

6. Многие уравнения и формулы, связанные в настоящее время с именами различных ученых, были даны этими учеными совсем не в том виде, в каком они фигурируют в современной литературе; примеров таких «именных зависимостей» можно привести целый ряд: формула Шези, формула Торричелли и т. д.

В начале XX в. ведущая роль в области технической механики жидкости (гидравлики) перешла от старой французской гидравлической школы к немецкой школе, которую возглавил ряд видных немецких ученых. Однако после Великой Октябрьской социалистической революции в связи с бурным развитием в нашей стране гидротехнического строительства в СССР был создан целый ряд научно-исследовательских институтов, разрабатывавших различные гидромеханические проблемы; было организовано также большое число вузов инженерно-строительного, в частности, гидротехнического профиля. Если в дореволюционное время в России почти отсутствовали печатные издания, посвященные гидравлическим и гидротехническим вопросам, то в послереволюционный период у нас появилась обширная литература (журналы, труды институтов, монографии, руководства для проектирования и т. п.), освещающая самые различные стороны технической гидромеханики; при этом в скором времени наша отечественная гидравлика выдвинулась на одно из первых мест в мире.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1-1. **Абрамов Н. Н.** Водоснабжение. — М.: Стройиздат, 1967.
- 1-2. **Гидроэнергетические установки.**/Под ред. Д. С. Шавелева. — Л.: Энергоиздат, 1981.
- 1-3. **Корнфельд М.** Упругость и прочность жидкостей. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.
- 1-4. **Михайлов А. В.** Внутренние водные пути. — М.: Стройиздат, 1973.
- 1-5. **Перник А. А.** Проблемы кавитации. — Л.: Судостроение, 1966.
- 1-6. **Справочник по гидравлическим расчетам.**/Под ред. П. Г. Киселева. — М.: Энергия, 1972.
- 1-7. **Чугаев Р. Р.** Гидравлические термины. — М.: Высшая школа, 1974.
- 1-8. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Водосливные плотины — М.: Высшая школа, 1978.
- 1-9. **Чугаев Р. Р.** Гидротехнические сооружения: Глухие плотины. — М.: Высшая школа, 1975.
- 1-10. **Чугаев Р. Р.** Развитие и формирование технической механики жидкости (гидравлики). — Л.: Изд. ЛПИ имени М. И. Калинина, 1975.

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ГИДРОСТАТИКА

#### § 2-1. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ («СУММАРНОЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ») СВОЙСТВА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

В гидростатике изучается жидкость, находящаяся в покое. В § 1-2 было отмечено, что касательные напряжения в покое жидкости всегда равны нулю ( $\tau = 0$ ). В § 1-4 п. 3 мы исключили возможность существования в жидкости (покоящейся или движущейся) растягивающих напряжений. Поэтому, мы должны считать, рассматривая покоящуюся жидкость, что в любой ее точке мы можем иметь только нормальные напряжения:  $\sigma = \sigma_n$  (см. конец § 1-6).

Основным понятием гидростатики является понятие *гидростатического давления в данной точке покоящейся жидкости*. Это давление принято обозначать буквой  $p$  и для краткости именовать просто «гидростатическим давлением».

В случае покоящейся жидкости гидростатическим давлением  $p$  в данной точке называют скалярную величину, равную модулю (значению) напряжения  $\sigma$  в рассматриваемой точке:

$$p = |\sigma|, \quad (2-1)$$

где  $|\sigma|$  — модуль напряжения  $\sigma$  (независящий от ориентировки — от угла наклона — площадки действия, намечаемой в рассматриваемой точке; см. рис. 1-10, б, относящийся к случаю, когда  $\tau = 0$ ).<sup>1</sup> Имея это в виду, иногда говорят, что гидростатическое давление в данной точке представляет собой «скалярный тензор»; при этом несколько условно отмечают, что в случае гидростатики любая точка (т. е. элементарная частица жидкости) со всех сторон «сжата одинаково» (что обычно не имеет места в случае гидродинамики; см. далее § 3-1).

Поясним еще гидростатическое давление  $p$  следующим образом.

Представим на рис. 2-1 произвольный объем покоящейся жидкости. Наметим внутри этого объема точку  $M$  и проведем через нее произвольную поверхность  $AB$ . Такая поверхность расщепит данный объем жидкости на два отсека:  $I$  и  $II$ . Выделим у точки  $M$  на поверхности  $AB$  некоторую площадь  $S$ .

Через поверхность  $AB$  будет передаваться сила давления со стороны отсека  $I$  на отсек  $II$ . Часть этой силы, обозначаемая нами через  $P$ , должна приходиться на выделенную площадь  $S$ .

Сила  $P$ , действующая на всю рассматриваемую площадь  $S$ , называется силой гидростатического давления (или суммарным гидростатическим давлением).

Сила  $P$  по отношению к отсеку  $II$  является внешней поверхностной силой; по отношению же ко всему объему жидкости, состоящему из двух отсеков ( $I$  и  $II$ ), она является силой внутренней. Силе  $P$  отвечает реакция (той же величины, что и сила  $P$ ), действующая со стороны отсека  $II$  на отсек  $I$ . Поэтому силу  $P$  следует рассматривать, как силу парную.

Разделив модуль (значение)  $|P|$  на  $S$ , получим

$$\frac{|P|}{S} = p_{\text{ср}}, \quad (2-2)$$

где величина  $p_{\text{ср}}$  представляет значение той силы, которая приходится в среднем на единицу рассматриваемой площади  $S$ ;  $p_{\text{ср}}$  называют средним гидростатическим давлением.

<sup>1</sup> Напомним, что сжимающие напряжения мы условились считать положительными. В математической механике жидкости (так же как и в математической теории упругости) принято (условно) сжимающие напряжения давления на какую-либо поверхность считать отрицательными (а растягивающие напряжения «давления» — положительными). Однако мы (как и многие другие авторы, занимающиеся техническими науками) не соблюдаем этого условного «математического правила» по следующим причинам. Рассматривая различные материалы, прочность которых приходится рассчитывать, видим, что материалы, сопротивляющиеся только растяжению, практически отсутствуют; материалов же, сопротивляющихся и растяжению, и сжатию, не так много: главным образом, инженерам-гидротехникам приходится сталкиваться с материалами, которые практически сопротивляются только сжатию (вода, грунт, бетон). Известно, что почти вся литература, например, по механике грунтов представлена согласно принятому нами правилу. Соблюдая это правило, мы избавляемся от неувязок, возникающих при расчете, например, стальных конструкций, на которые действует давление грунта (принимаемое положительным) или давление воды; мы здесь избавляемся также от условности (принятой в области математической механики), согласно которой термин «напряжение давления» той или другой силы не должен использоваться.

Если теперь представить, что в формуле (2-2) площадь  $S$  стремится к нулю (так, однако, чтобы точка  $M$  всегда находилась внутри контура площадки  $S$ , стягиваемого в точку), то величина  $p_{ср}$  будет стремиться к определенному пределу. Этот предел выражает модуль (значение) напряжения  $\sigma$ , а следовательно, и значение  $p$  в намеченной точке  $M$ :

$$p = \lim_{S \rightarrow 0} \left( \frac{|P|}{S} \right). \quad (2-3)$$

Из (2-2) и (2-3) видно, что величины  $p_{ср}$  и  $p$  имеют размерность силы, деленной на площадь (например, кН/м<sup>2</sup>, тс/м<sup>2</sup>, кгс/см<sup>2</sup> и т. п.).<sup>1</sup>

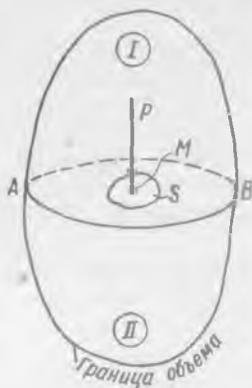


Рис. 2-1. Объем покоящейся жидкости  
 $P$  — сила, действующая со стороны I отсека жидкости на площадку  $S$ , принадлежащую II отсеку

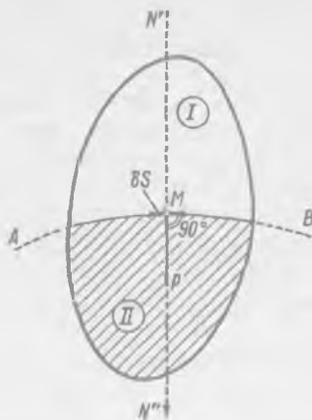


Рис. 2-2. Гидростатическое давление  $p$  (см. точку  $M$ )  
 $MN''$  — внутренняя нормаль

Из всего сказанного выше можно видеть, что гидростатическое напряжение  $\sigma$  и гидростатическое давление  $p$  обладают двумя свойствами:

1°. **Первое свойство.** Напряжение  $\sigma$ , модулем которого является  $p$ , действует нормально к площадке действия и является сжимающим, т. е. оно направлено внутрь того объема жидкости (или твердого тела, ограничивающего жидкость), который мы рассматриваем.

