

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} e(\mathbf{r}, t) \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \tau(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} + \int_A \sigma(\mathbf{r}, t) dA + \int_{\mathcal{V}} \Phi(\mathbf{r}, t) d\mathcal{V} \quad (4.19)$$

Складывая (4.17) и (4.19), получаем уравнение, выражающее общий закон сохранения энергии для контрольного объема сплошной среды

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \left( e + \frac{u^2}{2} \right) \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho d\mathcal{V} + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_{\mathcal{V}} \tau d\mathcal{V} + \int_A \sigma dA + \sum_i W_i \quad (4.20)$$

Как следует из (4.20), работа внутренних сил  $\int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V}$  не изменяет полную энергию системы жидких частиц — она уменьшает механическую энергию и увеличивает тепловую

## ГЛАВА 5

# ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ (В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ)

### 5.1. Основные понятия и терминология

Одномерное приближение весьма эффективный способ описания движения жидкости в случае, когда продольные (измеренные вдоль направления движения) размеры потока во много раз превосходят его поперечные размеры, что имеет место главным образом в трубах, реках и каналах

Важной особенностью потоков в трубах и каналах является то, что неподвижные твердые границы (стенки трубопроводов, дно рек и каналов) составляют значительную часть поверхности, ограничивающей поток. На этих границах скорость жидкости  $\mathbf{u}_{\text{гр}} = 0$  (равны нулю и нормальная к границе и касательная к ней составляющие). Благодаря этому на тех границах контрольного объема  $\mathcal{V}$ , которые совпадают с твердыми границами потока, поверхностные интегралы, входящие в фундаментальные законы гидромеханики (гл. 4) и содержащие скорость  $\mathbf{u}$  или ее проекции, обращаются в ноль. Это существенно упрощает получение расчетных зависимостей, основанных на фундаментальных законах.

В достаточно длинных цилиндрических или призматических трубах и каналах формируются потоки жидкости, в которых линии тока параллельны ограничивающим поток твердым границам. Движение жидкости, при котором линии тока представляют собой параллельные прямые, будем называть *равномерным*, или *параллельно-струйным*, или *продольно-однородным*.

При равномерном движении оказывается возможным построить плоское поперечное (ортогональное линиям тока) сечение потока, которое иногда называют *живым сечением*. При этом, в частности, исключается необходимость исследовать поле скоростей и появляется возможность оперировать средними по сечению значениями скорости, рассматривая интегральные характеристики потока в этом сечении.

Это связано с тем, что вектор скорости  $\mathbf{u}$  (как и линия тока) перпендикулярен к живому сечению и проекция скорости на нормаль к этому сечению  $u_n$  равна модулю скорости:

$$u_n = |\mathbf{u}| = u. \quad (5.1)$$

Кроме того, можно доказать, что при равномерном движении справедливы два следующих утверждения (*леммы*).

1. Нормальное напряжение в каждой точке живого сечения равно гидродинамическому давлению в этой точке со знаком минус (так как положительным считается растягивающее нормальное напряжение):

$$P_{nn} = -p. \quad (5.2)$$

2. Гидродинамическое давление  $p$  в живом сечении распределено по гидростатическому закону

$$U - \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (5.3)$$

Эти два утверждения будут доказаны в гл. 14.

При неравномерном движении жидкости, когда линии тока непараллельны и (или) криволинейны, различают:

*плавноизменяющееся* движение, при котором можно пренебречь кривизной линий тока и их непараллельностью и с достаточной для практических целей точностью построить плоское живое сечение, допуская, что в этом сечении выполняются условия (5.1), (5.2) и (5.3);

*резкоизменяющееся* движение, при котором нельзя использовать указанные условия.

Для иллюстрации рассмотрим течение в трубопроводе, представленное на рис. 5.1.

На длинных цилиндрических участках I и VII движение равномерное, линии тока параллельны образующим стенок трубы.

На криволинейном участке III движение резкоизменяющееся, здесь хотя и можно построить плоские живые сечения, но в этих живых сечениях не будут выполнены условия (5.2) и (5.3). В частности, вследствие действия центробежных сил, обусловленных криволинейными линиями тока, давление в плоских живых сечениях не будет распределено по гидростатическому закону (5.3).

На участке V движение резкоизменяющееся; здесь поперечное сечение, ортогональное линиям тока, сильно искривлено, так что даже вычисление его площади является непростой задачей, кроме того, вследствие значительной кривизны линий тока в этих сечениях не выполняются условия (5.2) и (5.3) (см. доказательство этих равенств в гл. 14).

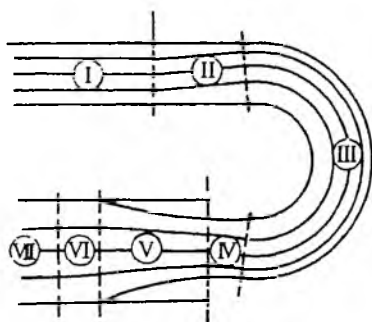


Рис. 5.1. Равномерное, плавноизменяющееся и резкоизменяющееся движение жидкости

На участках II, IV и VI движение неравномерное, но в пределах этих участков можно с достаточной точностью и построить плоское живое сечение, и допустить выполнение равенств (5.2) и (5.3).

В технической механике жидкости потоки разделяют на напорные, безнапорные и струйные. Если поток со всех сторон ограничен твердыми стенками, то он называется *напорным* (например, поток воды в водопроводных трубах). Если только часть потока ограничена твердыми стенками, а на остальной части жидкость граничит с газом (в частности, с атмосферой), то такое движение называется *безнапорным* (например, потоки в реках, каналах). Если же поток не ограничен твердой поверхностью, то он называется *струйным* или просто *струей*. Струя жидкости может быть ограничена той же самой жидкостью (затопленная струя) или газом (струя воды в воздухе).

## 5.2. Гидравлические характеристики поперечного сечения потока

Для дальнейшего изложения представляют интерес следующие характеристики поперечного (живого) сечения потока.

*Смоченный периметр*  $\chi$  — это периметр той части поперечного сечения русла (твердых границ потока), которая смочена движущейся жидкостью (рис. 5.2).

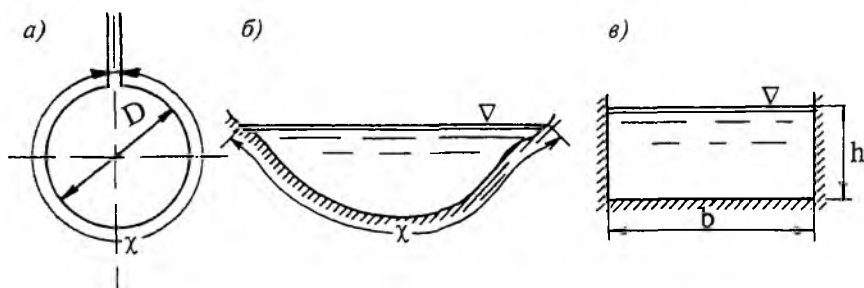


Рис. 5.2. Смоченный периметр живого сечения

Если движение напорное (рис. 5.2,а), то смоченный периметр равен периметру поперечного сечения. Например, в круглой трубе с диаметром  $D$  смоченный периметр  $\chi = \pi D$ .

*Гидравлический радиус*  $R$  — это отношение площади поперечного сечения потока к смоченному периметру:

$$R = \frac{\omega}{\chi} \quad (5.4)$$

Легко найти, что в случае напорного течения в круглой трубе  $R = D/4$ , т.е. гидравлический радиус вдвое меньше геометрического.

В случае широкого прямоугольного русла (при  $b \gg h$ ) можно считать (рис. 5.2,в)

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{b \cdot h}{b + 2h} \approx h \quad (5.5)$$

При других формах поперечных сечений потока (например, рис. 5.2,б) геометрическая интерпретация гидравлического радиуса не имеет смысла.

Наряду с такими характеристиками живого сечения, как объемный расход  $Q$  и массовый расход  $Q_M$ , введенными соответственно равенствами (3.8) и (3.9), при решении задач о движении жидкости в поле силы тяжести используют понятие *весового расхода*:

$$Q_B = \int_A \rho g u_n dA. \quad (5.6)$$

Связь между указанными расходами установим в виде

$$Q_B = gQ_M = \rho gQ. \quad (5.7)$$

Весьма важной характеристикой живого сечения является *средняя скорость*  $v$ , которая определяется зависимостью

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \int_A u_n dA. \quad (5.8)$$

Ее можно интерпретировать следующим образом. Если в каждой точке поперечного сечения нормальная составляющая скорости жидкости  $u_n$  равна средней скорости  $v$ , то объемный расход жидкости  $Q$  через это сечение равен расходу при действительном распределении  $u_n$  по поперечному сечению. Как правило, средняя скорость вводится для поперечных (живых) сечений, в которых движение равномерное или плавноизменяющееся.

В последующем изложении потребуется рассматривать не только поток объема, веса или массы жидкости через поперечное сечение, но также и поток кинетической энергии жидкости и поток количества движения жидкости через поперечное сечение. Выразим эти величины через среднюю скорость жидкости в поперечном сечении  $v$ .

Поток кинетической энергии (КЭ) через живое сечение  $\omega$  согласно (3.13) и (3.10) равен

$$\Pi(\text{КЭ}) = \int_{\omega} \frac{\rho u^2}{2} u_n dA, \quad (5.9)$$

где  $\frac{\rho u^2}{2}$  — плотность распределения КЭ в произвольной точке живого сечения;  $u_n$  — нормальная к живому сечению проекция скорости жидкости в этом же потоке. Так как в живом сечении  $u_n = u$ , то

$$\Pi(\text{КЭ}) = \int_{\omega} \frac{\rho u^3}{2} dA. \quad (5.10)$$

В реальных потоках, встречающихся в инженерно-строительной практике, при равномерном и плавноизменяющемся движении в большей части живого сечения скорость жидкости  $u$  мало (на 5—10%) отличается от средней скорости  $v$ . Поэтому, если под интегралом заменить изменяющуюся в живом сечении скорость  $u$  на постоянную скорость  $v$ , то погрешность от такой замены будет невелика и ее можно учесть, введя корректирующий множитель  $\alpha$ :

$$\int_{\omega} \frac{\rho u^3}{2} dA = \alpha \int_{\omega} \frac{\rho v^3}{2} dA = \frac{\alpha \rho v^3}{2} \int_{\omega} dA = \frac{\alpha \rho v^3 \omega}{2}. \quad (5.11)$$

Множитель  $\alpha$  называется *коррективом кинетической энергии* или коэффициентом Кориолиса. Согласно (5.11)

$$\alpha = \frac{\int u^3 dA}{v^3 \omega}, \quad (5.12)$$

т.е. корректив КЭ представляет собой отношение потока КЭ через живое сечение, вычисленного в соответствии с реальным распределением скорости жидкости по сечению, к потоку КЭ, вычисленному в предположении, что скорость жидкости в живом сечении постоянна и равна средней скорости  $v$ .

Как показывают расчеты, в большинстве практически встречающихся потоков  $\alpha = 1,05-1,07$ .

*Поток количества движения* (КД) через живое сечение  $\omega$  в соответствии с (3.13) и (3.11) равен:

$$П(КД) = \int \rho u u_n dA, \quad (5.13)$$

где  $\rho u$  — проекция на нормаль к живому сечению вектора плотности количества движения  $\rho u$ . Как и в предыдущем случае, заменив  $u_n$  на  $u$ , а затем подставив под интеграл вместо скорости  $u$  среднюю скорость  $v$ , получим

$$\int \rho u^2 dA = \alpha^0 \int \rho v^2 dA = \alpha^0 \rho v^2 \int dA = \alpha^0 \rho v^2 \omega. \quad (5.14)$$

Множитель  $\alpha^0$  называется *коррективом количества движения* или коэффициентом Буссинеска. Согласно (5.14):

$$\alpha^0 = \frac{\int u^2 dA}{v^2 \omega}, \quad (5.15)$$

т.е. корректив КД представляет собой отношение потока КД через живое сечение, вычисленного при реальном распределении скорости по живому сечению, к потоку КД, вычисленному в предположении, что скорость жидкости в живом сечении постоянна и равна средней скорости. В большинстве потоков в инженерно-строительной практике  $\alpha^0 = 1,03-1,05$ .

### 5.3. Уравнение неразрывности

Рассмотрим установившееся движение жидкости при отсутствии фазовых переходов в трубе с произвольно изменяющимся по ее длине поперечным сечением (рис. 5.3). Пусть в этой трубе есть сечения, где движение равномерное или близкое к нему, т.е. плавноизменяющееся, например, сечения 1—1, 3—3, 2—2.

Зафиксируем в качестве контрольного объем  $\mathcal{V}$  трубопровода между сечениями 1—1 и 2—2, контрольная поверхность показана на рис. 5.3 штриховой линией. Запишем для этого контрольного объема закон сохранения массы:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = 0. \quad (5.16)$$

Используя представление субстанциальной производной в виде суммы локальной и конвективной составляющих, перепишем (5.16) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (5.17)$$

При установившемся движении плотность  $\rho$  не зависит от времени, так же как размеры и очертание контрольного объема  $\mathcal{V}$ . Поэтому первое слагаемое в левой части уравнения (5.17) равно нулю. В результате имеем

$$\int_A \rho u_n dA = 0, \quad (5.18)$$

где  $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{бок}}$ ;  $\omega_1, \omega_2$  — площади поперечных сечений 1—1 и 2—2;  $A_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности трубы. Очевидно, что на боковой поверхности  $u_n = 0$ , следовательно,

$$\int_A \rho u_n dA = \int_{\omega_1} \rho u_n dA + \int_{\omega_2} \rho u_n dA = 0. \quad (5.19)$$

Учитывая, что  $u_n$  — это проекция скорости на *внешнюю* нормаль к поверхности  $A$ , имеем  $u_n > 0$ , если скорость  $u$  направлена из объема  $\mathcal{V}$ , ограниченного поверхностью  $A$ . Если жидкость (см. рис. 5.3)

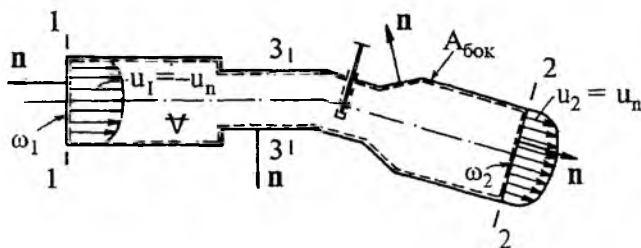


Рис. 5.3. Контрольный объем для вывода уравнения неразрывности

движется слева направо, то в сечении 1—1  $u_n < 0$ . Действительно, скорости в этом сечении  $-u_n = u_1$ , а в сечении 2—2  $u_n = u_2$ . Имея это в виду, уравнение (5.19) представим в виде

$$\int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA. \quad (5.20)$$

Как было определено выше, масса жидкости, протекающей в единицу времени через некоторую поверхность, называется массовым расходом. Следовательно, вместо (5.20) можно записать

$$Q_{M_1} = \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA = \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA = Q_{M_2}, \quad (5.21)$$

где  $Q_{M_1}$  и  $Q_{M_2}$  — массовые расходы в сечениях 1—1 и 2—2 соответственно. Проведя аналогичные рассуждения относительно любого другого сечения, например, 3—3, получим

$$Q_{M_1} = Q_{M_2} = Q_{M_3}, \quad (5.22)$$

т.е. при движении жидкости в трубе с непроницаемыми стенками массовый расход вдоль нее остается постоянным:

$$Q_M = \text{const (вдоль потока)}. \quad (5.23)$$

Для случая несжимаемой жидкости при  $\rho = \text{const}$  равенство (5.21) записывается для объемного расхода  $Q$  в виде

$$Q_1 = \int_{\omega_1} u_1 dA = \int_{\omega_2} u_2 dA = Q_2 \quad (5.24)$$

или

$$Q = \text{const (вдоль потока)}. \quad (5.25)$$

Полученные равенства (5.21)—(5.25) называются уравнениями неразрывности.

