

Ш. Р. Убайдуллаева

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ
ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С
ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА БАЗЕ ГРАФОВЫХ
МОДЕЛЕЙ**

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И
ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ИРРИГАЦИИ И
МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОГОХОЗЯЙСТВА”**

Факультет “Энергетика”

Кафедра “Автоматизация и управление технологическими процессами”

Ш. Р. Убайдуллаева

МОНОГРАФИЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ

ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ

ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С

ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА БАЗЕ ГРАФОВЫХ

МОДЕЛЕЙ

ТАШКЕНТ 2024

Целью данного исследования является разработка на базе графовых моделей топологического метода моделирования и исследования структурно-сложных систем с постоянным и переменным запаздыванием. Научная новизна работы заключается в том, что разработан метод исследования непрерывных линейных систем управления на основе графовых моделей. Создан машинно-ориентированный топологический метод моделирования систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом.

Рецензенты: **Д.Б. Кодиров** – заведующий кафедрой “Электроснабжение и возобновляемые источники энергии” Национального исследовательского университета “ТИИИМСХ”» кафедраси
мудир, т.ф.н., доцент;

Ж.Т.Усмонов – начальник отдела академической деятельности Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль Хорезми, доцент, PhD

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1.1. Системы с запаздыванием как частный случай систем с памятью	9
1.2. Сравнительный анализ методов исследования систем с запаздыванием	12
1.3. Описание линейной стационарной системы с запаздыванием переменными состояниями. Граф переходных состояний	25
1.4. Графовые модели и алгоритмы исследования динамики линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием	32
1.5. Графовые модели и алгоритм исследования динамики линейной стационарной системы с переменным запаздыванием	45
1.6. Моделирование многомерных линейных непрерывных систем с запаздыванием	54
1.7. Примеры расчета выходных сигналов линейных непрерывных систем с запаздыванием	58
Заключение	69
Список литературы	71

Введение

Актуальность исследования. Системы автоматического управления с запаздыванием представляют собой сложный и многогранный аспект теории управления, соединяющий математику, механику и информатику. Эти системы характеризуются наличием временных задержек между воздействием управляющего сигнала и реакцией объекта управления. Запаздывание может быть вызвано различными факторами, такими как физические ограничения в передаче сигналов, инерция системы или ограниченная производительность исполнительных механизмов [1-2].

Важным моментом является то, что наличие задержки может существенно снижать стабильность и эффективность системы, что делает необходимым использование специальных методов и алгоритмов для компенсации этих эффектов. Одним из распространенных подходов является применение предсказательных контроллеров, способствующих уменьшению воздействия задержек. Также активно исследуются адаптивные системы управления, которые настраиваются в реальном времени в ответ на изменения условий эксплуатации.

В современных условиях, когда информационные технологии и автоматизация становятся все более значительными, исследование и развитие систем автоматического управления с запаздыванием приобретают особую актуальность. Интеграция таких систем в производственные и сервисные процессы открывает новые горизонты для повышения эффективности и надежности различных приложений.

Современные исследования в области автоматического управления с запаздыванием акцентируют внимание на моделировании и анализе динамики сложных систем. Разработка инновационных математических моделей позволяет повысить точность прогнозирования реакции системы на управляющие воздействия, что, в свою очередь, способствует улучшению ее стабильности.

Также стоит отметить важность компьютерного моделирования и симуляции в этой области. С помощью разнообразных программных пакетов инженеры могут воспроизводить поведение систем с запаздыванием и тестировать различные стратегии управления без риска для реальных операций. Это сокращает время разработки и внедрения эффективных решений, а также позволяет быстрее адаптироваться к изменениям в окружающей среде.

Интеграция систем автоматического управления с запаздыванием в промышленные процессы требует не только технической, но и организационной перестройки. Необходимы новые подходы к обучению персонала, обеспечению взаимодействия между различными уровнями автоматизации и анализу данных. Это приведет к созданию более гибких и адаптивных производственных систем, способных реагировать на изменения в реальном времени.

В реальных объектах управления явление запаздывания может быть обосновано и другими причинами. Широкое применение микропроцессорной техники в автоматизации технологических процессов привело к появлению переменного запаздывания, основанного на таких факторах, как необходимость обработки больших массивов информации, времени изменения непрерывной величины на дискретную величину, разное количество выполняемых команд в одной программе, разное время выполнения различных операций .

Одним из наиболее важных классов систем управления являются системы с задержкой. Явление запаздывания наблюдается в технических, биологических, экономических и других системах. Задержка реакции системы управления на нарушение процесса обычно приводит к увеличению продолжительности переходного процесса, возникновению автоколебаний в замкнутой системе и часто к потере устойчивости системы. Как постоянная, переменная или случайная величина, задержка обычно является одним из основных факторов, значительно снижающих динамические значения систем

управления. Следовательно, существует необходимость в совершенствовании известных и новых машинно-ориентированных методов исследования систем с задержкой.

Математические модели систем с запаздыванием описывают поведение динамических систем в различных прикладных областях науки и техники. Описание и методы исследования таких моделей можно найти в журнальных статьях и монографиях по теории дифференциальных уравнений и автоматическому управлению.

В данной работе рассматриваются особенности топологического моделирования линейных непрерывных систем с постоянным запаздыванием на основе комбинированного применения теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, аппарата динамических графов и рассмотрения систем с точки зрения динамичности структур и процессов. Рассматриваемый метод позволяет получить алгоритм вычисления процессов в системах этого класса, который может быть легко реализован на одном из современных языков программирования высокого уровня.

Цель работы. Целью данного исследования является разработка на базе графовых моделей топологического метода моделирования и исследования структурно- сложных систем с запаздыванием, адекватного задачам анализа и синтеза.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- Выполнен анализ и дано обоснование путей построения графовых моделей линейных непрерывных систем с постоянным и переменным запаздыванием на основе совместного использования топологического метода и теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
- Разработан комплекс графовых моделей непрерывных линейных систем с запаздыванием;
- Построены алгоритмы исследования динамики функционирования рассматриваемых классов систем с запаздыванием;

Методы исследования. При решении поставленных задач использованы теория автоматического управления, системный анализ, теория графов, теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Научная новизна работы заключается в развитии структурных методов исследования систем управления на базе графовых моделей, что позволило решить проблему создания машинно- ориентированного топологического метода моделирования и исследования систем, описываемых дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом.

Практическая ценность работы. Наиболее существенными прикладными результатами работы являются:

- эффективный машинно- ориентированный топологический метод моделирования и исследования структурно- сложных систем с постоянным и переменным запаздыванием;
- алгоритмы расчета динамических процессов в одномерных и многомерных линейных непрерывных системах с запаздыванием.

1.1. Системы с запаздыванием как частный случай систем с памятью

Важнейшим объектом изучения системы является ее движение во времени, переход из одного состояния в другое. Состоянием динамической системы в момент для $t_0 < t < t_f$, адекватно определяет единственную выходную функцию при любом $t_f > t_0$.

Будем предполагать, что состояние системы может быть описано n – мерным вектором X , n компонент которого

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

являются переменными состояниями системы. Систему, для описания которой требуется n переменных, будем называть системой n – го порядка. Для динамической системы знания настоящего состояния $X(t_0)$ и будущего входного воздействия ($U(t), t \geq t_0$) достаточно для того, чтобы найти настоящие и будущие значения выходной характеристики системы ($Y(t), t \geq t_0$). Следовательно, будущие значения выходной характеристики системы не зависят от способа, которым система достигает своего настоящего значения. Если данная система допускает представление при помощи пространства состояний и описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния можно привести к виду

$$\dot{X}(t) = F(X(t), U(t)). \quad (1.1)$$

$$Y(t) = G(X(t), U(t)). \quad (1.2)$$

где n мерная вектор функция F и m – мерная вектор функция G являются однозначными. Уравнения (1.1) и (1.2) известны как стандартная форма уравнений состояния.

Легко видеть, что не все системы могут быть описаны при помощи конечномерных уравнений состояния. Например, пусть состояние некоторой

системы в момент времени t_0 определяется входным воздействием и реакцией состояния системы на отрезки времени $[t_0 - \tau, t_0]$.

Последнее условие изучает, что состояние системы зависит от функции, определённой на отрезки $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$. т.е нельзя указать никакого конечномерного пространства, удовлетворяющего нашему определению. Непрерывные системы с запаздыванием относятся именно к классу систем, не имеющих конечномерного пространства состояний [16]. Уравнения состояния системы с запаздыванием имеют вид:

$$\mathbb{X}(t) = \Phi(\mathbb{X}(t), \mathbb{U}, \mathbb{X}(t - \Theta)), \quad (1.3)$$

$$\mathbb{Y}(t) = H(\mathbb{X}(t))$$

с начальной функцией $\varphi(t)$ для $t - \Theta \leq t \leq t_0$.

Уравнение (1.3) называется дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом. В нем функция $\mathbb{X}(t)$ в общем случае будет n – мерным вещественным вектором, описывающим состояние системы в некоторый момент времени t , функция $\mathbb{U}(t)$ будет m – мерным вещественном вектором входных воздействия, функция $\Theta = \tau(t)$ характеризует запаздывание, в общем случае различное для каждого из составляющих вектора $\mathbb{X}(t)$. Начальная функция $\varphi(t)$ задается в виде n – мерной непрерывной вещественной вектор – функции на отрезке времени $t - \Theta \leq t \leq t_0$.

Вектор - функция $\mathbb{X}(t)$, обладающая свойством

$$\mathbb{X}(t) = \varphi(t), t - \Theta \leq t \leq t_0.$$

и удовлетворяющая уравнению (1.3) для $t \geq t_0$, называется решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом или просто с запаздыванием. В зависимости от вида функции Θ дифференциальные уравнения с запаздыванием делятся на несколько типов.

а) **Дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием.** Если величине Θ постоянна на всем интервале существования решения $\theta = \tau = const$, уравнение (1.3) принимает вид

$$X(t) = \Phi(U(t), X(t), X(t - \tau)), \quad t \geq t_0 \quad (1.5)$$

б) **Дифференциальные уравнения с переменным запаздыванием.** Пусть Θ будет кусочно – непрерывной функцией времени $t - \Theta = \tau(t)$, тогда уравнение (1.3) примет вид

$$X(t) = \Phi(U(t), X(t), X(t - \tau(t))), \quad t \geq t_0 \quad (1.6)$$

в) **Дифференциальные уравнения с нелинейным запаздыванием.** Функция Θ может зависеть не только от времени, но и от искомой функции $X(t)$ или от ее производной $X'(t)$, или той и другой одновременно:

$$\Theta = \tau(t, X(t)),$$

$$\Theta = \tau(t, X'(t)),$$

$$\Theta = \tau(t, X(t), X'(t)).$$

Соответствующие дифференциальные уравнения с нелинейным запаздыванием примут вид:

$$X(t) = \Phi(U(t), X(t), X(t - \tau(t, (t)))), \quad (1.7)$$

$$X(t) = \Phi(U(t), X(t), X(t - \tau(t, (t), (t)))), \quad (1.8)$$

$$X(t) = \Phi(U(t), X(t), X(t - \tau(t, (t), X'(t)))) \quad (1.9)$$

г) **Дифференциальные уравнения нейтрального типа.** К уравнениям этого класса относятся такие, у которых функция $\Phi(\cdot)$ зависит как от искомой функции с запаздывающим аргументом, так и от ее производной. Дифференциальные уравнения нейтрального типа требуют задания не только

начальной функции, но и ее производной. Системы, описываемые подобными уравнениями, на практике встречаются довольно редко.

Если система с переменным, постоянным запаздыванием линейна, то ее можно описать совокупностью дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t - \theta) + \mathcal{O}U(t), \quad (1.10)$$

где матрица A имеют размер $n * n$, размер матрицы B также $n * n$, размер матрицы $\theta - n * m$.

Выходные величины такой системы определяются соотношением

$$Y(t) = HX(t),$$

где H – матрица размера $p * n$.

1.2. Сравнительный анализ методов исследования систем с запаздыванием

Среди основных методов исследования систем с запаздыванием следует назвать метод последовательного интегрирования на интервалах -метод шагов [3], различные численные методы (методы Адамса, Милна, Эйлера и т.д.) [4].

Поясним существо метода шагов. Выходной процесс системы с запаздыванием с математической точки зрения есть решение дифференциального уравнения, описывающего движение системы при соответствующих начальных условиях и заданных функциях, которые характеризуют входные воздействия. Для его отыскания во всех случаях необходимо решать основную начальную задачу.

Пусть задано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x(t), x(t - \tau)] \quad , \quad (1.12)$$

где $x(t)$ – искомая функция, определяющая выходной процесс, τ – постоянное запаздывание, f устанавливает соответствующую зависимость производной от аргументов. Основная начальная задача, или задача Коши для уравнения (1.12) состоит в определении непрерывного изменения $x(t)$ при $t \geq t_0$ в предположении, что при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$

$$x(t) = \varphi_0(t).$$

Причем $\varphi_0(t)$ априори непрерывная функция, называемая начальной функцией (рис.2.1). Отрезок, на котором функция $\varphi_0(t)$ определена, называется начальным множеством E_0 .

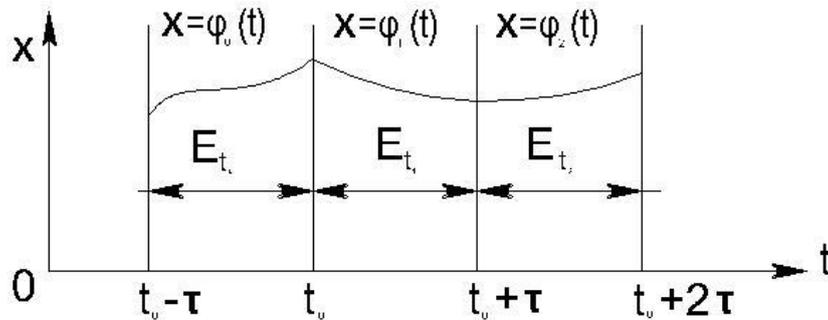


Рис.2.1. Начальная функция в выходной функции системы с запаздыванием

Используя методику последовательного интегрирования на интервалах $[t_0 + i\tau, t_0 + (i+1)\tau]$, $i=0, 1, \dots$, можно свести проблему решения уравнения (1.12) к проблеме решения обыкновенного дифференциального уравнения, а, следовательно, уравнения без смещения аргумента. С этой точки зрения, за исключением особых случаев, теорему существования и единственности решения для уравнения с запаздывающим аргументом можно свести к аналогичной теореме для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть для уравнения (1.2) $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$. Так как на отрезке времени $[t_0, t_0 + \tau]$ аргумент $t - \tau$ известен на начальном множестве $[t_0 - \tau, t_0]$, то функция $x(t - \tau)$ будет равна начальной функции $\varphi(t - \tau)$. Таким образом при $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ получим

$$\frac{dx_1}{dt} = f[t, x_1(t), \mathcal{G}(t - \tau)]$$

Здесь $x_1(t)$ – решение дифференциального уравнения на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$.

На следующем отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$ роль начальной функции будет решать функция $x_1(t)$. Аналогично получим

$$\frac{dx_2}{dt} = f[t, x_2(t), x_1(t - \tau)], \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau,$$

где $x_1(t - \tau)$ играет роль начальной функции $x_2(t)$ для решения на отрезке времени $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$.

$$\frac{dx_2}{dt} = f[t, x_2(t), x_1(t - \tau)], \quad t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau.$$

Выполняя последовательно этот процесс, будем иметь

$$t_0 + k\tau \leq t \leq t_0 + (k+1)\tau,$$

$$x_k[t_0 + (k+1)\tau] = \varphi_k[t_0 + (k-1)\tau], \quad k=1, 2, \dots$$

Таким образом, отрезок на котором определяется решение дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием, разбивается на отрезки, равные величине запаздывания. На каждом из этих отрезков дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием заменяется соответствующим дифференциальным уравнением без отклонения аргумента.

Но обыкновенные дифференциальные уравнения, которые получаются на каждом шаге интегрирования, решаются в замкнутой форме не во всех случаях. Это обстоятельство обуславливает применение приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Вычислительная схема решения уравнения (1.12) численным методом связывается с методом шагов: точки $t_k = t_0 + k\tau$ ($k = 0, 1, \dots$) разбивают промежуток $[t_0, T]$ на отрезки, на каждом из которых уравнение (1.12) заменяется дифференциальным уравнением без отклонения аргумента.

Для интегрирования этих уравнений на соответствующих отрезках, очевидно, могут быть использованы все известные методы численного

интегрирования дифференциальных уравнений без отклонения аргумента при обычных для этих методов ограничениях.

Наиболее простыми из численных методов являются методы Эйлера, Адамса-Штермера, Милна и другие. Рабочие формулы строятся с помощью отрезков ряда Тейлора:

$$X(t_k + h) = x(t_k) + hx'(t_k) + \dots + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t_k) \quad (1.13)$$

При применении численных методов надо иметь в виду, что аппроксимация решения отрезком ряда Тейлора (1.13) предполагает, что решение n раз дифференцируемо. Эти условия обычно не выполняются, но с возрастанием t решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом сглаживается. Поэтому рекомендуется такая схема - начало вычислений ведется по методу Эйлера с уменьшенным шагом. После достаточного сглаживания решения осуществляется переход на одну из формул Адамса.

Есть определенные требования и к выбору шага вычислений h . С одной стороны, для достижения заданной точности шаг вычислений h должен быть достаточно малым. Но при уменьшении h возрастает объем промежуточных данных, которые необходимо хранить в памяти компьютера.