На рис. 2-2 представлен некоторый объем жидкости, находящийся в покое, рассеченный поверхностью  $AB$  на два отсека I и II. Как отмечалось выше, отсек I будет с некоторой силой давить на поверхность  $AB$  отсека II; с такой же силой, но обратной по направлению, отсек II будет давить на поверхность  $AB$  отсека I.

Условимся далее рассматривать только отсек II, покрытый на чертеже штриховкой. При этом нам придется интересоваться первой названной силой, т. е. силой, приложенной к отсеку II (со стороны отсека I).

Наметим на поверхности  $AB$  точку  $M$  и выделим у этой точки элементарную площадку действия  $\delta S$ , совпадающую с поверхностью  $AB$ . Проведем

<sup>1</sup> В связи с указанной размерностью  $p$ , эту скалярную величину в настоящее время предложено измерять «п а с к а л я м и».

к площадке  $\delta S$  нормаль  $N'N''$ . Линии  $MN'$  и  $MN''$  принято называть нормальными, соответственно внешней и внутренней.

Как видно, согласно первому свойству, гидростатическое напряжение  $\sigma$  всегда направлено, как показано на рисунке, по нормали внутренней, т. е. внутрь того тела, давление на которое мы рассматриваем.

2°. Второе свойство. Гидростатическое давление  $p$  в данной точке не зависит от ориентировки, т. е. от угла наклона площадки действия.

На рис. 2-3 представлен объем покоящейся жидкости, заключенной, например, в сосуде. Наметим внутри жидкости произвольную точку  $M$ ; через эту точку проведем несколько поверхностей (1-1, 2-2 и т. д.); как видно, каждая из этих поверхностей разбивает рассматриваемый объем жидкости на два отсека: I и II. Выделим далее у точки  $M$  ряд площадок действия ( $\delta S_1, \delta S_2$  и т. д.), лежащих соответственно на поверхностях 1-1, 2-2 и т. д.; как видно, все эти площадки имеют различную ориентировку. Условимся теперь рассматривать давление, приходящееся со стороны отсека I на отсек II; при этом давление  $p$  в точке  $M$  для различных площадок действия ( $\delta S_1, \delta S_2$  и т. д.) обозначим соответственно  $p_1, p_2$  и т. д.

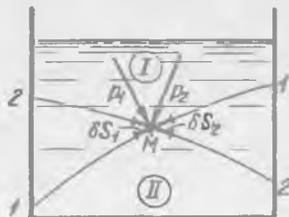


Рис. 2-3. Значение гидростатического давления в точке  $M$  ( $p_1 = p_2$ )

Согласно первому свойству, напряжение  $\sigma$  в точке  $M$  должно быть нормально к соответствующим площадкам действия; согласно же второму свойству давление  $p$  ( $p_1, p_2, \dots$ ), т. е. длины векторов, показанных на рисунке, должны быть одинаковы:

$$p_1 = p_2 = p_3 = \dots \quad (2-4)$$

Как известно, для твердого тела в общем случае такое соотношение не имеет места.

## § 2-2. О НЕЗАВИСИМОСТИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ $p$ ОТ ОРИЕНТИРОВКИ ПЛОЩАДКИ, НАМЕЧЕННОЙ В ДАННОЙ ТОЧКЕ ПРОСТРАНСТВА (В УСЛОВИЯХ, КОГДА В ЖИДКОСТИ ОТСУТСТВУЮТ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ)

Как мы видели, второе свойство гидростатического давления (о независимости  $p$  от ориентировки площадки действия) вытекает из теории сплошной среды (см. рис. 1-10, б). Вместе с тем справедливость этого свойства может быть доказана непосредственно в результате нижеследующих рассуждений.

Возьмем внутри покоящейся жидкости произвольную точку  $A$  (рис. 2-4) и выделим у этой точки элементарный объем жидкости в виде прямой треугольной призмы  $ABC$  (на чертеже  $ABC$  — основание призмы, сама призма расположена перпендикулярно к чертежу).

Обозначим через  $\alpha$  произвольный угол наклона грани  $BC$  к горизонту. Наметив оси координат, как показано на чертеже, обозначим через  $dx, dz$  и  $dl$  длины сторон основания призмы; через  $du$  — высоту призмы; все эти величины считаем бесконечно малыми.

Покажем теперь у точки  $A$  три элементарные площадки различной ориентировки:<sup>1</sup>  $S_{22}, S_{23}, S_n$ ; площадка  $S_n$  параллельна грани  $BC$ ; наклон ее к горизонту определится произвольным углом  $\alpha$ . Давление в точке  $A$  для этих площадок соответственно

<sup>1</sup> Для упрощения рисунка вместо  $dS$  пишем просто  $S$ , аналогично поступаем ниже и с силами, т. е. вместо  $dP$  пишем  $P$ .

будет:  $p_x, p_z, p_n$ . При этом среднее гидростатическое давление для граней  $AB, AC$  и  $BC$  должно быть записано в виде:

$$\begin{aligned} (p_x + \epsilon_x) & - \text{для грани } AB, \\ (p_z + \epsilon_z) & - \text{для грани } AC, \\ (p_n + \epsilon_n) & - \text{для грани } BC, \end{aligned}$$

где  $\epsilon_x, \epsilon_z, \epsilon_n$  — величины бесконечно малые, которыми следует пренебрегать. Среднее давление, например, для грани  $AB$  отличается от давления  $p_x$  в точке  $A$  на бесконечно малую величину потому, что величина  $p_x$  изменяется вдоль оси  $Az$  непрерывно; расстояние же  $dz$  бесконечно мало. Таким образом, можно утверждать, что величины  $p_x, p_z$  и  $p_n$  выражают также и средние гидростатические давления для соответствующих боковых граней призмы.

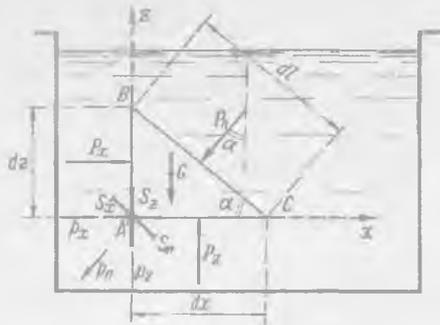


Рис. 2-4. Независимость значения величины  $p$  от ориентировки площадки  $S$ , намеченной в точке  $A$

нами 2-го порядка малости. Действительно, для получения объемной силы  $G$  величину этой силы, отнесенную к единице объема (конечную величину), приходится умножать на объем призмы, т. е. на  $\left(\frac{1}{2} dx dy dz\right)$ ; для получения же поверхностных сил средние гидростатические давления (конечные величины) мы умножали [см. (2-5)] на площади боковых граней, т. е. на  $(dz dy)$ ;  $(dx dy)$ ;  $(dl dy)$ . Поэтому силой  $G$  следует пренебрегать и считать, что выделенная элементарная призма  $ABC$  находится в равновесии под действием только внешних поверхностных сил  $P_x, P_z, P_n, P_y$ .

Имея это в виду, можем утверждать, что суммы проекций сил  $P_x, P_z, P_n$  и  $P_y$  на оси  $Ax$  и  $Az$  должны равняться нулю, т. е.

$$\begin{cases} P_x - P_n \sin \alpha = 0; \\ P_z - P_n \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эти выражения зависимости (2-5), имеем

$$\begin{cases} p_x dz dy - p_n dl dy \sin \alpha = 0; \\ p_z dx dy - p_n dl dy \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2-6)$$

Учитывая, что  $dl \cdot \sin \alpha = dz$  и  $dl \cdot \cos \alpha = dx$ , из (2-6) окончательно получаем:

$$P_n = P_x = P_z. \quad (2-7)$$

Таким образом,  $p_n$  оказывается равным  $p_x = p_z$ , какой бы угол  $\alpha$  мы не задали.

Если теперь дополнительно учесть, что призму  $ABC$  (вместе со скрепленными с нею осями координат) можно как угодно располагать (ориентировать) в точке  $A$ , то справедливость высказанного выше свойства делается очевидной.

Таким образом, мы еще раз убеждаемся в том, что при отсутствии в рассматриваемом теле касательных напряжений величина (значение) давления (напряжения) в любой точке данного тела не зависит от ориентировки (от угла наклона) «площадки действия».