Используя понятие средней скорости и полагая, что в живом сечении плотность жидкости постоянна, запишем уравнение неразрывности (5.21) в виде

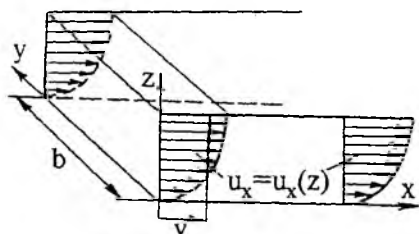
$$\rho_1 v_1 \omega_1 = \rho_2 v_2 \omega_2 \quad (5.26)$$

или для несжимаемой жидкости

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2. \quad (5.27)$$

Последнее равенство называют уравнением неразрывности в форме Леонардо да Винчи.

В случае, когда все характеристики потока не зависят от какой-либо



одной координаты, например  $y$ , можно рассматривать изменение их только в плоскости  $(x, z)$ , т.е. решать так называемую плоскую задачу. В указанном случае можно перейти к удельным характеристикам, приходящимся на единицу линейного размера потока в направлении оси  $y$ . Так, например, равномерное безнапорное течение в прямоугольном канале (рис. 5.4), ширина  $b$  которого намного больше глубины потока  $h$ ,

Рис. 5.4. Плоское равномерное (продольно-однородное) безнапорное течение в канале

можно рассматривать как плоское. *Удельным расходом* называют объемный расход, приходящийся на единицу ширины потока:

$$q = \frac{Q}{b}. \quad (5.28)$$

При этом продольная скорость  $u_x$  зависит только от координаты  $z$  и распределение скорости по вертикали обычно изображают в виде *эпюры скорости*  $u_x = u_x(z)$ , а элементарную площадь поперечного сечения  $dA$  представляют в виде  $dA = b dz$ . Средняя скорость в соответствии с (5.8) равна

$$v = \frac{\int u dA}{\omega} = \frac{\int_0^h u_x(z) b dz}{hb} = \frac{\int_0^h u_x(z) dz}{h}. \quad (5.29)$$

Согласно (5.29) в условиях плоской задачи средняя скорость представляет собой высоту прямоугольника, равновеликого эпюры скорости.

В заключение получим закон сохранения массы для установившегося движения в дифференциальной форме. Для этого преобразуем с помощью теоремы Остроградского—Гаусса в виде (3.26) левую часть уравнения (5.18):

$$\int_A \rho u_n dA = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV = 0.$$

В данном выводе в качестве контрольного объема будет рассматриваться не часть потока в трубопроводе, а произвольный объем, выделенный в движущейся жидкости. Из произвольности объема (см. подробнее в п. 14.2) следует, что интеграл по этому объему равен нулю, если только подынтегральное выражение равно нулю в каждой точке потока. В результате получаем дифференциальное уравнение, выражающее закон сохранения массы:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{или} \quad \rho \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (5.29)$$

В п. 14.2 дифференциальная форма закона сохранения массы будет получена для неустановившегося движения.

## 5.4. Уравнение Бернулли для установившегося потока вязкой жидкости

Уравнение Бернулли является выражением закона изменения кинетической энергии применительно к одномерным задачам гидромеханики. Выделим в трубопроводе (рис. 5.5) сечениями 1—1 и 2—2, в которых движение равномерное или плавноизменяющееся, контрольный

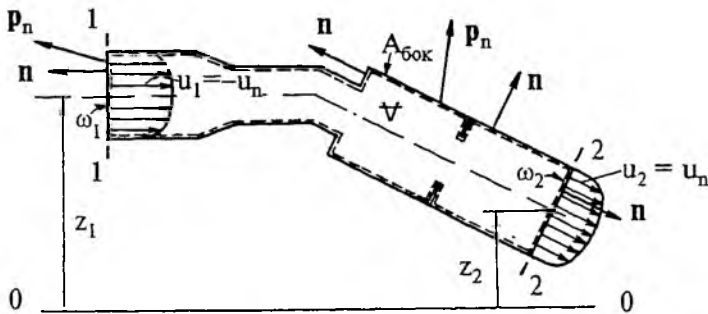


Рис. 5.5. Контрольный объем для вывода уравнения Бернулли

объем  $\nabla$ , ограниченный контрольной поверхностью  $A$ , которая показана штриховой линией. Запишем для выделенного объема  $\nabla$  закон изменения кинетической энергии:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \frac{\rho u^2}{2} dV = \int_{\nabla} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA - \int_{\nabla} \Phi dV. \quad (5.30)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в это уравнение, представляя объемные интегралы в виде поверхностных и используя условия на контрольной поверхности  $A$ , которую, как и в п. 5.4, запишем как сумму  $A = \omega_1 + \omega_2 + A_{\text{бок}}$ .

1. Представим субстанциальную производную в виде

$$\frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla} \frac{\rho u^2}{2} dV + \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA; \quad (5.31)$$

первое слагаемое равно нулю, так как движение жидкости установившееся. Условия на контрольной поверхности  $A$  имеют вид (рис. 5.5)

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } \omega_1 : u = u_1; u_n = -u_1; \rho = \rho_1; \\ \text{на } \omega_2 : u = u_2; u_n = u_2; \rho = \rho_2; \\ \text{на } A_{\text{бок}} : u_n = 0. \end{array} \right\} \quad (5.32)$$

Преобразуем второе слагаемое в (5.31), используя (5.32), (5.11) и (5.21):

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\nabla} \frac{\rho u^2}{2} dV &= \int_A \frac{\rho u^2}{2} u_n dA = \int_{\omega_1} \frac{\rho_1 u_1^2}{2} (-u_1) dA + \int_{\omega_2} \frac{\rho_2 u_2^2}{2} u_2 dA + \int_{A_{\text{бок}}} \frac{\rho u^2}{2} \cdot 0 \cdot dA = \\ &= - \int_{\omega_1} \frac{\rho_1 u_1^3 dA}{2} + \int_{\omega_2} \frac{\rho_2 u_2^3 dA}{2} = - \frac{\alpha_1 \rho_1 v_1^3 \omega_1}{2} + \frac{\alpha_2 \rho_2 v_2^3 \omega_2}{2} = - \frac{\alpha_1 v_1^2 Q_M}{2} + \frac{\alpha_2 v_2^2 Q_M}{2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$



2. Обратимся к слагаемому в уравнении (5.30), выражающему мощность внешних массовых сил. Предположим, что внешние массовые силы имеют потенциал, т.е. существует такая скалярная функция  $U$ , что  $\mathbf{f} = \text{grad}U$ , при этом имеем

$$\int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) \rho dV = \int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \text{grad}U) dV.$$

Используя теорему Остроградского—Гаусса в форме (3.29), заменим в ней вектор  $\mathbf{u}$  на вектор  $\rho \mathbf{u}$ , а  $\beta$  на  $U$ :

$$\int_V \rho (\mathbf{u} \cdot \text{grad}U) dV = \int_A U \rho u_n dA - \int_V U \text{div}(\rho \mathbf{u}) dV.$$

Согласно (5.29) второй интеграл в правой части равен нулю, а используя (5.32), получим выражение для первого интеграла в виде

$$\int_A \rho U u_n dA = - \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 U_1 dA + \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 U_2 dA. \quad (5.34)$$

3. Рассмотрим интеграл, выражающий мощность внешних поверхностных сил:

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA = \int_{\omega_1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_{\omega_2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA + \int_{A_{\text{бок}}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA. \quad (5.35)$$

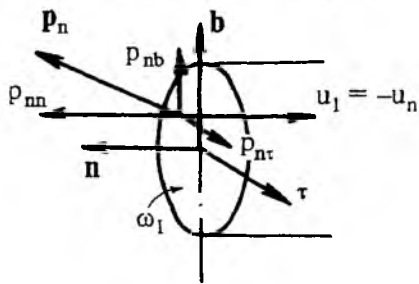


Рис. 5.6. Напряжение и скорость жидкости в поперечном сечении  $\omega_1$

В сечении 1—1 скорость имеет только нормальную составляющую  $u_n$ , так как движение здесь равномерное или плавноизменяющееся. Чтобы вычислить скалярное произведение  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n$ , зададим в произвольной точке живого сечения  $\omega_1$  систему ортогональных координат (рис.5.6), определяемую тремя единичными векторами ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ), из которых  $\mathbf{n}$  — нормален к живому сечению, а  $\mathbf{b}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  лежат в его плоскости. Проектируя на эти координатные оси векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{p}_n$ , найдем

$$\mathbf{u} = (u_n, u_b, u_\tau) = (u_n, 0, 0); \quad \mathbf{p}_n = (p_{nn}, p_{nb}, p_{n\tau}),$$

при этом все три проекции напряжения  $\mathbf{p}_n$  могут быть отличны от нуля. По определению скалярного произведения

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n = u_n p_{nn} + u_b p_{nb} + u_\tau p_{n\tau} = u_n p_{nn}. \quad (5.36)$$

Выполним аналогичные вычисления для живого сечения  $\omega_2$ . Согласно (5.2) на контрольной поверхности  $A$  имеем условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } \omega_1 : u_n = -u_1; p_{nn} = p_1; \\ \text{на } \omega_2 : u_n = u_2; p_{nn} = -p_2; \\ \text{на } A_{\text{бок}} : u_n = 0; (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.35), получаем

$$\int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA = \int_{\omega_1} u_1 p_1 dA - \int_{\omega_2} u_2 p_2 dA. \quad (5.38)$$

Примем во внимание, что в сечениях 1—1 и 2—2 движение равномерное или плавноизменяющееся, и, следовательно, согласно (5.3) давление в этих сечениях распределено по гидростатическому закону:

$$U - \frac{P}{\rho} = \text{const.} \quad (5.3)$$

Сложим равенства (5.34) и (5.38) и найдем выражение для мощности внешних сил, которое преобразуем с учетом (5.3), а также полагая, что сила тяжести является единственной внешней массовой силой, т.е. что  $U = -gz$ :

$$\begin{aligned} \int_V \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) dV + \int_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA &= - \int_{\omega_1} \left( U_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \rho_1 u_1 dA + \int_{\omega_2} \left( U_2 - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \rho_2 u_2 dA = \\ &= - \left( U_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \int_{\omega_1} \rho_1 u_1 dA + \left( U_2 - \frac{P_2}{\rho_2} \right) \int_{\omega_2} \rho_2 u_2 dA = \left( gz_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) Q_M - \left( gz_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) Q_M. \end{aligned} \quad (5.39)$$

4. Последнее слагаемое (5.30), выражающее мощность внутренних сил в пределах контрольного объема, оставляем без преобразования.

Подставив (5.33) и (5.39) в исходное уравнение (5.30) и разделив все слагаемые на весовой расход  $Q_B = gQ_M$ , получим искомое уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho_1 g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho_2 g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f, \quad (5.40)$$

где слагаемое

$$h_f = \frac{1}{Q_B} \int_V \Phi dV \quad (5.41)$$

выражает отнесенную к весовому расходу мощность внутренних сил (диссипацию механической энергии в единицу времени) в пределах контрольного объема.

В наиболее важном для практики случае несжимаемой жидкости ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$ ) уравнение (5.40) имеет вид

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f, \quad (5.42)$$

где  $\gamma = \rho g$  — удельный вес.

### 5.5. Уравнение Бернулли для неустановившегося напорного движения вязкой несжимаемой жидкости

Уравнение Бернулли, полученное в 5.4, относится к установившимся напорным потокам вязкой жидкости. В некоторых случаях возникает необходимость в более общей форме этого уравнения, относящегося к *неустановившимся* напорным потокам несжимаемой ( $\rho = \text{const}$ ) жидкости в недеформируемых руслах в фиксированный момент времени.

В случае неустановившегося движения в выражении для субстанциональной производной (5.31) нельзя полагать равной нулю локальную составляющую:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV.$$

Это слагаемое без преобразований войдет в окончательную форму уравнения Бернулли (5.42), которое в случае неустановившегося движения примет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f + h_{ин}, \quad (5.43)$$

где

$$h_{ин} = \frac{1}{Q_B} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV \quad (5.44)$$

называется *инерционным напором*;  $h_{ин}$  представляет собой изменение в единицу времени кинетической энергии жидкости в контрольном объеме  $V$  (при неустановившемся движении), отнесенное к весовому расходу. Уравнение (5.43) справедливо только для  $t = t_{ср}$ .

Пусть трубопровод нецилиндрический, движение жидкости во всем трубопроводе плавноизменяющееся, и площадь его поперечного сечения  $\omega$  зависит от продольной вдоль оси трубопровода координаты  $x$ ; длину трубопровода между сечениями 1—1 и 2—2 обозначим  $L$ . Тогда, представив  $dV = dA \cdot dx$ , где  $dA$  — дифференциал площади поперечного сечения  $\omega$ , проинтегрируем выражение для  $h_{ин}$ :

$$h_{ин} = \frac{1}{Q_B} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho u^2}{2} dV = \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \int_L dx \int_{\omega(x)} u^2 dA. \quad (5.45)$$

Чтобы выразить интеграл по  $\omega(x)$  в каждом поперечном сечении через расход  $Q$ , введем корректив количества движения (5.15), который, как и средняя скорость, будет зависеть от времени:

$$\int_{\omega(x)} u^2 dA = \alpha^0(x, t) v^2(x, t) \cdot \omega(x) = \alpha^0(x, t) \cdot [Q(t)]^2 / \omega(x). \quad (5.46)$$

Здесь вследствие несжимаемости жидкости принято, что расход  $Q$  зависит от времени, но постоянен вдоль трубы. Подставим (5.46) в (5.45) и получим

$$h_{ин} = \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \left[ Q^2 \int_L \frac{\alpha^0(x, t)}{\omega(x)} dx \right]. \quad (5.47)$$

Если дополнительно пренебречь изменением во времени корректива  $\alpha^0$ , то (5.47) приобретет вид

$$h_{ин} = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} \int_L \frac{\alpha^0(x)}{\omega(x)} dx. \quad (5.48)$$

В случае цилиндрической трубы, полагая также  $\alpha^0 \approx 1,0$ , получим наиболее простое выражение для инерционного напора:

$$h_{ин} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} L. \quad (5.49)$$

Последнее выражение, как правило, и используется на практике. Предыдущие выражения для инерционного напора пригодны главным образом для оценки погрешности расчетов по зависимости (5.49).