В самом деле, решая уравнение с запаздывающим аргументом методом шагов на интервале времени $[n\tau, (n+1)\tau]$ ($n = 1, 2, \dots$) необходимо вычислять и хранить в памяти компьютера k значений определяемой функции, где $k = \tau/h$. Видно, что при значениях, например, $t=2, h=0,02$, получим $k=2*10^2$ чисел, а при $h=0,001$ - $k=2*10^3$ чисел.

Но этот подход не может быть оправдан в случае с малым запаздыванием. При использовании метода, основанного на разложении в ряд Тейлора члена уравнения, содержащего малый запаздывающий аргумент, обычно ограничиваются несколькими членами разложения. Это приводит к качественным ошибкам при получении решения.

Отличительной особенностью развиваемых в данной работе методов исследования систем с запаздыванием является то, что они базируются на использовании графовых моделей. Графовые модели позволяют перевести дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом в алгебраические уравнения, процедура решения которых проще.

Кроме этого, графовые модели обладают и многими другими преимуществами, в числе которых есть

- возможность формирования единой методологической основы исследования различных классов систем с запаздыванием;
- машинная ориентированность моделей;
- исключение оперирования избыточной информацией;
- простота и наглядность.

Чтобы дать сравнительную оценку возможностей метода шагов, численного метода и топологического метода здесь рассмотрим пример, ограничиваясь лишь элементарными пояснениями.

Пример 1.2.1. Требуется определить выходной сигнал системы, описываемой

дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - bx(t - \tau) + u(t)$$

для всех моментов времени $t > t_0$, причем в момент времени t_0 на вход системы подается воздействие $u(t) = 1(t)$. Значения параметров $a=1$, $b=1$.

Вариант 1. Решение с использованием метода шагов. Рассмотрим вначале формирование выходной величины на отрезке времени $t_0, t_0 + \tau$. На этом отрезке в реальной системе с нулевыми начальными условиями с выхода цепи обратной связи сигнала не будет, т.к. он задерживается звеном запаздывания на время, равное величине запаздывания. Таким образом, выходной сигнал $x(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ определим, решив неоднородное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + 1$$

Для его решения используем один из известных методов, например, вариацию параметров. Решение однородного уравнения находим из характеристического уравнения $r+1=0$, отсюда

$$r=-1,$$

$$x_h = C_1 e^{-t}$$

Предполагая,

$$x_p = u e^{-t},$$

$$\frac{du}{dt} e^{-t} - u e^{-t} = -u e^{-t} + 1,$$

$$\frac{du}{dt} e^{-t} = 1,$$

$$u = \int_0^t e^t dt = e^t,$$

получим частное решение

$$x_p = u e^{-t} = 1$$

Общее решение будет иметь вид

$$x = x_h + x_p = C_1 e^{-t} + 1,$$

где C_1 - постоянная интегрирования, характеризующая состояние системы в момент времени $t=0$. При нулевых начальных условиях $C_1 = 1$.

Тогда получим

$$x = x_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad (*)$$

где $t \in [0, \tau]$.

Из выражения (*) найдем мгновенное значение сигнала x при $t = \tau$:

$$x(\tau) = 1 - e^{-\tau}$$

Функция $x(t)$ полностью определяет выходной процесс на отрезке времени $t \in [0, \tau]$. Сигнал $x(t) = x_1(t)$, проходящий через звено запаздывания, будет воздействовать на вход системы уже на отрезке времени $[\tau, 2\tau]$. Тогда исходное уравнение системы можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = -x - x_1(t - \tau) + 1$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -x + e^{-(t-\tau)} \quad (**)$$

Найдем значение сигнала $x(t)$ для $t \in [\tau, 2\tau]$.

Решение, удовлетворяющее однородному уравнению

$$\frac{dx}{dt} + x = 0$$

следующее

$$x_h = C_2 e^{-(t-\tau)}$$

Частное решение находим посредством вариации параметров.

Предполагая, что

$$x_p = ue^{-(t-\tau)},$$

$$\dot{u}e^{-(t-\tau)} - ue^{-(t-\tau)} = ue^{-(t-\tau)} + e^{-(t-\tau)},$$

$$\dot{u}e^{-(t-\tau)} = e^{-(t-\tau)},$$

$$\dot{u} = 1,$$

$$u = \int_{\tau}^t dt = t - \tau$$

имеем частное решение

$$x_p = ue^{-(t-\tau)} = (t - \tau)e^{-(t-\tau)}.$$

Общее решение имеет вид:

$$x = x_h + x_p = C_2 e^{-(t-\tau)} + (t - \tau) e^{-(t-\tau)},$$

где C_2 - постоянная интегрирования, характеризующая состояние системы в момент времени $t=\tau$. Из решения на предыдущем отрезке мы имели

$$x(\tau) = 1 - e^{-\tau},$$

откуда

$$C_2 = 1 - e^{-\tau},$$

следовательно, на промежутке времени $t \in [\tau, 2\tau]$ на выходе системы получим

$$x(t) = x_2(t) = (1 - e^{-\tau}) e^{-(t-\tau)} + (t - \tau) e^{-(t-\tau)}$$

и значение выходного сигнала при $t=2\tau$.

Аналогично рассмотрим промежуток времени $t \in [2\tau, 3\tau]$. На этом отрезке начальной функцией является сигнал $x_2(t-\tau)$ на выходе цепи обратной связи. Следовательно, уравнение системы можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = -x - x_2(t - \tau) + 1$$

или

$$\frac{dx}{dt} = -x - [(1 - e^{-\tau}) e^{-(t-\tau)} + (t - \tau) e^{-(t-\tau)}] + 1 \quad (***)$$

Находим решение однородного уравнения

$$\frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$x_h = C_3 e^{-(t-\tau)}$$

Частное решение ищем в виде

$$x_p = u e^{-(t-2\tau)t}.$$

Подставляя в уравнение (***) значение x_p , имеем

$$i u e^{-(t-2\tau)} = -(1 - e^{-\tau}) e^{-(t-2\tau)} + (t - 2\tau) e^{-(t-2\tau)} + 1,$$

$$u = \int_{2\tau}^t (e^{-\tau} - 1)dt - \int_{2\tau}^t (t - 2\tau)dt + \int_{2\tau}^t (e^{-(t-2\tau)} - 1)dt =$$

$$(e^{-\tau} - 1)(t - 2\tau) - \frac{(t - 2\tau)^2}{2} + e^{t-2\tau} - 1$$

$$x_p = [(e^{-\tau} - 1)(t - 2\tau) - \frac{(t - 2\tau)^2}{2} + e^{t-2\tau} - 1]e^{-(t-2\tau)}$$

Общее решение имеет вид

$$x = x_h + x_p = C_3 e^{-(t-2\tau)} +$$

$$+ [(e^{-\tau} - 1)(t - 2\tau) - \frac{(t - 2\tau)^2}{2} + e^{t-2\tau} - 1]e^{-(t-2\tau)}$$

Здесь C_3 - постоянная интегрирования, характеризующая состояние системы в момент времени $t=2\tau$. Его значение мы уже нашли из решения на предыдущем отрезке:

$$C_3 = x_2(2\tau)$$

Следовательно, на промежутке времени $[2\tau, 3\tau]$ выходной сигнал описывается функцией

$$x = e^{-(t-2\tau)}(1 - e^{-\tau} + \tau)e^{-\tau} +$$

$$+ [(e^{-\tau} - 1)(t - 2\tau) - \frac{(t - 2\tau)^2}{2} + e^{t-2\tau} - 1]e^{-(t-2\tau)}$$

Найденные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ полностью определяют выходной процесс системы на интервале времени от $t=0$ до $t=3\tau$.

Продолжая последовательно описанную выше процедуру можно получить решение на любом интересующем нас интервале времени.

Вариант 2. Решение с использованием численного метода (метод Эйлера).

Используя метод Эйлера, составим таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения.

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) - bx(t - \tau) + u(t),$$

где $a=1, b=1, \tau=2, u(t)=1$,

начальные условия $x(t_0)=x(0)=0$ на отрезке $[0, 2]$,

начальная функция $x(t-\tau)=\varphi_0(t)=0$,

шаг $h=0,2$.

Метод Эйлера для уравнения $x' = f(t, x)$ заключается в том, что на отрезках $[i\tau, (i+1)\tau]$, где $i=0, 1, \dots$, вычисляются значения $x_k = x(t_k)$, где $t_k = t_0 + k_h, k=0, 1, \dots, n$, шаг вычислений $h=\tau/n$.

Значения x_{k+1} вычисляются по формуле

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

где $k=0, 1, \dots, n-1$.

Погрешность вычислений на каждом шаге составляет

$$R_k = 0.5h^2x''(\varepsilon), \text{ где } t_k \leq \varepsilon \leq t_{k+1}.$$

Решение заданного уравнения на шаге $[0, \tau]$ определяется по формуле:

$$x_{k+1} = x_k + 0,2(-x_k + 1); \text{ где } k=0, 1, \dots, 10;$$

На отрезке $[\tau, 2\tau]$:

$$x_{k+1} = x_k + 0,2(-x_k - \varphi_1^{k+1} + 1); \text{ где } k=0, 1, \dots, 10;$$

$$\varphi_1^{k+1} = x_{k+1}(t_{k+1} - \tau) \text{ и т.д.}$$

Вариант 3. Решение с использованием графовой модели системы.

Исходя из дифференциального уравнения системы и учитывая то, что звено запаздывания задерживает сигнал с выхода цепи обратной связи на время τ , граф, определяющий поведение системы на отрезке времени $t \in [0, \tau]$, можно изобразить в виде, представленном ниже рисунке (рис.2.2).

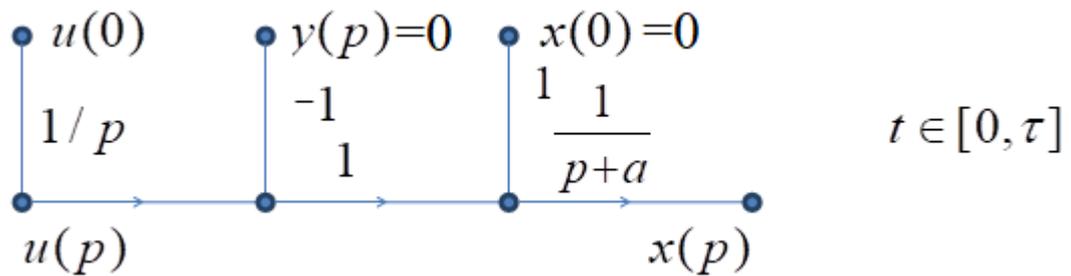


Рис. 2.2. Граф, определяющий поведение системы на отрезке времени $t \in [0, \tau]$,

По графу можно определить выходной сигнал системы на отрезке времени $t \in [0, \tau]$

$$x(p) = \frac{1}{p(p+1)}u(0) + \frac{1}{p+1}x(0),$$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right]u(0) = 1 - e^{-t},$$

$$x(t) = x_1(t)$$

Функция $x_1(t)$ определяет выходной процесс системы на отрезке времени $t \in [0, \tau]$. При $t = \tau$ имеем $x(\tau) = 1 - e^{-\tau}$. Так как сигнал $x_1(t)$ проходит через звено запаздывания, то оно (запаздывание) появляется на выходе цепи обратной связи в виде функции

$$y(t) = x_1(t - \tau) \text{ на следующем отрезке времени } t \in [\tau, 2\tau].$$

Сигнал $x_1(t - \tau)$ является начальной функцией, а мгновенное его значение - $x_1(\tau) = x(\tau)$ начальным условием на отрезке $t \in [\tau, 2\tau]$. Исходя из этих соображений, строим граф для $t \in [\tau, 2\tau]$ (рис. 2.3).

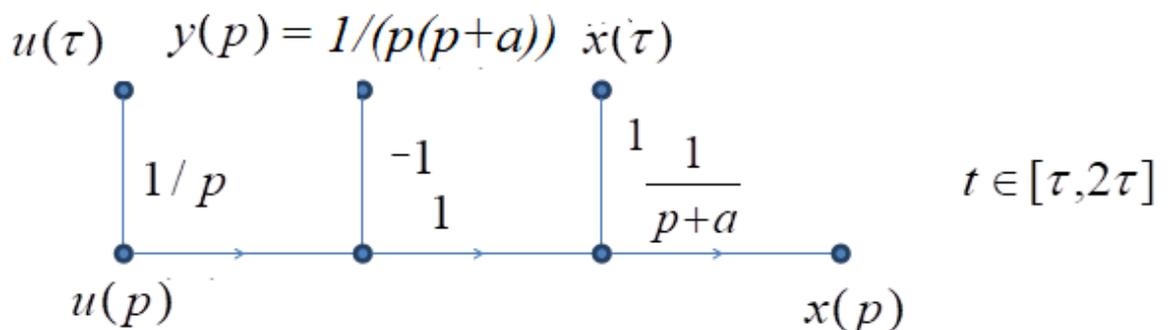


Рис. 2.3. Граф, определяющий поведение системы на отрезке времени $t \in [\tau, 2\tau]$,

Из рассмотрения графа находим

$$x(p) = \frac{1}{p(p+1)} u(\tau) + \frac{1}{(p+1)} x(\tau) - \frac{1}{p(p+1)^2}.$$

Из последнего соотношения находим

$$x(t) = x_2(t) = (1 - e^{-\tau})e^{-(t-\tau)} + (t - \tau)e^{-(t-\tau)}.$$

Значение выходного сигнала при $t=2\tau$ равно:

$$x(2\tau) = x_2(2\tau) = e^{-\tau}(1 - e^{-\tau} + \tau)$$

Функция $x(t)=x_2(t)$ определяет выходной процесс на отрезке $t \in [\tau, 2\tau]$.

Рассмотрим далее промежуток времени $t \in [2\tau, 3\tau]$.

На выходе цепи обратной связи появляется сигнал $y(t) = x_2(t)$, который является начальной функцией, а мгновенное значение $x_2(\tau)$ - начальным условием для этого промежутка времени.

Для отрезка $t \in [2\tau, 3\tau]$ имеем

$$x(p) = x_3(p) \frac{1}{p(p+1)} u(2\tau) + \frac{1}{(p+1)} x(2\tau) - \frac{1}{(p+1)} x_2(p)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа для последнего соотношения, будем иметь

$$x = e^{-(t-2\tau)}(1 - e^{-\tau} + \tau)e^{-\tau} + \\ + [(e^{-\tau} - 1)(t - 2\tau) - \frac{(t - 2\tau)^2}{2} + e^{t-2\tau} - 1]e^{-(t-2\tau)}$$

Выполняя последовательно указанную выше процедуру, можно получить решение и на последующих интервалах времени. Из рассмотренного примера видно преимущество графового метода. Использование графовой модели в значительной степени упрощает описание и анализ системы, исключает непосредственное интегрирование дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Составим таблицу (таблица 1.2.1), в которую занесем приближенные значения интеграла дифференциального уравнения, полученные методом

Эйлера и точные значения, полученные методом шагов и топологическим методом при заданных начальных условиях и значении запаздывания τ .

Таблица значений функции, полученных методом Эйлера, методом шагов и графовым методом

Таблица 1.2.1.

j	t_k	Метод Эйлера y_k	Метод шагов y_k	Графовый метод y_k
0	0	0	0	0
1	0,2000	0,2	0,181269247	0,1812692
2	0,4000	0,36	0,329679954	0,32968
3	0,6000	0,488	0,451188364	0,4511884
4	0,8000	0,59	0,550671036	0,550671
5	1,0000	0,672	0,632120559	0,6321206
6	1,2000	0,738	0,698805788	0,6988058
7	1,4000	0,79	0,753403036	0,753403
8	1,6000	0,832	0,798103482	0,7981035
9	1,8000	0,886	0,834701112	0,8347011
10	2,0000	0,893	0,864664717	0,8646647
11	2,2000	0,874	0,871673745	0,8716737
12	2,4000	0,827	0,847730111	0,8477301
13	2,6000	0,764	0,80382504	0,803825
14	2,8000	0,693	0,747982073	0,7479821
15	3,0000	0,62	0,685971814	0,6859718
16	3,2000	0,5484	0,621865062	0,6218651
17	3,4000	0,481	0,558459443	0,5584594
18	3,6000	0,418	0,497607224	0,4976072
19	3,8000	0,361	0,440466115	0,4404661
20	4,0000	0,31	0,387690211	0,3876902
21	4,2000	0,273	0,3412345	0,3412345
22	4,4000	0,253	0,3045637	0,3045637
23	4,6000	0,25	0,2809508	0,2809508
24	4,8000	0,2615	0,2723421	0,2723421
25	5,0000	0,2852	0,2725003	0,2725003
26	5,2000	0,3185	0,2654147	0,2654147
27	5,4000	0,359	0,3091905	0,3091905
28	5,6000	0,404	0,33851238	0,3385124
29	5,8000	0,451	0,3750564	0,3750564
30	6,0000	0,499	0,4141456	0,4141456

На рис.1.2.4. приведены графики полученных функций.