### § 2-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОКОЯ (РАВНОВЕСИЯ) ЖИДКОСТИ

Рассмотрим покоящуюся жидкость (рис. 2-5), на которую действует та или иная внешняя объемная сила (не обязательно сила тяжести). В § 1-6 через  $\phi$  мы обозначили объемную силу, действующую на единицу массы рассматриваемой жидкости. Обозначим теперь через  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$  проекции силы  $\phi$  на оси  $Ox, Oy, Oz$ .

В общем случае давление  $p$  в разных точках покоящейся жидкости будет различным:

$$p = f(x, y, z) \quad (2-8)$$

Для того чтобы установить связь между давлением  $p$  и координатами точек, а также величиной  $\phi$ , поступаем следующим образом.

Наметив оси координат  $Ox$  и  $Oz$ , выделяем элементарный объем покоящейся жидкости в виде прямоугольного параллелепипеда 1-2-3-4; стороны параллелепипеда  $dx$  и  $dz$ , а также  $dy$  (перпендикулярную к плоскости чертежа) считаем бесконечно малыми.

В центре параллелепипеда намечаем точку  $A$  с координатами  $x, y$  и  $z$ . Давление в этой точке обозначаем через  $p$ .

Проведя через точку  $A$  линию  $MN$ , параллельную оси  $Ox$ , можем утверждать, что в общем случае гидростатическое давление будет непрерывно изменяться вдоль этой линии. Изменение гидростатического давления, приходящееся на единицу длины линии  $MN$ , может быть представлено частной производной  $\frac{\partial p}{\partial x}$ .

Используя  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , выразим давления в точках  $M$  и  $N$  в виде

$$\left. \begin{aligned} p_M &= p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}; \\ p_N &= p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

где второе слагаемое правых частей равенств (2-9) выражает изменение давления  $p$  на длине  $\frac{1}{2} dx$ .

Далее рассуждаем следующим образом:

- а) выясняем все силы, действующие на элементарный параллелепипед;
- б) эти силы проектируем на ось  $Ox$ ; поскольку рассматриваемый параллелепипед находится в покое, то сумму проекций найденных сил приравняем нулю, в результате получаем 1-е дифференциальное уравнение;
- в) для получения 2-го и 3-го дифференциальных уравнений проектируем все силы, действующие на параллелепипед, соответственно на оси  $Oy$  и  $Oz$ .

Идя по указанному пути, даем вывод только 1-го дифференциального уравнения.

1. Силы, действующие на параллелепипед 1-2-3-4:

а) объемная сила равна

$$\phi (dx dy dz) \rho, \quad (2-10)$$

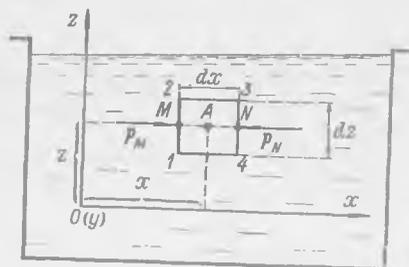


Рис. 2-5. К выводу уравнений (2-14).  
На жидкость действуют любые объемные силы

где  $(dx dy dz) \rho$  — масса жидкости, образующей параллелепипед 1-2-3-4; проекция этой силы на  $Ox$  равна

$$\phi_x (dx dy dz) \rho; \quad (2-11)$$

б) поверхностные силы: проекция на ось  $Ox$  разности сил давления на грани 1-4 и 2-3 равна нулю; проекция на  $Ox$  разности сил давления на грани 1-2 и 3-4 равна:

$$\begin{aligned} P_M - P_N = p_M (dz dy) - p_N (dz dy) &= \left( p - \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy dz - \\ &- \left( p + \frac{1}{2} dx \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Как видно, полученная разность поверхностных сил является величиной 3-го порядка малости, так же как и величина объемных сил, выраженная формулой (2-11).

2. Сумма проекций всех сил на ось  $Ox$  равна

$$\phi_x (dx dy dz) \rho - \frac{\partial p}{\partial x} (dx dy dz) = 0. \quad (2-13)$$

Так выглядит первое уравнение; остальные два пишем по аналогии с первым. Найденные три дифференциальных уравнения (отнесенные к единице массы жидкости) имеют окончательный вид:

$$\phi_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \phi_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \phi_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2-14)$$

Эти уравнения были получены Л. Эйлером в 1755 г.

#### § 2.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОКОЯ (РАВНОВЕСИЯ) ЖИДКОСТИ

Умножаем 1-е дифференциальное уравнение (2-14) на  $dx$ , 2-е на  $dy$  и 3-е на  $dz$ . После этого складываем левые и правые части этих уравнений:

$$\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0. \quad (2-15)$$

Так как давление в точке  $p$  есть функция только координат:

$$p = f(x, y, z), \quad (2-16)$$

то можно утверждать, что выражение, входящее в равенство (2-15) и заключенное в скобки, является полным дифференциалом  $p$ , т. е. это выражение равно  $dp$ . Поэтому уравнение (2-15) можно переписать в виде

$$dp = \rho (\phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz). \quad (2-17)$$

Далее рассуждаем следующим образом.

Если левая часть (2-17) является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат, то, следовательно, и правая часть (2-17) должна являться полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат. Учитывая, что плотность жидкости  $\rho = \text{const}$ , можно на основании сказанного утверждать, что выражение, входящее в (2-17) и заключенное в скобки, является также полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат. Обозначим эту последнюю функцию через  $U$ , причем  $U = f(x, y, z)$ . Тогда вместо (2-17) можем написать

$$dp = \rho dU, \quad (2-18)$$

где

$$dU = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz. \quad (2-19)$$

С другой стороны полный дифференциал  $dU$  можно представить как сумму частных дифференциалов:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (2-20)$$

Сопоставляя (2-19) и (2-20), видим, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \phi_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \phi_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \phi_z. \quad (2-21)$$

Так как  $U$  есть функция только координат и так как частные производные ее по координатам дают соответствующие проекции ( $\phi_x$ ;  $\phi_y$ ;  $\phi_z$ ) объемной силы, отнесенной к единице массы, то, следовательно,  $U$  является потенциальной функцией. Объемная же сила  $\phi$ , удовлетворяющая условиям (2-21), является силой, имеющей потенциал. Из сказанного ясно, что однородная несжимаемая жидкость (для которой  $\rho = \text{const}$ ) может находиться в покое под действием только таких сил, которые имеют потенциал.

Интегрируя (2-18), получаем

$$p = \rho U + C, \quad (2-22)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Чтобы определить  $C$ , рассматриваем некоторую точку жидкости, для которой известны  $p$  и  $U$ :

$$p = p_0; \quad U = U_0. \quad (2-23)$$

Для этой точки (2-22) переписывается в виде

$$p_0 = \rho U_0 + C, \quad (2-24)$$

откуда

$$C = p_0 - \rho U_0. \quad (2-25)$$

Подставляя (2-25) в (2-22), получаем

$$p = \rho U + p_0 - \rho U_0 \quad (2-26)$$

или окончательно

$$p = p_0 + \rho(U - U_0). \quad (2-27)$$

Формула (2-27) дает давление в точке для случая, когда  $\rho = \text{const}$ , причем на жидкость действует любая система объемных сил, имеющих потенциал.

**Понятие потенциальной функции.** Пространство, в котором происходит какое-либо физическое явление, называется физическим полем.

Различают поля: 1) скалярные, например поле температур; 2) векторные, например поле сил или поле скоростей.

Поле какого-либо скаляра

$$\psi = f(x, y, z)$$

может быть представлено линиями (или поверхностями)  $\psi = \text{const}$ ; например, поле температур  $t^\circ$  можно представить линиями (или поверхностями)  $t^\circ = \text{const}$ .

Оперировать векторным полем значительно сложнее, чем скалярным. Поэтому векторное поле (например, поле сил) при его изучении заменяют особым скалярным полем. При этом такое скалярное поле представляют линиями равного значения особой функции  $U$ , называемой потенциальной

функцией, или просто потенциалом (потенциалом тех векторов, поле которых мы изучаем; можно различать потенциал сил, потенциал скоростей и т. п.).  $U$  является скалярной величиной.

Функция  $U$  (потенциал) обладает следующими свойствами:

а) она зависит только от координат  $x, y, z$  (и иногда от времени);

б) частные производные  $U$  по координатам, взятые в различных точках скалярного поля, должны давать величины проекций рассматриваемых векторов в соответствующих точках векторного поля.

