вала y , лежащее в пределах, ограниченных прямыми 1 и 2. Выбор того или иного из возможных значений y обусловлено максимальным или минимальным отклонением y , предшествовавшим рассматриваемому моменту времени.

Характеристиками типа люфт обладают помимо механических систем с зазорами, механические системы с сухим трением (рис.3.10, в). Здесь вращающий момент $x = M$ уравновешивается моментом пружины M_n . При достижении моментом M_n величины, равной моменту трения M_r ($M_n = M_r = \eta$), начинается движение выходного вала y . При изменении направления вращения x движение выходного вала y начинается после изменения момента пружины на величину 2η . Описанному режиму работы механической системы с сухим трением соответствует характеристика, приведенная на рис.3.10, б.

Рассмотренные типовые звенья безусловно не исчерпывают разнообразия звеньев нелинейных систем. Среди звеньев линейных и нелинейных систем особое место занимает множительное звено. Если на его входы подаются независимые сигналы, то наличие такого звена не нарушает линейности системы, так как при этом выполняется принцип суперпозиции. Структурная схема перемножения независимых сигналов $y = xx_1$ показана на рис.3.11, а. Если сигналы x и x_1 зависимы, то даже при линейности всех остальных звеньев система становится нелинейной. Пример получения нелинейного звена с параболической характеристикой $y = kx^2$ показан на рис.3.11, б и в. Такие характеристики применяются при изучении экстремальных систем управления.

С помощью множительного звена и простых нелинейных звеньев типа двухпозиционного релейного (см. рис.3.7, б) может

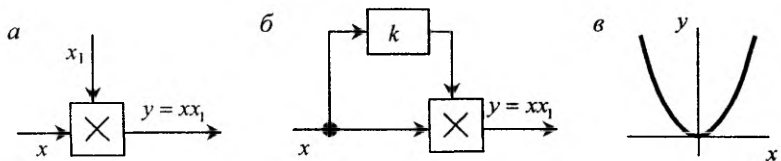


Рис.3.11

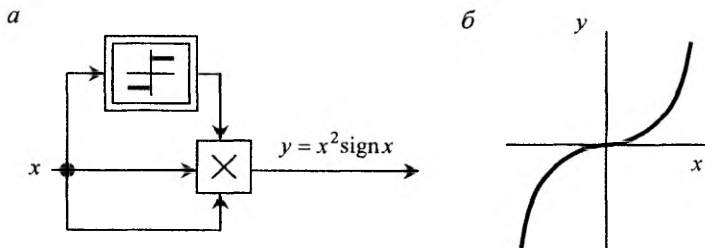


Рис.3.12

быть получено звено, обладающее параболической нелинейной характеристикой (рис.3.12). Нелинейные звенья с нечеткой параболической характеристикой применяются при реализации систем оптимальных по быстродействию.

Применение множительного звена и других функциональных преобразователей позволяет получить нелинейные звенья с заданными статическими характеристиками.

4. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для исследования динамических свойств нелинейных АСУ разработан целый ряд методов, которые можно подразделить на две большие группы:

- точные методы, которые имеют строгое математическое обоснование (методы припасовывания, фазовой плоскости, математического моделирования и некоторые другие);
- приближенные методы, которые не имеют строгого математического обоснования, но дают результат, практически удовлетворяющий разработчика. Наибольшее распространение получил метод гармонической линеаризации. Применение этих методов требует обязательной экспериментальной проверки.

4.1. МЕТОД ПРИПАСОВЫВАНИЯ

Основная идея метода заключается в применении кусочно-линейной аппроксимации при решении нелинейных задач. При этом нелинейная характеристика с существенной нелинейностью заменяется кусочно-линейной. Для каждого из линейных интервалов записывают дифференциальное уравнение и его решение с входящими в него постоянными интегрирования. Приравнявая те значения координат и их производных в конце предыдущего и начале последующего интервалов, которые не изменяются скачкообразно, находят числовые значения постоянных интегрирования, что дает возможность построить переходный процесс в системе и оценить его динамические свойства.

Обычно нелинейные АСУ состоят как из линейных звеньев, так и из нелинейных. Поэтому можно выделить отдельно линейную и нелинейную части системы.

Пусть АСУ с релейным управляющим устройством (нелинейная часть НЧ) имеет трехпозиционную идеальную характеристику (рис.4.1). Предположим, что линейная часть (ЛЧ) системы имеет передаточную функцию вида

$$W_{л}(p) = \frac{k}{Tp^2 + p}.$$

Уравнение, описывающее движение замкнутой системы в различных зонах нелинейной характеристики (I, II, III), имеет вид

$$Ty'' + y' = ku. \quad (4.1)$$

Для первой зоны ($u = 0$) это уравнение примет вид:

$$Ty'' + y' = 0 \quad (4.2)$$

при $-\eta \leq y \leq \eta$.

Для второй зоны ($u = u_0$) с учетом отрицательной обратной связи уравнение (4.2) запишется в виде

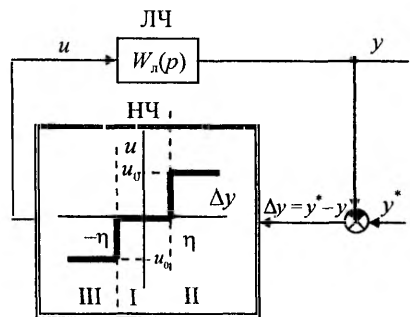


Рис.4.1

$$Ty'' + y' = -ku_0 \quad (4.3)$$

при $y > \eta$.

Для третьей зоны ($u = -u_0$)

$$Ty'' + y' = ku_0 \quad (4.4)$$

при $y < -\eta$.

Задавшись начальными условиями, будем решать дифференциальное уравнение, соответствующее той или иной зоне, отслеживая значение выходной переменной y . Как только величина y попадает в другую зону, фиксируется значение переменных y и y' , которые являются конечными для исследуемой зоны и начальными для новой зоны, описываемой соответствующим дифференциальным уравнением, решение которого характеризует движение системы в новой зоне и т.д. до достижения устойчивого состояния (равновесия или периодического колебания).

Предположим, что при $t = t_0$ система находится в точке A и при этом $y = y_A$; $y_A' = 0$ (рис.4.2).

Это состояние системы соответствует II зоне, следовательно, система описывается уравнением (4.3), интегрируя которое получим

$$Ty' + y = -ku_0t + C_1. \quad (4.5)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения (4.5) имеет вид

$$y = C_2 e^{p_1 t} - ku_0 t + C_1, \quad (4.6)$$

где $p_1 = -1/T$ корень характеристического уравнения $Tp + 1 = 0$; C_1 ,

C_2 – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

При $t = t_0 = 0$

$$y = y_A = C_2 + C_1;$$

$$y' = y_A' = p_1 C_2 - ku_0 = 0. \quad (4.7)$$

Решение системы (4.7) и дает искомые C_1 и C_2 . Подставив числовые значения C_1 и C_2 в (4.6), можно по-

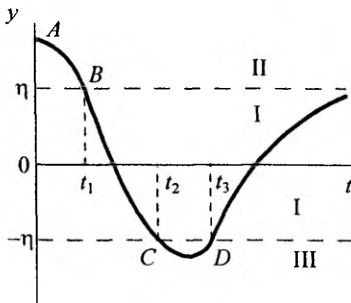


Рис.4.2

строить переходной процесс $y(t)$ в зоне II. Попад в точку B , находим $y_B = \eta$ и y'_B . Эти значения являются конечными значениями для II зоны и начальными для I. Интегрируя уравнение (4.2) для I зоны получим

$$y = C_4 e^{p_1 t} + C_3. \quad (4.8)$$

Подставив в уравнение (4.8) значения y_B и y'_B при $t_1 = 0$, найдем постоянные интегрирования C_3 , C_4 и построим кривую переходного процесса в зоне I, вплоть до достижения точки C . В этой точке фиксируются значения y_C и y'_C , которые являются начальными для III зоны, описываемой уравнением (4.4). Решение этого уравнения аналогично решению уравнения (4.3). По полученному решению строится кривая переходного процесса для III зоны. И так далее, до тех пор, пока зависимость $y(t)$ не получит асимптотического решения в зоне I, т.е. пока не будет выполняться условие

$$\left| \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \right| = C_{in} < \eta,$$

где C_{in} – значение i -й постоянной интегрирования в n -м интервале времени (для приведенного примера $i = 7$, $n = 4$). Заметим, что рассмотренный метод исследования динамического режима нелинейных АСУ достаточно громоздок и требует большого объема вычислений. Однако применение компьютерных технологий позволяет решить эту проблему.

4.2. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Этот метод может быть использован для исследования динамических режимов и линейных, и нелинейных систем.

Известно, что состояние системы, описываемой дифференциальным уравнением n -го порядка, полностью определяется значениями в каждый момент времени управляемой величины y и $n - 1$ ее производных.* Это дает возможность представить в некотором

* n -я производная определяется из дифференциального уравнения движения системы.

n -мерном пространстве состояние системы отдельной точкой, называемой изображающей точкой. Процесс изменения состояния системы представляется в этом случае как движение изображающей точки по некоторой траектории, называемой фазовой траекторией.

Начальные условия системы определяют начальное положение изображающей точки в n -мерном пространстве, которое называется фазовым пространством, или пространством состояний. Совокупность фазовых траекторий, найденных для всевозможных начальных условий, составляет фазовый портрет системы.

В том случае, когда систему можно описывать уравнением второго порядка, фазовое пространство превращается в фазовую плоскость с координатами y и y' , на которой можно наглядно изобразить фазовые траектории $y' = f(y)$ и проанализировать поведение системы.