## 5.6. Уравнение Бернулли для установившегося безнапорного движения вязкой жидкости

Обратимся к выводу уравнения Бернулли для установившегося безнапорного потока в недеформируемом русле. В этом случае (рис. 5.7) контрольную поверхность  $A$  следует разделить на четыре части:

$$A = \omega_1 + \omega_2 + A_{см} + A^0, \quad (5.50)$$

где  $A_{см}$  — смоченная поверхность русла, на которой, как и на  $A_{бок}$  в случае напорного движения, вектор скорости  $\mathbf{u} = 0$  и все результаты, полученные в разд. 5.5 при выводе уравнения Бернулли для напорных потоков для  $A_{бок}$  и  $A_{см}$ , одинаковы;  $A^0$  — свободная поверхность. На свободной поверхности, которая при установившемся движении является поверхностью тока, равна нулю только нормальная к этой поверхности составляющая скорости  $u_n$ , в то время как касательная составляющая не равна нулю, что может сделать ненулевым вклад мощности поверхностных сил в баланс механической энергии.

Обращаясь к преобразованию уравнения (5.30), отметим, что в случае напорного потока все интегралы по поверхности  $A_{бок}$  были равны нулю вследствие того, что на твердых границах выполняется условие “прилипания”  $\mathbf{u} = 0$ . При наличии свободной поверхности интегралы по  $A^0$ , в которые входит  $u_n$ , также будут равны нулю, так как на свободной поверхности  $u_n = 0$ . Таким образом, не будет равен нулю только один интеграл:

$$\int_{A^0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) dA.$$

Для того чтобы оценить его вклад, введем ортогональную систему координат, определяемую единичными векторами  $(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ , где  $\boldsymbol{\ell}$  — вектор, касательный к линии тока на свободной поверхности,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к свободной поверхности, а  $\mathbf{b}$  — вектор, нормальный к  $\boldsymbol{\ell}$  и  $\mathbf{n}$ . Если  $u = |\mathbf{u}|$  — модуль скорости, то на свободной поверхности  $\mathbf{u} = u \cdot \boldsymbol{\ell} + 0 \cdot \mathbf{n} + 0 \cdot \mathbf{b}$ . Вектор напряжения на свободной поверхности представим в виде

$$\mathbf{p}_n = p_{n\ell} \boldsymbol{\ell} + p_{nn} \mathbf{n} + p_{nb} \mathbf{b},$$

где  $p_{nn}$  — нормальное напряжение, а  $p_{n\ell}$  и  $p_{nb}$  — соответствующие касательные напряжения. По определению скалярного произведения

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n = u p_{n\ell} + 0 \cdot p_{nn} + 0 \cdot p_{nb} = u p_{n\ell}, \quad (5.51)$$

а следовательно,

$$\int_{A^0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n) \cdot dA = \int_{A^0} u p_{n\ell} dA. \quad (5.52)$$

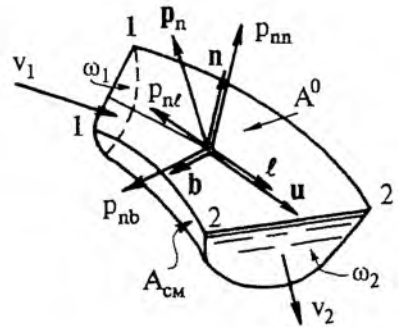


Рис. 5.7. Напряжение и скорость жидкости на свободной поверхности потока

Проделав все преобразования так же, как в разд. 5.4, и включив в качестве дополнительного слагаемого ненулевой интеграл (5.52), получим искомое уравнение Бернулли для безнапорного потока в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_f + h^0, \quad (5.53)$$

где  $h^0$  — изменение напора, связанное с действием на свободную поверхность продольных касательных напряжений:

$$h^0 = -\frac{1}{\gamma Q} \int_{A_0} u p_{n\ell} dA. \quad (5.54)$$

Очевидно, что если  $u$  и  $p_{n\ell}$  имеют одинаковое направление, то

$h^0 < 0$ , что означает, что полный напор потока  $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$  за счет

этого слагаемого возрастает вдоль течения; если же  $u$  и  $p_{n\ell}$  имеют различные знаки, то напор соответственно уменьшается. Расчеты показывают, что при сильных ветрах, дующих вдоль течения или против него, ветровое касательное напряжение  $p_{n\ell}$  может достигать больших значений и в результате слагаемое  $h^0$  может вносить существенный вклад в изменение напора.

Так, например, ветер со скоростью 30 м/с, дующий против течения реки, создает на свободной поверхности касательные напряжения, способные компенсировать вклад в баланс энергии силы тяжести, под действием которой и течет в реке вода, если продольный уклон дна реки  $i$  составляет приблизительно  $10^{-5}$ . В этом случае движение воды в реке может приостановиться и даже может иметь место движение воды вспять.

### 5.7. Геометрическая и энергетическая интерпретации слагаемых, входящих в уравнение Бернулли

Обратимся к интерпретации отдельных слагаемых, входящих в уравнение Бернулли для случая несжимаемой (капельной) жидкости ( $\rho = \text{const}$ ). Как следует из вывода,  $z$  — это координата произвольной точки поперечного сечения  $\omega$ , а  $p$  — это гидродинамическое давление в этой же точке. Из гидростатики известно, что  $p/\rho g$  — это высота столба жидкости, который создает давление, равное  $p$ . При равномерном (и плавноизменяющемся) движении нормальные составляющие напряжений совпадают (или очень близки) по абсолютной величине к гидродинамическому давлению; при постоянстве скорости жидкости в поперечном сечении тензор напряжений в движущейся жидкости является диагональным, как и в покоящейся. Поэтому можно считать, что если, не нарушая структуру потока (равномерности движения жидкости), присоединить открытую трубку к любой точке потока, то вода в этой трубке поднимется на высоту  $p/\rho g$ , которая называется *пьезометрической*.

Если ввести в продольно-однородный поток какое-либо тело, нарушающее равномерность, например шар (рис. 5.8), то при его обтекании напряжения, действующие на поверхность шара со стороны обтекаю-

шей его жидкости, будут, естественно, отличны от напряжений при равномерном движении жидкости. Как будет показано позже, в точке С, в которой нормаль к поверхности шара направлена навстречу скорости равномерного движения, напряженное состояние таково, что гидродинамическое давление  $p_C$  в этой точке больше, чем давление  $p$  в этой же точке при отсутствии шара, причем

$$(p_C/\gamma - p/\gamma) = u^2/2g \approx v^2/2g. \quad (5.55)$$

Здесь изменением скорости в поперечном сечении потока пренебрегаем, считая, что  $u \approx \text{const} = v$ . Изогнутая трубка, установленная в потоке так, как показано на рис. 5.8, называется трубкой Пито.

Горизонтальная координатная плоскость  $xOy$ , от которой отсчитывается координата  $z$  при решении гидравлических задач, называется *плоскостью сравнения* и обозначается на чертежах 0—0.

Имея в виду вышеизложенное, можно дать следующую *геометрическую* интерпретацию слагаемых, входящих в уравнение Бернулли:

$z$  — превышение над плоскостью сравнения (отметка) любой точки поперечного сечения потока;

$p/\gamma$  — пьезометрическая высота в этой же точке, т.е. высота, на которую поднимается вода в открытой трубке, присоединенной к этой точке;

$z + p/\gamma + \alpha v^2/2g$  — превышение над плоскостью сравнения (отметка) уровня воды в трубке Пито;

$h_f$  — разность отметок воды в трубках Пито, установленных в сечениях 1—1 и 2—2 (см. рис. 5.9).

Кроме того, можно дать *энергетическую* интерпретацию слагаемых, входящих в уравнение Бернулли:

$$z_1 = + \frac{1}{Q_v} \int_{\omega_1} p_1 U_1 u_n dA \quad \text{— удельная (отнесенная к весовому расходу)}$$

мощность (работа в единицу времени) силы тяжести, которая пронесит жидкостью, втекающей через сечение  $\omega_1$ ;

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} = \frac{p_1}{\gamma_1} = - \frac{1}{Q_v} \int_{\omega_1} p_1 u_n dA \quad \text{— удельная мощность поверхностных сил}$$

в сечении  $\omega_1$ ;

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = - \frac{1}{Q_v} \int_{\omega_1} p_1 (u_1^2/2) u_n dA \quad \text{— удельный поток кинетической энергии}$$

поступательного движения жидких частиц через сечение  $\omega_1$ ;

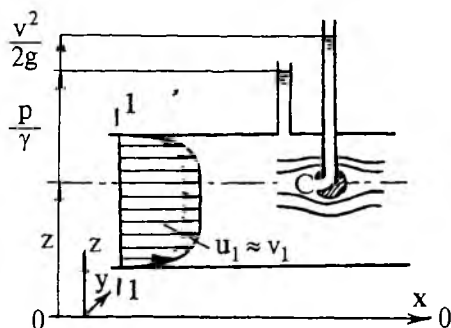


Рис. 5.8. Геометрическая интерпретация слагаемых, входящих в уравнение Бернулли

$h_f = \frac{1}{Q_v} \int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V}$  — удельная мощность (механическая энергия в единицу времени), переходящая в тепло внутри объема  $\mathcal{V}$ , т.е. в трубопроводе между сечениями 1—1 и 2—2, другими словами удельная потеря механической мощности или диссипированная мощность.

Слагаемые, относящиеся к сечению 2—2, имеют аналогичный смысл.

### 5.8. Потенциальный и полный (гидродинамический) напоры. Пьезометрическая и напорная линии

Удельные мощности, т.е. мощности, отнесенные к весовому расходу, проносимые движущейся жидкостью через поперечные сечения, называются *напорами*. Так,

$z$  — напор, обусловленный силой тяжести;

$p/\gamma$  — напор, обусловленный гидродинамическим давлением;

$\alpha v^2/2g$  — напор, обусловленный кинетической энергией движущейся жидкости.

Для краткости обозначим и назовем:

$z + (p/\gamma) = H$  — *потенциальный напор*;

$\alpha v^2/2g = h_v$  — *скоростной напор*;

$z + p/\gamma + \alpha v^2/2g = H_e$  — *полный или гидродинамический напор*;

$(1/\gamma Q) \int_{\mathcal{V}} \Phi d\mathcal{V} = h_f$  — *потеря напора* между сечениями 1—1 и 2—2.

При решении задач о движении в трубах и каналах часто в каждом сечении потока определяют потенциальный и полный напоры и, задав плоскость сравнения, указывают геометрическое место точек, отвечающих этим напорам, в соответствии с их геометрической интерпретацией (рис. 5.9).

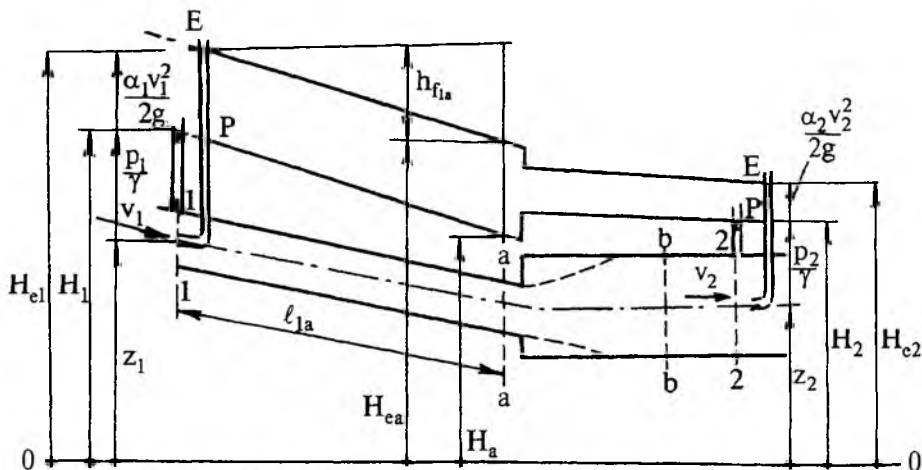


Рис. 5.9. Пьезометрическая P-P и напорная E-E линии

Если в каждом сечении отложить от плоскости сравнения по вертикали величину потенциального напора  $H = z + \frac{p}{\gamma}$ , то совокупность

точек образует *пъезометрическую* линию Р—Р. Аналогично, если в каждом сечении отложить по вертикали от плоскости сравнения величину полного напора  $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ , то совокупность точек образует *напорную* линию Е—Е.

Отметим, что понятие напора было введено для тех сечений потока, где движение равномерное или плавноизменяющееся. На участке, где движение резкоизменяющееся (например, между сечениями а—а и б—б на рис. 5.9), напорная и пъезометрическая линии строятся условно путем их экстраполяции из областей, где движение плавноизменяющееся.

На участке с равномерным движением (например, между сечениями 1—1 и а—а) потери напора потока на каждую единицу длины будут одинаковые (структура потока во всех сечениях одинакова, следовательно, и работа всех внутренних сил, определяющих потерю напора, в одинаковых объемах будет одинакова), поэтому напорная линия Е—Е на таких участках будет прямой. Пъезометрическая линия, которая располагается всегда ниже напорной на величину  $\alpha v^2/2g > 0$ , будет прямой, параллельной напорной линии. Важными характеристиками этих линий являются их продольные уклоны, т.е. отношение разности напоров на участке равномерного движения к расстоянию между сечениями, в которых эти напоры вычислены.

Уклон напорной линии называется *гидравлическим* и обозначается  $J_e$ , а уклон пъезометрической линии называется *пъезометрическим* и обозначается  $J$ . Например, для участка потока между сечениями 1—1 и а—а

$$J_e = \frac{H_{c1} - H_{ea}}{\ell_{1a}}; \quad J = \frac{H_1 - H_a}{\ell_{1a}}. \quad (5.56)$$

Если движение плавноизменяющееся, то и потери напора на каждой единице длины вдоль потока будут переменны, и скоростной напор будет меняться вдоль оси потока. При этом линии Е—Е и Р—Р будут кривыми (рис. 5.10). В этом случае гидравлический и пъезометрический уклоны определяются для каждого сечения как уклоны на элементарном участке длиной  $\Delta\ell$ , прилегающем к сечению, т.е. как уклоны касательной к соответствующим линиям:

$$J_e = - \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta H_e}{\Delta\ell} = - \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{d\ell}; \quad (5.57)$$

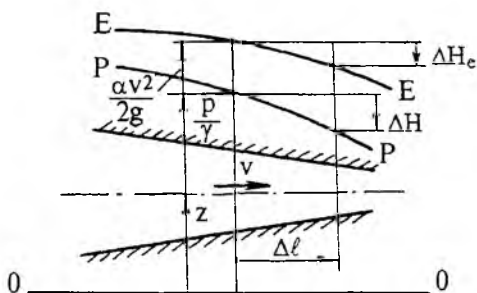


Рис. 5.10. Пъезометрическая Р—Р и напорная Е—Е линии при плавноизменяющемся движении



$$J = - \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta H}{\Delta \ell} = - \frac{d \left( z + \frac{p}{\gamma} \right)}{d\ell}. \quad (5.58)$$

Здесь знак минус показывает, что положительным считается уклон, при котором отметки линий  $E-E$  и  $P-P$  уменьшаются вдоль потока.