Из рассмотренного примера видно преимущество топологического метода. Использование графовой модели в значительной степени упрощает описание и анализ системы, исключает непосредственное интегрирование дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

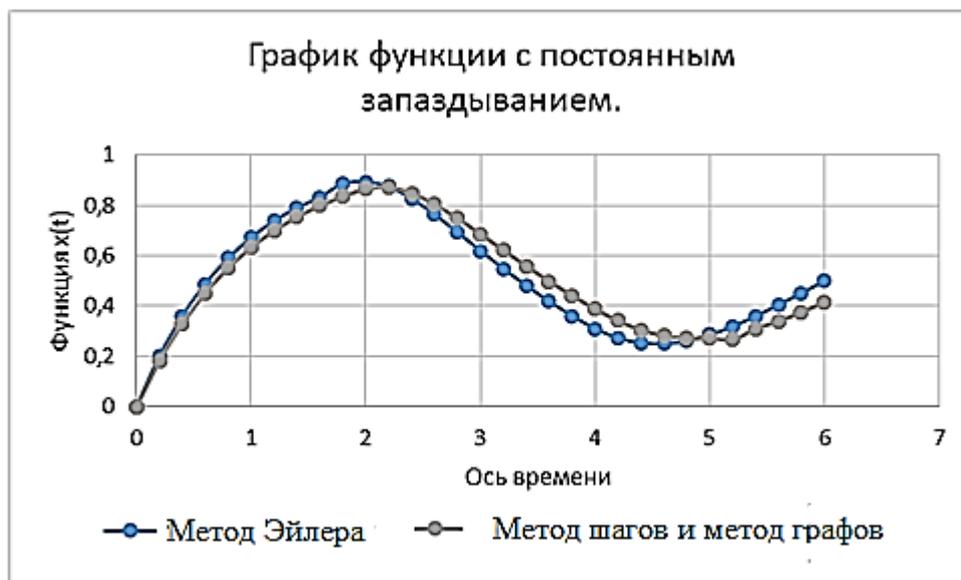


Рис.1.2.4. График выходной функции системы с запаздыванием

1.3. Описание линейной стационарной системы с запаздыванием переменными состояниями. Граф переходных состояний.

Линейную стационарную систему n – го порядка с запаздыванием в цепи обратной связи (рис. 1.3.1) можно описать дифференциальным уравнением n -го порядка в виде

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \neq a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) + by(t - \tau) = u(t) \quad (1.14)$$

где $a_n \neq 0, a_k (k = 0, 1, \dots, n)$ и b постоянны.



Рис.1.3.1. Линейная стационарная система n – го порядка в запаздыванием в цепи обратной связи

Поставим задачу отыскания выходного сигнала системы для всех моментов времени $t \geq t_0$. В момент времени t_0 на вход системы подается воздействие $u(t)$.

Если в этом уравнении $b=0$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t) \quad (1.15)$$

Известно, что для системы, описываемой уравнением (1.15) можно задать n независимых начальных условий, которые единственным образом определяют выходную функцию для заданной входной функции [4]. Эту совокупность переменных можно квалифицировать как состояние в момент t_0 отсюда выводится следующая простая зависимость переменных состояния от выходной функции:

$$\begin{aligned} x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{y} = \dot{x}_1, \\ x_3 &= \ddot{y} = \dot{x}_2, \end{aligned}$$

.....

$$x^n = y^{(n)} = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u$$

Из изложенного выше легко записать уравнения состояния в стандартной форме

$$\dot{\mathbb{X}}(t) = \mathbb{A}\mathbb{X}(t) + \mathbb{B}u(t) \quad (1.16)$$

$$\mathbb{Y}(t) = \mathbb{C} \mathbb{X}(t) + \mathbb{D}u(t) \quad (1.17)$$

где \mathbb{A} – матрица коэффициентов,

\mathbb{B} - матрица управления,

\mathbb{C} - матрица выхода,

\mathbb{D} – матрица обхода системы.

Если образовать вектор состояния увеличенной размерности

$$\mathbb{V}(t) = \begin{bmatrix} u & (t) \\ \mathbb{X} & (t) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

то в этом случае линейная стационарная система может быть описана уравнением

$$\frac{d\mathbb{V}(t)}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{V}(t), \quad (1.19)$$

где \mathbb{A} -матрица коэффициентов, $\mathbb{V}(t)$ -вектор-столбец, включающий входную переменную и координаты системы.

Применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (1.19) получим

$$\mathbb{V}(p)[p\mathbb{I}(i) - \mathbb{A}]^{-1} \mathbb{V}(0^+) \quad (1.20)$$

где $\mathbb{I}(i)$ – единичная матрица.

$$\text{Обозначая } \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[p\mathbb{I} - \mathbb{A}]^{-1}\}, \quad (1.21)$$

будем иметь

$$\mathbb{V}(t) = \Phi(t) \mathbb{V}(0^+) \quad (1.22)$$

Матрица $\Phi(t)$ известна как расширенная матрица перехода системы.

Вернемся к рассмотрению уравнения (1.14) описывающего движение линейной стационарной системы n -го порядка с запаздыванием в цепи

обратной связи. Это уравнение можно записать в следующей векторно-матричной форме

$$\frac{d\mathbb{X}(t)}{dt} = \mathbb{A}\mathbb{X}(t) + \mathbb{B}u(t) + \mathbb{O}\varphi(t - \tau) \quad (1.23)$$

Если заданы начальные условия и начальная функция $\varphi_0(t) = x_1(t - \tau)$, определенная на начальном множестве $[t_0 - \tau, t_0]$, то, применяя прямое преобразование Лапласа к уравнению (1.23), на отрезке $[0, \tau]$ будем иметь:

$$\begin{aligned} p\mathbb{X}(p) - \mathbb{X}(0^+) &= \mathbb{A}\mathbb{X}(p) + \mathbb{B}u(p) + \mathbb{O}\varphi_0(p), \\ \mathbb{X}(p) &= ((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1}\mathbb{O}\varphi_0(p), + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}(0^+)) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Функция, $x_1(t)$, которую можно получить из уравнения (1.24), является начальной функцией (точнее, изображением по Лапласу начальной функции)

$$\varphi_1(p) = x_1(p)$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (1.24), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(t) &= L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) \right) + L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{O}\varphi_0(p) \right) + \\ &+ L^{-1} \left(p\mathbb{I} - \mathbb{A} \right)^{-1} \mathbb{X}(0^+) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) описывает поведение системы на отрезке времени $[0, \tau]$.

Используя это решение, для отрезка получим

$$\mathbb{X}(p) = ((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{O}\varphi_0(p) + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}(\tau)).$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(t) &= L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) \right) + L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{O}\varphi_0(p) \right) + \\ &L^{-1} \left(p\mathbb{I} - \mathbb{A} \right)^{-1} \mathbb{X}(\tau) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Выполняя последовательно этот процесс, можно найти решение для любого интересующего нас интервала времени

$$\mathbb{X}(p) = (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{O}\varphi_k(p) + (p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}(k\tau) \quad (1.27)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mathbb{X}(t) = & L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{B}u(p) \right) + L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{O}\varphi_k(p) \right) + \\ & L^{-1} \left((p\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} \mathbb{X}(k\tau) \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$, $k = 1, 2, \dots$.

Итак, уравнение состояния линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием может быть записано в векторной форме и решено с использованием преобразования Лапласа [5-6]. Из этого следует, что решение мы можем получить и с использованием аппарата теории графов, являющегося мощным средством исследования различных классов структурно- сложных систем. Для рассматриваемого класса системы целесообразным является применение графов переходных состояний [7].

Определение: Графом переходного состояния назовем ориентированный взвешенный граф, полученный по схеме системы в переменных состояния, вершинами, являющимся компонентами вектора состояния $\mathbb{V}(0^+) = [u(0^+), \mathbb{X}(0^+)]$ с передачами дуг, равными коэффициентам расширенной матрицы перехода $\phi(\lambda)$.

$$\phi(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Аргумент λ в $\phi(\lambda)$ при анализе непрерывных систем равен t , а в случае дискретных систем $\lambda = t - nT$ для $0 \leq \lambda \leq T$. Если заданы начальные условия и известна матрица $\phi(\lambda)$, то можно легко найти функции времени, описывающие изменение переменных состояния. Матрица перехода может быть определена из соотношений:

$$\phi(\lambda) = e^{-\mathbb{A}\lambda}, \quad (1.30)$$

$$\phi(\lambda) = L^{-1}\{[p\mathbb{I} - \mathbb{A}]^{-1}\} \quad (1.31)$$

Но вычисление элементов матрицы $\phi(\lambda)$ можно непосредственно выполнить по графам переходных состояний (ГПС). Вычисляя по графу

передачи между соответствующими узлами, применяя обратное преобразование Лапласа, мы, тем самым, определяем элементы $a_{ij}(\lambda)$ матрицы $\phi(\lambda)$, минуя выполнение трудоемких систему, описываемую дифференциальным уравнением

Пример. Для иллюстрации рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = u(t), \quad u(t) = 1(t).$$

Требуется построить граф переходных состояний и определить матрицу перехода $\Phi(t)$.

1. Перейдем к системе уравнений 1-го порядка

$$\dot{u} = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + u,$$

где $x_1 = y$.

В матричной форме полученную систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

2. Схема в переменных состояния и граф переходных состояний даны соответственно на рис 1.3.2. и рис. 1.3.3.

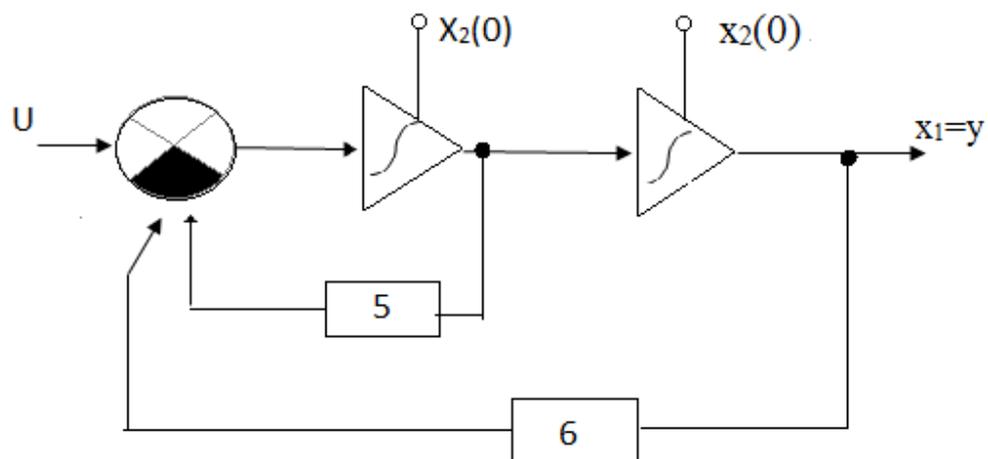


Рис.1.3.2. Схема заданной системы в переменных состояния

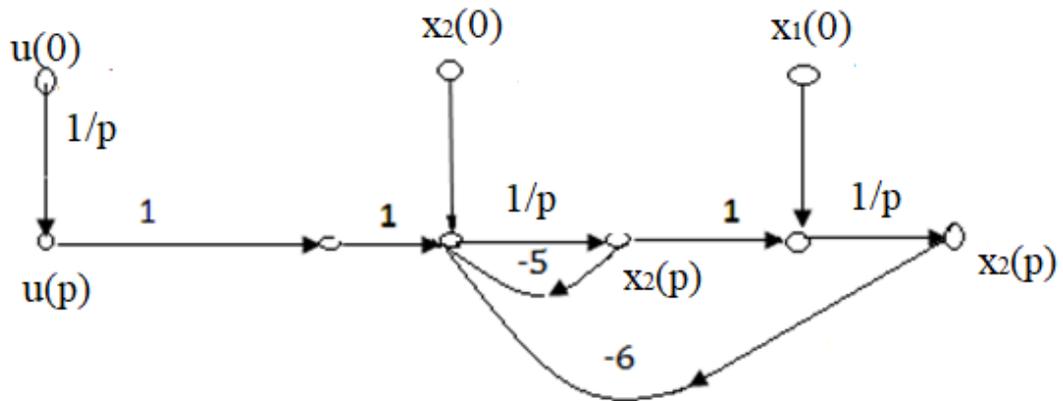


Рис.1.3.3.Граф переходных состояний заданной системы

3. Определяем вектор $\mathbb{V}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Элемент $a_{ij}(t)$ искомой матрицы перехода $\Phi(t)$ определяются следующим образом. По ГПС, пользуясь правилом Мезона определяем $a_{ij}(p) \in \Phi(t)$ как передачу между узлами i, j , т.е. $a_{ij}(p) = x_i/x_j$. Матрицу $\Phi(t)$ получим, если применим к каждому элементу $a_{ij}(p)$ обратное преобразование Лапласа. Из рассмотрения графа имеем

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p+2)(p+3)} u(0) + \frac{p+5}{(p+2)(p+3)} x_1(0) + \frac{1}{(p+1)(p+2)} x_2(0);$$

$$x_2(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)} u(0) + -\frac{-6}{(p+2)(p+3)} x_1(0) + \frac{p}{(p+1)(p+2)} x_2(0);$$

Выполнив обратно преобразование Лапласа, будем иметь

$$x_1(t) = (-5 \cdot e^{-2t} + 0,3e^{-3t} + 0,16)u(0) + (3e^{-2t} - 2e^{-3t})x_1(0) + (e^{-2t} - e^{-3t})x_2(0);$$

$$x_2(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) u(0) + (-6e^{-2t} + 6e^{-3t})x_1(0) + (-2e^{-2t} + -3e^{-3t})x_2(0),$$

отсюда

$$\phi(t) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5e^{-2t} + .3e^{-3t} + .16 & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} & -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + -3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

1.4. Графовые модели и алгоритмы исследования динамики линейной стационарной системы с постоянным запаздыванием

Системы с запаздыванием обладают рядом свойств, присущих только им. Эти свойства не совсем обычны с точки зрения привычных представлений о процессах, протекающих в динамических системах. Так, вид переходной функции состояния системы с памятью, к классу которых относятся системы с запаздыванием, зависит не только от начальных условий, но и от некоторой функции - начальной реакции состояния. Эта функция задается на отрезке времени, предшествующем началу выходного процесса. Эти условия, наряду с другими, вносят специфические особенности и в графовые модели этих систем.

Линейную систему n -го порядка с постоянным запаздыванием τ в цепи обратной связи (рис.1,а) можно описать дифференциально- разностным уравнением n -го порядка в виде

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) + by(t - \tau) = u(t), \quad (1.33)$$

где a_k ($k=0, 1, \dots, n$) и b постоянны.

Если допустить, что в уравнении (1) $b=0$, то получим дифференциальное уравнение линейного стационарного объекта (процесса) без запаздывания

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t) \quad (1.34)$$

Для графового моделирования уравнения (1.34) можно использовать граф переходных состояний, полученный известным способом прямого программирования. Выходной сигнал $y(t)$, представляющий собой линейную комбинации координат $\{x_i(t)\}$, где $i=1, 2, \dots, n$, и входного воздействия $u(t)$, легко определяется из графа. Вместе с тем представляет интерес графовая модель непрерывного запаздывающего сигнала $y(t-\tau)$. Определив графовую модель этого сигнала, мы можем найти графовую модель системы, описываемой дифференциальным уравнением (1.33).

Моделирование уравнения (1.34) не представляет затруднений. Напомним два эквивалентных способа получения графа переходных состояний процесса, описываемого уравнением (1.34).

Прямое программирование. Непосредственно по дифференциальному уравнению, используя переменные состояния, можно получить граф переходных состояний системы (рис.1.4.1.). Этот способ называется прямым программированием. В качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов. Граф переходных состояний строится из условия удовлетворения данному дифференциальному уравнению. Узлы, соответствующие выходам этих интеграторов соединяются в одном узле дугами, передачи которых равны соответствующим коэффициентам [8-9].

Последовательное программирование. Непосредственно по дифференциальному уравнению (1.34) можно записать передаточную функцию линейной системы без запаздывания, не содержащей начальной энергии:

$$H(p) = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0} = \frac{1}{D(p)}$$

$$D(p) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n), \quad (1.35)$$

где λ_i – характеристическое уравнение рассматриваемой системы. Тогда передаточная функция запишется в виде:

$$H(p) = \frac{1}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \dots (p - \lambda_n)} \quad (1.36)$$

В результате получается граф переходных состояний, изображенный на рис.1.4.2. Данный способ известен как способ последовательного программирования.

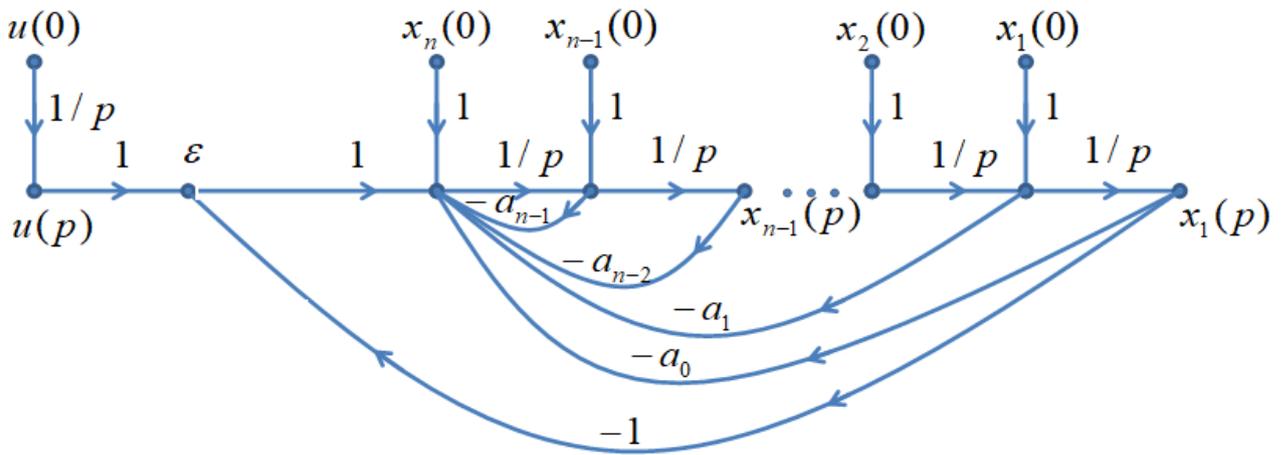


Рис. 1.4.1. Граф переходных состояний системы, полученный методом прямого программирования.