4.2.1. Анализ линейных систем

Для иллюстрации метода фазовой плоскости рассмотрим линейную систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка

$$T^2 y'' + 2\xi T y' + y = kx.$$

Отбросив правую часть, получим однородное уравнение

$$T^2 y'' + 2\xi T y' + y = 0. \quad (4.9)$$

Характеристическое уравнение системы

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + y = 0. \quad (4.10)$$

Для получения зависимости $y' = f(y)$ обозначим $y' = dy/dt = z$. Тогда однородное уравнение (4.9) можно записать в виде

$$y'' = dz/dt = -(2\xi T z + y)/T^2.$$

Так как

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dy} z,$$

имеем

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{-2\xi Tz + y}{T^2 z}. \quad (4.11)$$

Решение дифференциального уравнения (4.11), связывающего две текущие координаты системы y и $y' = z$, и является уравнением фазовой траектории $z = f(y)$. Иными словами уравнение (4.11) является уравнением фазовой траектории в дифференциальной форме. Рассмотрим несколько случаев.

1. Коэффициент демпфирования $\xi = 0$. Корни характеристического уравнения (4.10) мнимые ($p_{1,2} = \pm j\omega$, $\omega = 1/T$) и решение однородного уравнения (4.9) примет вид

$$y = A \sin(\omega t + \varphi); \quad y' = z = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.12)$$

где A и φ – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Система (4.12) представляют собой уравнения фазовой траектории в параметрической форме, где параметром является переменная t . Для получения уравнения фазовой траектории в явном виде необходимо исключить параметр t . Возведя уравнения (4.12) в квадрат, а затем просуммировав их, окончательно получим

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{A^2\omega^2} = 1. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) является уравнением фазовой траектории в явном виде и представляет собой семейство эллипсов (рис.4.3, а), величина полуосей которых равна A и $A\omega$, т.е. определяется начальными условиями.

В рассматриваемом случае производная dz/dy для всех точек имеет вполне определенное значение, которое вычисляется в соответствии с уравнением (4.11) при $\xi = 0$:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{T^2 z}. \quad (4.14)$$

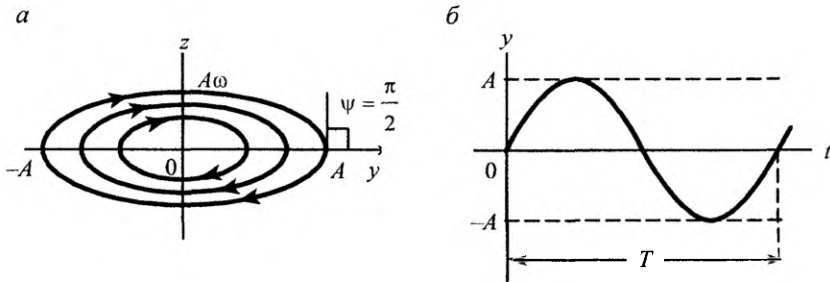


Рис.4.3

В точке $y = 0, z = 0$ производная dz/dy представляет собой неопределенность. Эта точка называется центром, который охватывается замкнутыми фазовыми траекториями. Эти траектории позволяют построить зависимость и оценить характер свободной составляющей переходного процесса (рис.4.3, б).

Отметим следующие свойства фазовых траекторий:

а) направление движения изображающей точки по фазовой траектории должно соответствовать знаку скорости изменения управляемой величины y . При $dy/dt > 0$ движение изображающей точки всегда будет происходить в сторону увеличения y , т.е. слева направо; при $dy/dt < 0$ - справа налево;

б) касательные к фазовым траекториям в точке с ординатой $z = 0$ пересекают ось абсцисс под прямым углом, так как из уравнения (4.14) имеем $dz/dy|_{z=0} = \infty$. Следовательно, $tg\psi = \infty, \psi = \pi/2$ (рис.4.3, а).

2. Корни характеристического уравнения (4.10) комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью ($0 < \xi < 1$). В этом случае

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{j\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\alpha \pm j\omega; \quad \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}.$$

Решение однородного уравнения (4.9) имеет вид

$$y = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi); \quad y' = z = \frac{dy}{dt}. \quad (4.15)$$

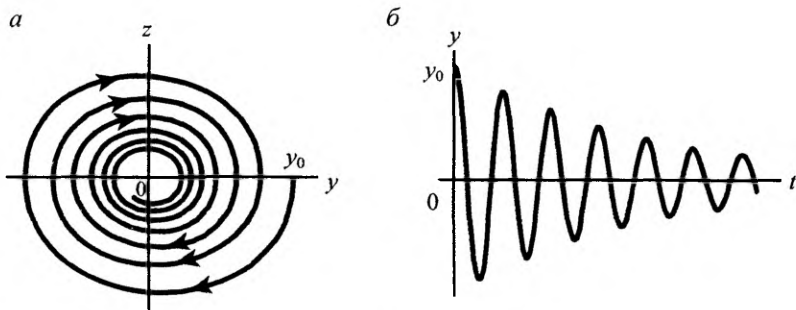


Рис.4.4

Уравнения (4.15) также являются уравнениями фазовой траектории в параметрическом виде. Можно показать, что уравнение фазовой траектории в явном виде представляет собой логарифмическую спираль, наматывающуюся на начало координат. Изменяя начальные условия, можем получить семейство фазовых траекторий (рис.4.4, а) и построить переходный процесс (рис.4.4, б). Особая точка, лежащая в начале координат dz/dy , в которую сходятся все фазовые траектории, носит название устойчивого фокуса (точка равновесия).

3. Корни уравнения (4.10) комплексные сопряженные с положительной вещественной частью ($-1 < \xi < 0$). Тогда $p_{1,2} = +\alpha \pm j\omega$.

Уравнения фазовой траектории в параметрической форме примут вид

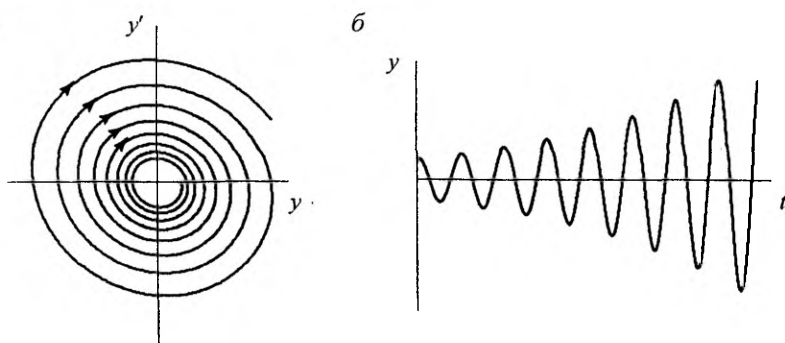


Рис.4.5

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi); \quad y' = z = \frac{dy}{dt}. \quad (4.16)$$

Фазовые траектории, построенные по уравнениям (4.16) для различных начальных условий, представляют собой выходящие из начала координат разматывающиеся логарифмические спирали (рис.4.5, а). Соответствующий расходящийся переходный процесс представлен на рис.4.5, б. Особая точка, лежащая в начале координат называется неустойчивым фокусом.

4. Корни характеристического уравнения (4.10) вещественные отрицательные ($\xi > 1$). Запишем их в виде

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\alpha \pm \beta < 0; \quad \beta = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{T}.$$

Решение однородного уравнения (4.9) имеет вид

$$y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}; \quad y' = C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (4.17)$$

Уравнения (4.17) являются уравнением фазовой траектории в параметрическом виде. Можно показать, что помимо уравнений (4.17) решениями уравнения (4.11) являются уравнения $z = p_1 y$ и $z = p_2 y$. Анализ фазового портрета (рис.4.6, а) показывает, что все фазовые траектории стягиваются к началу координат, что соответствует сходящемуся монотонному переходному процессу. В отличие от точек центра и фокуса в данном случае производные dz/dy в точке равновесия имеют вполне определенное значение, равное $p_1 = -(\alpha + \beta)$. Эта точка носит название устойчивого узла.

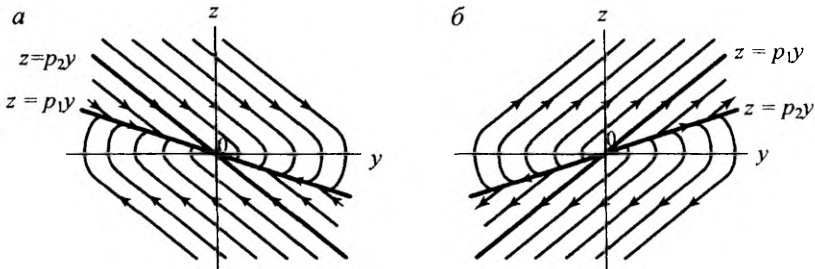


Рис.4.6

5. Корни характеристического уравнения (4.10) комплексные, сопряженные с отрицательной вещественной частью ($\xi < -1$). Так как $p_{1,2} = (\alpha \pm \beta) > 0$ ($\xi < -1$), решение однородного уравнения (4.9) получим в виде

$$y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}; \quad y' = C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t} \quad (4.18)$$

Фазовые траектории в этом случае выходят из начала координат (рис.4.6, б), что соответствует расходящемуся монотонному переходному процессу. Точка в начале координат соответствует точке неустойчивого равновесия и называется неустойчивым узлом.

Фазовый портрет дает возможность произвести анализ поведения системы, получив следующие данные:

1) о типе переходного процесса – колебательный (случай 2, 3) или монотонный (случай 3, 4);

2) в случае колебательного процесса – величину и количество перерегулирований;

3) об устойчивости системы – при фазовых траекториях, сходящихся в начало координат, система устойчива, при расходящихся траекториях – неустойчива.