Из геометрических соображений (см. рис. 5.9) видно, что при равномерном движении

$$J_e = \frac{h_f}{\ell}. \quad (5.59)$$

Следовательно, гидравлический уклон можно интерпретировать как удельную (на единицу весового расхода) диссипированную мощность в объеме потока, приходящуюся на единицу длины.

При этом важно иметь в виду два обстоятельства.

1. Потери напора — величина положительная (механическая энергия жидкости при движении может лишь уменьшаться, переходя в тепло), поэтому полный напор в сечениях, расположенных ниже по течению, всегда меньше напора в сечениях, расположенных выше по течению. Следовательно, отметки напорной линии вдоль потока всегда уменьшаются и гидравлический уклон всегда положителен ( $J_e > 0$ ).

2. Если часть кинетической энергии жидкости при ее движении переходит в потенциальную, то потенциальный напор может возрасти, при этом отметки пьезометрической линии возрастают.

### 5.9. Основное уравнение равномерного движения жидкости в поле силы тяжести

Рассмотрим установившееся равномерное (продольно-однородное) движение жидкости в цилиндрической трубе произвольного поперечного

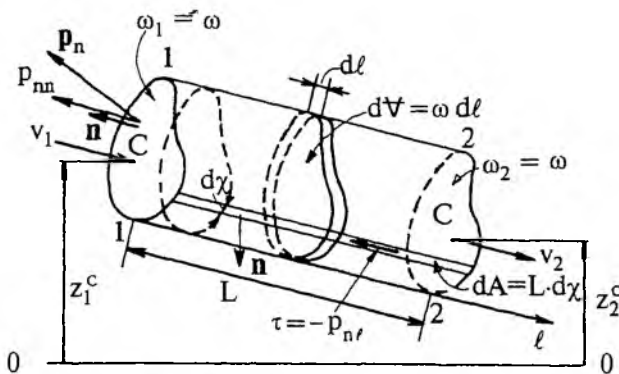


Рис. 5.11. Контрольный объем для вывода основного уравнения равномерного движения

сечения длиной  $L$  (рис. 5.11). Воспользуемся уравнением, выражающим закон изменения количества движения, которое в векторной форме для произвольного объема  $V$ , ограниченного поверхностью  $A$ , имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (5.60)$$

Проекция слагаемых этого уравнения на ось  $\ell$ , совпадающую с направлением скорости движения жидкости,

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_\ell dV = \int_V \rho f_\ell dV + \int_{A_{\text{бок}}} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_1} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_2} p_{n\ell} dA, \quad (5.61)$$

где  $u_\ell$  — проекция вектора скорости на ось  $\ell$ , очевидно,  $u_\ell = u = |\mathbf{u}|$ ;  $f_\ell$  — проекция вектора плотности распределения внешней объемной силы на ось  $\ell$ . Напряжения  $p_{n\ell}$  определим, принимая во внимание, что  $\mathbf{n}$  на  $\omega_1$  направлено противоположно  $\ell$ , а на  $\omega_2$  в одну сторону с  $\ell$ , а также имея в виду лемму 1 из разд. 5.1. При этом  $p_{n\ell}$  — касательное напряжение, действующее по боковой поверхности  $A_{\text{бок}}$  (нормаль к этой поверхности  $\mathbf{n}$ ) и направленное вдоль оси  $\ell$ ;  $p_{n\ell}$  и  $p_{\ell\ell}$  — нормальные напряжения на поверхностях поперечных сечений  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. В итоге получим:

$$\text{на } \omega_1 : p_{n\ell} = -p_{n\ell} = p_1;$$

$$\text{на } \omega_2 : p_{n\ell} = +p_{\ell\ell} = -p_2;$$

$$\text{на } A_{\text{бок}} : p_{n\ell} \text{ — касательное напряжение.}$$

Так как движение установившееся, то локальная составляющая субстанциальной производной равна нулю, а при равномерном (продольно-однородном) движении плотность распределения количества движения  $\rho \mathbf{u}$  вдоль потока не изменяется и, следовательно, конвективная составляющая субстанциальной производной также равна нулю. В результате (5.61) перепишем в виде

$$0 = \int_V \rho f_\ell dV + \int_{A_{\text{бок}}} p_{n\ell} dA + \int_{\omega_1} p_1 dA + \int_{\omega_2} (-p_2) dA. \quad (5.62)$$

Потенциал силы тяжести  $U = -gz$ , следовательно,  $f_\ell = \text{grad}_\ell U = \frac{dU}{d\ell} = -g \frac{dz}{d\ell}$ , а элемент объема  $dV$ , учитывая, что боковая поверхность цилиндрическая, можно представить в виде  $dV = \omega d\ell$ . Тогда

$$\int_V \rho f_\ell dV = \int_1^2 \rho \left( -g \frac{dz}{d\ell} \right) \omega d\ell = -\rho g \omega (z_2 - z_1), \quad (5.63)$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — вертикальные координаты двух произвольных соответствующих (лежащих на одной линии тока) точек сечений  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

В соответствии с леммой 2 (см. разд. 5.1) и зависимостью (2.33) для силы гидростатического давления на плоскую произвольную фигуру представим два последних интеграла из (5.62) в виде

$$\int_{\omega_1} p_1 dA + \int_{\omega_2} (-p_2) dA = (p_1^C - p_2^C) \omega, \quad (5.64)$$

где  $p_1^C$  и  $p_2^C$  — давления в центрах тяжести  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Обратимся к рассмотрению интеграла по боковой поверхности  $A_{\text{бок}}$ . Для простоты обозначим касательное напряжение  $p_{nc} = -\tau$ . Знак минус введен, чтобы касательное напряжение  $\tau$  было положительное, если боковой поверхностью потока является неподвижная твердая поверхность. Так как движение равномерное, то в качестве элемента  $dA$  можно принять полоску  $Ld\chi$ , где  $L$  — длина выделенного контрольного объема,  $d\chi$  — элементарная длина смоченного периметра (см. рис. 5.11); интеграл при этом имеет вид

$$\int_{A_{\text{бок}}} p_{nc} dA = - \int_{\chi} \tau L d\chi = L \int_{\chi} \tau d\chi. \quad (5.65)$$

Подставив (5.63)—(5.65) в исходное уравнение (5.62), получим

$$0 = -\rho g \omega (z_2 - z_1) + \omega (p_1^C - p_2^C) - L \int_{(\chi)} \tau d\chi. \quad (5.66)$$

Так как  $z_1$  и  $z_2$  отвечают произвольным соответствующим точкам сечений 1—1 и 2—2, примем, что это вертикальные координаты центров тяжести сечений 1—1 и 2—2. Разделив на произведение  $\rho g \omega$  все члены уравнения (5.66), получим

$$\frac{L}{\rho g \omega} \int_{\chi} \tau d\chi = \left( z_1^C + \frac{p_1^C}{\gamma} \right) - \left( z_2^C + \frac{p_2^C}{\gamma} \right). \quad (5.67)$$

Как было отмечено выше, если движение в сечении равномерное, то

$$z^C + \frac{p^C}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} = H, \quad (5.68)$$

где  $H$  — потенциальный напор. С учетом этого представим (5.67) в виде

$$\frac{1}{\omega} \int_{\chi} \tau d\chi = \gamma \frac{H_1 - H_2}{L} = \gamma J, \quad (5.69)$$

где  $J$  — пьезометрический уклон.

Это общий вид основного уравнения равномерного движения. Более широко это уравнение используется в частном случае, когда  $\tau$  во всех точках смоченного периметра постоянно. Это условие точно выполняется в круглоцилиндрических и почти точно в весьма широких прямоугольных руслах. Уравнение (5.69) при этом преобразуется к виду

$$\frac{\tau \chi}{\rho g \omega} = J \quad (5.70)$$

или

$$\tau / \gamma = RJ, \quad (5.71)$$

где  $R = \omega / \chi$ , или

$$\tau / \rho = gRJ. \quad (5.72)$$

Уравнения (5.71) и (5.72) используют не только для указанных выше случаев, но и для русл с различными формами поперечного сечения, вводя в эти уравнения вместо  $\tau$  среднее по смоченному периметру касательное напряжение, которое определяется зависимостью

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{\chi} \int_{\chi} \tau d\chi. \quad (5.73)$$

В заключение отметим, что при равномерном движении  $J = J_c$ . Это в дальнейшем будет учитываться при использовании формул (5.71) и (5.72).

### 5.10. Два режима движения жидкости

Несмотря на то что механика жидкости как область знаний существует уже не одно тысячелетие, представление о двух режимах движения жидкости сложилось лишь в XIX веке. Впервые немецкий исследователь Хаген в 1839 году отметил, во-первых, что на характер зависимости потерь напора в трубе от скорости влияют и сама средняя скорость жидкости и вязкость, а во-вторых, при больших скоростях в трубе образуются вихреподобные образования, в то время как при малых скоростях движение жидкости слоистое.

Фундаментальные исследования вопроса о режимах движения жидкости были выполнены английским ученым О. Рейнольдсом в восьмидесятых годах XIX века на приборе, который носит его имя (рис. 5.12). В цилиндрическую стеклянную трубу через плавный коноидальный входной оголовок жидкость подается из резервуара, где она успокаивается с помощью системы решеток.

Во входной участок трубы через тонкую трубочку подается подкрашенная жидкость с плотностью и скоростью истечения, близкими к этим же характеристикам потока жидкости в трубе. Подкрашенная струйка жидкости позволяет визуализировать (сделать видимой) структуру потока в трубе.

Опыты, проведенные на этой установке, показали, что при небольших значениях скорости  $v$  движение жидкости в трубе слоистое; подкрашенная струйка имеет вид нити с четко очерченными границами. Этот режим движения называется *ламинарным*.

При увеличении скорости  $v$  слоистая структура потока разрушается и движение приобретает совершенно иной характер; подкрашенная жидкость быстро рассеивается поперек потока; отдельные подкрашенные частицы жидкости перемешаются по сложным запутанным траекториям; на небольшом расстоянии от входа (10–20 диаметров трубы) поток оказывается равномерно окрашенным. Более детальные исследования показывают, что в каждой фиксированной точке пространства скорость жидкости беспорядочно изменяется во времени. Такой режим движения называется *турбулентным*.



Рис. 5.12. Прибор Рейнольдса для изучения режимов движения жидкости

Итак, при ламинарном режиме имеет место слоистое движение жидкости, траектории жидких частиц упорядоченные, они определяются очертанием твердых границ; например, в цилиндрической трубе траектории подобны образующей боковой поверхности потока (рис. 5.13,а). При турбулентном движении скорость жидкости в фиксированных точках пространства (при эйлеровом методе описания движения жидкости) изменяется во времени (рис. 5.13,б) даже при неизменных во времени граничных условиях (т.е. при установившемся движении). Скорость

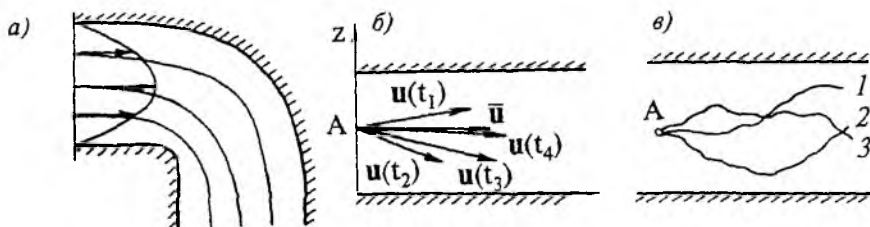


Рис. 5.13. Линии тока и эпюра скорости при ламинарном режиме течения (а); мгновенные значения скорости и осредненная скорость в точке А при установившемся турбулентном режиме течения (б); 1, 2, 3 — траектории жидких частиц, прошедших точку А в различные моменты времени при турбулентном режиме (в)

изменяется во времени беспорядочно, непериодически, отклоняясь при неизменных во времени граничных условиях от некоторого устойчивого значения. Траектории жидких частиц (при лагранжевом методе описания движения жидкости) имеют запутанный неупорядоченный вид (рис. 5.13,в), и частицы лишь в среднем следуют очертаниям ограничивающих поток поверхностей.

В дальнейшем особенности турбулентного режима движения будем рассматривать только в потоках с неизменяющимися во времени граничными условиями. Именно такие турбулентные потоки и соответственно турбулентные движения жидкости будем называть *установившимися*. Мгновенную скорость в фиксированной точке пространства называют при описании турбулентного движения *актуальной* скоростью. Установим в фиксированной точке турбулентного потока (например, в точке А на рис. 5.13,б) датчик скорости, регистрирующий все ее изменения во времени, и представим на рис. 5.14 зависимость от време-

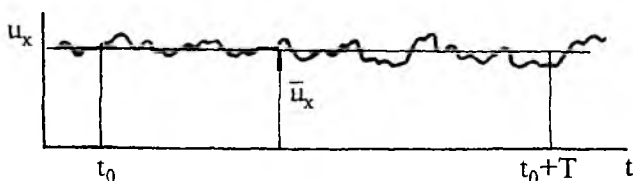


Рис. 14. Зависимость проекции актуальной скорости жидкости на продольную координатную ось  $x$  от времени (тахограмма) при турбулентном режиме

ни проекции этой скорости, например, на координатную ось  $x$  (такие зависимости называют тахограммами). Как видно, проекция  $u_x$  изменяется во времени, отклоняясь от некоторого уровня. Значение проек-

ции скорости  $u_x$ , определяющее положение этого уровня, найдем по зависимости

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x(t) dt, \quad (5.74)$$

т.е. примем ее равной высоте прямоугольника, равновеликого площади фигуры на рис. 5.14, ограниченной тахограммой и вертикалями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $T$ . Величина  $T$  должна быть такой, чтобы значение  $\bar{u}_x$ , вычисляемое по формуле (5.74), от  $T$  не зависело. При этом  $\bar{u}_x$  называют *осредненной проекцией скорости*.

Определив по зависимостям, аналогичным (5.74), все три осредненные проекции скорости, можно построить вектор осредненной скорости в данной точке пространства, занятого потоком:  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z)$ . Такую же операцию осреднения, естественно, можно проделать в любой точке потока. В частности, например, на рис. 5.13,б представлено течение жидкости в цилиндрическом канале, образующая стенок которого параллельна оси  $x$ ; при этом осредненная скорость в любой точке потока  $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$  имеет только одну проекцию  $\bar{u}_x$ , не равную нулю, а  $\bar{u}_y = 0$  и  $\bar{u}_z = 0$ . В других более сложных случаях все три проекции осредненной скорости могут быть отличны от нуля.