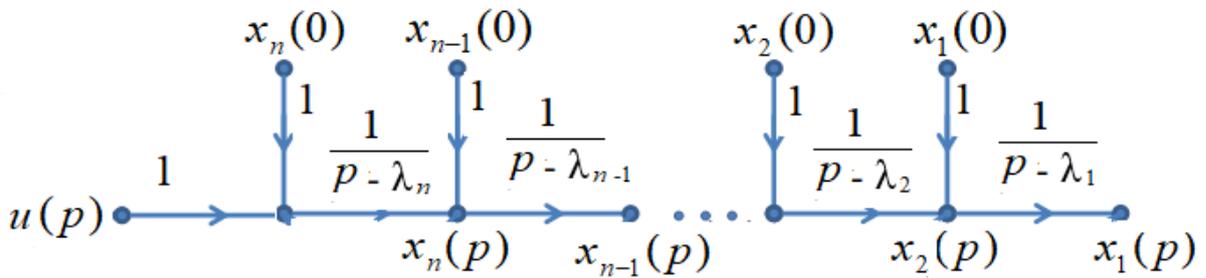


Рис. 1.4.2. Граф переходных состояний системы, полученный методом последовательного программирования.

Таким образом, мы рассмотрели два способа построения графа переходных состояний. Возможны и другие эквивалентные представления. Как видно, каждая дуга графа связана с некоторой величиной (числом, функцией), называемой передачей ветви t_{ik} , а каждая вершина (узел) имеет связанную с ней величину, называемую узловым сигналом x_i . Передача графа a_{ij} равна отношению сигнала, возникающего в j -м зависимом узле, к сигналу i -го источника ($a_{ij} = x_j / x_i$) и являющаяся соответствующим элементом матрицы перехода, определяется по графу переходных состояний на основе формулы Мезона:

$$a_{ij} = \frac{[(p_1 + p_2 + \dots + p_n)(1-L_1)(1-L_2)\dots(1-L_m)]^*}{(1-L_1)(1-L_2)\dots(1-L_m)} \quad (1.37)$$

где p – передача пути графа,

L - передача контура,

* - означает «опустить члены, содержащие произведения контуров и путей».

Выходная функция $y(t)$ легко находится в виде линейной комбинации координат и входного воздействия из рассмотрения графа.

Моделирование запаздывающего сигнала. Известно, что для определения движения системы с запаздыванием с некоторого момента t_0 , помимо задания входного воздействия и начальных условий, необходимо еще и задавать *начальную функцию*. Для системы, описываемой уравнением (1.33), начальная функция есть отрезок функции «записанный» к моменту t_0 в звене запаздывания. Этот отрезок времени определен на временном отрезке $[t_0 - \tau, t_0]$, т.е. до начала развития определяемого выходного процесса. Иными словами, на отрезке времени $[t_0, t_0 + \tau]$ звено запаздывания выдает сигнал, содержащий все значения величины $x_I(t)$, возникшие ранее момента времени t_0 .

Замечание. Если в системе до момента приложения входного воздействия была запасена энергия, то необходимо задавать конкретный вид начальной функции, удовлетворяющей равенствам

$$\varphi(t) = x_I(t), \varphi(t_0) = x_I(t_0), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0].$$

В случае нулевых начальных условий имеем:

$$\varphi(t_0) = x_I(t_0) = 0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

В прикладных задачах начальную функцию иногда находят экспериментально. Начальная функция может быть определена и из другого уравнения без отклонения аргумента, которое в некоторых задачах автоматического управления описывает процесс до момента начала действия обратной связи. Но чаще всего рассматривают движение предварительно невозбужденной системы и определяют вид выходного процесса, а затем отдельные его отрезки используют в качестве начальных функций.

С учетом физической картины явлений, происходящих в рассматриваемой системе, которая описывается дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом (1.33), графовой моделью запаздывающего сигнала $y(t-\tau)$ будет узел, взвешенный изображением по Лапласу непрерывной запаздывающей функции, или начальной функции. Этот узел, согласно структуре системы, соединяем дугой (с передачей, равной -1), с вершиной, моделирующей вход системы. Исходя из свойства звена запаздывания, на сигнальном уровне имеет место неравенство:

$$z(t) \neq x_I(t),$$

где $z(t)$ - выходной сигнал звена запаздывания.

Для выходного сигнала звена запаздывания верно соотношение

$$z(t) = x_I(t - \tau).$$

Это означает, что вершины графа, характеризующие сигналы $z(t)$ и $x_I(t)$ различны. Отсюда следует, что относительно протекающих в системе сигналов, контура, создаваемого цепью обратной связи через запаздывающее звено, не существует и система является разомкнутой относительно протекающих в ней сигналов. Это важное следствие, так как для графов

сложной конфигурации подсчёт и выделение путей и контуров может оказаться утомительной операцией. При построении графовых моделей всегда надо стремиться к получению графа с наименьшим возможным числом контуров.

Графовая модель системы, описываемой дифференциальным уравнением (1.33), изображена на рис.14.3.

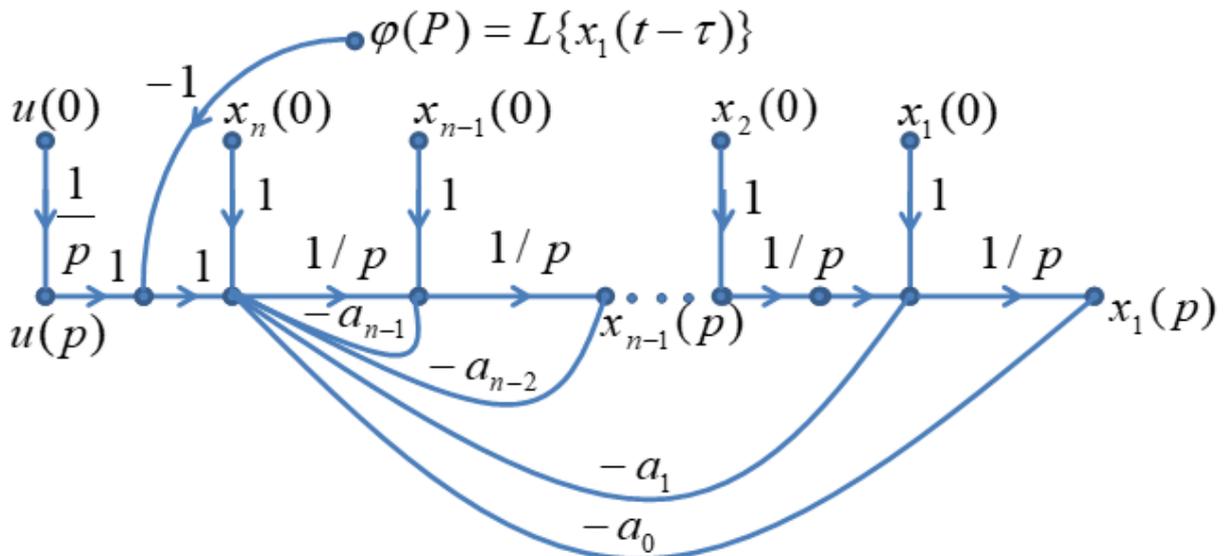


Рис.1.4.3. Графовая модель дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Топологическая модель линейной стационарной системы с запаздыванием в цепи обратной связи определяется как объединение графовых моделей элементов системы

$$G^C = G^f \cup G^o \cup G^{3C},$$

где G^f - модель входного сигнала (строится аналогично модели линейного процесса без запаздывания);

G^o - модель линейного объекта (процесса) без запаздывания,

G^{3C} - модель запаздывающего сигнала.

Топологическая модель, моделирующая поведение системы на отрезке времени $t \in [(k\tau, (k+1)\tau], (k=1, 2, \dots)$ изображена на рис. 1.4.4.

Здесь используется граф переходных состояний, полученный способом прямого программирования. Структура графовой модели на отрезках $[(k\tau, (k+1)\tau]$ не меняется, изменяются лишь вес узла $\varphi(p)$ и начальные условия, что видно из общей топологической модели (рис.1.4.4.), для промежутка, на котором определяются процессы - $[t_0, T]$, $T = (k+1)\tau$.

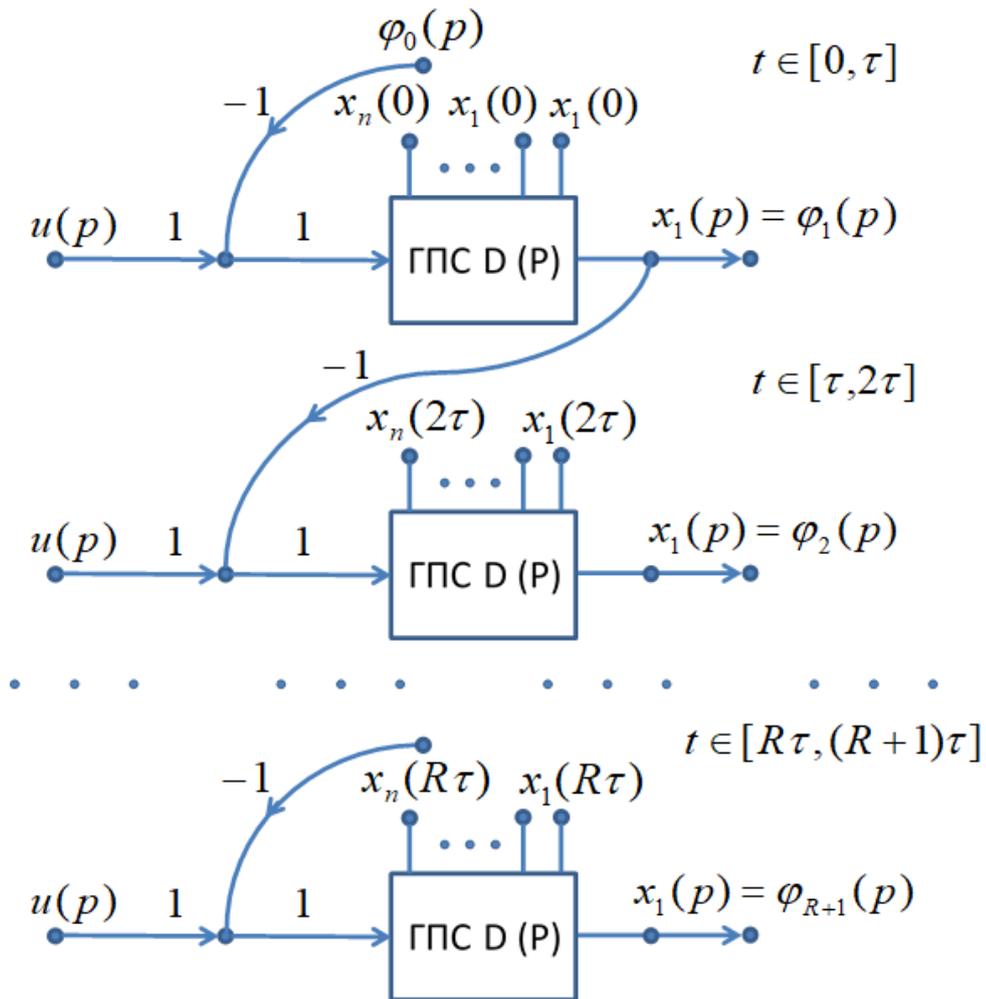


Рис.1.4.4. Топологическая модель, моделирующая поведение системы с запаздыванием по состоянию.

Из рассмотрения графовой модели получаем уравнения для переменных состояния на отрезке $t \in [0, \tau]$

$$X(p) = Q(p)X(0) + R(p)u(0) + S(p)\varphi_0(p), \quad (1.38)$$

где матрицы коэффициентов имеют размерности

$$Q(p) \rightarrow n \times n, R(p) \rightarrow n \times m, S(p) \rightarrow n \times m.$$

Введем обозначение: $\varphi_1(p) = x_1(p)$. Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (1.38), будем иметь:

$$X(t) = Q(t)X(0) + R(t)u(0) + D_0(t), \quad (1.39)$$

где $D_0(t) = L^{-1} [S(p) \varphi_0(p)]$.

Уравнение (1.39) описывает процессы в системе на отрезке времени $t \in [0, \tau]$. На конце отрезка, исходя из уравнения (1.39), значения переменных состояния

$$X(\tau) = Q(\tau)X(0) + R(\tau)u(0) + D_0(\tau) \quad (1.40)$$

На следующем отрезке $t \in [\tau, 2\tau]$ процессы в системе будут развиваться под действием 3-х факторов: входного воздействия $u(t)$, начальных (мгновенных) значений координат $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)$ и отрезка функции $x_1(t)$, записанного к моменту τ в звене запаздывания. Этой функцией является уже определенная нами на предыдущем отрезке $\varphi_1(t)$. Именно необходимость задания последней и определяет принципиальное отличие системы с запаздыванием от обычной динамической системы. Из рассмотрения графовой модели получим

$$X(p) = Q(p)X(\tau) + R(p)u(\tau) + S(p)\varphi_1(p) \quad (1.41)$$

Обозначим $\varphi_2(p) = x_1(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (6), будем иметь:

$$X(t) = Q(t-\tau)X(\tau) + R(t-\tau)u(\tau) + D_1(t-\tau) \quad (1.42)$$

где $D_1(t-\tau) = L^{-1} [S(p)\varphi_1(p)]$.

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t \in [\tau, 2\tau]$ получим из соотношения

$$X(2\tau) = Q(\tau)X(\tau) + R(\tau)u(\tau) + D_1(\tau) \quad (1.43)$$

Полученные начальные условия $X(2\tau)$ и начальная функция $\varphi_2(t)$ необходимы для определения процессов на следующем отрезке времени $t \in [2\tau, 3\tau]$. Выполняя последовательно, шаг за шагом, определенную выше процедуру, для отрезка $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ будем иметь

$$X(p) = Q(p)X(k\tau) + R(p)u(k\tau) + S(p)\varphi_k(p), \quad (1.44)$$

Откуда

$$X(t) = Q(t - k\tau)X(k\tau) + R(t - k\tau)u(k\tau) + D_k(t - k\tau), \quad (1.45)$$

где $D_k(t - k\tau) = L^{-1}[S(p)\varphi_k(p)]$;

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ получим из соотношения

$$X((k+1)\tau) = Q(\tau)X(k\tau) + R(\tau)u(k\tau) + D_k(k\tau) \quad (1.46)$$

Рассмотрим еще один случай, часто встречающийся на практике.

Линейная стационарная система с запаздыванием по управлению. Пусть задана система, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) + y(t - \tau) = u(t), \quad (1.47)$$

Свернутая структурная схема системы изображена на рис. 1.4.5. В этой системе запаздывающим является сигнал ошибки:

$$\varepsilon(t) = u(t) - x_1(t) \quad (1.48)$$

Для выходного сигнала звена запаздывания имеем

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon(t - \tau) = u(t - \tau) - x_1(t - \tau)$$

Графовая модель этой системы отличается от предыдущей тем, что вершина графа, характеризующая запаздывающий сигнал, взвешивается разностью двух функций, т.е. сигналом ошибки. Граф системы, моделирующий ее состояние на отрезке $t \in [0, \tau]$ изображен на рис. 1.4.6.



Рис.1.4.5. Свернутая структурная схема системы, представленной уравнением (1.47)

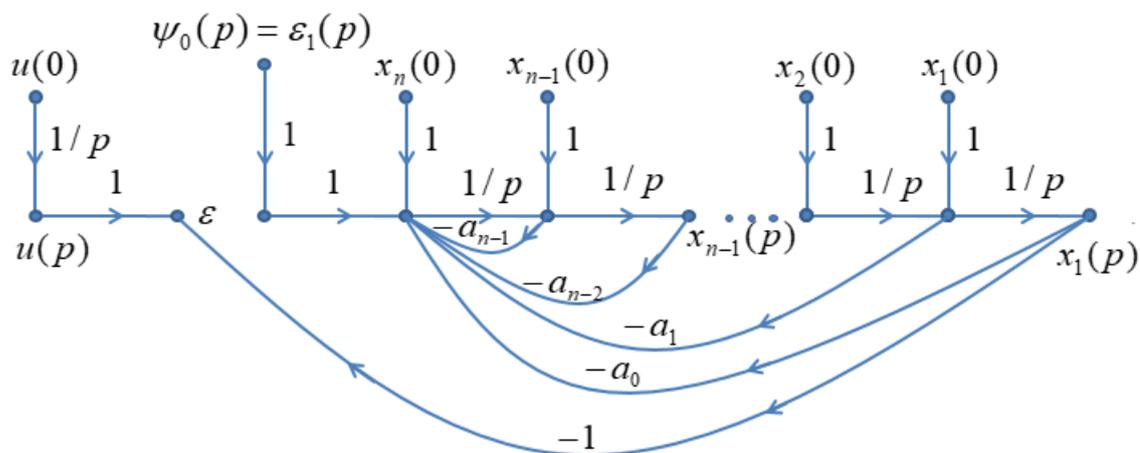


Рис.1.4.6. Графовая модель системы, представленной уравнением (1.47)

Общая топологическая модель системы, по которой можно определить процессы на промежутке $t \in [t_0, T]$, $T = t_0 + (k+1)\tau$, изображена на рис. 1.4.7.