Для получения более полных сведений о динамических режимах работы системы может быть построена кривая переходного процесса $y(t)$. Это можно сделать, например, следующим образом. Известно,

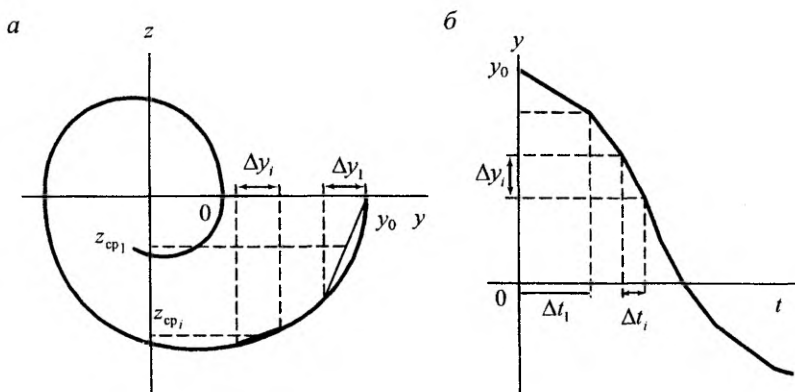


Рис.4.7

что $y = \int_0^t y' dt$ или $\Delta y_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y' dt = \dot{y}_{cp_i} \Delta t_i$, где $y'_{cp_i} = 0,5(y'_i + y'_{i+1}) = z_{cp_i}$;

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i.$$

Пусть имеем фазовую траекторию, приведенную на рис.4.7, а. Разобьем ось абсцисс на участки Δy_i , для каждого из которых определим $y'_{cp_i} = z_{cp_i}$. Определим время изменения координаты y на величину Δy_i : $\Delta t_i = \Delta y_i / z_{cp_i}$. Зная Δt_i и соответствующее ему Δy_i ($i = 1, 2, \dots$), можно построить переходной процесс (рис.4.7, б). Чем меньше шаг Δy_i , тем точнее построение.

4.2.2. Анализ нелинейных систем

Запишем уравнение движения нелинейной системы в неявном виде: $y'' = F(y, y')$. Учтывая, что $y' = z$, получим это уравнение в виде системы уравнений первого порядка:

$$z' = F(y, z); \quad (4.19)$$

$$y' = z, \quad (4.20)$$

где F – нелинейная функция.

Поделив (4.19) на (4.20) получим

$$dz/dy = F(y, z)/z = M_1(y, z)/M_2(y, z). \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) является дифференциальным уравнением фазовой траектории в неявном виде. Если правая часть этого уравнения задана аналитически и интеграл берется, то, найдя зависимость $z = f(y)$, получим уравнение фазовой траектории в аналитическом виде. В противном случае, воспользуемся теми или иными приемами графического интегрирования. В частности, широкое распространение получил метод изоклин, сущность которого заключается в построении кривых (изоклин), представляющих собой геометрическое место точек фазового портрета, на котором угол наклона касательных к фазовым траекториям постоянен. Примером изо-

клины может служить ось абсцисс, которую фазовые траектории пересекают под прямым углом. Заметим, что в выражении(4.21), характеризующем наклон касательной к фазовой траектории в данной точке, присутствуют три неизвестных: y , z , $z_y' = dz/dy$. Задавшись определенным значением z_y' , например $z_y' = N$, получим уравнение с двумя неизвестными, что на фазовой плоскости yOz и даст искомую изоклину, которая пересекается фазовыми траекториями с постоянным углом наклона $\psi = \arctgz_y' = \arctgN = \text{const}$.

Задаваясь различными значениями N , можно построить семейство изоклин для конкретного уравнения фазовой траектории, заданного в дифференциальном виде(4.21). Интегральная кривая $z = f(y)$ фазовой траектории для заданных начальных условий строится с помощью отрезков прямых, направление которых соответствует наклону, определяемому изоклинами.

Пример 4.1. Пусть имеем консервативную систему ($\xi = 0$), описываемую уравнением $T^2y'' + y = 0$. Построить фазовый портрет системы с помощью метода изоклин.

Решение. Воспользовавшись (4.11), запишем уравнение фазовой траектории в дифференциальной форме: $\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{T^2z}$. При этом

уравнение изоклины имеет вид

$$N = -\frac{y}{T^2z} \text{ или } z = -\frac{y}{T^2N}.$$

Таким образом, изоклины в данном случае представляют собой семейство прямых с угловым коэффициентом, зависящим от принятого $N = z_y'$. При $N = 0$ и $N = \pm\infty$ изоклины совпадают с осями координат z и y соответственно ($\psi_z = 0$; $\psi_y = \pi/2$). Построив для разных N семейство изоклин, можно построить фазовые траектории для различных начальных условий, которые будут представлять собой семейство эллипсов, вложенных друг в друга (рис.4.8).

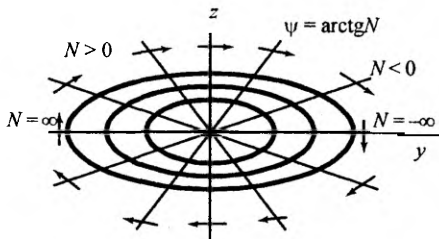


Рис.4.8

4.2.3. Исследование релейных АСУ

Эти системы относятся к классу существенно-нелинейных и обычно исследуются методом фазовой плоскости. В этом случае структурная схема системы разбивается на линейную и нелинейную части, причем предполагается, что линейная часть системы удовлетворительно описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Рассмотрим систему стабилизации температуры в сушильном шкафу, передаточная функция которого имеет вид $W_o = k_o/(Tp + 1)$. Измерение температуры производится с помощью чувствительного элемента, например термопары с передаточной функцией: $W_{ч.з}(p) = k_{ч.з}$. Регулирование температуры достигается за счет изменения подачи воздуха в сушильную камеру, путем изменения положения заслонки, приводимой в движение исполнительным механизмом с электроприводом, передаточная функция которого имеет вид $W_{и.м}(p) = k_{и.м}/p$.

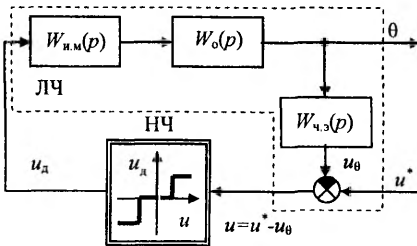


Рис.4.9

напряжением, подводимое к двигателю исполнительного механизма.

Запишем передаточную функцию линейной части (ЛЧ) системы в виде

$$W_{л.ч}(p) = k/(Tp^2 + p),$$

где $k = k_o k_{ч.з} k_{и.м}$.

Соответствующее дифференциальное уравнение в операторной форме примет вид

$$U(p) = W_{л.ч}(p)u_d(p) \text{ или } (Tp^2 + p)u(p) = ku_d(p),$$

а в области вещественного переменного это уравнение получит вид

$$Tu'' + u' = ku_d. \quad (4.22)$$

Запишем уравнение нелинейной части (НЧ), представляющей собой трехпозиционное релейное устройство:

$$u_d = F(u) = \begin{cases} 0, & \forall |u| \leq \eta; \\ u_0, & \forall u > \eta; \\ -u_0, & \forall u < -\eta. \end{cases} \quad (4.23)$$

При замыкании системы отрицательной нелинейной обратной связью уравнение движения замкнутой системы можно получить, подставив (4.23) в (4.22):

$$Tu'' + u' = -kF(u). \quad (4.24)$$

Знак минус в правой части (4.24) учитывает отрицательную обратную связь.

Воспользовавшись выражением (4.23), уравнение (4.24) можно представить в виде трех уравнений

$$Tu'' + u' = 0 \text{ при } |u| \leq \eta; \quad (4.25)$$

$$Tu'' + u' + ku_0 = 0 \text{ при } u > \eta; \quad (4.26)$$

$$Tu'' + u' - ku_0 = 0 \text{ при } u < -\eta. \quad (4.27)$$

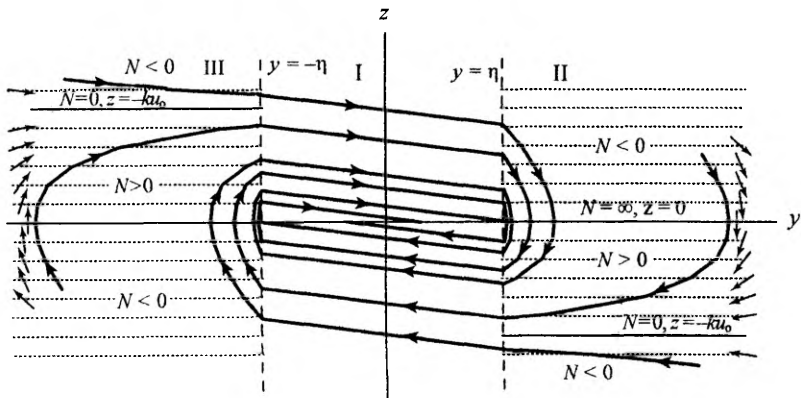


Рис.4.10

Обозначив $y = u$, $dy/dt = z$, построим с помощью метода изоклин фазовый портрет системы в координатах z , y (рис.4.10).

Найдем уравнения изоклин для каждой области фазовой плоскости. Для области I в соответствии с уравнением (4.25) имеем $Tz' + z = 0$ или $T(dz/dy)z + z = 0$, откуда $dz/dy = -1/T$. Полученное уравнение является уравнением фазовой траектории в дифференциальной форме, которое после интегрирования примет вид

$$z = -(y/T) + C_1, \quad (4.28)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Таким образом, фазовые траектории в области I представляют собой семейство параллельных прямых с углом наклона $\varphi = \text{arctg}(-1/T)$. Следовательно, вся область I представляет собой изоклину, так как угол наклона любых фазовых траекторий здесь одинаков.

Для области II в соответствии с уравнением (4.26) имеем $Tz' + z + ku_0 = 0$, откуда

$$dz/dy = -(z + ku_0)/Tz. \quad (4.29)$$

При $dz/dy = N$ получим уравнение изоклины

$$z = -ku_0/(1 + TN). \quad (4.30)$$

Правая часть уравнения (4.30) постоянна и зависит от принятой величины N . Таким образом, изоклины представляют собой семейство прямых, параллельных оси абсцисс.