Естественно, что и гидродинамическое давление в точке  $p$ , которое при турбулентном движении изменяется сходным со скоростью образом, можно осреднить и рассматривать *осредненное давление* в точке

$$\bar{p} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt. \quad (5.75)$$

Имея осредненные скорости  $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z)$  и давление  $\bar{p}(x, y, z)$ , вместо реального турбулентного потока рассматривают его *осредненную модель*, называемую также моделью Рейнольдса—Буссинеска, которая представляет собой фиктивный поток, скорость в каждой точке которого равна осредненной скорости  $\bar{\mathbf{u}}$ , а давление равно осредненному давлению  $\bar{p}$ .

Использование этой модели является в настоящее время основным способом описания турбулентных потоков. Отметим, что определения осредненных скорости и давления согласно (5.74) и (5.75) пригодны только при установившемся движении; при этом поле осредненных скоростей и давление от времени не зависят. В случае неустановившегося движения вопрос об определении  $\bar{\mathbf{u}}$  и  $\bar{p}$  оказывается весьма сложным и будет рассматриваться в гл. 19.

Во многих случаях осредненное значение скорости является недостаточным для решения практических задач и возникает необходимость уметь определять, как и насколько мгновенные значения скорости отличаются от осредненных. Разность между мгновенной и осредненной скоростями называется *пульсационной* скоростью и обозначается через  $\mathbf{u}'$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = (u_x - \bar{u}_x, u_y - \bar{u}_y, u_z - \bar{u}_z) = \\ &= (u'_x, u'_y, u'_z). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Легко видеть, что осредненная согласно (5.74) величина пульсационной скорости равна нулю, например:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_x(t) dt = 0. \quad (5.77)$$

Поэтому в качестве характерной величины проекции пульсационной скорости принимают корень квадратный из ее среднеквадратичного значения:

$$\sqrt{u_x'^2} = \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [u'_x(t)]^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (5.78)$$

Иногда  $\sqrt{u_x'^2}$  называют *стандартом* пульсационной скорости.

Важной особенностью, обусловившей широкое применение осредненной модели турбулентного потока, является то, что применительно к ней оказываются справедливыми все результаты и зависимости, полученные ранее вне связи с турбулентным режимом движения, например, уравнение неразрывности, уравнение Бернулли, основное уравнение равномерного движения и т.д. В частности, среднюю скорость  $v$  в поперечном сечении  $\omega$  можно определить, используя зависимость, определяющую распределение осредненной скорости в поперечном сечении:

$$v = \frac{1}{\omega} \int \bar{u}_n d\omega. \quad (5.79)$$

Поэтому в дальнейшем, описывая турбулентные потоки (а они в основном и встречаются при решении технических задач), употребляя термин *скорость*, будем иметь в виду осредненную скорость.

Возвращаясь к вопросу о переходе ламинарного (слоистого) движения к турбулентному, отметим, что в случае движения жидкости в круглой трубе все особенности, которые может иметь поток жидкости, определяются родом жидкости (т.е. плотностью  $\rho$  и динамическим коэффициентом вязкости  $\eta$ ), диаметром трубы  $D$  и расходом жидкости  $Q$  (или, при заданном диаметре  $D$ , средней скоростью  $v = 4Q/\pi D^2$ ). Анализируя этот вопрос, О. Рейнольдс предложил в качестве критерия, определяющего режим движения, безразмерную комбинацию этих величин  $\rho v D / \eta$ , которая получила название *числа Рейнольдса*

$$Re_D = \frac{vD}{\nu}, \quad (5.80)$$

где  $\nu = \eta/\rho$  — *кинематический коэффициент вязкости*, а индекс  $D$  указывает, что характерным размером поперечного сечения потока принят диаметр трубы  $D$  (а не другая величина, например, геометрический радиус трубы или ее гидравлический радиус).

Как показали экспериментальные исследования, в трубах существует три области значений чисел Рейнольдса, которые отделяются друг от друга *нижним и верхним критическими числами Рейнольдса*:  $(Re_D)'_{кр}$  и  $(Re_D)''_{кр}$ . Существование и особенности режимов движения жидкости в этих областях можно представить в следующем виде.

Ламинарный режим	Возможен устойчивый	Возможен неустойчивый	Невозможен
Турбулентный режим	Невозможен	Возможен устойчивый	Возможен устойчивый
	0	$(Re_D)'_{кр}$	$(Re_D)''_{кр}$
			$Re_D$

Как видно, при  $Re_D < (Re_D)'_{кр}$ , т.е. при малых скоростях, в трубах малого диаметра в случае очень вязких жидкостей будет существовать ламинарное (слоистое) движение, причем оно будет устойчиво, т.е. если искусственно разрушить слоистую структуру (турбулизовать поток), то она вновь восстановится. При больших числах  $Re_D > (Re_D)''_{кр}$  слоистая структура существовать не может, а при  $(Re_D)'_{кр} < Re_D < (Re_D)''_{кр}$  ламинарный режим существовать может, но он неустойчив; если слоистая структура разрушается, то она вновь не восстанавливается и режим движения становится турбулентным.

Для круглых труб  $(Re_D)'_{кр} = 2300$ , а  $(Re_D)''_{кр} = 4000-100\,000$ , причем  $(Re_D)''_{кр}$  изменяется в этом диапазоне в зависимости от условий входа в трубу, шероховатости поверхности стенок трубы, состояния воды в резервуаре, питающем трубу, и т.п., а  $(Re_D)'_{кр}$  от этих величин практически не зависит.

В заключение приведем распределение скорости жидкости в круглой трубе при ламинарном и турбулентном режимах. Эти распределения будут теоретически обоснованы в гл. 18.

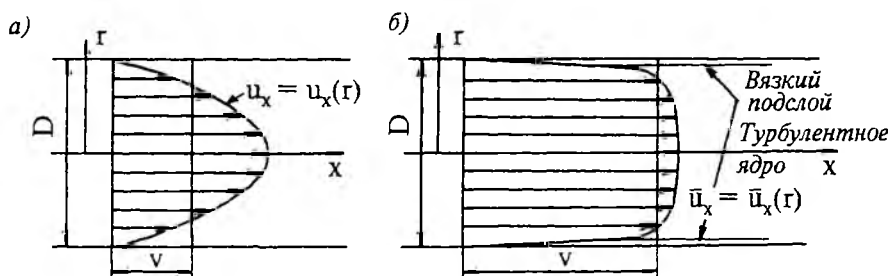


Рис. 5.15. Распределение скорости в поперечном сечении круглоцилиндрической трубы: при ламинарном (а) и турбулентном (б) режимах

При ламинарном режиме распределение скорости жидкости в полярных координатах подчиняется зависимости (рис. 5.15,а)

$$u_x = u_0 \left( 1 - \frac{4r^2}{D^2} \right), \quad (5.81)$$

где  $u_0$  — скорость на оси трубы. Т.е. эпюра скорости представляет параболоид вращения с максимальной скоростью на оси. Средняя скорость  $v$  равна половине максимальной:

$$v = \frac{1}{\pi D^2} \int_0^{\frac{D}{2}} u_x 2\pi r dr = \frac{4u_0}{\pi D^2} \int_0^{\frac{D}{2}} \left( 1 - \frac{4r^2}{D^2} \right) 2\pi r dr = \frac{u_0}{2}.$$



При турбулентном движении представляет интерес распределение осредненной скорости  $\bar{u}_x(r)$ . Здесь в простейшем случае (см. гл. 18) рассматриваем двухслойную модель турбулентного потока (рис. 5.15, б).

1. **Вязкий подслой.** Это очень тонкий, измеряемый долями миллиметра, слой, прилегающий непосредственно к стенке трубы. В этом слое решающую роль в формировании эпюры скорости играют силы вязкости. В пределах этого слоя скорость резко возрастает от нуля на твердой стенке до  $(0,6-0,8)v$ , причем зависимость величины скорости  $\bar{u}_x$  от расстояния до стенки практически линейная.

2. **Турбулентное ядро.** Это остальная часть потока, в которой вязкие напряжения не оказывают непосредственного влияния на распределение осредненной скорости  $\bar{u}_x$ ; скорость сравнительно (с вязким подслоем) медленно возрастает с удалением от стенки. Максимальная скорость на оси трубы лишь на 10–15% превышает среднюю скорость  $v$ .

Подчеркнем, что режим движения жидкости турбулентный как в вязком подслое, так и в турбулентном ядре.

### 5.11. Потери напора при установившемся равномерном движении жидкости (потери по длине)

Предварительно отметим, что потери напора при равномерном движении жидкости в цилиндрических руслах (трубопроводах, каналах и т.п.), обусловленные сопротивлением движению жидкости со стороны внутренней поверхности русл (касательными напряжениями, действующими со стороны твердых границ на поток), будем отличать от потерь напора при резкоизменяющемся движении, которые связаны главным образом с деформацией потока (изменение его поперечного сечения, изменение направления скорости потока, сопровождающиеся образованием застойных водоворотных областей течения). Потери напора при равномерном движении пропорциональны длине участка русла, на котором они имеют место, и поэтому они называются *потерями напора по длине*. Потери напора при резкоизменяющемся движении считаются сосредоточенными в месте, где поток деформируется, и называются *местными потерями напора*.

Чтобы установить структуру зависимости для вычисления потерь напора *по длине*, рассмотрим потери напора  $h_f$  на единицу длины, т.е. гидравлический уклон  $J_c = h_f / \ell$ , и определим, от каких характеристик потока он зависит. Будем рассматривать поток с расходом  $Q$  в круглоцилиндрической трубе диаметром  $D$ . Жидкость несжимаемая, ее механические свойства определяются плотностью  $\rho$  и динамическим коэффициентом вязкости  $\eta$ .

Кроме того, так как напор представляет собой поток механической энергии, отнесенный к *весовому* расходу  $Q_B = \rho g Q$ , потери напора будут зависеть и от ускорения силы тяжести.

Все указанные параметры потока, кроме характеристик внутренней поверхности трубы, сравнительно легко измеряются. Для оценки влияния шероховатости стенок трубы на потери напора рассмотрим только такие поверхности, шероховатость которых описывается одной величиной — *высотой выступов шероховатости*  $\Delta$ . Такую шероховатость называют *зернистой* (рис. 5.16, а). На самом деле влияние на поток может ока-

зывать не только высота выступов, но и их взаимное расположение на поверхности стенки, их очертание и т.п. Например, при прочих равных условиях выступы, имеющие очертание, представленное на рис. 5.16,б, оказывают большее сопротивление течению жидкости и, следовательно, вызывают большие потери напора, чем выступы, представленные на рис. 5.16,в.

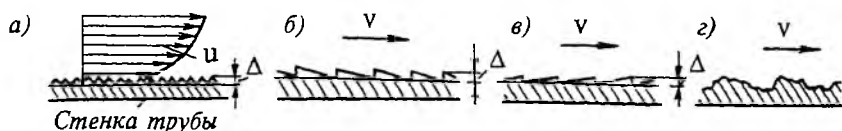


Рис. 5.16. Различные виды шероховатых стенок:  
 а — зернистая шероховатость; б и в — различные виды структурированной шероховатости; г — естественная шероховатость

В общем случае естественной шероховатости, имеющей место вследствие либо технологических особенностей изготовления труб (металлических, бетонных, деревянных и т.п.), либо вследствие их коррозии, либо по каким-то другим причинам (рис. 5.16,г), трудно бывает установить не только высоту выступов (хотя бы среднюю), но даже место, откуда надо отсчитывать эту высоту. О том, как ввести в гидравлические расчеты характеристику внутренней поверхности в случаях, представленных на рис. 5.16, будет сказано далее, а пока рассмотрим зернистую шероховатость, а геометрическую высоту выступов будем называть *абсолютной шероховатостью*  $\Delta$ . Итак,

$$J_e = f(\rho, \eta, Q, D, \Delta, g). \quad (5.82)$$

Для того чтобы выяснить структуру зависимости  $J_e$  от шести неизвестных, воспользуемся методами анализа размерностей (см. гл. 20). Этот анализ основан на простом очевидном правиле, согласно которому суммировать и приравнивать можно лишь величины, имеющие одинаковые единицы измерения, а также на том, что единица измерения любой величины имеет вид степенного комплекса. Из этого правила, в частности, следует, что безразмерная величина  $J_e$  должна быть функцией от безразмерных произведений величин  $\rho, \eta, v, D, \Delta, g$ . Из этих шести параметров, содержащих три независимые единицы измерения (килограмм, метр, секунда), можно образовать несколько безразмерных произведений, но только три из них будут независимыми, а остальные будут представлять произведения или степени этих трех безразмерных произведений. Не приводя формальные выкладки, выберем в качестве независимых безразмерных произведений  $\rho v D / \eta, \Delta / D$  и  $v^2 / g D$ . Первое из них представляет собой известное число Рейнольдса  $Re_D$ , а второе называют *относительной шероховатостью*  $\Delta_r = \Delta / D$ . Итак, используя анализ размерности, вместо (5.82) можно принять

$$J_e = J_e \left( Re_D, \Delta_r, \frac{v^2}{gD} \right), \quad (5.83)$$

где

$$Re_D = \frac{vD}{\nu}, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{D}.$$

Как показали экспериментальные исследования, число Рейнольдса можно использовать не только в качестве критерия для установления

режима движения жидкости (п. 5.10), но и как параметр, определяющий внутреннюю структуру турбулентного потока. Как отмечалось ранее, структура потока в свою очередь определяет интенсивность диссипации механической энергии за счет работы сил вязкости, т.е. потери напора. Относительная шероховатость позволяет учесть влияющие характеристики внутренней поверхности трубы на потери напора.

Экспериментальное изучение потоков жидкости в трубах и каналах показало, что во многих практически важных случаях потери напора пропорциональны квадрату скорости и не зависят от вязкости жидкости. На этом основании, имея в виду получить наиболее простую для практического использования структуру зависимости для  $J_e$ , выражение (5.83) представим в виде

$$J_e = f(\text{Re}_D, \Delta_r) \frac{v^2}{gD}. \quad (5.84)$$

Из этой зависимости получим выражение для потери напора  $h_f$ , одновременно выделив скоростной напор  $v^2/2g$  как величину, входящую в уравнение Бернулли в виде отдельного слагаемого. Обозначив  $2f(\text{Re}_D, \Delta_r)$  через  $\lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ , получим формулу Вейсбаха—Дарси:

$$h_f = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r) \frac{\ell v^2}{D 2g}. \quad (5.85)$$

Функция  $\lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$  называется *коэффициентом гидравлического трения*.

Вид функции  $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$  в виде графика был установлен экспериментальным путем и представлен И.Никурадзе, который выполнил в 1920-х годах свои исследования в Германии. Этот график, представленный на рис. 5.17, носит название графика Никурадзе. Он имеет следующие особенности.