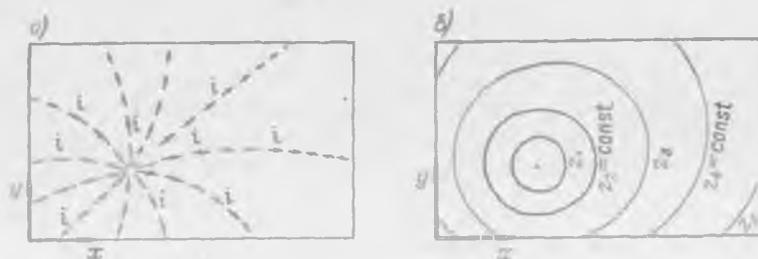


Рис. 2-6. Замена векторного поля (а) уклонов  $i$  земной поверхности скалярным полем (б) отметок земной поверхности

Рассмотрим для примера рельеф поверхности земли. В каждой точке этого рельефа имеется некоторый уклон земной поверхности, который можно представить вектором, направленным вдоль линии наибольшего ската. В связи с этим рельеф поверхности земли можно рассматривать как поле уклонов  $i$  (поле векторов, выражающих уклоны; рис. 2-6, а).

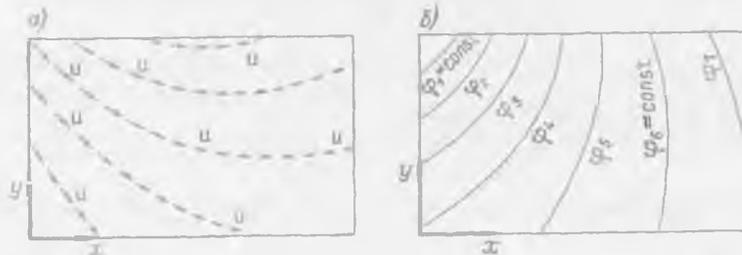


Рис. 2-7. Векторное поле (а) скоростей и скалярное поле (б) потенциальной функции  $\phi$  поля скоростей

Обозначим теперь через  $z$  отметку поверхности земли и проведем на плане нашего рельефа горизонтали, т. е. линии  $z = \text{const}$  (рис. 2-6, б). Очевидно, отметка  $z$  зависит только от координат  $x$  и  $y$ ; кроме того величина  $z$  обладает еще следующим свойством:<sup>1</sup>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -i_x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -i_y$$

где  $i_x$  и  $i_y$  — компоненты  $i$ .

<sup>1</sup> Чтобы в приводимых соотношениях избавиться от минуса и тем самым упростить запись этих соотношений, вместо функции  $z$  можно пользоваться функцией  $z' = -z$ .

Отсюда ясно, что скалярная величина  $z$  является потенциальной функцией векторного поля уклонов  $\vec{i}$ . Хорошо известно, что в практике рельеф местности всегда представляют именно эквипотенциалами  $z = \text{const}$ , причем из рассмотрения этих линий (горизонталей) легко можно установить значение и направление вектора  $\vec{i}$  в любой точке земной поверхности.

Выше, имея векторное поле объемных сил  $\vec{f}$  (отнесенных к единице массы), мы ввели в рассмотрение скаляр  $U$  (потенциал векторного поля объемных сил).

Далее нам часто придется сталкиваться с векторным полем скоростей  $\vec{u}$  (рис. 2-7, а). В этих случаях мы будем иногда заменять такое поле скалярным полем, характеризующимся потенциалом скорости  $\phi$  (рис. 2-7, б).

Подчеркнем, что не каждое векторное поле может быть представлено (описано) потенциальной функцией. Имеются такие векторные поля, которые не имеют потенциала. Изучение таких полей в значительной мере затрудняется. При рассмотрении векторных полей, имеющих потенциальную функцию, сталкиваемся с особой математической задачей об отыскании этой функции (см. с. 80).

### § 2-5. ВЕЛИЧИНА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО ОДНОЙ ОБЪЕМНОЙ СИЛЫ – СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Будем рассматривать как в этом параграфе, так и в последующих (за исключением § 2-9), жидкость, на которую действует только одна объемная сила – сила тяжести.

Представим на рис. 2-8 закрытый сосуд, в котором находится жидкость. Обозначим через  $p_0$  внешнее поверхностное давление (т.е. давление на свободную поверхность жидкости). Возьмем оси координат, как показано на чертеже, и наметим точку  $m$ , у которой выделим единицу массы тяжелой жидкости. К этой единице массы приложена объемная сила  $\vec{f}$ .

В случае, когда объемными силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести, имеем

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g, \quad (2-28)$$

где  $g$  – ускорение силы тяжести;  $f_x, f_y, f_z$  – проекции силы  $\vec{f}$  на оси координат.

Величина  $dp$  выражается зависимостью (2-18), где  $dU$  в нашем случае будет равно [см. (2-19)]:

$$dU = f_x dx + f_y dy + f_z dz = -g dz. \quad (2-29)$$

Подставляя (2-29) в (2-18) [или (2-28) в (2-14)], можем написать:

$$dp = -\rho g dz. \quad (2-30)$$

Интегрируя (2-30), имеем

$$p = -\rho g z + C \quad (2-31)$$

или [см. формулу (1-5)]

$$p = -\gamma z + C, \quad (2-31')$$

где  $C$  – постоянная интегрирования. Для определения  $C$  рассмотрим точку на

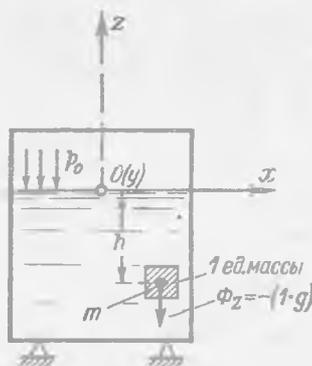


Рис. 2-8. Давление  $p$  для «тяжелой жидкости»

поверхности жидкости (где  $z = 0$  и  $p = p_0$ ), тогда согласно (2-31') для этой точки

$$C = p_0; \quad (2-32)$$

в результате вместо (2-31') имеем:

$$p = p_0 - \gamma z. \quad (2-33)$$

Обозначим через  $h$  заглубление точки  $m$  под свободной поверхностью жидкости:

$$h = -z, \quad (2-34)$$

тогда (2-33) окончательно можно переписать в виде:

$$p = p_0 + \gamma h, \quad (2-35)$$

где  $p$  является абсолютным давлением в рассматриваемой точке;  $p_0$  — внешнее поверхностное давление.<sup>1</sup>

Величина

$$\gamma h = p_s \text{ (обозначение)}, \quad (2-36)$$

в формуле (2-35) может быть названа весовым давлением: как видно,  $p_s$  представляет собой ту часть абсолютного давления  $p$ , которая обусловлена весом самой жидкости.

Из рассмотрения (2-35) заключаем, что абсолютное давление в точке равно сумме внешнего поверхностного давления и весового давления.

Из (2-35) также ясно, что на сколько увеличивается внешнее поверхностное давление  $p_0$ , на столько же должно увеличиться и абсолютное давление в данной точке.

Если сосуд открыт, то

$$p_0 = p_a$$

где  $p_a$  — атмосферное давление; при этом вместо (2-35) имеем:

$$p = p_a + \gamma h. \quad (2-37)$$

Назовем избыточным (сверхатмосферным) давлением величину превышения абсолютного давления в точке над атмосферным давлением, т. е. разность  $(p - p_a)$ . Эту разность также иногда называют манометрическим давлением.

В практике главным образом приходится сталкиваться не с абсолютным давлением, а с избыточным давлением. Имея это в виду, в дальнейшем будем применять следующие обозначения: 1) для избыточного давления  $p$ ; 2) для абсолютного давления  $p_A$ .

В соответствии с такого рода изменением обозначений имеем:

$$p = p_A - p_a \quad (2-38)$$

причем расчетная формула (2-35) принимает вид:

а) для закрытого сосуда

$$p_A = p_0 + \gamma h = p_0 + p_s = p_a + p; \quad (2-39)$$

<sup>1</sup> Уравнение (2-35), разумеется, может быть получено и без использования потенциальной функции  $U$  [путем интегрирования третьего дифференциального уравнения (2-14)].

б) для открытого сосуда

$$p_A = p_a + \gamma h = p_a + p_e = p_a + p, \quad (2-40)$$

откуда видно, что для открытого сосуда понятия весового и избыточного давлений совпадают:

$$p = p_e = \gamma h; \quad (2-41)$$

для закрытого же сосуда давления  $p$  и  $p_e$  имеют разную величину:

$$p = p_a + (p_0 - p_a). \quad (2-41')$$

Как видно, всего имеем пять различных давлений, обозначаемых через  $p_A$ ,  $p$ ,  $p_e$ ,  $p_a$  и  $p_0$ , причем под  $p_0$  условимся понимать абсолютное поверхностное давление.

Говоря далее о силе гидростатического давления  $P$ , будем различать:

- 1) силу абсолютного гидростатического давления  $P_A$ ;
- 2) силу избыточного гидростатического давления (сверхатмосферного)  $P$ . Последнюю далее часто будем именовать просто силой гидростатического давления  $P$  (опуская слово «избыточного»).