Для нахождения угла наклона фазовых траекторий при пересечении их с изоклинами проанализируем уравнение (4.30). Для II области имеем следующие варианты:

1) $N = 0$. Тогда $\psi = \text{arctg}N = 0$ и уравнение изоклины $z = -ku_0$ совпадает с уравнением фазовой траектории;

2) $N = \pm\infty$. Тогда $\psi = \pm\pi/2$ и изоклина $z = 0$ совпадает с осью абсцисс;

3) $N > 0$. Тогда $0 < \psi < \pi/2$ и фазовые траектории пересекают изоклины $z = C = \text{const}$ ($0 > C > -ku_0$ при $y > \eta$) с положительным коэффициентом наклона;

4) $N < 0$. Тогда $0 > \psi > -\pi/2$ и фазовые траектории пересекают изоклины $z = C = \text{const}$ ($C > 0$ и $C < -ku_0$ при $y > \eta$) с отрицательным коэффициентом наклона.

Аналогичным образом можно найти уравнение изоклины $z = ku_0/(1 + TN)$ для области III и построить соответствующие траектории для области III (рис.4.10).

Уравнение фазовой траектории можно получить и аналитически, решив уравнение (4.29) путем разделения переменных и последующего интегрирования. Так, для области II имеем

$$dy = -T \frac{zdz}{z + ky_0} = -T \frac{(z + ku_0 - ku_0)dz}{z + ku_0}.$$

После интегрирования этого уравнения запишем уравнение фазовой траектории:

$$y = -T \int dz + T \int \frac{ku_0 dz}{z + ku_0} = T \{ku_0 \ln|z + ku_0| - z\} + C_2. \quad (4.31)$$

Аналогично можно найти уравнение фазовой траектории для области III:

$$y = -T \{ku_0 \ln|z - ku_0| + z\} + C_3. \quad (4.32)$$

Постоянные интегрирования C_2 и C_3 определяются из начальных условий.

Таким образом, в рассматриваемом случае найденные в явном виде уравнения фазовых траекторий (4.28), (4.31) и (4.32) дают возможность построить фазовый портрет системы аналитическим методом.

4.2.4. Колебательные процессы в релейных системах

Исследование колебаний в линейных системах обычно сводится к изучению процессов в колебательном звене, описываемом линейным дифференциальным уравнением второго порядка $T^2 y'' + 2T\xi y' + y = kx(t)$ при $|\xi| < 1$.

Напомним, что в линейных системах могут возникать вынужденные колебания, которые происходят под действием внешнего колебательного, в частности периодического, воздействия $x(t)$, и собственные колебания, возникающие в автономных системах, т.е. при $x(t) = 0$. В последнем случае колебания возникают за счет ненулевых начальных условий, которые физически соответствуют мгновенной подпитке системы энергией. Собственные колебания в линейных системах называются также свободными, так как система продолжает движение без внешних воздействий. Заметим, что характер собственных колебаний зависит от конкретного значения коэффициента демпфирования ξ . При $\xi = 0$ запасенная энергия в системе сохраняется и в ней возникают свободные периодические (незатухающие и нерасходящиеся) колебания: $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, где A и φ – постоянные интегрирования (амплитуда и фаза колебаний), определенные из начальных условий. Такая система называется консервативной замкнутой системой. Если $0 < \xi < 1$, в системе возникают свободные непериодические затухающие колебания; если $-1 < \xi < 0$, то свободные непериодические колебания будут расходящимися. В первом случае система отдает энергию во внешнюю среду, а во втором - она потребляет энергию из внешней среды. И та, и другая системы относятся к классу диссипативных, в которых происходит убыль или пополнение энергии.

В зависимости от конкретного значения коэффициента демпфирования ξ колебания могут быть сходящимися ($0 < \xi < 1$), расходящимися ($-1 < \xi < 0$), периодическими ($\xi = 0$).

В теории нелинейных колебаний, к которым относятся реальные системы, исследуются интегралы дифференциальных уравнений вида

$$T^2 y'' + \psi(y', y, t) = 0,$$

где ψ – нелинейная функция в неявном виде.

В случае возникновения периодического колебательного процесса изображающая точка на фазовой плоскости перемещается по одной и той же замкнутой кривой. Например, при линейной системе и при $\xi = 0$ этой кривой является эллипс (см. рис.4.3, а). Характер движения и фазовый портрет нелинейных систем гораздо разно-

образней. Здесь возможно наличие одного или даже нескольких замкнутых контуров, которые называются предельными циклами. Как и точка равновесия линейных систем (фокусы, узлы), предельные циклы могут быть устойчивыми и неустойчивыми. В первом случае фазовая траектория навивается на предельный цикл, во втором – свивается.

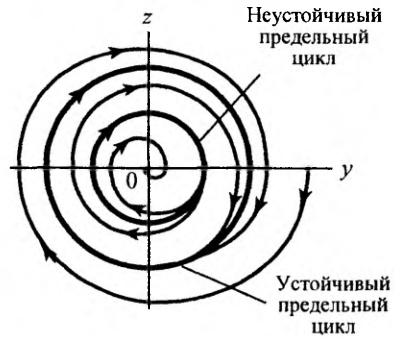


Рис.4.11

Примером системы с так называемым жестким режимом возбуждения колебаний являются обычные часы с маятником, фазовый портрет движения которого приведен на рис.4.11. Здесь состояние равновесия ($y = y' = 0$) устойчиво и окружено неустойчивым предельным циклом (часы не пойдут, если отклонить маятник в пределах этого цикла). Если изображающая точка находится вне неустойчивого цикла, то фазовые траектории будут стягиваться к устойчивому предельному циклу и в системе возникнут устойчивые периодические колебания, которые носят название автоколебаний. При этом компенсация расхода энергии происходит за счет ее подвода из внешних источников (в нашем примере упругая или энергия пружины или потенциальная энергия свободно подвешенной гири).

В общем случае автоколебаниями называются устойчивые собственные периодические колебания нелинейной системы при отсутствии внешних воздействий (внешняя связь остается только в виде подвода энергии), частота и амплитуда которых зависит от внутренних параметров системы.

4.2.5. Автоколебания в релейных системах

Рассмотрим случай, когда в качестве управляющего устройства системы, представленной на рис.4.10, используется реле с двухпозиционной петлевой релейной характеристикой (рис.4.12).

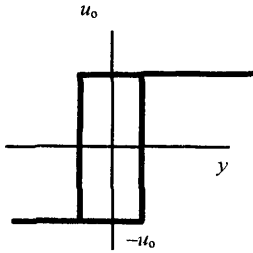


Рис.4.12

Фазовый портрет системы строится с помощью уравнения (4.1), которое в данном случае можно представить в виде двух уравнений для II и III зоны: $Tu'' + u' + ku_0 = 0$ и $Tu'' + u' - ku_0 = 0$ соответственно.

В данном случае уравнение для I зоны отсутствует, так как отсутствует зона нечувствительности.

В соответствии с характеристикой реле (рис.4.12) его переключение производится либо при движении слева направо на прямой $y = \eta$ ($z > 0$), либо при движении справа налево на прямой $y = -\eta$ ($z < 0$). Линии переключения на фазовой плоскости (рис.4.13) нанесены пунктиром:

Фазовый портрет системы (рис.4.13) имеет расходящиеся траектории при малых начальных значениях координат z , y и сходящиеся – при больших. Границей сходящихся и расходящихся траекторий является замкнутый контур (предельный цикл). Равновесное состояние системы $z = y = 0$ неустойчиво. Колебательный процесс устойчив, т.е. система работает в режиме автоколебаний.

Рассмотрим случай, когда управляющим устройством является трехпозиционный релейный элемент с петлей возврата (рис.4.14, а).

Здесь, в зависимости от соотношений параметров системы η и m , ($0 < m < 1$), переходный процесс в ней может носить либо

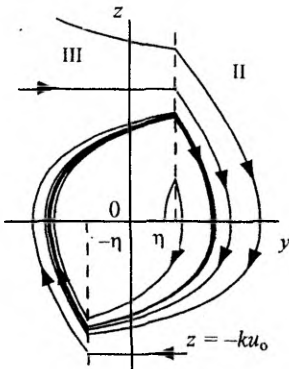


Рис.4.13

характер затухающих колебаний, обусловленных наличием зоны нечувствительности, либо автоколебаний, обусловленных петлей возврата. То значение коэффициента m , при котором возникает предельный цикл, называется критическим ($m = m_k$). Воспользовавшись уравнением фазовых траекторий для соответствующих зон (4.28), (4.31) и (4.32), можно построить эти траектории для начальных условий $y = +\eta$, $z = 0$ и $y = -\eta$, $z = 0$

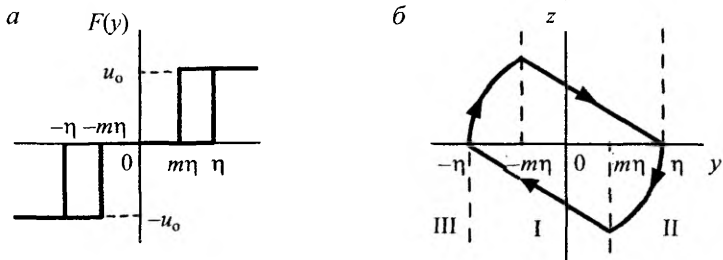


Рис.4.14

(рис.4.14, б). Абсцисса пересечения фазовых траекторий для II и I зоны (или III и I) и дает искомое значение $m_k\eta$.

В случае идеального двухпозиционного реле условие равновесия физически невыполнимо и в окрестностях точки $z = y = 0$ возникнут колебания с бесконечно малой амплитудой и бесконечно большой частотой. В реальных системах и тот, и другой параметры колебаний конечны. Здесь определяющую роль играют отброшенные производные более высокого порядка (третьего и выше). Поэтому метод фазовой плоскости для анализа поведения такой системы не пригоден, и для ее исследования применяют другие методы, в частности, метод гармонической линеаризации.