По горизонтальной оси отложено  $\text{Re}_D$  в логарифмическом масштабе, чтобы охватить возможно больший диапазон значений  $\text{Re}_D$  и в то

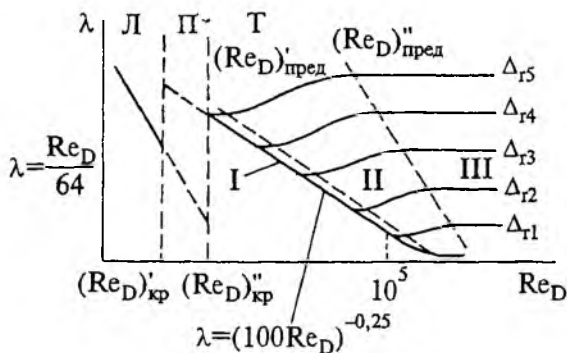


Рис. 5.17. Схематизация графика Никурадзе для зависимости  $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$

же время достаточно детально представить область малых значений  $\text{Re}_D < 10^4$ , относящихся к ламинарному движению. Для того чтобы представить зависимость  $\lambda$  от относительной шероховатости  $\Delta_r$ , на этом

же графике каждому фиксированному значению  $\Delta_r$  ставится в соответствие отдельная кривая  $\lambda = \lambda(\text{Re}_D)$ .

Вертикальные линии  $\text{Re}_D = (\text{Re}_D)'_{\text{кр}}$  и  $\text{Re}_D = (\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$  отделяют зону устойчивого ламинарного режима  $\Pi$  и зону, где может существовать только турбулентный режим  $T$ , от переходной зоны  $\Pi'$ , где могут иметь место или тот, или другой режимы (см. разд. 5.10). При построении этого графика принимают  $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}} = 2300$ , а  $(\text{Re}_D)''_{\text{кр}} = 4000$ .

При ламинарном режиме движения выражение для  $\lambda$  может быть получено и теоретически и экспериментально, причем оба выражения находятся в хорошем согласии друг с другом. Оказывается, что при ламинарном движении  $\lambda$  не зависит от шероховатости и определяется по зависимости

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}_D}. \quad (5.86)$$

Подставив это выражение в (5.85), найдем

$$\begin{aligned} h_\ell &= \lambda \frac{\ell v^2}{D 2g} = \frac{64}{\text{Re}_D} \frac{\ell v^2}{D 2g} = \frac{64v}{vD} \frac{\ell v^2}{D 2g} = \\ &= \frac{32v}{g} \frac{\ell}{D^2} v = \frac{128}{\pi g} \frac{\ell}{D^4} Q. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Как видно из (5.87), потери напора при ламинарном движении пропорциональны средней скорости в первой степени или, при постоянном расходе  $Q$ , обратно пропорциональны четвертой степени диаметра трубы. Этот результат экспериментально был установлен в 40-х годах прошлого века французским врачом Пуазейлем, поэтому ламинарное движение жидкости в цилиндрических трубах называют течением Пуазейля. При числах  $\text{Re}_D$ , лежащих в диапазоне  $(\text{Re}_D)'_{\text{кр}} < \text{Re}_D < (\text{Re}_D)''_{\text{кр}}$ , обычно предполагают, что движение турбулентное (ламинарное движение здесь неустойчиво, и, если не предпринять специальных мер (см. разд. 5.10), оно будет турбулентным). Поэтому на область  $\Pi$  распространяют зависимости для  $\lambda$ , экстраполируя их из области турбулентного режима движения  $T$ .

При турбулентном режиме движения выделяют три области: I, II и III (см. рис. 5.17), которые отделяются друг от друга штриховыми линиями нижних и верхних предельных чисел Рейнольдса:  $(\text{Re}_D)'_{\text{пред}}$  и  $(\text{Re}_D)''_{\text{пред}}$ . Область I характеризуется тем, что в ней коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  не зависит от относительной шероховатости и все линии, отвечающие различным значениям  $\Delta_r$ , сливаются в одну, которая, собственно, и представляет всю зону I. Эта линия, которая при  $\text{Re}_D < 10^5$  на рис. 5.17 имеет вид прямой, достаточно хорошо аппроксимируется зависимостью, предложенной немецким ученым Блазиусом,

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}_D^{0,25}} = (100 \text{Re}_D)^{-0,25}. \quad (5.88)$$

Подставив (5.88) в (5.85), получим, что в этой области  $h_\ell \sim v^{1,75}$ ; область I называется областью гидравлически гладких труб; это следует

понимать так: хотя шероховатость в трубах всегда имеется, но при  $Re_D < (Re_D)'_{пред}$  эта шероховатость не оказывает влияния на потери напора. При больших значениях  $Re_D$  в той же трубе  $\lambda$  будет зависеть от  $\Delta_r$ .

Область III характеризуется тем, что в ней коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  не зависит от числа Рейнольдса, а зависит только от относительной шероховатости  $\Delta_r$ ; графически это проявляется в том, что линии  $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$  в этой области параллельны оси  $Re_D$ . Так как здесь  $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ , то, согласно зависимости (5.85), потери напора  $h_\ell \sim v^2$ ; поэтому область III называют областью *квадратичного* сопротивления.

В области II коэффициент гидравлического трения зависит от  $Re_D$  и от  $\Delta_r$ ; согласно (5.85) здесь  $h_\ell \sim v^{1,75...2,0}$ . Учитывая, что из области II в область III обычно попадают, увеличивая числа  $Re_D$ , что достигается практически увеличением средней скорости в трубе, область II называют областью *доквадратичного* сопротивления.

Подводя итоги анализа графика Никурадзе, отметим следующее.

1. График имеет очень большое принципиальное значение для механики жидкости, так как с его помощью стало возможным рассчитывать потери напора при движении любых жидкостей. До обобщения вопроса о потерях напора, сделанных Никурадзе, различными исследованиями предлагались специальные формулы с целью вычисления потерь напора для каждого вида жидкостей (вода, керосин, масло, спирт и т.п.).

2. Никурадзе было сделано обобщение только для зернистой (искусственной) шероховатости; для случаев естественной шероховатости график зависимости  $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$  имеет в основном те же особенности, однако каждому виду естественной шероховатости следует поставить в соответствие высоту выступов некоторой фиктивной *эквивалентной* зернистой шероховатости, в зависимости от численного значения которой определяется величина  $\lambda$ . Эквивалентность некоторой зернистой шероховатости и заданной естественной шероховатости устанавливается на основе гидравлических исследований потерь напора в трубах с обеими указанными (зернистой и естественной) шероховатостями; значение  $\lambda$  в обоих трубах должно быть одинаковым в области квадратичного сопротивления.

3. В случае естественной шероховатости расчетная высота выступов эквивалентной зернистой шероховатости назначается с помощью специальных таблиц, где значение  $\Delta$  определяется в зависимости от словесного описания состояния внутренней поверхности трубы, которое зависит от технологии изготовления и монтажа трубы, от условий ее эксплуатации и т.п. (табл. 5.1).

4. Описанные выше особенности влияния шероховатости получены при изучении зернистой шероховатости небольшой высоты:  $\Delta_r = \Delta/D < 0,07$ . В случае, когда  $\Delta_r > 0,07$ , а также если выступы шероховатости расположены регулярно (например, винтовая резьба внутри трубы), особенности зависимости  $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$  могут быть значительно сложнее. Иногда, в частности, отсутствует область квадратичного сопротивления, и при любых  $Re_D$  приходится считать, что коэффициент  $\lambda$  зависит от  $Re_D$ . Это осложняет выполнение гидравлических исследований.

Значения параметров шероховатости для разных материалов

Поверхность	$\Delta$ , мм	$n$
Исключительно гладкие поверхности (эмалированные, глазурованные и т.п.)	0,02	0,010(0,009—0,013)
Цементная штукатурка:		
ожезленная или чисто заглаженная	0,1(0,02—0,3)	<0,010
обычная	0,3(0,1—0,8)	<0,012
Трубы стальные		
бесшовные новые чистые	0,014(0,01—0,02)	0,010(0,009—0,011)
сварные новые чистые		0,012(0,011—0,013)
умеренно заржавленные	0,05(0,03—0,12)	0,014(0,013—0,015)
Трубы чугунные новые	0,5(0,3—0,7)	0,015(0,013—0,016)
корродированные	0,7(0,25—1,0)	0,020(0,016—0,025)
	1,3(1,00—1,5)	
Деревянные лотки из досок:		
строганных	2(0,5—8,0)	0,014(0,010—0,018)
нестроганных	3(0,8—10,0)	0,016(0,0012—0,019)
Бетонированная стенка	2(0,3—5,0)	0,013(0,012—0,015)
Кирпичная кладка	3(1,0—6,0)	0,015(0,013—0,017)
Бутовая кладка	20(5—70)	0,021(0,017—0,025)
Бульжная мостовая	25(15—30)	0,022(0,020—0,025)
Канализационные трубы:		
бетонные и железобетонные	2	0,014
керамические	1,25	0,013
Земляные каналы прямолинейные:		
чистые, после эксплуатации	50(15—200)	0,022(0,018—0,024)
с короткой травой и редкими водорослями		0,028(0,024—0,033)
чистое дно, кустарник на откосах		0,06(0,04—0,08)
Естественные водотоки (реки):		
чистые прямолинейные без перекатов и омутов		0,030(0,025—0,033)
чистые извилистые, с омутами и перекатами		0,040(0,033—0,045)
очень заросшие с застрявшими тяжелыми стволами и порослью		0,11(0,075—0,15)

Приводятся наиболее вероятные значения для средних условий; в скобках указываются возможные пределы колебаний.

5. В газопроводах потери энергии оцениваются не как потери напора  $h_f$ , а как потери давления  $\Delta p$  по длине. При этом формула Вейсбаха—Дарси представляется в виде

$$\Delta p = \rho \lambda \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2}, \quad (5.89)$$

а коэффициент гидравлического трения рассчитывается так же, как для несжимаемых жидкостей.

6. На рис. 5.18 представлен график зависимости  $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$ , с помощью которого можно выполнять практические расчеты потерь при равномерном движении. Этот график является обобщением большого экспериментального материала, основанного на исследованиях потерь

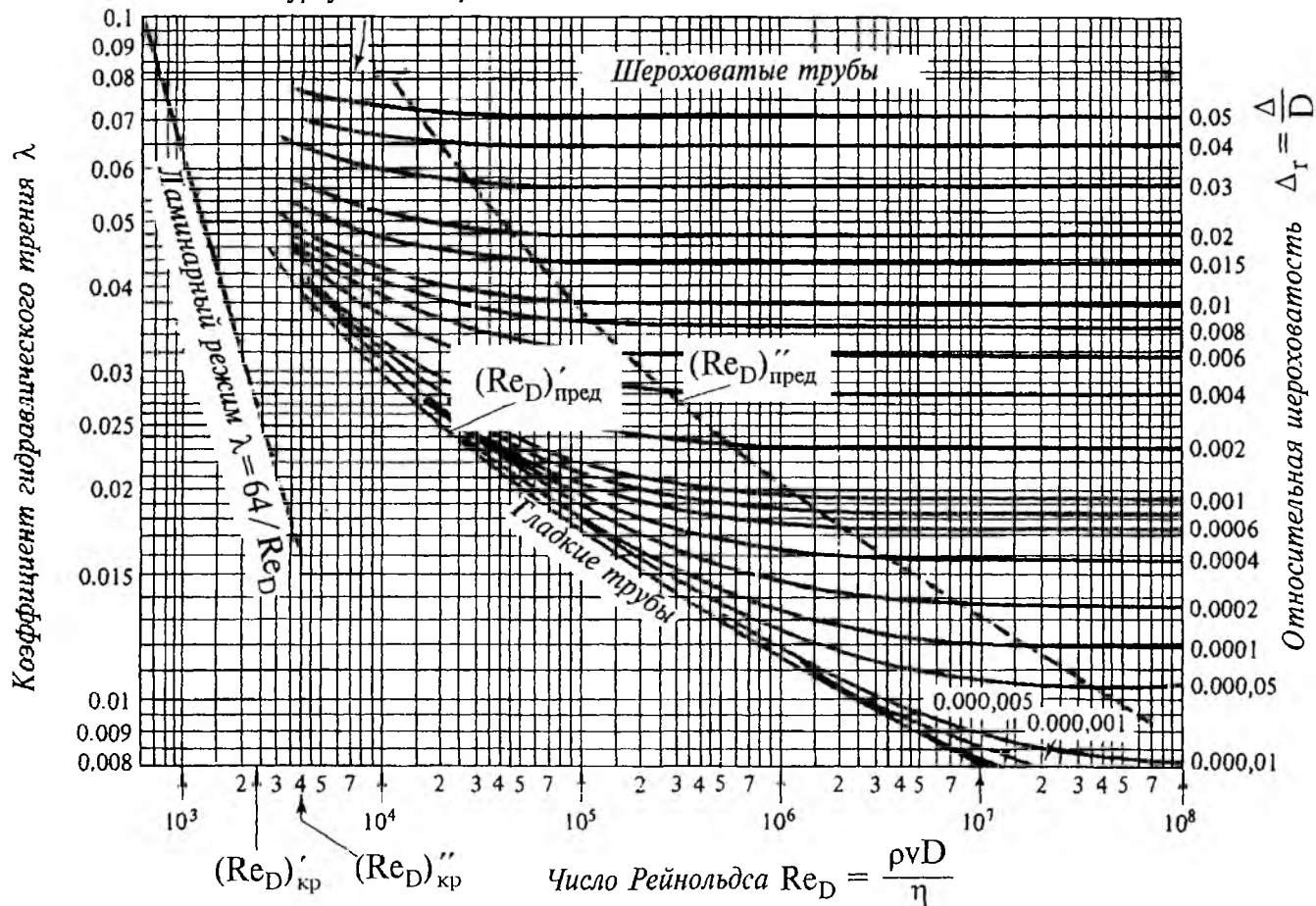


Рис. 5.18. График Кольбука—Уайта

напора в реальных трубах. Необходимым приложением к этому графику является табл. 5.1, в которой представлены значения  $\Delta$  для различных трубопроводов в зависимости от их материала, технологии изготовления и монтажа, условий эксплуатации. График рис. 5.18 называют графиком Кольбука—Уайта, а в США — графиком Муди.

7. Зависимости  $\lambda = \lambda(\text{Re}_D, \Delta_r)$  для турбулентного режима движения хорошо аппроксимируются формулой Альтшуля (при  $\Delta_r < 0,007$ ):

$$\lambda = 0,11 \left( \Delta_r + \frac{68}{\text{Re}_D} \right)^{0,25}, \quad (5.90)$$

а в области квадратичного сопротивления формулой Шифринсона:

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\Delta_r}. \quad (5.91)$$

В области гладкого сопротивления ( $\Delta_r \sim 0$ ) формула (5.90) дает хорошее совпадение с зависимостью Блазиуса (5.18).

8. Потери напора при плавноизменяющемся движении вычисляют по тем же зависимостям, что и при равномерном движении, принимая значения скорости и геометрических размеров поперечного потока как средние между сечениями 1—1 и 2—2, между которыми вычисляется потеря напора. Потерями энергии на переформирование потока пренебрегают. Потери напора при установившемся равномерном и плавноизменяющемся движениях объединяют одним термином — потери напора по длине.