## § 2-6. ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЫСОТА

Слово «пьезометрическая» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «давление» и второе — «мера».

1°. Пьезометрическая высота, отвечающая абсолютному давлению в точке. Покажем, что абсолютное давление в точке  $p_A$  может быть выражено высотой некоторого столба жидкости. С этой целью на рис. 2-9 представим закрытый сосуд, частично наполненный жидкостью. Наметим в жидкости точку  $m$ , к которой приключим запаянную сверху тонкую стеклянную трубку  $\Pi_0$ .

Будем считать, что в трубке  $\Pi_0$  создано полное разрежение (торричеллиева пустота). Тогда под давлением  $p_A$  в точке  $m$  горизонт жидкости в трубке поднимется на некоторую высоту  $h_A$  над точкой  $m$ .<sup>1</sup>

Рассматривая точку  $m$ , можем написать для нее следующие соотношения:

а) абсолютное гидростатическое давление в точке  $m$  со стороны жидкости в сосуде равно

$$p_0 + \gamma h = p_A; \quad (2-42)$$

б) абсолютное гидростатическое давление в точке  $m$  со стороны жидкости в трубке равно

$$0 + \gamma h_A. \quad (2-43)$$

Очевидно, величина (2-42) должна равняться величине (2-43), т. е.

$$p_A = \gamma h_A. \quad (2-44)$$

Как видно, зная  $h_A$ , легко можно найти  $p_A$ .

Величину  $h_A$  назовем пьезометрической высотой, отвечающей абсолютному давлению в точке, или просто абсолютной

<sup>1</sup> Строго говоря, все пространство над горизонтом жидкости в трубке  $\Pi_0$  должно быть заполнено парами жидкости, насыщающими это пространство. Если предположить, что в сосуде и в трубке имеется вода, причем ее температура близка к  $0^\circ\text{C}$ , то давление насыщенных паров оказывается равным (см. § 1-5)  $0,6 \text{ кПа} = 0,6 \text{ кН/м}^2 = 0,006 \text{ кгс/см}^2$ , чем можно пренебречь и считать, что давление на поверхности жидкости в трубке равно нулю.

пьезометрической высотой (иногда  $h_A$  называют приведенной высотой).

Из (2-44) имеем

$$h_A = \frac{p_A}{\gamma}. \quad (2-45)$$

Можно сказать, что  $h_A$  (см. трубку  $\Pi_0$ ) есть высота такого столба жидкости, который своим весом способен создать давление, равное абсолютному давлению в рассматриваемой точке. Размерность  $h_A$  является размерностью длины; таким образом, абсолютное давление в точке  $p_A$  может выражаться единицами длины (длины вертикального столба жидкости с указанием веса  $\gamma$  единицы объема этой жидкости).

Таким образом, имеем два разных способа выражения абсолютного «гидростатического давления в точке» (т. е. «интенсивности гидростатического давления в точке»):

1) единицами  $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$ , например, кН/м<sup>2</sup>, т. е. кПа (или, например, кгс/см<sup>2</sup>);

2) единицами длины (единицами высоты) вертикального столба жидкости, характеризующей определенной величиной  $\gamma$ .

В настоящее время в литературе встречаются еще измерения величины  $p_A$  при помощи так называемой «технической атмосферы» (применительно к которой была осуществлена тарировка многих действующих измерительных устройств).

Одна техническая атмосфера

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 10 \text{ тс/м}^2 = 100 \text{ кН/м}^2 = 100 \text{ кПа},$$

причем она соответствует 10 м вод. ст.<sup>1</sup>

2°. **Пьезометрическая высота, отвечающая избыточному давлению в точке.** Рассмотрим точку  $n$  (рис. 2-9); приложим к этой точке тонкую стеклянную трубку  $\Pi$  открытого типа. В этой трубке горизонт жидкости, благодаря действию давления  $p_A$  в точке  $n$ , также поднимется на некоторую высоту  $h_{\text{изб}}$ . Однако  $h_{\text{изб}}$  будет меньше  $h_A$  (относящегося к точке  $n$ ), так как в случае открытой трубки жидкость в ней будет встречать противодействие со стороны атмосферы.

Рассматривая точку  $n$ , можем сказать, что:

а) со стороны жидкости в сосуде на точку  $n$  действует давление

$$p_A = p_0 + \gamma h; \quad (2-46)$$

б) со стороны жидкости в трубке на точку  $n$  действует давление

$$p_A + \gamma h_{\text{изб}}. \quad (2-47)$$

<sup>1</sup> Однако, определяя избыточное давление как сверхатмосферное (§ 2-5) и вакуум как недостаток давления до атмосферного (§ 2-7), под атмосферным давлением следует понимать давление, соответствующее не одной технической атмосфере, а атмосфере реально существующей в рассматриваемом месте и в рассматриваемый момент времени.

Так как давления слева и справа на точку должны быть равными, то получаем:

$$p_A = p_a + \gamma h_{\text{изб}}, \quad (2-48)$$

откуда

$$h_{\text{изб}} = \frac{p_A - p_a}{\gamma} = \frac{p}{\gamma}, \quad (2-49)$$

где  $p$  — избыточное давление в точке  $n$ .

Величина  $h_{\text{изб}}$  называется пьезометрической высотой, отвечающей избыточному давлению в точке, или избыточной пьезометрической высотой или просто пьезометрической высотой. Как видно, пьезометрическая высота  $h_{\text{изб}}$ , в отличие от пьезометрической высоты  $h_A$ , выражает лишь разность давлений:  $p_A - p_a$ . Трубки  $\Pi_0$  и  $\Pi$  называются пьезометрами соответственно закрытого и открытого типа.

Легко доказать следующие два положения:

1) разность высот стояния горизонтов жидкости в трубках  $\Pi_0$  и  $\Pi$  всегда равна  $p_a/\gamma$ ;

2) в случае открытого сосуда, когда  $p_0 = p_a$ , величина  $h_{\text{изб}} = h$ , где  $h$  — заглубление данной точки под уровнем жидкости в сосуде.

## § 2-7. ВАКУУМ

Выше рассматривался случай, когда абсолютное давление в точке больше атмосферного. Обратимся теперь к случаю, когда  $p_A < p_a$ . Положим, что таким давлением характеризуется точка  $m$ , показанная на рис. 2-10. Давление в точке  $m$  при условии  $p_A < p_a$  можно измерить с помощью так называемого обратного пьезометра, или, что то же, в вакуумметра, представляющего собой изогнутую трубку  $V$ .

Очевидно, горизонт жидкости в такой трубке опустится ниже точки  $m$ ; заглубление точки  $m$  по отношению к горизонту жидкости в трубке  $V$  будет отрицательным ( $h_{\text{вак}}$  на рис. 2-10).

Можно сказать, что:

а) давление в точке  $m$  со стороны жидкости в сосуде равно

$$p_A = p_0 + \gamma h; \quad (2-50)$$

б) давление в точке  $m$  со стороны жидкости в трубке  $V$  равно

$$p_a - \gamma h_{\text{вак}}. \quad (2-51)$$

Соединяя знаком равенства два приведенных выражения, получим:

$$p_A = p_a - \gamma h_{\text{вак}}, \quad (2-52)$$

откуда

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_a - p_A}{\gamma} = -\frac{p}{\gamma}. \quad (2-53)$$

Величину  $h_{\text{вак}}$  называют вакуумметрической высотой или высотой вакуума. Как видно,  $h_{\text{вак}}$  характеризует разность двух давлений: атмосферного и абсолютного давления в точке  $m$ . Именно эта разность, а не само давление, называется вакуумом (от латинского слова *vacuum*

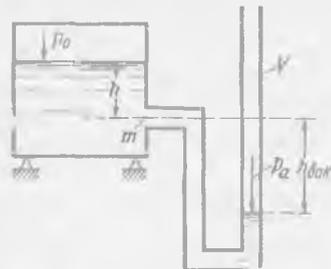


Рис. 2-10. Вакуум  
 $h_{\text{вак}}$  — вакуумметрическая высота или высота вакуума

«пустота»). Можно сказать, что вакуум в данной точке жидкости есть недостаток давления в этой точке до атмосферного. Иногда вакуумом называют также состояние жидкости, когда давление в ней менее атмосферного.

Величина вакуума может выражаться тремя способами:

1) единицами  $\frac{\text{сила}}{\text{площадь}}$ , например,  $\text{кН/м}^2$ , т. е.  $\text{кПа}$  (или, например,  $\text{кгс/см}^2$ );

2) единицами длины (единицами высоты) вертикального столба жидкости, характеризуемой определенной величиной  $\gamma$ ;

3) в долях атмосферного давления (в обычных условиях вакуум не может быть больше того давления, которое развивает в данном месте атмосфера).