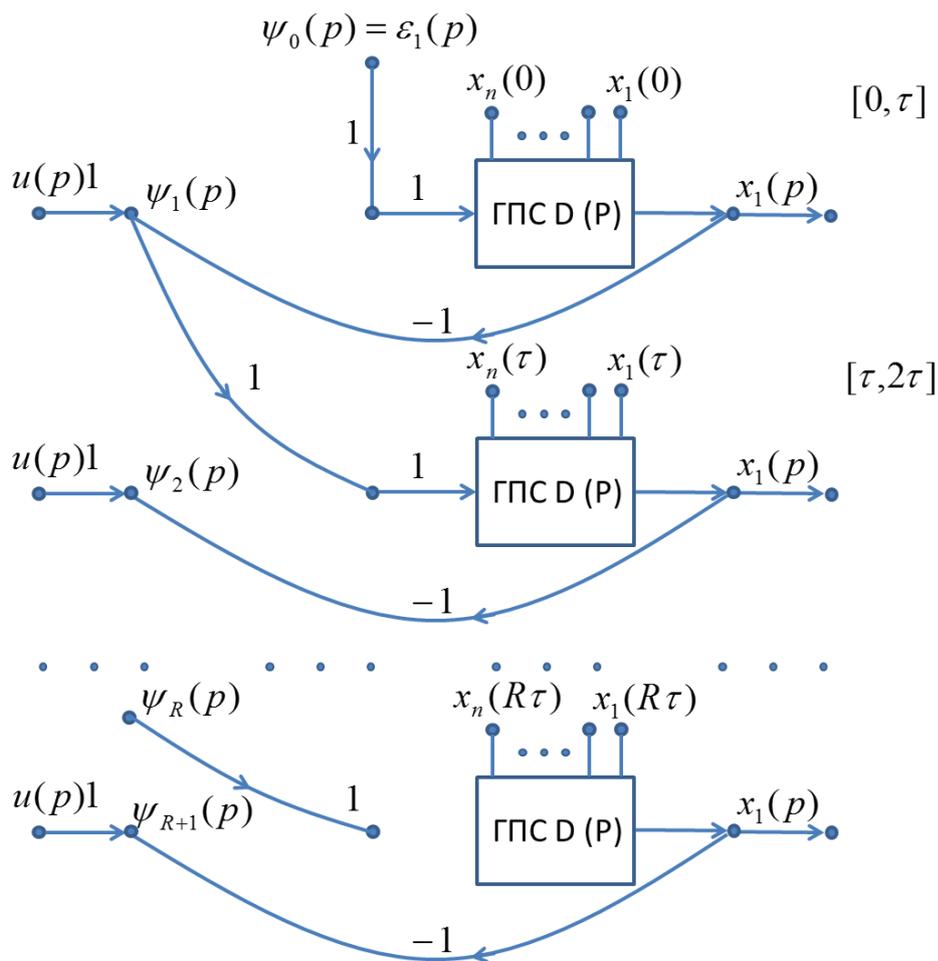


Рис.1.4.7. Топологическая модель, моделирующая поведение системы с запаздыванием по управлению.

Из рассмотрения графовой модели получаем уравнения для переменных состояния на отрезке $t \in [0, \tau]$,

$$X(p) = Q(p)X(0) + S(p)\varphi_0(p), \quad (1.49)$$

где матрицы коэффициентов имеют размерности

$$Q(p) \rightarrow n \times n, \quad R(p) \rightarrow n \times m, \quad S(p) \rightarrow n \times m.$$

Приняв во внимание, что $\varphi_0(p) = 0$, соотношение (1.49) можно записать в виде

$$X(p) = Q(p)X(0) \quad (1.50)$$

Запишем уравнение сигнала ошибки

$$\varepsilon(p) = u(p) - x_1(p) \quad (1.51)$$

Введем обозначение $\varphi_1(p) = \varepsilon(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (1.49), будем иметь

$$X(t) = Q(t)X(0) + D_0(t), \quad (1.52)$$

где $D_0(t) = L^{-1}[S(p)\varphi_0(p)]$.

Уравнение (1.52) описывает процессы в системе на отрезке времени $t \in [0, \tau]$. На конце отрезка, исходя из уравнения (1.52), значения переменных состояния для момента времени $t = \tau$:

$$X(\tau) = Q(\tau)X(0) + D_0(\tau). \quad (1.53)$$

На следующем отрезке $t \in [\tau, 2\tau]$ процессы в системе будут развиваться под действием следующих факторов: входного воздействия $u(t)$, начальных (мгновенных) значений координат $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_n(\tau)$ и отрезка функции

$\varphi_1(t - \tau)$, записанного к моменту τ в звене запаздывания. Функция $\varphi_1(t - \tau)$ есть по сути запаздывающий сигнал ошибки, определенный нами на предыдущем отрезке.

Из рассмотрения графовой модели получим для отрезка $t \in [0, 2\tau]$:

$$X(p) = Q(p)X(\tau) + S(p)\varphi_1(p) \quad (1.54)$$

Обозначим $\varphi_2(p) = u(p) - x_1(p)$.

Применяя обратное преобразование Лапласа к уравнению (1.54), будем иметь:

$$X(t) = Q(t-\tau)X(\tau) + D_1(t-\tau), \quad (1.55)$$

где $D_1(t-\tau) = L^{-1}[S(p)\varphi_1(p)]$.

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t=2\tau$ получим из соотношения

$$X(2\tau) = Q(\tau)X(\tau) + D_1(\tau). \quad (1.56)$$

Полученные начальные условия $X(2\tau)$ и начальная функция $\varphi_2(t)$ необходимы для определения процессов на следующем отрезке времени $t \in [2\tau, 3\tau]$. Выполняя последовательно, шаг за шагом, определенную выше процедуру, для отрезка $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ будем иметь:

$$X(p) = Q(p)X(k\tau) + S(p)\varphi_k(p),$$

Откуда

$$X(t) = Q(t-k\tau)X(k\tau) + D_k(t-k\tau), \quad (1.57)$$

где $D_k(t-\tau) = L^{-1}[S(p)\varphi_k(p)]$;

Мгновенные значения координат на конце отрезка $t=(k+1)\tau$ получим из соотношения

$$X((k+1)\tau) = Q(\tau)X(k\tau) + R(\tau)u(k\tau) + D_k(k\tau)$$

Сформулируем алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с постоянным запаздыванием. Данный алгоритм приемлем для расчета процессов как в системе с запаздыванием по состоянию, так и в системе с запаздыванием по управлению.

Алгоритм 1.

1. Строится графовая модель системы как объединение графовых моделей ее элементов.
2. Для отрезка времени $t \in [(k\tau), (k+1)\tau]$, $k=1, 2, \dots$ на основании графовой модели составляются соотношения для расчета процессов в системе:

$$X(p) = Q(p)X(k\tau) + [R(p) \cup R_1(p)]u(k\tau) + cS(p)\varphi_k(p), \quad (1.58)$$

где $R_1(p)$ – нулевая матрица, $c = -1 \cup 1$

3. Определяется изображение по Лапласу начальной функции

$$\varphi_{k+1}(p) = x_1(p) \cup [u(p) - x_1(p)]$$

4. Выполняется обратное преобразование Лапласа для соотношения (1.58):

$$X(t) = Q(t - k\tau)X(k\tau) + [R(t - k\tau) \cup R_1(t - k\tau)] u(k\tau) + cD_k(t - k\tau), \quad (1.59)$$

$$\text{где } D_k(t - k\tau) = L^{-1}\{\varphi_k(p)S(p)\} \cup L^{-1}\{[u(p) - \varphi_k(p)]S(p)\}$$

5. Определяются значения переменных состояния в момент $t = (k+1)\tau$ из соотношения :

$$X[(k+1)\tau] = Q(\tau)X(k\tau) + [R(\tau) \cup R_1(\tau)] u(k\tau) + cD_k(\tau) \quad (1.60)$$

6. Осуществляется возврат к пункту 2 алгоритма.

Проведенное исследование показало, что наличие в структуре системы звена запаздывания принципиальным образом изменяет ее свойства – для определения движения системы с момента t_0 , кроме знания начального состояния $X(t_0)$, как это имеет место в обычных динамических системах, необходимо задавать и начальную функцию. С учетом этой специфической особенности мы построили графовую модель системы с запаздыванием.

Основной проблемой, возникающей на этапе построения модели являлось моделирование непрерывного запаздывающего сигнала. Эта задача была разрешена тем, что вершина графа, характеризующая этот непрерывный сигнал, была взвешена изображением по Лапласу запаздывающей функции.

Кроме этого из топологической модели, представленной на рис.1.4.7, видно, что линейная стационарная система с постоянным запаздыванием может рассматриваться как система с динамической структурой. Запаздывающий сигнал является причиной изменчивости структуры системы во времени. Вместо исходной замкнутой системы мы имеем дело с системой, представленной конечным множеством структурных состояний

$$S_t = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}.$$

В каждом из этих состояний система является разомкнутой.

Время пребывания в каждом структурном состоянии определяется интервалом $[t_k, t_{k+1}]$. В то же время видно, что связи между отдельными состояниями не совсем обычны. Они указывают на то, что мы имеем дело с системой с памятью, так как состояние в каждой подсистеме зависит от протекания процесса на предыдущем интервале времени, что хорошо видно из топологической модели.

Использование графовой модели позволило исключить непосредственное интегрирование дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, что делает предложенный метод более эффективным, чем метод шагов. Найденный алгоритм является идеальной формой с точки зрения программирования на компьютере.

1.5. Графовые модели и алгоритм исследования динамики линейной стационарной системы с переменным запаздыванием

При исследовании систем с переменным запаздыванием вводится понятие звена переменного запаздывания [10]. Это звено отличается от звена постоянного запаздывания рядом свойств [11-15]. Математическая зависимость между входным сигналом $x(t)$ и выходным сигналом $y(t)$ звена постоянного запаздывания известна:

$$y(t) = \begin{cases} x(t - \tau), \tau \geq 0, & t \geq t_0 + \tau \\ 0, & t \leq t_0 + \tau \end{cases}$$

Выходной сигнал полностью воспроизводит входной сигнал по истечении времени $t_0 + \tau$ (рис.1.5.1).

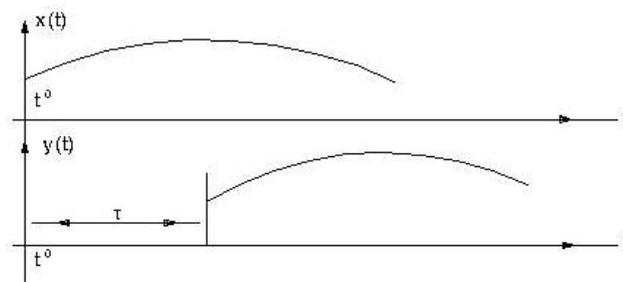


Рис.1.5.1. Входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы звена постоянного запаздывания

Пусть величина запаздывания является функцией независимой переменной t :

$$\tau = \tau(t).$$

По причине переменности величины τ запаздывания выходной сигнал будет деформирован на оси времени. Функция $y(t)$, являющаяся выходным сигналом звена, будет либо «сжата» на оси времени по отношению ко входной функции $x(t)$, либо «растянута» (рис.1.5.1.2).

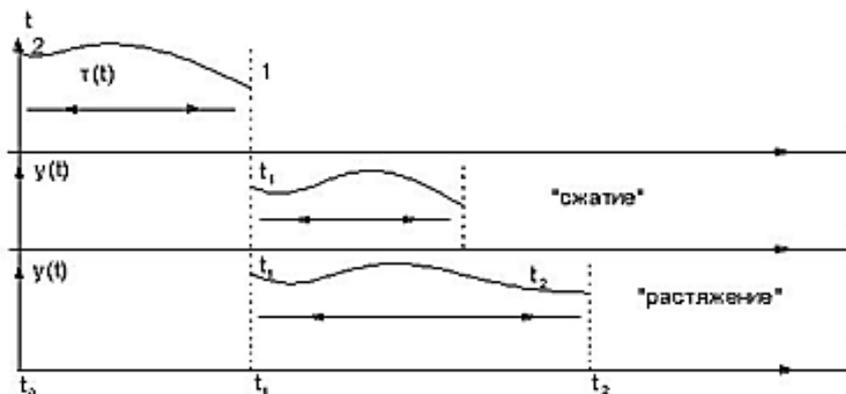


Рис.1.5.2. Входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы звена переменного запаздывания

Но каким бы образом не менялась величина запаздывания $\tau(t)$, начальное и конечное значения функции $x(t)$ измениться не могут. Более того, хотя звено переменного запаздывания и деформирует на оси времени входной сигнал функцию $x(t)$, выходной сигнал – функция $y(t)$ будет воспроизводить все мгновенные значения функции $x(t)$ как при «сжатии», так и при «растяжении». Приведем условия физической реализуемости звена переменного запаздывания. Одно из них таково, что скорость роста запаздывания не должно превышать скорости естественного хода времени, иначе входной сигнал никогда не будет воспроизводиться на выходе звена. Так как скорость естественного хода времени равна единице ($dt/dt=1$), то функция переменного запаздывания должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} \leq 1 \text{ для } t > 0.$$

Опережение выходного сигнала по отношению ко входному сигналу реализуемо физически, поэтому следующее условие физической реализуемости звена переменного запаздывания:

$$\tau(t) \geq 0.$$

Кроме этих условий накладываются ограничения на отрицательные значения производной $\frac{d\tau}{dt}$: длительность отрицательных значений $\frac{d\tau}{dt}$ (отрезок $[t_1, t_2]$ на рис. 1, 1 в) должна быть такова, чтобы значение $\tau(t)$ в момент $t = t_2$ не было отрицательным. Математически это записывается так:

$$\tau(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau(t)}{dt} dt \geq 0.$$

Дадим строгое определение звена переменного запаздывания.

Определение. Звеном переменного запаздывания называется элемент системы, свойства которого определяются следующими условиями:

1. Заданы некоторая функция $\tau(t)$, называемая функцией переменного запаздывания, множество входных X и выходных Y функция с элементами $x(t)$ и $y(t)$;

2. Задано множество моментов времени T со значениями: t_0 – момент начала наблюдения выходной функции $y(t)$, t_b – момент конца наблюдения выходной функции $y(t)$, и отрезками:

$\tau(t_0)$ – запаздывание начального значения входной функции $x(t)$,

$\tau(t_0)$ – запаздывание конечного значения входной функции $x(t)$, заданной на отрезке $[t_0 - \tau(t_0), t_0]$.

3. Функция переменного запаздывания удовлетворяет следующим соотношениям:

$$a) \tau(t) \geq 0, \text{ для всех } t < T \quad (1.61)$$

$$b) \frac{d\tau(t)}{dt} \leq t \text{ для } t > t_0 \quad (1.62)$$

$$c) \tau(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau(t)}{dt} dt \geq 0, \text{ для } t_1 \leq t \leq t_2 \quad (1.63)$$

где $[t_1, t_2]$ отрезок времени, на котором $\frac{d\tau(t)}{dt} < 0$.

4. Входная и выходная функции удовлетворяют равенству

$$y(t) = x[t - \tau(t)] \quad (1.64)$$

и при $t=t_b$

$$x(t) = y(t), \quad (1.65)$$

$$t_b - \tau(t_b) = t_0$$

Функция запаздывания, удовлетворяющая всем требованиям определения 1, может быть, как линейной, так и нелинейной функцией времени. Ряд практических задач позволяет представить функцию $\tau(t)$, как линейно изменяющейся по времени функцию

$$\tau(t) = \tau + kt \quad (1.66)$$

где $\tau_0 \geq 0, k = const$.

Для выражения (1.66) условие физической реализуемости звена переменного запаздывания можно записать в виде $k \leq 1$.

При $k=0$ функция $\tau(t) = \tau_0 = const$. Мы получим выражение для звена постоянного запаздывания.

При $k < 0$ функция $\tau(t)$ является линейной убывающей функцией. В этом случае для значений времени $t \leq \tau_0/k$ надо считать запаздывание равным нулю (рис 1, 1 г), либо некоторой постоянной величине τ_{min} для всех значений времени $t \geq \frac{(\tau_0 - \tau_{min})}{k}$.

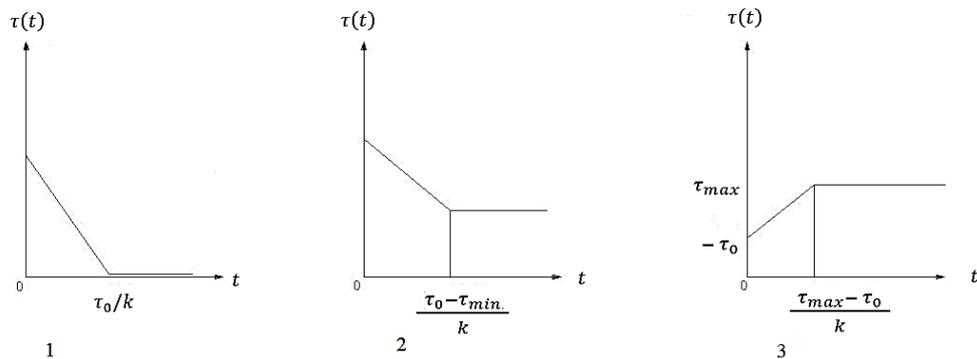


Рис.1.5.3. 1,2- линейно- убывающее запаздывание, 3- линейно возрастающее запаздывание.

При $k > 0$ запаздывание является линейно-возрастающей функцией. Система с линейно-возрастающим запаздыванием всегда неустойчива в силу

непрерывного роста запаздывания. Если существует некоторое максимальное значение запаздывания τ_{max} , то устойчивость системы будет зависеть от величины этого максимума (рис. 1.5.3).

В случае звена с нелинейным запаздыванием функция запаздывания зависит не только от времени t , но и от входной или выходной функции, или от обеих вместе,

$$\tau = \tau[t, \eta(t)], \quad (1.66a)$$

где функция $\eta(t)$ может принимать значения

$$\eta(t) = x(t),$$

$$\eta(t) = y(t),$$

$$\eta(t) = \eta[x(t), y(t)].$$

Конечно, функция запаздывания в виде (1.66a) удовлетворяет всем условиям определения 1.