## 5.12. Формула Шези

При расчете потерь напора в открытых руслах (реках, каналах) вместо формулы Вейсбаха—Дарси, как правило, используют формулу Шези:

$$v = C \sqrt{R J_e} = C \sqrt{R \frac{h_\ell}{\ell}}, \quad (5.92)$$

где  $C$  — коэффициент Шези,  $\sqrt{M}/c$ . Эта формула была предложена в начале XIX века на основе исследований французского инженера А. Шези, связанных с водоснабжением Парижа.

Первоначально она была представлена в виде

$$v = 50 \sqrt{R J_e}; \quad (5.93)$$

если принять во внимание, что, как показали последующие эксперименты, для большинства потоков, встречающихся в инженерно-строительной практике,  $C$  изменяется в пределах 40—60  $\sqrt{M}/c$ , то зависимость (5.93), устанавливающую с ошибкой, не превышающей 20%, зависимость средней скорости от потери напора, следует признать чрезвычайно удачной. Впоследствии зависимость коэффициента Шези  $C$  от шероховатости и размеров русла была достаточно хорошо изучена. Для его вычисления была разработана шкала *коэффициентов шероховатости*  $n$ , эквивалентная шкале абсолютных шероховатостей  $\Delta$ ; обе эти характеристики шероховатости, которые определяются по словесному описанию поверхности русла, приведены в табл. 5.1. Кроме того, рекомендованы зависимости и таблицы для определения  $C$ . Наиболее широкое



распространение, связанное с ее простотой, получила формула Маннинга:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}, \quad (5.94)$$

где  $n$  — коэффициент шероховатости,  $R$  — гидравлический радиус.

Отметим, что для большинства открытых потоков значение гидравлического радиуса  $R$  мало отличается от глубины потока  $h$ .

Установим формальную связь между коэффициентом Шези  $C$  и коэффициентом гидравлического трения  $\lambda$ . Для этого преобразуем формулу (5.92) к виду

$$h_f = \frac{\ell}{C^2 R} v^2$$

и, имея в виду течение в круглоцилиндрической трубе, примем  $D = 4R$ ; выделив скоростной напор, получим:

$$h_f = \frac{8g}{C^2} \frac{\ell}{D} \frac{v^2}{2g}. \quad (5.95)$$

Сравнивая (5.95) и (5.85), найдем

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}. \quad (5.96)$$

Полученная связь между  $\lambda$  и  $C$  на первый взгляд указывает на полную эквивалентность формул Шези и Вейсбаха—Дарси. Однако формула и таблицы, используемые для определения численного значения  $C$ , не позволяют учесть влияния числа Рейнольдса  $Re$  на потери напора. Если принять во внимание приведенный выше анализ зависимости  $\lambda = \lambda(Re_D, \Delta_r)$ , то станет очевидно, что область применения формулы Шези — это область квадратичного сопротивления, в которой  $\lambda = \lambda(\Delta_r)$  и не зависит от  $Re_D$ .

На практике формулы Шези и Маннинга применяют главным образом для расчета потерь напора в открытых руслах (реках, каналах), в которых режим движения воды всегда турбулентный и, как правило, имеет место область квадратичного сопротивления.

### 5.13. Потери энергии по длине в потоке сжимаемой жидкости (газа)

При установившемся движении сжимаемой жидкости (газа) в круглоцилиндрическом трубопроводе диаметром  $D$  потери энергии, представляемые как падение гидродинамического давления  $dp$  на участке длиной  $dx$ , вычисляются по формуле Вейсбаха—Дарси (5.89):

$$dp = \lambda \frac{dx}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.97)$$

Эту зависимость следует преобразовать, имея в виду, что в случае несжимаемой жидкости закон сохранения массы в цилиндрической трубе имеет вид  $v = \text{const}$  (вдоль трубы), в то время как для сжимаемой жидкости этот же закон имеет вид  $\rho v = \text{const}$  (вдоль трубы). Из зависимости (5.97) видно, что вследствие увеличения скорости  $v$  вдоль трубы, обус-

ловленного уменьшением давления из-за потерь энергии по длине, потери давления на единицу длины трубы  $\left(\frac{dp}{dx}\right)$  увеличиваются. Как правило, эту особенность расчета потерь по длине следует принимать во внимание при расчете магистральных газопроводов; если специальная термоизоляция трубопровода отсутствует, то температуру газа  $T$  вдоль всей трубы можно считать постоянной и рассматривать изотермическое течение газа.

Введем в расчет связь между плотностью газа  $\rho$  и давлением  $p$  согласно уравнению состояния газа:

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (5.98)$$

здесь  $R$  — газовая постоянная.

Подставим (5.98) в (5.97) и представим последнее в виде

$$p dp = \lambda \frac{dx}{D} \cdot \frac{(\rho v)^2}{2} RT. \quad (5.99)$$

Для простоты полагаем, что область сопротивления квадратичная и  $\lambda = \lambda(\Delta_r)$ . Проинтегрируем это уравнение по  $x$  от сечения 1 до сечения 2, удаленных на расстояние  $\ell$  друг от друга:

$$p_1^2 - p_2^2 = \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT. \quad (5.100)$$

Полученное уравнение позволяет найти, например, давление в сечении 2, если известно давление в сечении 1:

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT}. \quad (5.101)$$

Из полученного выражения, в частности, следует, что с увеличением температуры газа (одинаковой вдоль всей трубы) потери напора возрастают. Кроме того, использование формулы (5.101) целесообразно лишь при больших сравнительно с  $p_1$  перепадах давления, в противном случае, когда

$$p_1 \gg \lambda \frac{\ell}{D} (\rho v)^2 RT, \quad (5.102)$$

выражение (5.101) можно упростить, разложив бином в правой части в ряд:

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \left( 1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{p_1^2} RT \right)^{\frac{1}{2}} \approx p_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{p_1^2} RT \right) = \\ &= p_1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{(\rho v)^2}{2 p_1} RT = p_1 - \lambda \frac{\ell}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, при выполнении условия (5.102) можно пользоваться формулой Вейсбаха—Дарси для несжимаемой жидкости:

$$p_1 - p_2 = \lambda \frac{\ell}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.103)$$

## 5.14. Местные потери напора

### Предварительные предложения

Предположим, что для расчета характеристик потока в трубопроводе используется уравнение Бернулли и на каких-либо участках трубопровода движение резкоизменяющееся; для вычисления потерь напора на этих участках  $h_{\text{ри}}$ , которые обычно называют *местными* (так как они сосредоточены на сравнительно небольшой длине трубопровода), необходимо иметь зависимости, аналогичные зависимостям для вычисления потерь по длине. Для получения таких зависимостей будем основываться на следующих предпосылках.

1. Потери напора (диссипация механической энергии, отнесенная к *весовому* расходу) на участке резкоизменяющегося движения зависят от внутренней структуры турбулентного потока, которая, как и в случае равномерного движения, определяется физическими свойствами жидкости ( $\rho$ ,  $\eta$ ), расходом  $Q$ , геометрическими размерами и формой трубы (канала) на участке, который обуславливает резкое изменение

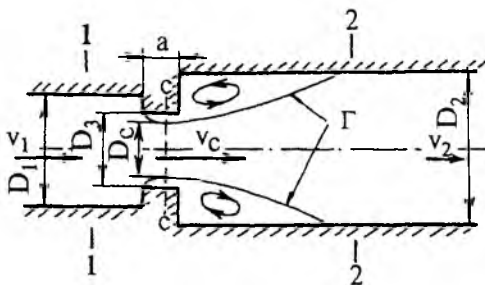


Рис. 5.19. Резкоизменяющееся напорное движение жидкости

потока (рис. 5.19), а также ускорением силы тяжести  $g$ . Отметим, что такая характеристика внутренней поверхности трубы (канала), как шероховатость, в этом случае играет несущественную роль и из рассмотрения исключается. Таким образом, полагаем, что

$$h_{\text{ри}} = f_1(\rho, \eta, Q, g, \text{ параметры размеров и формы трубы}). \quad (5.104)$$

Например, в сравнительно простом случае, когда труба состоит из круглоцилиндрических участков (см. рис. 5.19), такими параметрами являются  $a$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ; в других случаях таких параметров может быть значительно больше.

2. Если выбрать в канале некоторое характерное поперечное сечение потока (например, 1—1 на рис. 5.19), то остальные размеры канала можно представить как безразмерные, отнеся их к размерам выделенного сечения. При этом параметры данного участка трубы можно характеризовать одной размерной величиной (например, значением  $D_1$ ), а безразмерные величины  $D_2/D_1$ ,  $D_3/D_1$ ,  $a/D_1$  будут описывать форму участка трубы.

Вводя в расчет один линейный размер  $D_1$ , целесообразно, как и в случае равномерного движения, вместо  $Q$  ввести в расчет среднюю ско-

рость в этом сечении:  $v_1 = 4Q/\pi D_1^2$ . Учитывая вышеизложенное, перепишем (5.104):

$$h_{\text{пр}} = D_1 \cdot f_2(\rho, \eta, v_1, D_1, D_2/D_1, D_3/D_1, a/D_1, g). \quad (5.105)$$

Из размерных величин, входящих в это выражение, можно составить две безразмерные комбинации:

$$\text{Re}_D = \rho v_1 D_1 / \eta = v_1 D_1 / \nu \quad \text{и} \quad v_1^2 / g D_1. \quad (5.106)$$

Как и в случае равномерного движения, будем считать, что это число  $\text{Re}_D$  определяет внутреннюю структуру турбулентного потока. Однако предшествующие рассуждения пока не позволили установить рациональную структуру зависимости для определения  $h_{\text{пр}}$ .

3. Как показали экспериментальные исследования, при резкоизменяющемся движении потери напора имеют место главным образом на тех участках потока, на которых он расширяется (например, на участке между сечениями с—с и 2—2 на рис. 5.19). При сжатии потока (участок между 1—1 и с—с) потери напора значительно меньше. Это связано в определенной мере с двумя обстоятельствами:

а) на участках расширения обычно существуют *водооборотные области*, объем которых значительно больше, чем на участках сужения; эти области взаимодействуют с *транзитным потоком* (при турбулентном движении за счет водообмена через граничную поверхность  $\Gamma$ ), забирают у него и диссипируют значительное количество энергии;

б) при турбулентном режиме движения, который в основном и представляет практический интерес, на участках расширения возрастают значения пульсационной скорости и часть кинетической энергии осредненного движения (которую оценивают и измеряют величиной скоростного напора) переходит в энергию пульсационного движения (которая выпадает из баланса механической энергии, описываемого уравнением Бернулли) и быстро переходит в тепло.

Имея это в виду, для определения структуры зависимости для  $h_{\text{пр}}$  рассмотрим потерю напора при резком расширении установившегося турбулентного потока и, получив для нее зависимость, используем структуру этой зависимости для других случаев резкоизменяющегося движения.

***Потери напора при резком расширении установившегося турбулентного потока несжимаемой жидкости. Формула Борда***

Задача о потерях напора при резком расширении была решена французским инженером-гидравликом Борда в XVIII веке, и полученное им решение практически не претерпело уточнений до сих пор. Хотя в настоящее время получают зависимости для потерь напора на основе рассуждений, отличных от тех, которые использовал Борда, зависимость для вычисления потерь напора при резком расширении называют формулой Борда.

Пусть поток из трубы 1 диаметра  $D_1$  попадает в трубу 2 с диаметром  $D_2$  (рис. 5.20). Средняя скорость в трубе 1 равна  $v_1$ , а в трубе 2 —  $v_2$ . Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости

$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — площади поперечных сечений труб 1 и 2 соответственно.

Будем считать, что на выходе из трубы 1 поток расширяется и на некотором расстоянии, обычно измеряемом несколькими диаметрами трубы 2, в сечении 2'—2' он вновь занимает все поперечное сечение

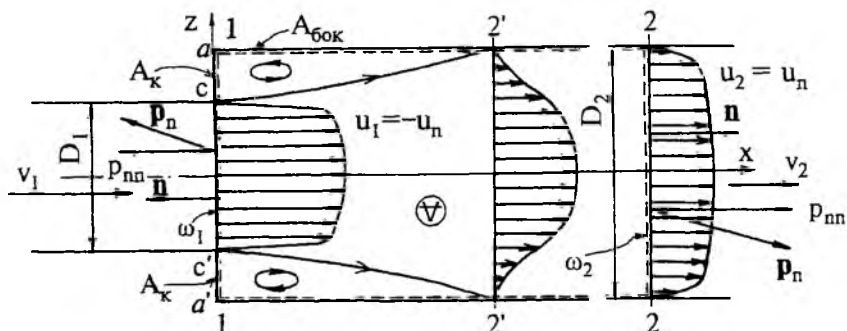


Рис. 5.20. Резкое расширение турбулентного потока

трубопровода. На этом участке образуется кольцеобразная водоворотная область, которая охватывает со всех сторон транзитный поток. В сечении 2'—2' движение резкоизменяющееся, скорости распределены весьма неравномерно; лишь на удалении в несколько  $D_2$  от сечения 2'—2', где кончается водоворотная область, расположено сечение 2—2, в котором движение плавноизменяющееся.

Описанные выше особенности потока при его резком расширении характерны для *турбулентного* режима движения, и во всем последующем выводе будет предполагаться именно такой режим движения, что позволит сделать соответствующие допущения. В случае ламинарного режима общий вид расширяющегося потока может быть совершенно иным, например, водоворотная зона может отсутствовать, и будет иметь место безотрывное расширение потока. При этом большинство допущений, принятых в последующем выводе формулы Борда, будут вносить неприемлемые погрешности в окончательный результат.

Потеря напора входит в уравнение Бернулли, которое записывается для поперечных сечений потока. Наметим на рис. 5.20 два таких сечения: 1—1 и 2—2 (движение в них плавноизменяющееся); сечение 2'—2', очевидно, нельзя использовать, так как движение здесь резкоизменяющееся.

Для определения потери напора между 1—1 и 2—2, т.е. удельной мощности внутренних сил в выделенном объеме потока (диссипированной мощности), воспользуемся тем, что в уравнение, выражающее закон изменения количества движения, внутренние силы не входят. Определив с помощью этого уравнения внешние поверхностные силы, действующие в сечениях 1—1 и 2—2, и подставив полученные значения в уравнение Бернулли, выражающее закон изменения кинетической энергии (в котором учитываются работы и внешних, и внутренних поверхностных сил), можно выделить работу внутренних сил, а через нее и потерю напора.

Легко доказать (это почти очевидно), что внешние объемные (массовые) силы не оказывают влияния на работу внутренних сил трения,

которая зависит от структуры потока. Учитывая это, примем для простоты, что ось трубы  $x$  горизонтальна.

Уравнение Бернулли для сечений 1—1 и 2—2 представим в виде

$$z_1^C + \frac{p_1^C}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2^C + \frac{p_2^C}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{pp}, \quad (5.107)$$

где  $h_{pp}$  — потеря напора при резком расширении; индекс  $C$  означает, что значение относится к центру тяжести сечения.