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

5.1. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

5.1.1. Сущность метода

Метод гармонической линеаризации нелинейностей основан на предположении о том, что в замкнутой нелинейной системе устанавливается режим автоколебаний с неизвестными амплитудой и частотой. При этом все переменные, характеризующие движение такой системы являются периодическими функциями времени и могут быть разложены в ряд Фурье. Предполагая, что линейная часть системы является низкочастотным фильтром, ограничиваются первыми членами этого ряда, что существенно упрощает расчеты.

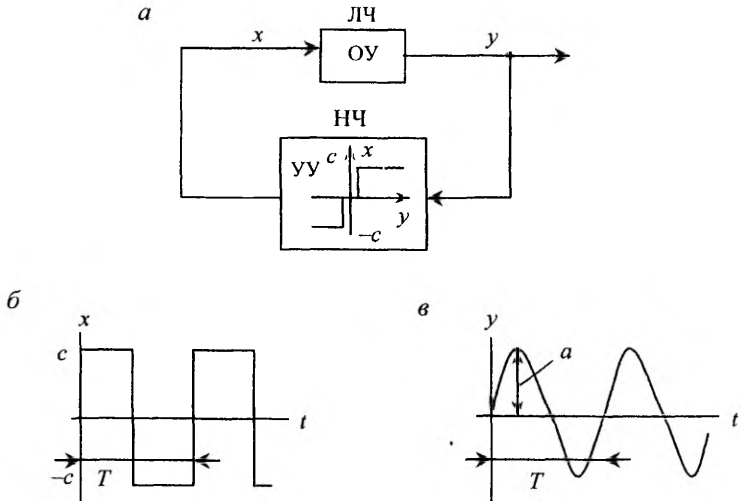


Рис.5.1

Представим нелинейную АСУ в виде линейной (ЛЧ) и нелинейной (НЧ) частей (рис.5.1, а). Здесь ЛЧ – объект управления (ОУ), а НЧ – управляющее устройство (УУ). Запишем уравнения линейной и нелинейной частей системы:

$$Y(p) = W_n(p)X(p) = \frac{B(p)}{A(p)}X(p); \quad (5.1)$$

$$x = F(y), \quad (5.2)$$

где $W_n(p) = B(p)/A(p)$ – передаточная функция линейной части системы; $B(p)$ и $A(p)$ – полиномы m -й и n -й степени соответственно ($m \leq n$); $F(y)$ – нелинейная функция.

Требуется установить факт отсутствия или наличия автоколебаний. В случае наличия последних определить их амплитуду a и частоту $\omega = 2\pi/T_a$, где T_a – период колебаний.

Строго говоря, автоколебания имеют несинусоидальную форму (рис.5.1, б), но так как по условию линейная часть является низкочастотным фильтром, то в первом приближении можно предположить, что

$y = a \sin \omega t$ (рис.5.1, в). Заметим, что принятое допущение корректно при выполнении условия $A(\omega_3)/A(\omega_1) \ll 1$, где $A(\omega_1)$ и $A(\omega_3)$ – амплитуды первой и третьей гармоник ряда Фурье соответственно. Тогда с учетом выражения (5.2) можно определить $Y(p)$ для различных нелинейных функций $F(y)$. Например, если нелинейная характеристика представляет собой двухпозиционное реле с петлевой характеристикой (рис.5.2), то при подаче на его вход гармонического сигнала на выходе получаем прямоугольные импульсы той же частоты со сдвигом на время τ , величина которого зависит от ширины петли.

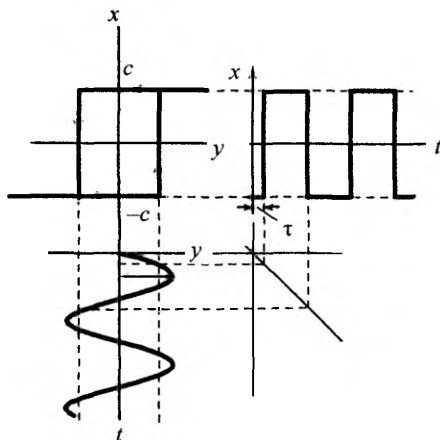


Рис.5.2

его вход гармонического сигнала на выходе получаем прямоугольные импульсы той же частоты со сдвигом на время τ , величина которого зависит от ширины петли.

Разложим выходную переменную нелинейного элемента $x(t)$, являющуюся периодической функцией времени, в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t), \quad (5.3)$$

где ω – частота первой гармоники

Коэффициенты гармонического ряда (5.3) линеаризации определяются по формулам

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\omega t) d\omega t; \quad A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\omega t) \sin(k\omega t) d\omega t;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\omega t) \cos(k\omega t) d\omega t.$$

Заметим, что если нелинейная характеристика симметрична относительно начала координат, то постоянная составляющая B_0 в разложении (5.3) отсутствует.

Так как линейная часть системы является низкочастотным фильтром, то в разложении (5.3) можно ограничиться первыми тремя членами. Тогда, учитывая, что $y = a \sin \omega t$, $y' = a \omega \cos \omega t$ и, следовательно, $\sin \omega t = y/a$, $\cos \omega t = y'/(a\omega)$, и положив $B_0 = 0$, получим

$$x(t) = \frac{A_1}{a} y(t) + \frac{B_1}{a\omega} \frac{dy(t)}{dt}.$$

Обозначив $q(a) = A_1/a$ и $q_1(a) = B_1/a$, можно записать

$$x(t) = q(a)y(t) + \frac{q_1(a)}{\omega} \frac{dy(t)}{dt}. \quad (5.4)$$

Дифференциальное уравнение (5.4) по форме подобно линейному дифференциальному уравнению, но с коэффициентами, зависящими от искомых величин a и ω . Последнее обстоятельство и отражает нелинейный характер зависимости $x = F(y)$.

Именно линейная форма записи (5.4) позволяет назвать этот прием гармонической линейризацией, а коэффициенты $q(a)$ и $q_1(a)$ – коэффициентами гармонической линейризации.

Преобразуя (5.4) по Лапласу, получим

$$X(p) = \left[q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} p \right] Y(p). \quad (5.5)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках уравнения (5.5) можно трактовать как передаточную функцию нелинейного гармонически линейризованного звена. Тогда

$$W_n(p, a, \omega) = \left[q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} p \right]. \quad (5.6)$$

При замыкании системы отрицательной обратной связью в соответствии с уравнениями (5.1), (5.5) и (5.6) получим

$$Y(p) = W_n(p)X(p) = -W_n(p)W_n(p, a, \omega)Y(p).$$

С учетом того, что $W_n(p) = B(p)/A(p)$, уравнение движения замкнутой системы (при отсутствии внешних воздействий) примет вид

$$[A(p) + B(p)W_n(p, a, \omega)]Y(p) = 0. \quad (5.7)$$

Воспользовавшись выражениями (5.6), (5.7), можно записать характеристическое уравнение системы в виде

$$D(p) = A(p) + B(p) \left[q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} p \right] = 0. \quad (5.8)$$

5.1.2. Критерии устойчивости

Линейная форма записи уравнения движения позволяет применить для исследования нелинейных систем методы, разработанные в теории линейных систем. В частности, для этой цели широко используются частотные и алгебраические критерии устойчивости.

Критерий Найквиста. Воспользовавшись соотношениями (5.1) и (5.6), запишем выражения для частотных характеристик линейной и нелинейной частей системы, представленной на рис.5.1:

$$W_n(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}; \quad W_n(j\omega, ja) = q(a) + \frac{q_1(a)}{\Omega} j\omega. \quad (5.9)$$

Так как критерий Найквиста использует частотные функции разомкнутой системы, то частоты внешних возмущений ω и искомая частота колебаний Ω совпадают, что позволяет в выражении (5.9) их сократить. Тогда АФЧХ разомкнутой системы примет вид

$$W_p(j\omega, a) = W_n(j\omega)W_n(a) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} [q(a) + jq_1(a)].$$

В соответствии с критерием Найквиста колебательный процесс в системе возникает в случае, если годограф вектора $W_p(j\omega, a)$ пройдет через точку $(-1, j0)$. Запишем это условие в виде

$$W_n(j\omega)W_n(a) = -1. \quad (5.10)$$

Условие (5.10) можно записать иначе:

$$W_n(j, \omega) = -\frac{1}{W_n(a)}. \quad (5.11)$$

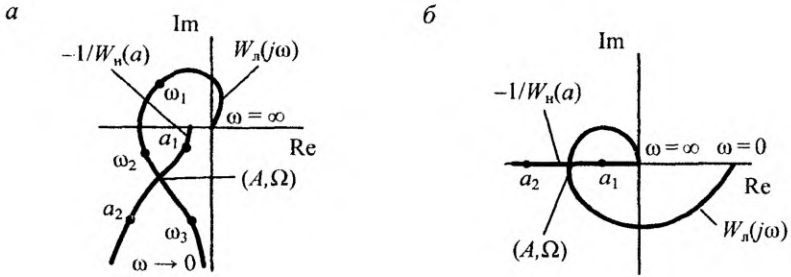


Рис.5.3

Уравнение (5.11), предложенное Гольдфарбом, позволяет определить искомые A и Ω . В частности, построив отдельно частотную характеристику линейной части $W_n(j\omega)$ и обратную частотную характеристику ее нелинейной части с отрицательным знаком (рис.5.3, а) можно найти точку их пересечения на комплексной плоскости, которая дает искомые значения $\omega = \Omega$; $a = A$. Значения Ω и A определяются по отметкам ω_i и a_j на соответствующих кривых. Если кривые не пересекаются, то периодическое решение отсутствует и, следовательно, колебания в системе не возникают. Заметим, что в случае, если $q_1(a) = 0$, характеристика $-1/W_n(a)$ сливается с осью абсцисс (рис.5.3, б).