Если в данной точке вакуум равен, например, 4 м вод. ст., то это значит, что абсолютное давление в этой точке равно 6 м вод. ст.

В § 1-4, п. 6 было рассмотрено поднятие жидкости в капиллярной трубке  $K$  (см. рис. 1-5).

Не учитывая вовсе молекулярного давления, можем сказать, что в жидкости, находящейся в капиллярной зоне, должен иметь место вакуум. Эпюра изменения величины  $h_{\text{вак}}$  вдоль оси  $M-N$  капиллярной трубки  $K$  (рис. 2-11) выразится треугольником  $ABC$ : эпюра же избыточного давления

$$h_{\text{изб}} = \frac{p}{\gamma} = \frac{p_A - p_a}{\gamma}$$

для линии  $AE$  представится треугольником  $ADE$ .

Поскольку в данном случае вакуум образуется за счет разности давлений плоской и вогнутой поверхностных пленок, то он, вообще говоря, может быть и больше одной атмосферы.

## § 2-8. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЖИДКОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ НАПОР

1. Удельная потенциальная энергия жидкости. Жидкость, находящаяся в покое или движении, обладает определенным запасом механической энергии, т. е. способностью производить работу. Покоящаяся жидкость обладает только так называемой потенциальной энергией.<sup>1</sup>

Покажем на рис. 2-9 горизонтальную координатную плоскость  $OO$ , которую назовем плоскостью сравнения. На плоскости  $OO$  наметим начало оси  $z$ , причем эту ось направим вверх. Ординаты  $z$  различных точек жидкости будем называть отметками; «отметка» точки есть возвышение ее над плоскостью сравнения. Будем рассматривать точку  $n$  жидкости; пьезометрическая высота  $h_{\text{изб}}$  для этой точки, а также ее отметка  $z$  показаны на чертеже.

Выделим у точки  $n$  некоторый объем жидкости весом  $G$  и приключим к этой точке открытую трубку  $\Pi$ . Под действием избыточного давления  $p$  в точке  $n$  объем жидкости весом  $G$  поднимается в трубке  $\Pi$  на высоту  $h_{\text{изб}}$  над плоскостью  $MN$  и на высоту  $H$  над плоскостью сравнения  $OO$  (см. рис. 2-9).

<sup>1</sup> Находясь одновременно в двух векторных силовых полях: а) в поле сил тяжести, направленных вертикально вниз и б) в поле градиентов давления («архимедовых сил»), направленных вертикально вверх.

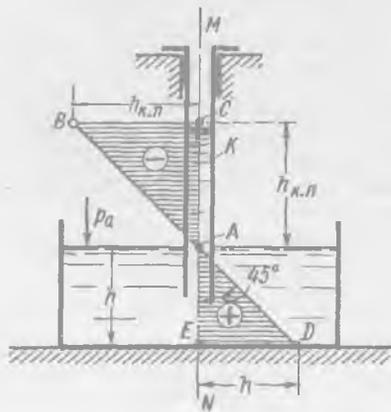


Рис. 2-11. Высота капиллярного поднятия  $h_{\text{к.п}}$  жидкости в трубке  $K$ . Заштрихованы эпюры гидростатического давления: положительного и отрицательного (по отношению к атмосферному давлению)

Из сказанного должно быть ясно, что рассматриваемый объем жидкости, сосредоточенный в точке  $n$ , может произвести работу:

во-первых, за счет своего падения на плоскость  $OO$  с высоты  $z$ ; эта возможная работа будет

$$(\mathcal{E}П)_z = zG; \quad (2-54)$$

во-вторых, за счет своего поднятия под давлением  $p$  на высоту  $h_{изб}$ ; та возможная работа будет

$$(\mathcal{E}П)_p = h_{изб}G. \quad (2-55)$$

Полная работа, которую может произвести объем жидкости весом  $G$ ,

$$(\mathcal{E}П) = (\mathcal{E}П)_z + (\mathcal{E}П)_p = zG + h_{изб}G. \quad (2-56)$$

Величина  $(\mathcal{E}П)$  и называется потенциальной энергией определенно объема жидкости (в данном случае объема весом  $G$ ).

Удельной потенциальной энергией ( $\mathcal{U}\mathcal{E}П$ ) называется энергия, отнесенная к единице веса жидкости,<sup>1</sup> находящейся в точке  $n$ :

$$(\mathcal{U}\mathcal{E}П) = \frac{(\mathcal{E}П)}{G} = z + h_{изб} = H. \quad (2-57)$$

Как видно, внутри удельной потенциальной энергии (полной) в общем случае следует различать два вида потенциальной энергии:

- 1) удельную потенциальную энергию положения  $(\mathcal{U}\mathcal{E}П)_z$ , равную  $z$ ;
- 2) удельную потенциальную энергию давления  $(\mathcal{U}\mathcal{E}П)_p$ , равную

$$h_{изб} = \frac{p}{\gamma}.$$

**2. Потенциальный напор.** В гидравлике слово *напор* применяется в особом смысле; *напором* принято называть удельную энергию жидкости, т. е. меру энергии, принадлежащей единице веса жидкости.

В соответствии с этим потенциальный напор будет представлять собой величину  $H$  [см. формулу (2-57)]; при этом величина  $z$  (отметка точки) может быть названа геометрическим напором; величина же  $h_{изб}$  (пьезометрическая высота) — напором давления. Достаточно величины  $H$ ,  $z$ ,  $h_{изб}$  умножить на единицу веса жидкости, и мы при этом получим соответствующие энергии этой единицы веса жидкости.

Можно сказать, что *потенциальный напор* (удельная потенциальная энергия) *слагается* из двух *напов*: *геометрического напора* (удельной энергии положения) и *напора давления* (удельной энергии давления).

Все поясненные выше напоры имеют размерность длины и выражаются соответствующими отрезками:  $H$ ,  $z$ ,  $h_{изб}$  (рис. 2-9).

Следует запомнить, что с *геометрической точки зрения* потенциальный напор  $H$  в данной точке (например, в точке  $n$ ) по отношению к какой-либо горизонтальной плоскости сравнения  $OO$  представляет собой сумму двух линейных величин: отметки данной точки  $z$  и соответствующей ей пьезометрической высоты  $h_{изб}$ :

$$\boxed{H = z + h_{изб}} \quad \text{или} \quad \boxed{H = z + \frac{p}{\gamma}}. \quad (2-58)$$

<sup>1</sup> Отнесенная именно к единице веса, а не к единице массы или к единице объема жидкости.

Величина  $H$  (представляющая собой превышение над плоскостью сравнения  $OO$  уровня жидкости в открытом пьезометре, подключенном к рассматриваемой точке) характеризуется следующей особенностью: для всех точек покоящейся жидкости величина  $H$  одинакова:

$$H = \text{const} \text{ (по всему объему)}. \quad (2-59)$$

Для доказательства справедливости этого положения напишем:

$$\begin{aligned} H &= z + \frac{p}{\gamma} = z + \frac{p_A - p_a}{\gamma} = z + \frac{(p_0 + \gamma h) - p_a}{\gamma} = \\ &= (z + h) + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma} = T + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_a}{\gamma} = \text{const}, \end{aligned} \quad (2-60)$$

где  $T$  — превышение горизонта жидкости в сосуде над плоскостью  $OO$  ( $T = \text{const}$ ).

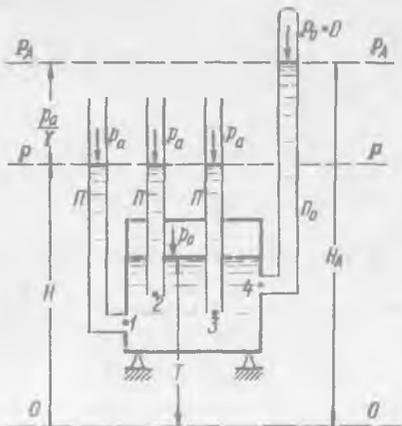


Рис. 2-12. Удельная потенциальная — энергия. Потенциальный напор  $H$  — потенциальный напор или удельная потенциальная энергия жидкости;  $H_A$  — абсолютный потенциальный напор или абсолютная потенциальная удельная энергия жидкости

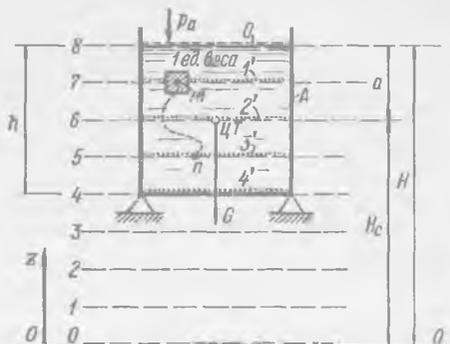


Рис. 2-13. Поле сил тяжести (описываемое потенциальной функцией  $z$ ) и поле архимедовых сил (описываемых потенциальной функцией  $p/\gamma$ ), внутри которых одновременно мысленно перемещается одна единица веса жидкости  
—  $H = z + p/\gamma$  — суммарная потенциальная функция, отнесенная к единице веса жидкости; ... —  $p/\gamma = \text{const}$ ; - - - -  $z = \text{const}$

Возьмем закрытый сосуд (рис. 2-12). Наметим в жидкости ряд точек: 1, 2, 3, 4, ... К каждой такой точке приключим пьезометр  $\Pi$ . Основываясь на (2-59), можем утверждать, что горизонт жидкости во всех пьезометрах должен установиться на одной и той же высоте.