Теперь перейдем к рассмотрению линейной системы с переменным запаздыванием в цепи обратной связи (рис 1.5.4).

Дифференциальное уравнение системы имеет вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dx_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_1(t) + x_1(t - \tau(t)) = u(t). \quad (1.67)$$

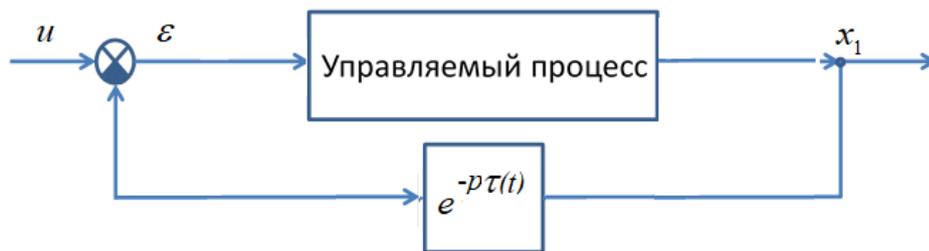


Рис.1.5.4. Структурная схема линейной системы с переменным запаздыванием в цепи обратной связи

Здесь физическая картина процессов несколько иная, чем в системе с постоянным запаздыванием. По причине переменности величины запаздывания выходной сигнал $x_1(t)$, проходя через звено запаздывания, деформируется на оси времени (происходит либо «сжатие», либо

«растяжение» сигнала, хотя все мгновенные значения сохраняются [16]. Длительность выходного сигнала звена переменного запаздывания $y(t)$ отлична от длительности «записанного» сигнала $x_1(t - \tau(t))$. Эта длительность будет определяться моментом появления величины $x_1(t_0)$ на выходе звена переменного запаздывания. По определению звена переменного запаздывания

$$x_1(t_0) = y(t_1) \quad (1.68)$$

$$t_1 - \tau(t_1) = t_0 \quad (1.69).$$

Определив момент появления на выходе звена запаздывания мгновенного значения сигнала $x_1(t_0)$ из уравнения (1.69), можно найти выходной процесс системы на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Дифференциальное уравнение (1.67) заменим соответствующей системой дифференциальных уравнений 1-го порядка. Эта система уравнений может быть записана в векторной форме:

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{A}\bar{X}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{C}x_1(t - \tau(t)), \quad (1.70)$$

с начальной функцией $\varphi_0(t) = x_1(t)$ для $t_0 - \tau(t_0) \leq t \leq t_0$.

$$\varphi_0(p) = L\{x_1(t - \tau(t_0))\}$$

Для решения уравнения (10) используем преобразование Лапласа:

$$p\bar{X}(p) = \bar{A}\bar{X}(p) + \bar{B}u(p) + \bar{C}\varphi_0(p) + \bar{X}(0^+), \quad (1.71)$$

где $\varphi_0(p) = L\{\varphi_0(t)\}$, $\varphi_0(t)$ – заданная начальная функция, определенная на начальном множестве $[t_0 - 0, t_0]$.

Совершая элементарные преобразования, находим

$$X(p) - G(p)Bu(p) + G(p)G\varphi_0(p) + G(p)X(0^+), \quad (1.72)$$

где $G(p) = (p - A)^{-1}$

Применив обратное преобразование Лапласа к выражению (12), получим:

$$X(t) = L\{G(p)Bu(p)\} + L\{G(p)C\varphi_0(p)\} + L^{-1}\{G(p)\}X(0^+), \quad (1.73)$$

где $G(p) = L^{-1}\{(p - A)^{-1}\}$.

Выражение (1.71) описывает процессы в системе на отрезке времени (t_0, t_1) . Поскольку в правой части уравнения (1.71) функция $\varphi_0(p)$ является известной, то оно превращается в обыкновенное алгебраическое уравнений

методом. Для отыскания значения конечной точки t_1 воспользуемся соотношением $t_1 - \tau(t_1) = t_0$. Решая это функциональное уравнение относительно t_1 , мы и находим искомую точку.

Возьмем теперь в качестве нового начального момента точку t это позволяет перейти к следующему шагу решения уравнения (1.70). Для отрезка времени $[t_1, t_2]$ предыдущее решение будет играть роли начальной функции. Подставляя $\varphi_1(p) = x_1(p)$ в уравнение (1.71), получим:

$$X(p) = G(p)Bu(p) + G(p)C\varphi_1(p) + G(p)X(t_1).$$

откуда

$$X(t) = L^{-1}\{G(p)Bu(p)\} + L^{-1}\{G(p)C\varphi_1(p)\} + G(t)X(t) \quad (1.74)$$

Выражение (1.74) является решением уравнения (1.70) на промежутке $[t_1, t_2]$, где конечная точка t_2 определяется из функционального уравнения.

$$t_2 - \tau(t_2) = t_1 \quad (1.75)$$

Таким образом можно определить процессы для любого интересующего нас интервала времени.

Итак, линейная система с переменным запаздыванием поддается исследованию с помощью матричных уравнений и преобразования Лапласа. Но соотношение (1.72) можно получить и с помощью графов переходных состояний, позволяющих обойти трудоёмкие вычисления, исключить операций, связанные с неплотностью матриц. Графовая модель системы с переменным запаздыванием строится аналогично графовой модели системы с постоянным запаздыванием (рис.1.5.5). Топологическая модель системы для промежутка времени $[t_0, T]$, где $T=t_{k+1}$, $k=0, 1, \dots, N$, изображена на рис.1.5.6.

Учитывая изложенное и основываясь на общности определенных этапов формирования моделей одномерных систем с постоянным и переменным запаздыванием, можно сформулировать алгоритм расчета процессов в линейной непрерывной системе с переменным запаздыванием. Данный алгоритм приемлем и для расчета процессов в системе с переменным запаздыванием в прямой цепи.

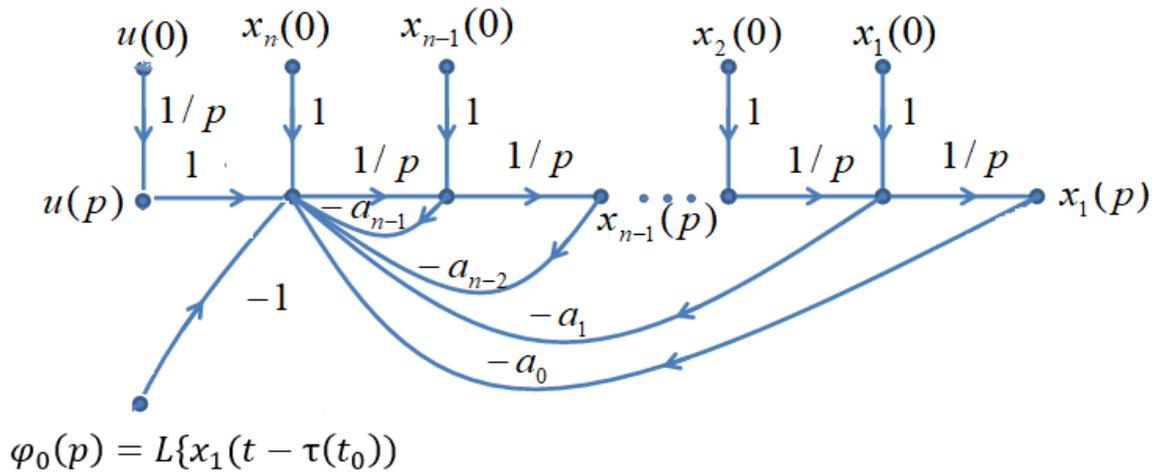


Рис.1.5.5. Граф линейной системы с переменным запаздыванием в цепи обратной связи

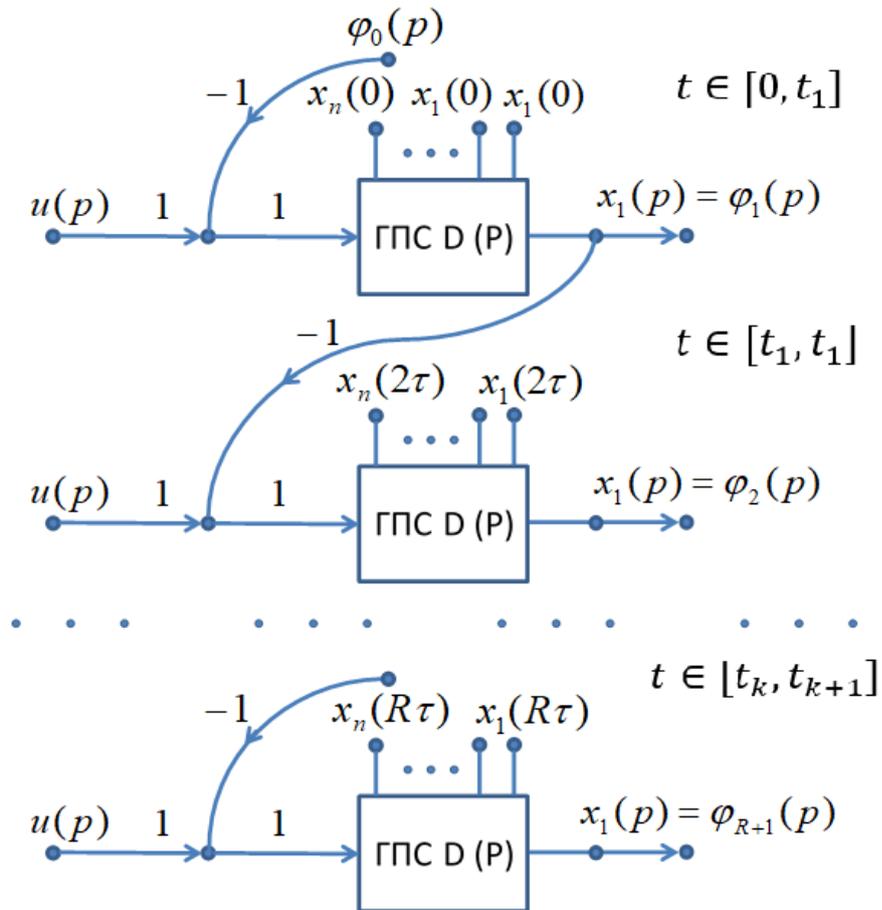


Рис.1.5.6. Топологическая модель системы для промежутка времени $[t_0, t_{k+1}]$

Алгоритм 1.2

1. Строится графовая модель системы как объединение графовых моделей её элементов

$$G_k^0 = G_k^0 U G_k^0.$$

2. Определяется конечная точка отрезка времени $[t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, N$ из уравнения

$$t_{k+1} - \tau(t_{k+1}) = t_k.$$

3. Для отрезка $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, N$ по полученному графу составляются соотношения для расчёта процессов в системе:

$$X(p) = Q(p)X(t_k) + [R(p)\nabla R_1(p)]u(t_k) + c[\varphi_k(p)\nabla(u(p) - \varphi_k(p))]S(p) \quad (1.77)$$

где $R_1(p)$ – нулевая матрица, $c = 1 \vee -1$.

4. Определяется изображение по Лапласу функции $\varphi(p)$

$$\varphi_{k+1} = x_1(p).$$

5. Выполняется обратное преобразование Лапласа для соотношения (16):

$$X(t) = D(t - t_k)X(t_k) + [R(t - t_k)\nabla R_1(t - t_k)]u(t_k) + cD_k(t - t_k). \quad (17)$$

где $D_k(t - t_k) = L^{-1}\{\varphi_k(p)S(p)\}\nabla L^{-1}\{[u(p) - \varphi_k(p)]S(p)\}$.

6. Определяются значения переменных состояния в момент $t = t_{k+1}$ из соотношения (17)

$$X(t_{k+1}) = Q(t_{k+1} - t_k)X(t_k) + [R(t_{k+1} - t_k)\nabla R_1(t_{k+1} - t_k)]u(t_k) + cD_k(t_{k+1} - t_k). \quad (1.78)$$

7. Переход к пункту 3. алгоритма

1.6. Моделирование многомерных линейных непрерывных систем с запаздыванием

Уравнение состояния многомерной линейной непрерывной системы с переменным запаздыванием имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t) + CX(t - \tau(t)). \quad (1.79)$$

$$Y(t) = HX(t), \quad (1.80)$$

где $X(t)$ – вектор состояния системы, $U(t)$ – вектор входных воздействий, $Y(t)$ – вектор выходных величин.

Обобщение уравнения (1.79) на случай, когда имеется k векторов с различными запаздываниями, может быть сделано следующим образом.

Введем вектор

$$X(t) - \tau_i(t) = \begin{bmatrix} x_1(t - \tau_t(t)) \\ x_2(t - \tau_t(t)) \\ \dots \dots \dots \\ x_n(t - \tau_i(t)) \end{bmatrix}, \quad (1.81)$$

где $\tau_i(t)$ – переменное запаздыванием, различное для каждого из векторов, и матрицы

$$C_i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i & \dots & c_{1n}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i & \dots & c_{2n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}^i & c_{n2}^i & \dots & c_{nn}^i \end{bmatrix},$$

где индекс над буквой c указывает на принадлежность этого элемента данной матрице. Тогда уравнение (1.79) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t) + \sum_{i=1}^k C_i x(t - \tau_i(t)) \quad (1.82)$$

Для отыскания решения уравнения (1.79) необходима задать n начальных функций $\varphi_i(t)$, которые удобно записать в виде матрицы столбца

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots \dots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$$

На основании свойств начальной функции должны иметь место равенства

$$\Phi(t_0) = X(t_0),$$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi(t), & t \in E_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

Многомерная система сохраняет все основные черты простых структур, рассмотренных в предыдущих параграфах (1.4 и 1.5). Протекающие в них процессы принципиально остаются теми же, что были изучены в упомянутых параграфах. Но задача исследования многомерных систем усложняется тем, что к влиянию запаздываний добавляется взаимосвязи по входам и выходам. В этом отношении целесообразным является использование графовых моделей, являющихся наиболее удобным способом представления всех взаимосвязей по многочисленным каналам управления.

Для большей наглядности рассмотрение начнем с двумерной системы с запаздыванием по состоянию, а затем сделаем обобщение на n -мерный случай. В соответствии со свойством система с запаздыванием в момент времени t_0 на входе системы начнут действовать два сигнала –

$$\text{входное воздействие } U(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$$

$$\text{и начальная функция } \Phi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}.$$

Для каждого сепаратного канала действие начальной функции завершается в некоторые моменты времени t_b^1 и t_b^2 . Действие входного сигнала $U(t)$ продолжается на всем промежутке времени от t_0 до произвольного t . Графовая модель строится с учетом этих физических особенностей. Модель двумерного объекта управления получается объединением моделей двух сепаратных и двух перекрестных каналов передач:

$$G_t = G_t^{rr} U G_t^{rk} \quad (1.83)$$

$$r = 1,2; k = 1,2; r \neq k,$$

где

$$G_t^{rr} = (X^{rr}(t_0), X^{rr}(p), V^{rr}) \quad (1.84)$$

- модели сепаратных каналов передачи сигналов;

Здесь

$$X^{rr}(t_0) = \{x_t^{rr}(t_0)\},$$

$$X^{rr}(p) = \{x_t^{rr}(p)\},$$

$$V^{rr} = \{x_t^{rr}(t_0), x_m^{rr}(p), a_{ml}^{rr}(p)\}$$

$$r = 1, 2; m = 1, 2, \dots, n;$$

$$i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$$

Графовые модели перекрестных каналов

$$G_t^{rk} = (X^{rr}(t_0), X^{kr}(p), V^{rk}). \quad (1.85)$$

Здесь

$$X^{rk}(t_0) = \{x_i^{rk}(t_0)\};$$

$$X^{rk}(p) = \{x_i^{rk}(p)\};$$

$$V^{rk} = \{x^{rk}(t), x^{rk}(p), a^{rk}(p)\},$$

где

$$r = 1, 2; m = 1, 2, \dots, n;$$

$$i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n$$

С учетом этих обозначений

$$G_t = (X(t_0), X(p), V)$$

$$X(t_0) = X^{rr}(t_0) \cup X^{rk}(t_0);$$

$$X(p) = X^{rr}(p) \cup X^{rk}(p);$$

$$V = V^{rr} \cup V^{rk}.$$

Графовые модели запаздывания сигналов определим в виде

$$G^\varphi = (\varphi^r(p), e^r, V^\varphi),$$

где $\varphi^r(p)$ – узел, моделирующий запаздывающий сигнал, взвешен изображением по Лапласу запаздывающего сигнала, представлен отрезком непрерывной функции.

e^r – изображение по Лапласу сигнала ошибки в r -м канале передачи:

$$V^\varphi = \{\varphi^r(p), e^r(p), -1\}.$$

Модели входных сигналов строятся аналогично моделям непрерывного объекта управления.

Если в системе имеет место запаздывание управляющих сигналов, то в этом случае графовые модели запаздывающих сигналов определяются в виде

$$G_{\phi}^{rr} = \{\phi^{rr}(p), \gamma^{rr}(p), V_{\phi}^{rr}\},$$

$$G_{\phi}^{rk} = \{\phi^{rk}(p), \gamma^{rk}(p), V_{\phi}^{rk}\},$$

где

$$\phi^{rr}(p) = u^r(p) = \phi^{rr}(p),$$

$$\phi^{rk}(p) = u^r(p) = \phi^{rk}(p),$$

$$V^{rr}(p) = (\phi^{rr}(p), \gamma^{rr}(p)),$$

$$V^{rk}(p) = (\phi^{rk}(p), \gamma^{rk}(p)).$$

С учетом изложенного можно сформулировать следующий алгоритм построения графовой модели и исследования динамики многомерных процессов с запаздываниями.

Алгоритм 1.6.