Можно показать, что если точки характеристики $-1/W_n(a)$ с меньшими значениями амплитуды охватываются линейной частотной характеристикой $W_n(j\omega)$, т.е. $a_1 < a_2$ (рис.5.3) и имеются точки пересечения этих характеристик, то в системе возникают устойчивые колебания (автоколебания). Действительно, пусть годограф частотной характеристики разомкнутой системы $W_p(j\omega, a)$ при $a = A$ проходит через точку $(-1, j0)$ (рис.5.4). Тогда для системы, работающей в режиме устойчивых колебаний, при $a = A + \Delta a$ этот годограф должен пересечь ось абсцисс справа от точки $(-1, j0)$, т.е. система должна попасть в устойчивую область, что приводит к затуханию колебаний ($\Delta a \rightarrow 0$). Следовательно, при увеличении амплитуды a , абсолютное значение $W_n(A + \Delta a)$, а вместе с ним и $W_p(j\omega, A + \Delta a) = W_n(j\omega)W_n(A + \Delta a)$, должно уменьшаться. При этом

значение $1/W_n(A + \Delta a)$ увеличивается, что и отражает сформулированный выше признак устойчивых колебаний. Аналогичную картину получим при $a = A - \Delta a$. В этом случае колебательный процесс также будет сходиться к $a = A$, но с другой стороны.

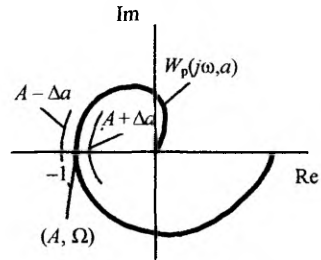


Рис.5.4

Другой способ исследования устойчивости колебаний сводится к непосредственному анализу смещения годографа $W_p(j\omega, a)$ относительно точки $(-1, j0)$, при добавлении и вычитании приращения Δa к амплитуде колебаний A . В частности, при смещении годографа $W_p(j\omega, a)$, показанном на рис.5.4, колебания сходятся в точку $(-1, j0)$, что свидетельствует об их устойчивости.

Критерий Гурвица. Известно, что условие устойчивости линейной системы по Гурвицу записывается в виде $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $a_0 > 0$, где Δ_i – определитель Гурвица; a_0 – коэффициент при высшей производной дифференциального уравнения движения системы.

В случае если предпоследний определитель Гурвица $\Delta_{n-1} = 0$, система находится на границе устойчивости и в ней возникают колебания.

Для гармонической линеаризованной системы коэффициенты ее характеристического уравнения зависят от частоты ω и амплитуды a колебаний. Тогда при прочих постоянных параметрах условие возникновения колебаний в системе можно записать в виде

$$\Delta_{n-1}(a, \omega) = 0. \quad (5.12)$$

Таким образом, необходимо найти a и ω , удовлетворяющие условию (5.12). Так как имеем два неизвестных, то для решения задачи необходимо иметь второе уравнение, которое можно получить, представив характеристическое уравнение системы в виде, соответствующем наличию пары чисто мнимых корней (периодический режим).

Например, пусть дано характеристическое уравнение для системы третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

При $p_{1,2} = \pm j\omega$ это характеристическое уравнение можно записать в виде

$$(p^2 + \omega^2)(a_0 p + b_1) = a_0 p^3 + b_1 p^2 + a_0 \omega^2 p + \omega^2 b_1 = 0,$$

где $b_1 = a_1$, $a_0 \omega^2 = a_2$; $\omega^2 b_1 = a_3$.

Тогда $\omega^2 = a_3/a_1$ или в общем случае:

$$\omega^2 = a_n/a_{n-2} = f(a, \omega). \quad (5.13)$$

Решение системы уравнений (5.12) и (5.13) дает искомые $a = A$ и $\omega = \Omega$. Если это решение является вещественным и положительным, то в системе имеет место незатухающий колебательный процесс.

Исследование устойчивости колебаний проводится аналогично описанному: если $\Delta_{n-1} > 0$ при $A + \Delta a$ и $\Delta_{n-1} < 0$ при $A - \Delta a$, имеем устойчивое периодическое решение (автоколебания). В остальных случаях получим неустойчивые колебания: либо сходящиеся ($a \rightarrow 0$), либо расходящиеся ($a \rightarrow \infty$).

5.1.3. Определение коэффициентов гармонической линеаризации

Использование любого критерия устойчивости для определения A и Ω требует знания передаточной функции нелинейной части системы, определяемой выражением (5.6), а следовательно, знания коэффициентов гармонической линеаризации $q(a)$ и $q_1(a)$.

В качестве примера найдем коэффициенты гармонической линеаризации $q(a)$ и $q_1(a)$ для трехпозиционной релейной характеристики с петлей возврата (см. рис.5.5).

Пусть на вход релейного элемента подается гармонический сигнал $y = a \sin \omega t$. Тогда в соответствии с рис.5.5 имеем $\eta = a \sin \alpha_1$; $m\eta = a \sin \alpha_2 = a \sin(\pi - \alpha_1)$. Соответственно

$$\sin \alpha_1 = \eta/a; \quad \sin(\pi - \alpha_1) = m\eta/a. \quad (5.14)$$

Найдем коэффициент гармонической линейаризации:

$$\begin{aligned}
 q(a) &= \frac{A_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} x(\omega t) \sin(\omega t) d\omega t = \\
 &= \frac{2}{\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c \sin(\omega t) d\omega t = \\
 &= \frac{-2c}{\pi a} [\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1] = \\
 &= \frac{2c}{\pi a} [\cos(\pi - \alpha_2) + \cos \alpha_1].
 \end{aligned}$$

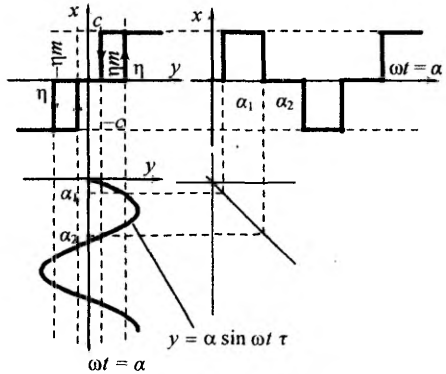


Рис.5.5

Воспользовавшись соотношениями (5.14) и учитывая, что $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, получим

$$q(a) = \frac{2c}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{m^2 \eta^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2}} \right). \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) позволяет определить коэффициент гармонической линейаризации $q(a)$ для различных релейных характеристик. Например, при $\eta = 0$ релейная характеристика, представленная на рис.5.5, принимает вид, показанный на рис.5.6, а. В этом случае коэффициент гармонической линейаризации

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a}.$$

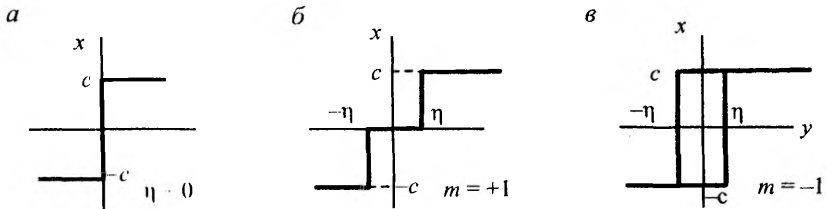


Рис.5.6

Характеристики релейных элементов при $m = \pm 1$ представлены на рис.5.6, б, в. Коэффициенты гармонической линеаризации $q(a)$ для обоих случаев одинаковы:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2}}.$$

Аналогично найдем второй коэффициент гармонической линеаризации

$$q_1(a) = \frac{B_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} x(t\omega) \cos(\omega t) d\omega t = \frac{2}{\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} c \cos(\omega t) d\omega t = \frac{2c}{\pi a} [\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1].$$

С учетом (5.14) окончательно получим

$$q_1(a) = \frac{2c\eta}{\pi a^2} (m - 1). \quad (5.16)$$

Воспользовавшись выражением (5.16) можно определить значение коэффициента $q_1(a)$ для других релейных характеристик. В частности, для релейного элемента с петлевой двухпозиционной характеристикой (рис.5.6, в) получим

$$q_1(a) = -\frac{4c\eta}{\pi a^2}.$$

Для релейных элементов с характеристиками, представленными на рис.5.6, а, б, коэффициент $q_1(a) = 0$. Заметим, что коэффициент $q_1(a) < 0$ в том случае, когда характеристика релейного элемента имеет петлю возврата, обуславливающую запаздывание в этом элементе.

Подставив полученные $q(a)$ и $q_1(a)$ в выражение передаточной функции соответствующих релейных элементов, получим конкретное выражение этой функции.

5.1.4. Определение параметров автоколебаний

Рассмотрим методику определения частоты и амплитуды автоколебаний, возникающих в нелинейной системе на конкретном примере.

Пусть имеем систему управления тепловым режимом в сушильном шкафу, функциональная схема которой представлена на рис.5.7. Здесь ИМ – исполнительный механизм (серводвигатель с заслонкой); ОУ – объект управления (сушильный шкаф); ЧЭ – чувствительный элемент (термопара).

Передаточные функции звеньев линейной части системы имеют вид

$$W_{и.м}(p) = \frac{k_{и}}{p}; \quad W_{о.у}(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1}; \quad W_{ч.э}(p) = k_э.$$

В качестве управляющего устройства используется трехпозиционный релейный регулятор, петлей возврата которого можно пренебречь.