Отсюда ясно, что по горизонталям жидкости в пьезометрах  $\Pi$  можно провести некоторую плоскость  $PP$ , которая должна быть горизонтальной. Эта горизонтальная плоскость  $PP$  называется пьезометрической плоскостью. Как видно, эта плоскость  $PP$  (или, как обычно говорят, пьезометрическая линия  $P-P$ ) возвышается над плоскостью сравнения на величину  $H$ .

В заключение подчеркнем следующее: так как  $H$  постоянна для всех точек покоящейся жидкости, то, следовательно, во всех точках такой жидкости полная удельная потенциальная энергия (УЭП) одинакова:

$$(УЭП) = \text{const} \text{ (по всему объему)}. \quad (2-61)$$

3°. Потенциальный напор, отвечающий абсолютному давлению. Выше при пояснении удельной энергии и напора мы оперировали открытым пьезометром  $\Pi$ . Если бы мы вместо пьезометра  $\Pi$  пользовались закрытым пьезометром  $\Pi_0$ , то вместо потенциального напора  $H$  получили бы абсолютный потенциальный напор  $H_A$  (см. рис. 2-9 и 2-12). Очевидно, напор  $H_A$  должен выражать абсолютную удельную потенциальную энергию, подсчитанную без учета противодействия со стороны атмосферы.

Пьезометрическая линия  $P_A - P_A$ , определяемая напором  $H_A$ , должна возвышаться над пьезометрической линией  $P - P$  на высоту, равную  $p_d/\gamma$ .

4°. Дополнительные замечания о потенциальном напоре. Представим на рис. 2-13 сосуд  $A$ , причем вес всей жидкости, наполняющей этот сосуд, обозначим через  $G$ . Наметим на рисунке дополнительно: плоскость сравнения  $OO$  и эквипотенциали поля сил тяжести, т. е. линии  $z = \text{const}$  (см. линии 0, 1, 2, 3, ..., 8, показанные длинными штриховыми линиями).

Как известно из механики, потенциальная энергия (ЭП) жидкости, заполняющей сосуд и находящейся только в поле сил тяжести, равна (относительно плоскости сравнения  $OO$ )  $GH_c$ , где  $H_c$  — возвышение центра тяжести рассматриваемого объема жидкости над плоскостью сравнения. Наша жидкость, падая на плоскость  $OO$ , должна произвести работу, равную  $GH_c$ . Именно эту работу будем называть собственной потенциальной энергией объема жидкости, заполняющей сосуд и находящейся только в поле сил тяжести; обозначая ее через  $(\text{ЭП})_{\text{соб}}$ , имеем:

$$(\text{ЭП})_{\text{соб}} = GH_c \quad (\text{А})$$

Выше мы ввели понятие потенциального напора  $H$  и определили эту величину как меру энергии, принадлежащей единице веса жидкости. Следует подчеркнуть, что исходя из понятия потенциального напора недопустимо подсчитывать собственную энергию покоящейся жидкости. Действительно, если бы мы попытались это сделать, то для величины  $(\text{ЭП})_{\text{соб}}$  получили бы неправильное выражение:

$$(\text{ЭП})_{\text{соб}} = GH (\neq GH_c) \quad (\text{Б})$$

Вопрос о потенциальном напоре  $H$  (о величине удельной потенциальной энергии) надлежит понимать (в связи с дальнейшим рассмотрением вопросов гидродинамики; см., например, § 3-15 и § 9-4) следующим образом.<sup>1</sup>

Рассматриваем жидкость, находящуюся в сосуде  $A$ , как некоторую (в данном случае) неподвижную среду. Намечаем в этой среде одну единицу веса жидкости. При этом считаем, что данная единица веса (рис. 2-13) заключена как бы в невесомый контейнер, образованный «стальными» невесомыми стенками, изолирующими эту единицу веса от окружающей жидкости. Далее представляем себе, что данная единица веса жидкости перемещается внутри упомянутой неподвижной среды (например, от точки  $m$  до точки  $n$ ). При этом потенциальный напор  $H$  (удельную потенциальную энергию) следует понимать как меру энергии, принадлежащей указанной единице веса жидкости, перемещающейся в окружающей ее неподвижной жидкой среде.

Покажем, что данная движущаяся единица веса жидкости действительно обладает (при определенных поставленных условиях) потенциальной энергией, равной  $(H \times \times 1 \text{ ед. веса})$ . С этой целью прежде всего обратим внимание на следующее существенное обстоятельство.

Неподвижная среда тяжелой жидкости, находящейся в сосуде  $A$ , обуславливает существование скалярного поля давлений  $(p/\gamma)$ , причем величина  $\frac{p}{\gamma} = f(x, y)$  является потенциальной функцией векторного поля градиентов давления<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Подробнее см. Р. Р. Чугаев. Физический смысл отдельных слагаемых уравнения Бернулли для установившегося и неустановившегося движений реальной жидкости. — Сборник научно-методических статей по гидравлике. Вып. 4 — М.: Высшая школа, 1981.

<sup>2</sup> Отнесенные к единице веса жидкости.

$$J_p = - \frac{\partial (p/\gamma)}{\partial z}$$

Линии равного потенциала  $\frac{p}{\gamma} = \text{const}$  показаны на рис. 2-13 пунктиром: первая эквипотенциаль  $O$  совпадает<sup>1</sup> с поверхностью жидкости, ее наименование  $p/\gamma = 0$ ; последняя (самая нижняя) эквипотенциаль  $4'$  должна совпадать с дном сосуда, ее наименование будет  $\frac{p}{\gamma} = h$ , где  $h$  — глубина воды в сосуде.

Имея в виду сказанное, заключаем, что намеченная нами единица веса жидкости одновременно перемещается в двух разных потенциальных полях:

- а) в векторном поле сил тяжести, описываемом потенциальной функцией  $z$ ;  
 б) в поле векторов  $J_p$ , описываемом потенциальной функцией  $p/\gamma$ .

Как видно, при указанной постановке вопроса сама тяжелая жидкость, находящаяся в сосуде  $A$ , интересует нас только как «материал», создающий неподвижное потенциальное поле, описываемое функцией  $p/\gamma$  (внутри которого перемещается выделенная единица веса жидкости).

Легко видеть, что работа данной единицы веса при перемещении ее от точки  $m$  до точки  $n$  (см. рис. 2-13), равняется:

- 1) за счет движения ее только в потенциальном поле сил тяжести величине

$$(z_7 - z_5) \times 1 \text{ ед. веса};$$

- 2) за счет движения ее только в потенциальном поле градиентов давления величине

$$(z_5 - z_7) \times 1 \text{ ед. веса},$$

где  $z_5$  и  $z_7$  — возвышение над плоскостью сравнения соответственно точек  $n$  и  $m$ .

Как видно, полная работа данной единицы веса, перемещающейся одновременно в двух потенциальных полях,

$$(z_7 - z_5) \times 1,0 + (z_5 - z_7) \times 1,0 = 0,$$

а следовательно, полная потенциальная энергия единицы веса жидкости, находящейся в любой точке, расположенной внутри сосуда, одинакова и равна величине  $H$  (поскольку этой величиной энергии, как видно из рис. 2-13, обладают единицы веса жидкости, расположенные, например, на свободной поверхности жидкости).

Именно указанным образом можно более точно разъяснить вопрос о потенциальной энергии некоторого объема покоящейся жидкости, который одновременно находится в двух различных векторных неподвижных силовых потенциальных полях.