Здесь  $z_1^C = z_2^C = 0$ , поэтому вклад в изменение кинетической энергии вносят поверхностные внешние силы давления, которые действуют по сечениям 1—1 и 2—2:

$$h_{pp} = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_1^C - p_2^C}{\gamma}. \quad (5.108)$$

Если с помощью уравнения количества движения получить дополнительную к (5.108) зависимость между  $(p_1^C - p_2^C)$  и скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , то можно будет получить искомую связь между  $h_{pp}$  и средними скоростями потока ( $v_1$  и  $v_2$ ).

Запишем уравнение количества движения для контрольного объема жидкости  $\mathcal{V}$ , находящегося в трубе 2 между сечениями 1—1 и 2—2 (в этот объем входят и транзитная струя, и водоворотная область [см. рис. 5.20]):

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (5.109)$$

Рассмотрим уравнение (5.109) в проекции на ось  $x$ ; при этом, если внешней объемной силой является сила тяжести, то первый интеграл в правой части обратится в ноль, так как ось  $x$  горизонтальна; кроме того, так как движение установившееся, то равна нулю локальная составляющая субстанциальной производной; в результате имеем:

$$\int_A \rho u_x u_n dA = \int_A p_{nx} dA. \quad (5.110)$$

Представим контрольную поверхность  $A$ , ограничивающую  $\mathcal{V}$ , в виде суммы

$$A = \omega_1 + \omega_2 + A_k + A_{бок},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — площади поперечных сечений потока 1—1 и 2—2;  $A_k$  — площадь поверхности кольца  $a$  с  $a'$ , соединяющего трубы;  $A_{бок}$  — площадь боковой поверхности трубы 2 между сечениями 1—1 и 2—2.

Выпишем условия на слагаемых контрольной поверхности  $A$  (см. леммы из разд. 5.1):

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } \omega_1 : \quad u_x = u_1, \quad u_n = -u_1, \quad p_{nx} = -p_{nn} = p_1; \\ \text{на } \omega_2 : \quad u_x = u_2, \quad u_n = u_2, \quad p_{nx} = p_{nn} = -p_2; \\ \text{на } A_{бок} : \quad u_n = 0, \quad p_{nx} \text{ — неизвестно;} \\ \text{на } A_k : \quad u_n = 0, \quad p_{nx} = -p_{nn} \text{ — неизвестно.} \end{array} \right\} \quad (5.111)$$

Используя (5.111), упростим уравнение (5.110):

$$-\int_{\omega_1} \rho u_1^2 dA + \int_{\omega_2} \rho u_2^2 dA = \int_{\omega_1} p_1 dA - \int_{\omega_2} p_2 dA - \int_{A_k} p_{nn} dA + \int_{A_{бок}} p_{nx} dA. \quad (5.112)$$

Примем два допущения:

а) касательные напряжения  $p_{nx}$  на поверхности  $A_{бок}$  малы настолько, что последним слагаемым в правой части (5.112) можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми;

б) нормальное напряжение на  $A_k$  определяется по такому же закону, что и в сечении  $\omega_1$ , т.е. экстраполируем зависимость  $p_{nn} = -p_1$  на всю площадь ( $\omega_1 + A_k$ ) и объединим первый и третий интегралы в правой части (5.112).

Для того чтобы преобразовать интегралы в левой части (5.112), введем согласно (5.14) коррективы количества движения; кроме того, так как в контрольных живых сечениях движение плавноизменяющееся и давление распределено по гидростатическому закону (лемма 2 из разд. 5.1), выразим интегралы в правой части (5.112) через давления в центрах тяжести живых сечений  $p_1^C$  и  $p_2^C$  по формуле (2.33).

В результате получим

$$-\alpha_1^0 \rho v_1^2 \omega_1 + \alpha_2^0 \rho v_2^2 \omega_2 = -p_1^C (\omega_1 + A_k) + p_2^C \omega_2. \quad (5.113)$$

Принимая во внимание, что  $\omega_2 = \omega_1 + A_k$ , а также используя уравнение неразрывности  $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$ , приводим (5.113) к виду

$$p_2^C - p_1^C = \alpha_1^0 \rho v_1^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} - \alpha_2^0 \rho v_2^2 = \alpha_1^0 \rho v_1 v_2 - \alpha_2^0 \rho v_2^2. \quad (5.114)$$

Для дальнейших преобразований введем еще одно допущение в дополнение к допущениям а и б:

в)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 1,0$ , т.е. будем считать, что скорости в сечениях 1-1 и 2-2 распределены равномерно. Это достаточно хорошо отвечает действительности (с точностью 5-7%) при турбулентном движении. Подставляя (5.114) в (5.108), имеем

$$h_{pp} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \frac{1}{g} (v_1 v_2 - v_2^2).$$

После элементарных преобразований получаем окончательную формулу для вычисления потерь напора при резком расширении потока:

$$h_{pp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \quad (5.115)$$

Полученная зависимость и называется *формулой Борда*.

Эту формулу преобразуем, выразив  $v_2$  и  $v_1$  согласно уравнению неразрывности, и представим в виде

$$h_{pp} = \left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\right) \frac{v_1^2}{2g}. \quad (5.116)$$

Зависимость в формуле (5.116) используем при получении формулы для местных потерь напора в общем случае.

**Потери напора при резкоизменяющемся движении  
(местные потери напора).  
Формула Вейсбаха**

Имея в виду воспользоваться структурой зависимости (5.116) с целью получения формулы для потерь напора в общем случае резкоизменяющегося движения, сравним ее с формулой (5.105). При этом отметим, что потеря напора прямо пропорциональна второму безразмерному параметру  $v_1^2 / gD_1$  [см. (5.106)], а коэффициент пропорциональности является функцией от параметров, характеризующих геометрическую форму трубопровода (канала) на участке, где движение резкоизменяющееся. Что касается влияния размеров, то оно должно проявиться через неизвестную функцию от числа Рейнольдса. Таким образом, формула для  $h_{\text{ри}}$  должна иметь вид

$$h_{\text{ри}} = \zeta_{\text{ри}} \frac{v^2}{2g} f(\text{Re}), \quad (5.117)$$

где  $\zeta_{\text{ри}}$  — коэффициент местной потери напора, зависящей от геометрической формы канала. Эта величина определяется экспериментально на основе гидравлических исследований конкретных участков каналов, которые обуславливают резкоизменяющееся движение;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса, определяемое согласно (5.106).

Неизвестная функция  $f(\text{Re})$  определяется также экспериментально. В случае, например, резкого расширения, рассмотренном выше, потеря напора  $h_{\text{рр}}$ , на первый взгляд, не зависела от  $\text{Re}$ , однако, как показывают экспериментальные исследования, значения  $\alpha$  и  $\alpha^0$  зависят от числа Рейнольдса. Так как было принято  $\alpha = \alpha^0 = 1,0$ , то тем самым был включен в рассмотрение лишь случай очень больших значений  $\text{Re}$  (здесь есть определенная аналогия с областью квадратичного сопротивления в случае потери напора по длине, в которой коэффициент гидравлического трения не зависит от  $\text{Re}$ ). Вообще же говоря, особенно учитывая случай ламинарного движения, потеря напора при резком расширении также зависит от числа Рейнольдса.

В общем случае местных потерь напора, как показали эксперименты, существенная зависимость потерь напора от числа Рейнольдса имеет место лишь при очень малых значениях  $\text{Re}$ , которые обычно не представляют интереса при решении большинства инженерно-строительных задач. Поэтому для практического пользования рекомендуется формула (5.117) в виде

$$h_{\text{ри}} = \zeta_{\text{ри}} \frac{v^2}{2g}, \quad (5.118)$$

где  $\zeta_{\text{ри}}$  — коэффициент местной потери напора, определяемый по таблицам в зависимости от вида участка канала; такими участками могут быть поворот канала, изменение диаметра, диафрагма, задвижка и т.п. Таблицы для коэффициентов  $\zeta_{\text{ри}}$  приводятся в гидравлических справочниках (см. список литературы). Зависимость (5.118) называется *формулой Вейсбаха*.



**5.15. Справочные материалы**  
**для расчета местных потерь напора**

1. Диафрагма с острыми краями в круглой трубе (рис. 5.21):

$$\zeta_d = \frac{h_d}{v_2^2/2g}$$

Таблица 5.2

Значения коэффициента сопротивления диафрагмы  $\zeta_d$

$\omega_2/\omega_3$	$\omega_2/\omega_1$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	2,90	2,80	2,67	2,53	2,40	2,25	2,09	1,98	1,75	1,50	1,00
0,2	2,27	2,17	2,05	1,94	1,82	1,69	1,55	1,40	1,26	1,05	0,64
0,4	1,70	1,62	1,52	1,42	1,32	1,20	1,10	0,98	0,85	0,68	0,36
0,6	1,23	1,15	1,07	0,98	0,90	0,80	0,72	0,62	0,52	0,39	0,16
0,8	0,82	0,76	0,69	0,63	0,56	0,49	0,42	0,35	0,28	0,18	0,04
1,0	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,25	0,15	0,10	0,05	0

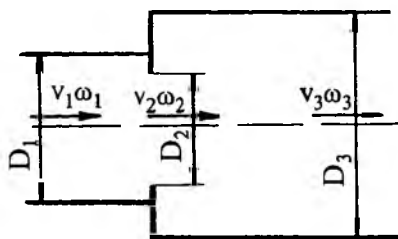


Рис. 5.21. Диафрагма с острыми краями

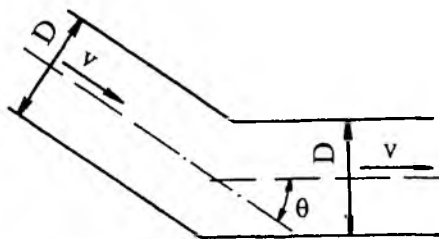


Рис. 5.22. Резкий поворот трубы

2. Резкий поворот трубы на угол  $\theta$  (рис. 5.22):

$$\zeta_{pn} = \frac{h_{pn}}{v^2/2g};$$

$$\zeta_{pn} = A \cdot B. \quad (5.119)$$

Таблица 5.3

Значения коэффициента А к формуле (5.119)

$\theta^\circ$	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
A	—	2,50	2,22	1,87	1,50	1,28	1,20	1,20	1,20	1,20	1,20

Таблица 5.4

Значения коэффициента В к формуле (5.119)

$\theta^\circ$	0	20	30	45	60	75	90	110	130	150	180
B	-	0,05	0,07	0,17	0,37	0,63	0,99	1,56	2,16	2,67	3,00

3. Плавный поворот трубы на угол  $\theta$  (рис. 5.23):

$$\zeta_{\text{пн}} = \frac{h_{\text{пн}}}{v^2/2g};$$

$$\zeta_{\text{пн}} = \zeta' \frac{\theta}{90^\circ}. \quad (5.120)$$

Таблица 5.5

Значения коэффициента  $\zeta'$  к формуле (5.120)

$\frac{D}{2R_0}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta'$	0,13	0,14	0,16	0,21	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98

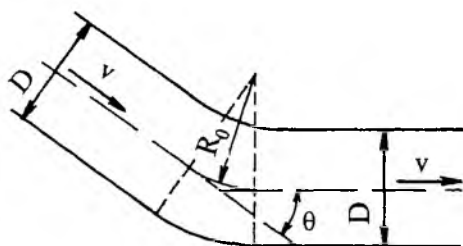


Рис. 5.23. Плавный поворот трубы

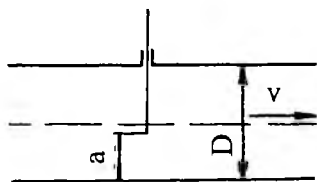


Рис. 5.24. Простая задвижка, перекрывающая трубу

4. Простая задвижка, перекрывающая трубу (рис. 5.24):

$$\zeta_{\text{з}} = \frac{h_{\text{з}}}{v^2/2g}.$$

Таблица 5.6

Значение  $\zeta_{\text{з}}^{\text{кр}}$  для круглоцилиндрической трубы  
и  $\zeta_{\text{з}}^{\text{пр}}$  для трубы прямоугольного сечения

$a/D$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\zeta_{\text{з}}^{\text{кр}}$	—	35,0	10,0	4,60	2,06	0,98	0,44	0,17	0,06
$\zeta_{\text{з}}^{\text{пр}}$	193	44,5	17,8	8,12	4,02	2,08	0,95	0,39	0,09

5. Дискový (дрóссельный) затвор, перекрывающий круглоцилиндрическую трубу (рис. 5.25):

$$\zeta_{\text{дз}} = \frac{h_{\text{дз}}}{v^2/2g}$$

Таблица 5.7

Значение  $\zeta_{\text{дз}}$  для дискового (дрóссельного) затвора

$\theta$	5	10	20	30	40	50	60	70	75
$\zeta_{\text{дз}}$	—	0,52	1,54	4,50	11,0	29,0	108	625	—

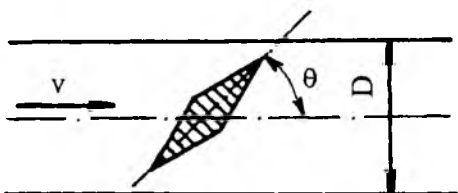


Рис. 5.25. Дискový (дрóссельный) затвор

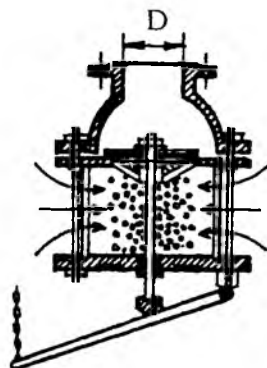


Рис. 5.26. Всасывающий клапан насоса

6. Всасывающий клапан с сеткой (рис. 5.26):

$$\zeta_{\text{кл}} = \frac{h_{\text{кл}}}{v^2/2g}$$

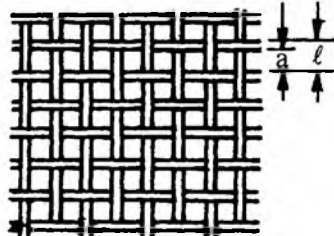
Таблица 5.8

Значение  $\zeta_{\text{кл}}$  для всасывающего клапана

D, мм	40	70	100	200	300	500	750
$\zeta_{\text{кл}}$	12	8,5	7,0	4,7	3,7	2,5	1,6

7. Сетка с квадратными ячейками (рис. 5.27):

$$\zeta_c = \frac{h_c}{v^2/2g}$$



где  $v$  — средняя скорость в ячейках сетки;  $v = Q/m\omega$ , — площадь живого сечения потока на подходе к сетке,  $m$  — коэффициент скважности сетки;  $m = a^2/l^2$ ,  $a$  — размер стороны ячейки,  $l$  — шаг сетки. Коэффициент  $\zeta_c$  определяют по формуле

$$\zeta_c = (92 - 78m) \text{Re}_a + 0,7(1,05 - m),$$

Рис. 5.27. Сетка с прямоугольными ячейками

где  $\text{Re}_a = \frac{va}{\nu}$ .