1. Величины запаздываний упорядочиваются в порядке возрастания их значений:

$$\tau^* = \tau_1^*, \tau_2^*, \dots \dots \tau_N^*.$$

2. Строятся графовые модели отдельных элементов системы: модели входных сигналов, модели запаздывающих сигналов, модель непрерывного объекта управления.

3. Полученные графы объединяются в общую топологическую модель системы с учетом интервала наблюдения системы на оси τ^* .

а) $G_t^c = G_t^f U G_t^{3c} U G_t$ – при запаздывании по состоянию.

б) $G_t^c = G_t^f U G_t^{3c} U G_t$ – при запаздывании по управлению.

4. В соответствии с моментами времени $\tau_t^* \in \tau^*$ по полученному графу составляются соотношения для определения переменных состояния и координат выхода системы

$$X^{rr}(p) = u^{rr}(p)X^{rr}(\tau) + [R^{rr}(p)UR1^{rr}(p)] * u^r(\tau) + c\phi^r(p)S^{rr}(p) \quad (1.87)$$

$$X^{rk}(p) = Q^{rk}(p)X^{rk}(\tau) + [R^{rk}(p)UR1^{rk}(p)] * u^r(\tau) + c\varphi^r(p)S^{rr}(p)$$

1.7. Примеры расчета выходных сигналов линейных непрерывных систем с запаздыванием

Пример 1.7.1. Требуется определить выходной сигнал системы (рис.1.7.1), если в момент времени $t=0$ на вход системы подается воздействие $u(t)=1(t)$, параметры звеньев равны $k=1, a=0, b=2, \tau=0.5$ с. Начальные условия – нулевые, начальная функция, заданная на начальном множестве - $\phi_0(t) = 0$.

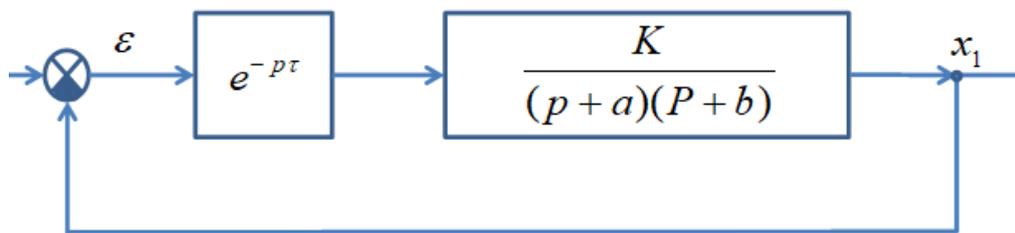


Рис. 1.7.1. Структурная схема заданной системы

Используя структурную схему системы и учитывая, что звено запаздывания задерживает сигнал ошибки на время τ , построим граф систем для отрезка времени $[0, \tau]$ (рис. 1.7.2).

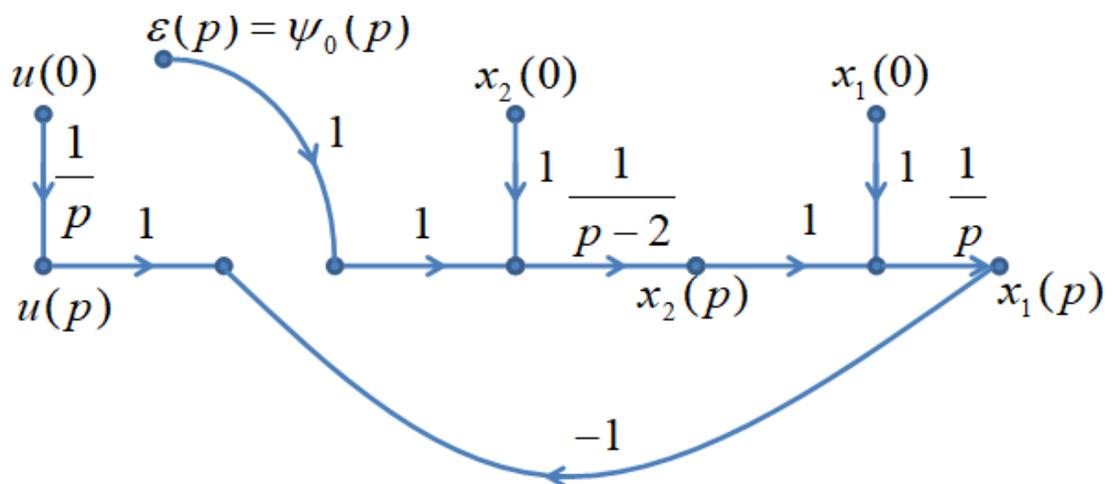


Рис. 1.7.2. Граф системы для отрезка времени $[0, \tau]$

Из рассмотрения графа находим $x_1(p) = x_2(p) = 0$,

$$\varepsilon(p) = u(p) - x_1(p) = 1/p \quad \phi_1(p) = \varepsilon(p) = 1/p;$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 0, x_1(\tau) = x_2(\tau) = 0.$$

Для отрезка времени $[\tau, 2\tau]$ структура графа будет прежней (смотрите топологическую модель системы рис. 1.7.3.), только меняется значение сигнала $\varepsilon(p)$.

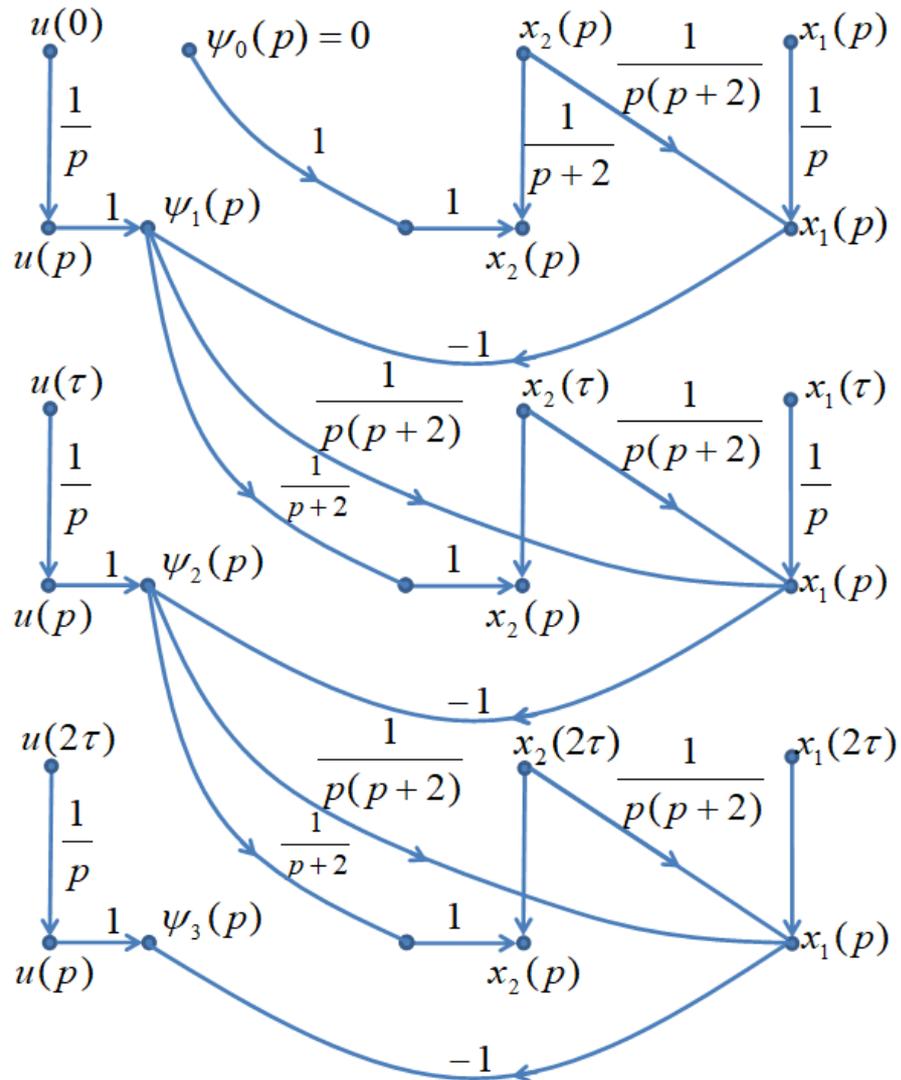


Рис.1.7.3. Топологическая модель системы

Тогда из рассмотрения графа легко записать, что

$$x_1(p) = \frac{1}{p(p+2)} \quad \phi_1(p) = \frac{1}{p^2(p+2)},$$

$$x_2(p) = \frac{1}{p+2} \quad \phi_1 = \frac{1}{p(p+2)},$$

$$\varepsilon(p) = 1/p - \frac{1}{p^2(p+2)} ;$$

$$\phi_2(p) = \varepsilon(p)$$

Переходя к оригиналам, будем иметь:

$$x_1(t) = 0.25e^{-2(t-0.5)} - 0.25 + 0.5(t - 0.5);$$

$$x_2(t) = 0.5(1 - e^{-2(t-0.5)}).$$

На конце отрезка $[\tau, 2\tau]$ значения переменных состояния будут равны

$$x_1(2\tau) = x_1(1) = 0.092; \quad x_2(2\tau) = x_2(1) = 0.316.$$

На следующем отрезке времени $[\tau, 2\tau]$ переменные состояния определим из состояний

$$x_1(p) = \frac{x_1(2\tau)}{p} + \frac{x_2(2\tau)}{p(p+2)} + \frac{\phi_2(p)}{p(p+2)} = \frac{0.092}{p} + \frac{0.316}{p(p+2)} - \frac{1}{p^3(p+2)^2} ;$$

$$x_2(p) = \frac{x_2(2\tau)}{p+2} + \frac{\phi_2(p)}{p+2} = \frac{0.316}{p+2} + \frac{1}{p(p+2)} - \frac{1}{p^2(p+2)^2} ;$$

$$\varepsilon(p) = \phi_3(p) = \frac{0.908}{p} - \frac{0.316}{p(p+2)} - \frac{1}{p^2(p+2)} - \frac{1}{p^3(p+2)^2} .$$

Переходя к оригиналам, будем иметь следующие соотношения:

$$x_1(t) = 0.092e^{-2(t-1)} - 0.125(t-1)e^{-2(t-1)} - 0.125(t-1)^2 + 0.625(t-1) .$$

$$x_2(t) = -0.309e^{-2(t-1)} - 0.25(t-1) + 0.25(t-1)e^{-2(t-1)} + 0.625 .$$

Значения переменных состояния на конце отрезка $[2\tau, 3\tau]$ определим из полученных соотношений, подставив $t = 3\tau$:

$$x_1(3\tau) = x_1(1.5) = 0.292; \quad x_2(3\tau) = x_2(1.5) = 0.432.$$

На отрезке времени $[3\tau, 4\tau]$ аналогично переменные состояния определим из соотношений:

$$\begin{aligned} x_1(p) &= \frac{x_1(3\tau)}{p} + \frac{x_2(3\tau)}{p(p+2)} + \frac{\phi_3(p)}{p(p+2)} = \\ &= \frac{0.292}{p} + \frac{0.432}{p(p+2)} - \frac{0.316}{p^2(p+2)^2} - \frac{1}{p^3(p+2)^2} - \frac{1}{p^4(p+2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(p) &= \frac{x_2(3\tau)}{p+2} + \frac{\phi_3(p)}{p+2} = \\ &= \frac{0.432}{p+2} + \frac{0.908}{p(p+2)} - \frac{0.316}{p(p+2)^2} - \frac{1}{p^2(p+2)^2} - \frac{1}{p^3(p+2)^3} \end{aligned}$$

Выражение для сигнала ошибки имеет более сложный вид, чем на предыдущем отрезке:

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) = \phi_4(p) &= \frac{1}{p} - x_1(p) = \\ &= \frac{0.708}{p} - \frac{0.432}{p(p+2)} - \frac{0.908}{p^2(p+2)} + \frac{0.316}{p^2(p+2)} + \\ &+ \frac{1}{p^3(p+2)^2} - \frac{1}{p^4(p+2)^3} \end{aligned}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, будем иметь:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.477 - 0.185e^{-2(t-1.5)} + 0.3125(t-1.5) - \\ &- 0.171(t-1.5)e^{-2(t-1.5)} - 0.125(t-1.5)^2 - \\ &- 0.021(t-1.5)^3 + 0.094(t-1.5)^4 + 0.3125(t-1.5)^2 e^{-2(t-1.5)} \\ x_2(t) &= 0.3125 + 0.1195e^{-2(t-1.5)} + 0.5955(t-1.5)e^{-2(t-1.5)} \\ &- 0.0625(t-1.5) - 0.0625(t-1.5)^2 + 0.15625(t-1.5)^2 e^{-2(t-1.5)}. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений найдем значения переменных состояния в точке $t = 3\tau$, необходимые для определения процесса на следующем отрезке времени $[4\tau, 5\tau]$:

$$x_1(4\tau) = 0.534, \quad x_2(4\tau) = 0.4335.$$

На отрезке времени $[4\tau, 5\tau]$ будем иметь

$$x_1(p) = \frac{0.534}{p} + \frac{0.4335}{p(p+2)} + \frac{\phi_4(p)}{p(p+2)}$$

$$x_2(p) = \frac{0.4335}{p+2} + \frac{\phi_4(p)}{p+2}$$

$$\varepsilon(p) = \phi_5(p) = \frac{0.466}{p} - \frac{0.4335}{p(p+2)} - \frac{\phi_4(p)}{p(p+2)},$$

откуда аналогично приведённой выше процедуре, находятся переменные состояния.

Пример 1.7.2. Определить промежуточные и выходные координаты системы, структурная схема которой изображена на рис. 1.7.4. Запаздывания в сепаратных каналах равны $\tau_1 = \tau_2 = 0,4\text{с}$.

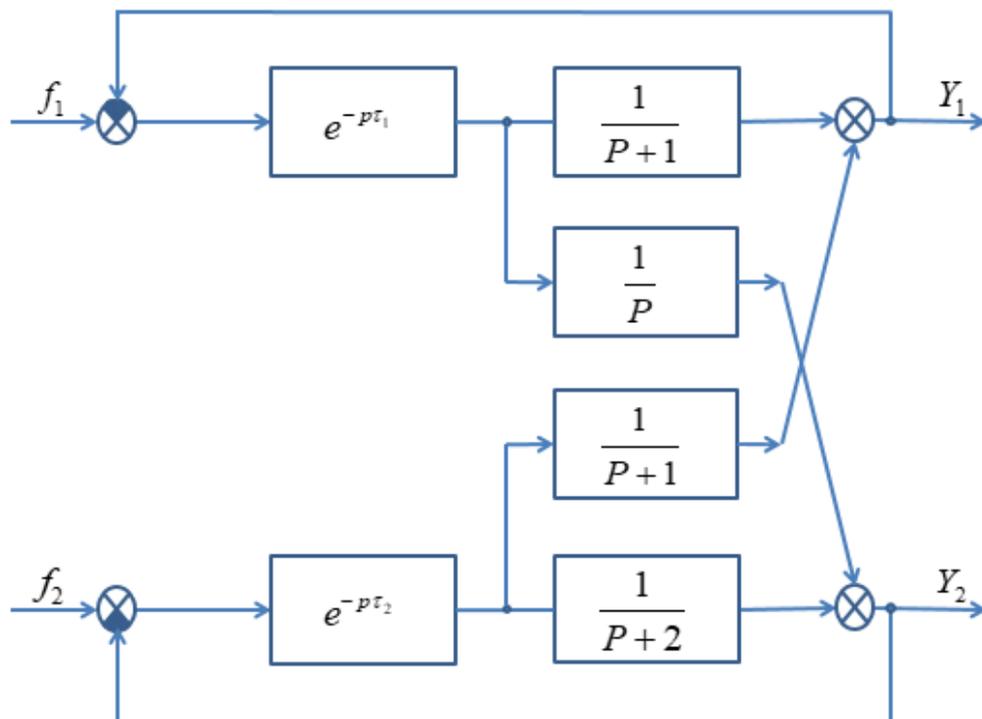


Рис. 1.7.4. Структурная схема двумерной линейной системы

Начальные условия – нулевые, начальные функции $\varphi_0^1(t), \varphi_0^2$ также предполагаются нулевыми.