Чтобы установить факт наличия колебаний запишем уравнение движения линейной части системы:

$$(T_o p^2 + p)Y(p) = kX(p), \quad k = k_{и}k_o k_э. \quad (5.17)$$

Уравнение трехпозиционного гармонически линеаризованного релейного регулятора (при $m \approx 1$) имеет вид

$$X(p) = W_{н}(p, \omega, a)Y(p), \quad (5.18)$$

где $W_{н}(p, \omega, a)$ – передаточная функция нелинейной части системы,

$$W_{н}(p, \omega, a) = \left[q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} p \right].$$

Учитывая, что в нашем случае $q_1(a) = 0$, имеем

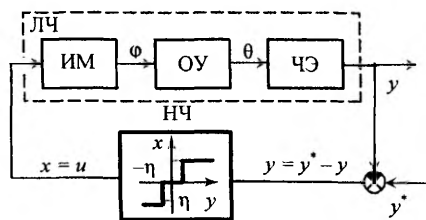


Рис.5.7

$$W_n(a) = q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2}}. \quad (5.19)$$

Воспользовавшись выражениями (5.17)-(5.19), запишем уравнение замкнутой системы с отрицательной обратной связью:

$$[T_0 p^2 + p + kq(a)]Y(p) = 0.$$

В соответствии с алгебраическим критерием устойчивости Гурвица

$$\Delta_{n-1} = \Delta_1 = a_1 = 1 > 0; \quad a_0 = T_0^2 > 0.$$

Таким образом, в рассматриваемой системе, описываемой уравнением второго порядка, колебания возникнуть не могут, что обусловлено наличием зоны нечувствительности элемента.

Учтем инерционность исполнительного механизма. Тогда передаточная функция ИМ примет вид:

$$W_{и.м}(p) = \frac{k_{и}}{p} \frac{1}{T_{и.м}p + 1},$$

где $T_{и.м}$ – электромеханическая постоянная времени серводвигателя.

При этом уравнение линейной части запишется в виде

$$[T_0 T_{и.м} p^3 + (T_0 + T_{и.м}) p^2 + p]Y(p) = kX(p).$$

Замкнув систему отрицательной обратной связью, и обозначив $T_0 T_{и.м} = T_2$, $T_0 + T_{и.м} = T_1$, запишем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$T_2 p^3 + T_1 p^2 + p + kq(a) = 0. \quad (5.20)$$

Предпоследний определитель Гурвица

$$\Delta_{n-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_1 & kq \\ T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 - T_2 kq(a),$$

Условие возникновения колебаний в системе

$$\Delta_2 = T_1 - T_2 kq(a) = 0, \quad (5.21)$$

откуда

$$T_1 = T_2 k \frac{4c}{\pi} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2}}. \quad (5.22)$$

Из выражения (5.22) найдем амплитуду колебаний a . Обозначив $4cT_2k/\pi = b$ и возведя в квадрат обе части уравнения (5.22), получим биквадратное уравнение $T_1 a^4 - b^2 a^2 + b^2 \eta^2 = 0$, решив которое, запишем

$$a^2 = \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 4T_1^2 b^2 \eta^2}}{2T_1^2}. \quad (5.23)$$

Как следует из (5.23), найденное решение имеет физический смысл только при условии $b > 2T_1\eta$, которое можно записать в виде

$$T_1 < \frac{2T_2 k c}{\pi \eta}. \quad (5.24)$$

Неравенство (5.24) и есть условие возникновения колебаний с амплитудой $a = A$.

Частота колебаний ω определяется из уравнения $a_{n-2}\omega^2 = an$. В нашем случае при $n = 3$ имеем $\omega^2 = a_3/a_1$, где в соответствии с (5.20) $a_1 = T_1$; $a_3 = kq(a)$. Тогда с учетом (5.19), получим

$$\omega^2 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{k}{T_1} \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2}}. \quad (5.25)$$

Полученное выражение имеет физический смысл при $a > \eta$.

Таким образом из соотношений (5.23) и (5.25) находим искомые $a = A$ и $\omega = \Omega$.

Для установления факта наличия автоколебаний необходимо проверить устойчивость полученного периодического решения. Для этого в соответствии с (5.19) построим график $q(a)$ (рис.5.8).

Воспользовавшись выражением (5.21), получим $q(a)|_{a=A} = T_1/T_2 k = \text{const}$. Пересечение прямой $q(A)$ и кривой $q(a)$ имеет ме-

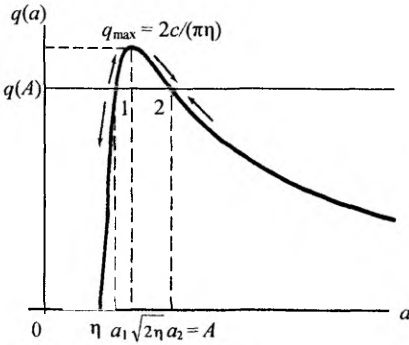


Рис.5.8

сто при $q(A) < q_{\max}$ (рис.5.8).

При этом точки 1 и 2 соответствуют двум корням (a_1, a_2) уравнения (5.21). Проверим устойчивость полученных решений ($A = a_1$ и $A = a_2$), воспользовавшись выражением (5.21). Для этого к A добавим и вычтем Δa . При $A = a_1$ (точка 1) получим следующие варианты:

1) если $a = a_1 + \Delta a$, то величина $q(a)$ растет (рис.5.8)

и, следовательно, определитель Δ_2 в соответствии с (5.21) становится отрицательным, что свидетельствует о наличии расходящихся колебаний;

2) если $a = a_1 - \Delta a$, то величина $q(a)$ уменьшится, следовательно, $\Delta_2 > 0$, и колебания будут затухать. Значит, решение $A = a_1$, характеризует режим неустойчивых колебаний. Аналогичный анализ показывает, что решение $A = a_2$ (точка 2) характеризует режим устойчивых колебаний, что свидетельствует о наличии в системе автоколебаний с амплитудой a_2 . Подставив найденное $A = a_2$ в (5.25), найдем частоту автоколебаний $\omega = \Omega$. Таким образом, при выполнении условия (5.24) в системе имеют место автоколебания.

Выражение (5.24) позволяет находить соотношение параметров рассматриваемой системы, при которых возникают автоколебания. Так как $T_2 = T_0 T_{и.м}$ и $T_1 = T_0 + T_{и.м}$, то (5.24) можно представить в виде

$$(T_{и.м} + T_0) < \frac{2T_{и.м}T_0kc}{\pi\eta} \quad \text{или} \quad T_{и.м} > \frac{\pi T_0\eta}{2T_0kc - \pi\eta}. \quad (5.26)$$

Тогда условие отсутствия автоколебаний в системе третьего порядка ($n = 3$) при релейном управляющем устройстве с трехпозиционной идеальной релейной характеристикой можно записать, поменяв знак неравенства в выражении (5.26).

5.2. ВИБРАЦИОННАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В случае воздействия на нелинейную часть системы, работающей в режиме автоколебаний с частотой $\omega = \Omega$ и амплитудой $a = A$, внешних медленно меняющихся сигналов $y_0(t)$, под которыми понимаются сигналы удовлетворяющие условию

$$y_0(t + T_a) - y_0(t) \ll y_0(t),$$

в системе возникают несимметричные автоколебания и при разложении функций $x(t)$ в ряд Фурье, в нем появляется постоянная составляющая B_0 , отличная от нуля (рис.5.9). Заметим, что в случае несимметрии нелинейной характеристики $x = F(y)$ относительно начала координат несимметричные автоколебания могут возникнуть и при отсутствии внешних воздействий. Однако этот случай не представляет практического интереса и в дальнейшем не рассматривается.

Так как внешний сигнал изменяется медленно, то в течение одного периода автоколебаний T_a его можно считать постоянным и равным y_0 . Тогда уравнение нелинейной части системы можно записать в виде

$$x(t) = B_0 + q(a)y_a + \frac{q_1(a)}{\omega} \frac{dy_a}{dt},$$

где $y_a = y - y_0 = a \sin \omega t$ – периодическая составляющая входного сигнала $y(t)$; y_0 – квазипостоянная составляющая этого сигнала; a и ω – амплитуда и частота автоколебаний.

Коэффициенты гармонической линеаризации $q(a)$ и $q_1(a)$ определяются аналогично рассмотренному выше (см. раздел 5.1.3) Можно показать, что для нелинейного элемента с трехпозиционной релейной характеристикой с петлей возврата коэффициент $q_1(a)$ не зависит

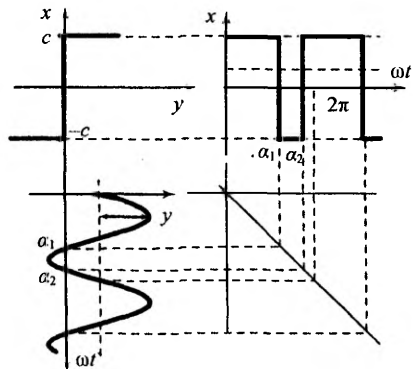


Рис.5.9

от величины y_0 и определяется по формуле (5.16), а коэффициент $q(a)$ записывается в виде

$$q(a) = \frac{S}{\pi a} \left[\sqrt{1 + \frac{(\eta + y_0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(\eta - y_0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(m\eta + y_0)^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{(m\eta - y_0)^2}{a^2}} \right]. \quad (5.27)$$

В рассматриваемом примере $\eta = 0$ (рис.5.9) эти коэффициенты равны:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a^2}}; \quad q_1(a) = 0. \quad (5.28)$$

Постоянная составляющая на выходе релейного элемента

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\omega t) d\omega t = \frac{c}{2\pi} \left[\int_0^{\alpha_1} d\alpha - \int_0^{\alpha_2} d\alpha + \int_{\alpha_2}^{2\pi} d\alpha \right] = \frac{c}{\pi} [\alpha_1 - \alpha_2 + \pi];$$

Так как $y_0 = a \sin \alpha_1$ (рис.5.9), получим $\alpha_1 = \arcsin \frac{y_0}{a}$. Аналогично,

$\pi - \alpha_2 = \arcsin \frac{y_0}{a}$. Тогда

$$B_0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{y_0}{a} = \Phi(y_0), \quad (5.29)$$

где $\Phi(y_0)$ – так называемая функция смещения.

Таким образом, если рассматриваемый релейный элемент находится в режиме автоколебаний, то при подаче на его вход медленно меняющегося сигнала $y_0(t)$ на выходе получаем составляющую сигнала $x(t)$ в виде $x_0 = B_0 = \Phi_0(y_0)$, изменяющуюся в соответствии с (5.29), как это показано на рис.5.10.