Так как от шага к шагу в системе происходит смена одинаковых структурных состояний, то можно построить графовую модель системы (рис.1.7.5) для отрезка $\{ i\tau, (i+1)\tau \}$, $i=0, 1, \dots$

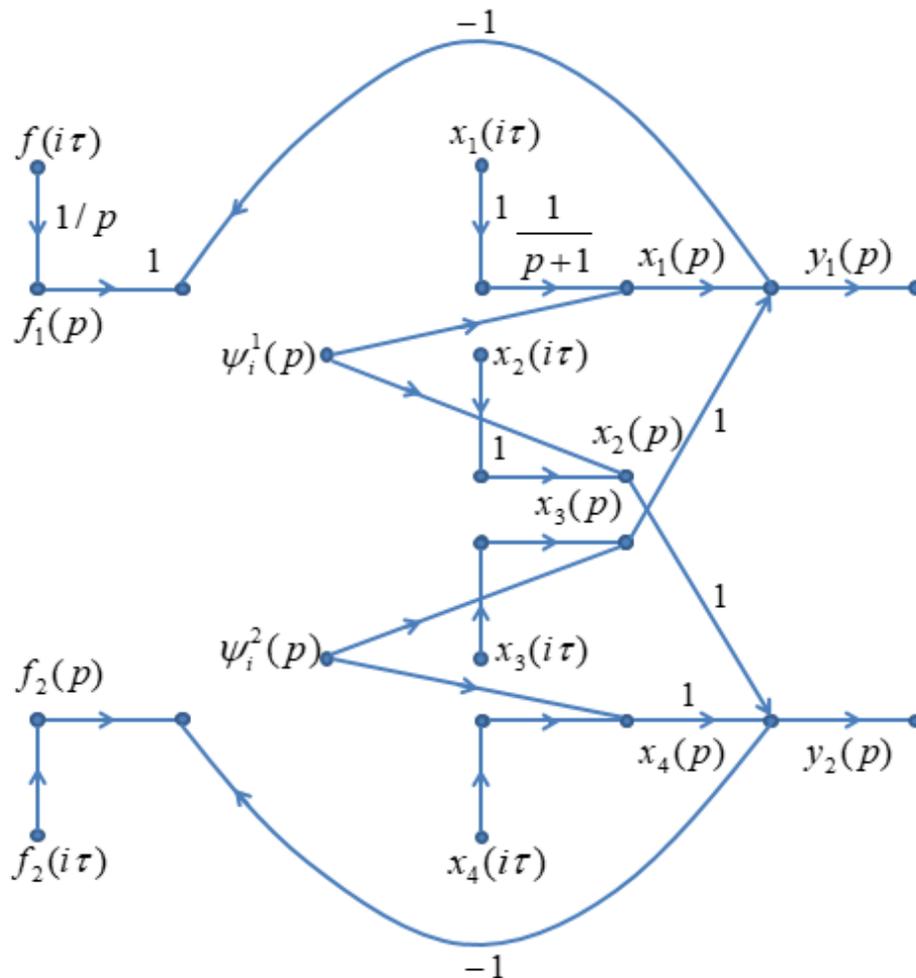


Рис. 1.7.5. Графовая модель двумерной линейной системы

На отрезке $[0, \tau]$ имеем следующие значения переменных состояния и выходных координат $x_1(p) = x_2(p) = x_3(p) = x_4 = 0$.

$$y_1(p) = y_2(p) = 0;$$

откуда

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = x_4(t) = 0,$$

$$y_1(t) = x_2(t) = 0,$$

$$x_1(\tau) = x_2(\tau) = x_3(\tau) = x_4(\tau) = 0; \quad y_1(\tau) = y_2(\tau) = 0.$$

Обозначаем $\phi_1^1(p) = \varepsilon_1(p) = \frac{1}{p}$; $\phi_1^2(p) = \varepsilon_2(p) = 1/p$.

На отрезке $[\tau, 2\tau]$ непрерывные сигналы $\phi_1^1(t)$ и $\phi_1^2(t)$ уже начинают воздействовать на выходы соответствующих каналов системы.

Из рассмотрения графа видно, что

$$x_1(p) = \frac{1}{p+1} \phi_1^1(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

$$x_2(p) = \frac{1}{p} \phi_1^1(p) = \frac{1}{p^2},$$

$$x_3(p) = \frac{1}{p+1} \phi_1^2(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

$$x_4(p) = \frac{1}{p} \phi_1^2(p) = \frac{1}{p(p+1)},$$

$$y_1(p) = x_1(p) + x_3(p) = \frac{2}{p(p+1)},$$

$$y_2(p) = x_2(p) + x_4(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p+1)},$$

$$\varepsilon_1(p) = f_1(p) - y_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p(p+1)},$$

$$\phi_1^1(p) = \varepsilon_1(p), \quad \phi_1^2(p) = \varepsilon_2(p).$$

Перейдя во временную область, для отрезка $[\tau, 2\tau]$ будем иметь

$$x_1(t) = 1 - e^{-(t-0.4)},$$

$$x_2(t) = (t - 0.4),$$

$$x_3(t) = 1 - e^{-2(t-0.4)},$$

$$x_4(t) = -0.5(1 - e^{-2(t-0.4)}),$$

$$y_1(t) = 2(1 - e^{-(t-0.4)}),$$

$$y_2(t) = t - 0.4 + 0.5(1 - e^{-2(t-0.4)}).$$

Значения промежуточных и выходных координат системы при $t = 2\tau$ найдем из полученных соотношений:

$$x_1(2\tau) = 0.33,$$

$$x_2(2\tau) = 0.4,$$

$$y_1(2\tau) = 0.66,$$

$$x_3(2\tau) = 0.33,$$

$$x_4(2\tau) = 0.375,$$

$$y_2(2\tau) = 0.675$$

Перейдем к расчету процессов на отрезке времени $[2\tau, 3\tau]$. На этом промежутке времени на соответствующих выходах системы присутствуют сигналы $\varphi_2^1(t)$, $\varphi_2^2(t)$. Следовательно, промежуточные переменные и выходы системы задаются выражениями:

$$x_1(p) = \frac{x_1(2\tau)}{p+1} + \frac{\varphi_2^1(p)}{p+1} = \frac{0.33}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{p(p+1)},$$

$$x_2(p) = \frac{x_2(2\tau)}{p} + \frac{\varphi_2^1(p)}{p} = \frac{0.4}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2(p+1)},$$

$$x_3(p) = \frac{x_3(2\tau)}{p+1} + \frac{\varphi_2^2(p)}{p+1} = \frac{0.33}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} - \frac{2}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)(p+2)},$$

$$x_4(p) = \frac{x_4(2\tau)}{p+2} + \frac{\varphi_2^2(p)}{p+2} = \frac{0.275}{p+2} + \frac{1}{p(p+2)} - \frac{1}{p(p+2)} - \frac{1}{p(p+2)^2},$$

$$y_1(p) = x_1(p) + x_3(p) = \frac{0.66}{p+1} + \frac{2}{p(p+1)} - \frac{2}{p(p+1)^2} - \frac{1}{p^2(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)(p+2)},$$

$$y_2(p) = x_2(p) + x_4(p) = \frac{0.4}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2(p+1)} + \frac{0.275}{p+2} + \frac{1}{p(p+2)} - \frac{1}{p^2(p+2)} - \frac{1}{p(p+2)^2},$$

$$\varphi_3^1(p)\varepsilon_1(p) = f_1(p) - y_1(p),$$

$$\varphi_3^2(p)\varepsilon_2(p) = f_2(p) - y_2(p).$$

Во временной области будем иметь:

$$x_1(t) = 1.33e^{-(t-0.8)} + 2(t-0.8)e^{-(t-0.8)} - 1$$

$$x_2(t) = -(t - 0.8) - 2^{-(t-0.8)} + 2.4$$

$$x_3(t) = -0.67e^{-(t-0.8)} - 0.5e^{-2(t-0.8)} + (t - 0.8) + 1.5$$

$$x_4(t) = -0.225e^{-2(t-0.8)} - 0.5(t - 0.8) + (t - 0.8)e^{-2(t-0.8)} + 0.5$$

$$y_1(t) = 0.66e^{-(t-0.8)} - 0.5e^{-2(t-0.8)} + (2(t - 0.8))e^{-(t-0.8)} + 0.5$$

$$y_2(t) = -2e^{-(t-0.8)}1.5(t - 0.8) + (t - 0.8)e^{-2(t-0.8)} + \\ + 2.9 - 0.225e^{-2(t-0.8)}$$

Откуда при $t = 3\tau$ имеем

$$x_1(3\tau) = 0.427$$

$$x_2(3\tau) = 0.66$$

$$y_1(3\tau) = 1.654$$

$$x_3(3\tau) = 1.227$$

$$x_4(3\tau) = 0.329$$

$$y_1(3\tau) = 1.654.$$

$$y_2(3\tau) = 0.989$$

На всех последующих шагах промежуточные и выходные переменные системы находятся аналогичным образом.

Заключение

Системы с запаздыванием – это распространенное явление в различных областях науки и техники, от биологии до экономики. Задержка, или латентность, в таких системах возникает из-за различных физических, химических или других процессов, требующих времени для своего завершения [17-23]. Модели с запаздыванием более точно отражают реальные процессы, происходящие в природе и технических системах [24-26]. Игнорирование запаздывания может привести к неточным прогнозам и неправильным решениям. Важность исследования систем с запаздыванием [29, 33, 35-36] обусловлена следующими причинами:

- Улучшение управления: понимание механизмов возникновения и влияния запаздывания позволяет разрабатывать более эффективные системы управления. Например, в системах автоматического управления учет запаздывания позволяет предотвратить колебания и повысить точность регулирования.
- Анализ устойчивости: запаздывание может существенно влиять на устойчивость системы. Изучение систем с запаздыванием позволяет разрабатывать критерии устойчивости и методы стабилизации.
- Прогнозирование: модели с запаздыванием позволяют строить более точные прогнозы развития различных процессов, например, в экономике, экологии и биологии.
- Оптимизация: запаздывание может ограничивать возможности оптимизации системы. Изучение таких систем позволяет находить оптимальные решения с учетом ограничений, связанных с запаздыванием.

В монографии на основе графовых моделей решены задачи разработки топологических имитационных моделей и алгоритмов для формализованного структурного описания, анализа динамики функционирования структурно- и параметрически- сложных непрерывных систем с запаздыванием.

Разработан топологический метод моделирования и исследования одномерных и многомерных линейных непрерывных систем с постоянным и переменным запаздыванием. Используются теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, аппарат динамических графов и декомпозиционный подход к изучению структурно- сложных систем.

Применение графовых моделей и методов позволяет без существенных упрощений исходной системы и с большой точностью исследовать количественные и качественные взаимосвязи между элементами сложных динамических систем с запаздыванием.

Литература

1. Власов, К.П. Теория автоматического управления. Основные положения. Программы расчета / К.П. Власов. — М.: Гуманитарный Центр, 2017. — 544 с.
2. Гайдук, А.Р. Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB: Учебное пособие. 3-е изд., - СПб.: Лань, 2018
3. Древис, Ю. Г. Основы системного анализа : учебное пособие / Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. — 260 с.
4. Ефанов, А. В. Теория автоматического управления : учебник для вузов /3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 160 с.
5. Кадыров А.А. Декомпозиционная теория дискретных динамических, релейных и логико- динамических систем управления на базе динамических графов: Монография - Ташкент, 2020
6. Кадыров А.А. Топологический расчет систем автоматического управления: учебное пособие. Ташкент: «Навруз», 2020
7. Кадыров А.А. Машинные методы моделирования и исследования структурно- сложных систем. Ташкент, 2005
8. Клименко, И. С. Принятие решений и феномен неопределенности : учебное пособие для вузов / И. С. Клименко. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 180 с.
9. Ким, Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. 2-е изд., - М.: Физматлит, 2010
10. Коновалов, Б. И. Теория автоматического управления : учебное пособие для вузов / Б. И. Коновалов, Ю. М. Лебедев. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 220 с.
11. Основы анализа данных и интеллектуальные системы : учебное пособие для вузов / С. Н. Косников, А. Л. Золкин, Ф. Р. Ахмадуллин [и др.]. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 176 с.
12. Ощепков, А. Ю. Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB / А. Ю. Ощепков. — 5-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 208 с.
13. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования -и управления: Учебное пособие для втузов. Москва, 2005
14. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2012
15. Поляков К.Ю. Теория автоматического управления. Часть II. -СПб.: 2012
16. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления/ Под редакцией В. А. Бесекерского. - М.: Наука, 2007

17. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. Москва, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 2007.
18. Страшинин Е.Э. Основы теории автоматического управления. Часть 1.- Екатеринбург, 2000
19. Теория автоматического управления: Практикум : учебное пособие / составители В. А. Целищев, М. Ю. Смоленцев. — Иркутск : ИрГУПС, 2021. — 100 с.
20. Убайдуллаева Ш.Р. Использование метода динамических графовых моделей для расчета линейных систем с запаздыванием. Научно-технический журнал “Современные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
21. Убайдуллаева Ш.Р. Графовое моделирование двумерной линейной стационарной системы автоматического управления с постоянным запаздыванием. Научно-технический журнал “Современные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
22. Убайдуллаева Ш.Р. Графовое моделирование двумерной линейной стационарной системы автоматического управления с постоянным запаздыванием. Журнал “ВестСовременные материалы, техника и технологии”, №5(8), декабрь 2016 г., Россия, Курск
23. Убайдуллаева Ш.Р. Сравнительный анализ решения линейного дифференциального уравнения 1-го порядка с запаздыванием методом шагов и методом графовых моделей. Научный журнал «Вестник Бухарского государственного университета», №4, декабрь 2018 г.
24. Убайдуллаева Ш.Р. Моделирование линейных непрерывных систем с постоянным запаздыванием на базе динамических графов. Международный научный журнал «Путь науки», №12, декабрь 2018 г., Россия, Волгоград.
25. S. R. Ubaydullayeva, D. R. Kadirova and D. R. Ubaydullayeva, "Graph Modeling and Automated Control of Complex Irrigation Systems," 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russia, 2020, pp. 464-469, doi: 10.1109/RusAutoCon49822.2020.9208076.
26. S. Ubaydullayeva, G. Tadjiyeva, D. Ubaydullayeva, N. Kadirova, Z. Gulyamova and D. Subanova, "The Specifics of the Organization of Independent Work of Students in the System of Secondary Vocational Education In Uzbekistan in the Context of the Transition to a Digital Economy," 2023 3rd International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE),

- Lipetsk, Russian Federation, 2023, pp. 287-290, doi: 10.1109/TELE58910.2023.10184330.
27. S. Ubaydullayeva, D. Ubaydullayeva, R. Gaziyeva, Z. Gulyamova, G. Tadjiyeva and N. Kadirova, "Model of Organizing Online Learning for Students in Agricultural Area," 2022 2nd International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE), Lipetsk, Russian Federation, 2022, pp. 317-320, doi: 10.1109/TELE55498.2022.9800945.
 28. S. R. Ubaydullayeva, R. T. Gaziyeva and O. J. Pirimov, "Graph Models and Algorithm for Studying the Dynamics of a Linear Stationary System with Variable Delay," 2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), Sochi, Russian Fed., 2021, pp. 431-436, doi:10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537328.
 29. N. Nikolov, M. Alexandrova, R. Gaziyeva and S. Ubaydullayeva, "State Controller with Improved Response Speed for Linear Discrete SISO Systems," 2022 International Conference Automatics and Informatics (ICAI), Varna, Bulgaria, 2022, pp. 35-38, doi: 10.1109/ICAI55857.2022.9960102.
 30. P. I. Kalandarov, S. R. Ubaydullayeva, R. T. Gaziyeva, N. N. Nikolov and M. I. Alexandrova, "Automation of Technological Processes for Controlling Grain Moisture in the Flowu," 2023 International Conference Automatics and Informatics (ICAI), Varna, Bulgaria, 2023, pp. 280-284, doi: 10.1109/ICAI58806.2023.10339071.
 31. S. Ubaydullayeva, Z. Gulyamova, G. Tadjiyeva, N. Kadirova and U. Kusanova, "The Use of Virtual Interactive Stands in the Educational Process in Higher Education," 2024 4th International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE), Lipetsk, Russian Federation, 2024, pp. 39-44, doi: 10.1109/TELE62556.2024.10605705.
 32. P. I. Kalandarov, S. R. Ubaydullayeva, N. N. Nikolov, A. Hayitov and H. Sharifov, "Technological Machines Diagnostics of Grain Processing Enterprises as the Object of Automation," 2023 International Conference Automatics and Informatics (ICAI), Varna, Bulgaria, 2023, pp. 252-256, doi: 10.1109/ICAI58806.2023.10339081.
 33. P. I. Kalandarov, K. E. Turkmenov, S. R. Ubaydullayeva, N. N. Nikolov and M. I. Alexandrova, "Research and Analysis of the Method for Measuring the Moisture Content of Cottonmaterials at Ultrahigh Frequencies," 2023 International Conference Automatics and Informatics (ICAI), Varna, Bulgaria, 2023, pp. 276-279, doi: 10.1109/ICAI58806.2023.10339060.
 34. K. Tulenova, S. Ubaydullayeva, R. Gaziyeva, U. Mamayusupov, M. Mamadjonova and E. Turdikulova, "The Introduction of Information Technologies Into Educational and Laboratory Complexes is an Important Step Towards the Digitalization of Uzbekistan," 2024 4th International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education (TELE), Lipetsk, Russian Federation, 2024, pp. 48-53, doi: 10.1109/TELE62556.2024.10605665.

35. S. R. Ubaydulayeva and A. M. Nigmatov, "Development of a Graph Model and Algorithm to Analyze the Dynamics of a Linear System with Delay," 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), Sochi, Russia, 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICIEAM48468.2020.9111939.
36. P. I. Kalandarov, S. R. Ubaydulayeva, R. T. Gaziyeva, N. N. Nikolov and M. I. Aleksandrova, "Use of Elements and Algorithms of Intelligent Support in the Automation of Technologies for Control and Quality Management of Bulk Materials," 2022 International Conference Automatics and Informatics (ICAI), Varna, Bulgaria, 2022, pp. 235-238, doi: 10.1109/ICAI55857.2022.9960041.
37. S. R. Ubaydulayeva, S. Yunusova and Y. Barno, "Study of Dynamic Processes in Nonlinear Discrete Systems with Delay Based on Graph Models," 2022 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), Sochi, Russian Federation, 2022, pp. 919-925, doi: 10.1109/ICIEAM54945.2022.9787277.
38. Ubaydulayeva, Sh & Gaziyeva, Rano & Nigmatov, A. (2020). Calculation of dynamic processes in relay systems of automatic control based on graph models. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 883. 012152. 10.1088/1757-899X/883/1/012152.
39. Sh.R.Ubaydulayeva, Sh.T.Yakhayeva. The use of virtual interactive stands is an important step towards digitalization of education. №3(23).2024 Journal of "Sustainable Agriculture"
40. N.Nikolov, I.Grigorov, Sh.R.Ubaydulayeva, R.Gaziyeva. Adaptive observation via the instrumental variables method in control systems with state feedback. №3(23).2024 Journal of "Sustainable Agriculture"