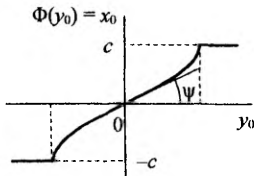


Рис.5.10

Функция $\Phi(y_0)$ является достаточно гладкой кривой и представляет собой квазистатическую характеристику релейного элемента по каналу $y_0 \rightarrow x_0$, которую можно подвергнуть обычной линеаризации. В результате этого нелинейное звено можно представить в виде усилительного звена с коэффициентом усиления

$$k_n = \operatorname{tg} \psi = \left. \frac{d\Phi(y_0)}{dy_0} \right|_{y_0=0}. \quad (5.30)$$

При этом уравнение движения системы относительно медленно меняющегося воздействия можно записать в виде

$$[A(p) + B(p)k_n]Y_0(p) = k_n F(p),$$

где $W_n(p) = B(p)/A(p)$ – передаточная функция линейной дроби системы; $F(p) = L[f(t)]$; $f(t)$ – внешнее медленно меняющееся воздействие, приложенное к замкнутой системе.

В системе (рис.5.11) внешнее воздействие $f(t)$ приложено со стороны задания $f(t) = y^*(t)$. Переменная на выходе линейного звена содержит, помимо медленно меняющегося сигнала $y_0(t)$, высокочастотную составляющую $y_a = a \sin \omega t$, которая отфильтровывается инерционной частью системы. Таким образом, можно считать, что медленно меняющиеся сигналы проходят через релейный элемент с коэффициентом передачи равным k_n , в то время как для автоколебательного контура передаточная функция этого элемента

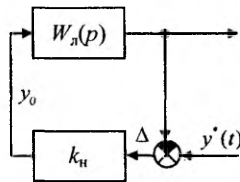


Рис.5.11

$$W_n(a, \omega, p) = q(a) + \frac{q_1(a)}{\omega} p.$$

Здесь $q(a)$, $q_1(a)$ и k_n для идеального трехпозиционного релейного элемента (рис.5.9) определяются соотношениями (5.28) и (5.30).

Аналогично определяется функция смещения $\Phi(y_0)$ для других типов нелинейностей. Например, для нелинейности с зоной нечувствительности (рис.5.12, а) функция смещения имеет вид, показанный на рис.5.12, б.

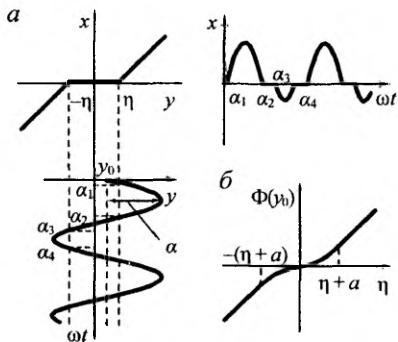


Рис.5.12

Анализ зависимостей $\Phi(y_0)$, приведенных на рис.5.10 и 5.12, б, показывает, что для медленно меняющегося сигнала $y_0(t)$ эффект сглаживания существен. При этом значительно повышается точность работы системы. Можно показать, что аналогичный эффект имеет место и при других типах нелинейных характеристик.

Этот эффект называется вибрационной линейризацией или вибрационным сглаживанием нелинейностей при помощи возбуждения автоколебаний в системе. Поэтому функцию $\Phi(y_0)$ иногда называют сглаженной нелинейной характеристикой. Заметим, что эффект сглаживания нелинейности можно получить и при вынужденных колебаниях, но при этом возникает необходимость иметь специальный генератор колебаний.

Изложенное позволяет сформировать необходимое условие возникновения эффекта вибрационного сглаживания нелинейностей:

$$\omega_a \gg \omega_{0 \max}, \quad (5.31)$$

где ω_a – частота автоколебаний в нелинейной системе; $\omega_{0 \max}$ – максимальная частота внешнего сигнала $f(t)$.

Для проверки выполнения условия (5.31), а также для оценки уровня вибраций, возникающих в системе, обязательно определяются числовые значения частоты ω_a и амплитуды a автоколебаний. При этом используется один из методов, рассмотренных ранее.

Эффект вибрационного сглаживания нелинейностей используется при проектировании высокоточных систем с целью исключения отрицательного влияния на качество их работы таких негативных факторов, как наличие зоны нечувствительности, люфта, петли и т.п.

В качестве иллюстрации, рассмотрим систему управления штурвалом самолета, в которой для уменьшения влияния сухого

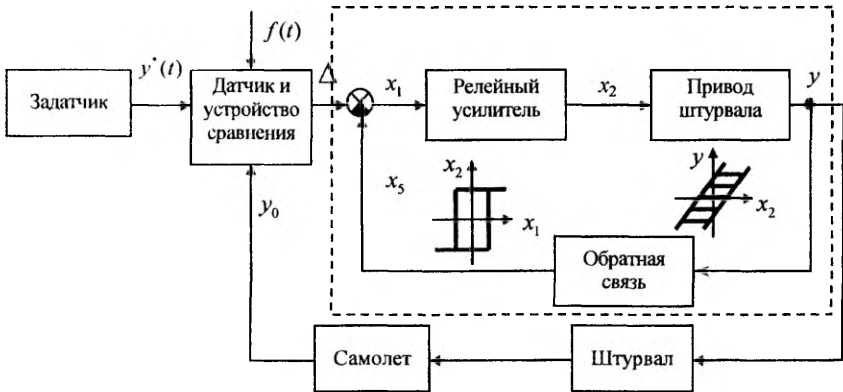


Рис.5.13

трения в приводе штурвала применен релейный усилитель, возбуждающий автоколебания в локальной системе. На функциональной схеме системы (рис.5.13) штриховым контуром выделена упомянутая локальная система.

Амплитуда a и частота ω автоколебаний переменной в локальной системе подбирается такой, чтобы они не воспринимались корпусом самолета. Приведенная система может рассматриваться как следящая за произвольно медленно меняющимися внешними сигналами $\bar{f}(t)$, вызывающими отклонение самолета от заданного курса y^* . В соответствии с методикой, изложенной выше, для данной системы находят a , ω и $\Phi(\Delta)$. Далее производят обычную линеаризацию функции смещения, т.е. заменяют нелинейную гладкую зависимость $\Phi(\Delta)$ линейной: $\Phi(\Delta) = k_n \Delta$. К полученному уравнению присоединяют уравнения всех остальных звеньев системы (самолета, штурвала и др.) и рассчитывают всю систему как линейную. При этом уже не обращают внимания на наличие автоколебаний в локальном контуре, так как они учтены при определении эквивалентного коэффициента усиления этого контура k_n .

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. *Бесекаерский В.А.* Теория систем автоматического регулирования В.А.Бесекаерский, Е.П.Попов. М.: Наука, 1972. 767 с.
2. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. М.-Л.: Энергия, 1966. Ч.2. 372 с. 1970. Ч.3. 328 с.
3. *Глинков Г.М.* Теоретические основы автоматического управления металлургическими процессами / Г.М.Глинков, М.Д.Климовицкий. М.: Металлургия, 1985. 304 с.

Дополнительный

4. *Власов К.П.* Специальный курс по теории автоматического управления / Харьковский политехнический ин-т. Харьков, 1974. 200 с.
5. *Лукас В.А.* Теория автоматического управления. М.: Недра, 1990. 416 с.
6. *Попов Е.П.* Приближенные методы исследования нелинейных систем / Е.П.Попов, И.П.Пальтов. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
7. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1963. 431 с.
8. Теория автоматического управления / Под ред. А.В.Нетушила. М.: Высшая школа, 1972. Ч.2. 432 с.
9. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. ОСОБЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ...	6
1.1. Системы с запаздыванием	6
1.2. Системы с распределенными параметрами	10
1.3. Устойчивость систем с запаздыванием	15
1.4. Коррекция АСУ объектами с большим запаздыванием	21
2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ.....	26
2.1. Математические методы анализа функционирования дискретных систем...	26
2.1.1. Разностные уравнения	26
2.1.2. Прямое z -преобразование	31
2.1.3. Обратное z -преобразование	37
2.2. Импульсные фильтры	40
2.3. Устойчивость импульсных систем	44
2.3.1. Условия устойчивости систем	44
2.3.2. w -преобразование.....	47
2.3.3. Частотные критерии устойчивости	48
3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ	52
4. ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	60
4.1. Метод приспособывания	61
4.2. Метод фазовой плоскости	63
4.2.1. Анализ линейных систем	64
4.2.2. Анализ нелинейных систем.....	70
4.2.3. Исследование релейных АСУ	72
4.2.4. Колебательные процессы в релейных системах.....	75
4.2.5. Автоколебания в релейных системах.....	77
5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	79
5.1. Метод гармонической линеаризации	79
5.1.1. Сущность метода	79
5.1.2. Критерии устойчивости.....	83
5.1.3. Определение коэффициентов гармонической линеаризации.....	86
5.1.4. Определение параметров автоколебаний.....	89
5.2. Вибрационная линеаризация нелинейности	93
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	98

Учебное издание

**ВЛАСОВ Константин Петрович
АНИКИН Михаил Константинович**

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
ОСОБЫЕ, ДИСКРЕТНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

Редактор *Л.А.Левина*
Корректор *Е.С.Шарова*
Компьютерная верстка *Н.Н.Высоцкой*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Сдано в набор 03.02.06. Подписано к печати 06.05.06. Формат 60×84/16.
Бум. для копировальной техники. Гарнитура «Таймс». Отпечатано на ризографе.
Усл.печ.л. 5,75. Усл.кр.-отт. 5,75. Уч.-изд.л. 5. Тираж 100 экз. Заказ 178. С 44.

Санкт-Петербургский государственный горный институт имени Г.В.Плеханова
РИЦ Санкт-Петербургского государственного горного института
Адрес института и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2