Данный вопрос можно разъяснить еще и следующим образом. Возьмем кубический метр жидкости, заключенный в практически невесомый прочный (например, стальной) контейнер, имеющий кубическую форму. Далее представим себе, что этот контейнер (заполненный тяжелой жидкостью) перемещается в воздухе (т. е. только в поле сил тяжести). Очевидно, работа, выполненная этим контейнером, определится разностью наименований соответствующих линий равного потенциала только поля сил тяжести («начальной» и «конечной» эквипотенциалей). После этого удалим из нашего контейнера жидкость и тем самым сделаем его невесомым. Этот пустой невесомый контейнер будем мысленно перемещать не в воздухе, а в окружающей жидкости, т. е. только в векторном поле градиентов  $J_p$  давления. Очевидно, за счет давления жидкости на стенки пустого контейнера сверху и снизу (т. е. за счет архимедовой силы, имеющей свою потенциальную функцию в виде  $p/\gamma$ ) мы получим ту же работу, что и выше, когда мы мысленно перемещали данный контейнер в воздухе (в поле сил тяжести). Однако две эти работы

<sup>1</sup> Атмосферное давление не учитываем.

(работа только в поле сил тяжести и работа только в поле сил давления — архимедовых сил)<sup>1</sup> будут иметь разные знаки, причем сумма этих работ будет равна нулю.

Как видно, рассматривая вопрос о потенциальной энергии одной единицы веса жидкости, находящейся в сосуде  $A$ , мы должны представлять себе воображаемое перемещение этой единицы веса в окружающей ее жидкости, при этом мы должны учитывать, что данная единица веса жидкости одновременно перемещается в двух разных силовых потенциальных полях:

1) в поле сил тяжести, описываемом приведенной потенциальной функцией, равной  $z$  и

2) в поле архимедовой силы, описываемой приведенной потенциальной функцией, равной  $p/\gamma$ .

Очевидно, что полная потенциальная энергия рассматриваемой единицы веса, одновременно находящейся в двух различных силовых потенциальных полях, должна равняться (относительно произвольно намеченной плоскости сравнения  $OO$ ) величине  $z + \frac{p}{\gamma} = H$ .

Таким образом величина  $H$  не есть удельная потенциальная энергия жидкости (находящейся, например, в некотором сосуде; см. рис. 2-13), подсчитанная относительно принятой плоскости сравнения  $OO$  в предположении, что на жидкость действуют только силы тяжести. Величина  $H$  представляет собой отнесенную к единице веса жидкости потенциальную функцию, описывающую суммарное векторное силовое поле, образованное силами тяжести и еще «архимедовыми силами» (точнее говоря, силами, выражаемыми градиентами давления  $J_p$ ; см. выше).

## § 2-9. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОКОЙ ЖИДКОСТИ)

Рассмотрим случай, когда на жидкость, помимо объемных сил тяжести, действует еще другая система объемных сил, например, система центробежных сил инерции.

Возьмем круглоцилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, причем будем считать, что этот сосуд вращается вокруг своей вертикальной оси равномерно, т. е. с постоянной угловой скоростью (рис. 2-14). Благодаря силам трения стенки вращающегося сосуда будут вначале увлекать за собой жидкость, а по истечении некоторого времени вся жидкость начнет вращаться вместе с сосудом с той же угловой скоростью  $\Omega$ , находясь по отношению к стенкам сосуда в покое. Силы трения при этом внутри жидкости, а также между жидкостью, стенками сосуда и его дном, будут отсутствовать.

Если оси координат, расположенные, как показано на чертеже, будем считать скрепленными с вращающимся сосудом, то по отношению к таким вращающимся осям координат жидкость также будет находиться в покое. Поэтому для исследования вращающейся жидкости при указанных подвижных осях координат могут быть применены известные уравнения Эйлера (2-14).

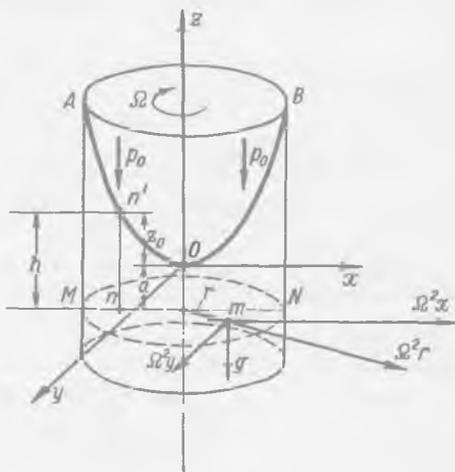


Рис. 2-14. Цилиндрический сосуд, вращающийся относительно вертикальной оси  $Oz$

$AOB$  — свободная поверхность жидкости

<sup>1</sup> Известно, что «архимедову силу» при определенной постановке вопроса можно рассматривать как силу объемную.

В эти уравнения входит объемная сила  $\phi$ , действующая на единицу массы жидкости. В данном случае сила  $\phi$  будет складываться из двух сил: силы тяжести и центробежной силы.

С тем чтобы найти проекцию центробежной силы на оси координат, наметим внутри жидкости точку  $m$  и выделим у нее элементарную массу жидкости  $\delta M$ . Масса  $\delta M$  будет вращаться вокруг оси сосуда, двигаясь по окружности, имеющей радиус  $r$  и лежащей в плоскости, нормальной к оси сосуда. Центробежная сила, действующая на данную массу, будет

$$I' = \frac{v^2 \delta M}{r} = \frac{\delta M}{r} (\Omega r)^2 = \Omega^2 r \delta M, \quad (2-62)$$

где  $v$  — скорость движения массы  $\delta M$  по окружности радиуса  $r$ .

Центробежная сила, отнесенная к единице массы жидкости, сосредоточенной в точке  $m$ ,

$$I = \frac{I'}{\delta M} = \Omega^2 r. \quad (2-63)$$

Эта сила, так же как и сила  $I'$ , направлена по радиусу от оси сосуда наружу. Проекция силы  $I$  (отнесенной к единице массы) на оси координат

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \Omega^2 r \cos(r, x) = \Omega^2 r \frac{x}{r} = \Omega^2 x; \\ I_y &= \Omega^2 r \cos(r, y) = \Omega^2 r \frac{y}{r} = \Omega^2 y; \\ I_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-64)$$

Проекция объемной силы тяжести, отнесенной к единице массы, выражаются зависимостью (2-28). Складывая объемные силы тяжести и объемные центробежные силы, отнесенные к единице массы, получаем

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= 0 + \Omega^2 x = \Omega^2 x; \\ \phi_y &= 0 + \Omega^2 y = \Omega^2 y; \\ \phi_z &= -g + 0 = -g. \end{aligned} \right\} \quad (2-65)$$

Подставляя (2-65) в (2-17), найдем<sup>1</sup>

$$dp_A = \rho(\Omega^2 x dx + \Omega^2 y dy - g dz), \quad (2-66)$$

что после интегрирования дает

$$p_A = \rho \left( \frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{\Omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C = \frac{\rho \Omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z + C. \quad (2-67)$$

Постоянную интегрирования  $C$  устанавливаем, написав (2-67) применительно к точке, находящейся в начале координат, для которой  $x = y = z = 0$ ;  $p = p_0$ . Как видно,

$$C = p_0, \quad (2-68)$$

причем (2-67) переписывается в виде:

$$p_A = p_0 + \frac{\rho \Omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z. \quad (2-69)$$

Это последнее уравнение и выражает закон распределения давления в рассматриваемой жидкости. Пользуясь таким уравнением, можно найти поверхности равного давления.

Действительно, уравнение поверхности, во всех точках которой давление  $p_A = p_1 = \text{const}$ , запишется в виде

$$\frac{\rho \Omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho g z = p_1 - p_0. \quad (2-70)$$

<sup>1</sup> В уравнении (2-17) под  $p$  подразумевалось абсолютное давление  $p_A$  в точке.

Уравнение (2-70) выражает поверхность, являющуюся параболоидом вращения (с вертикальной осью).

Свободная поверхность жидкости, характеризуемая постоянным давлением  $p_1 = p_0^1$ , представляет собой также параболоид вращения; уравнение ее будет:

$$\frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \gamma z = 0. \quad (2-71)$$

Если учесть, что  $x^2 + y^2 = r^2$ , то, решив (2-71) относительно  $z$ , получим следующее уравнение, по которому легко построить параболу  $AOB$ , дающую свободную поверхность:

$$z_0 = \frac{\Omega^2}{2g} r^2, \quad (2-72)$$

где  $z_0$  — ордината кривой  $AOB$

Распределение давления в горизонтальной плоскости  $MN$ , лежащей ниже начала координат на величину  $a$ , можно найти, пользуясь (2-69):

$$p_A = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \gamma a = p_0 + \frac{\rho\Omega^2}{2}r^2 + \gamma a = p_0 + \gamma \left( \frac{\Omega^2}{2g}r^2 + a \right) \quad (2-73)$$

Учитывая (2-72), получаем

$$p_A = p_0 + \gamma(a + z_0) = p_0 + \gamma h, \quad (2-74)$$

где  $h = a + z_0$  показано на рис. 2-14.

Таким образом, давление в жидкости, находящейся внутри равномерно вращающегося сосуда, выражается зависимостью того же вида, что и для случая тяжелой покоящейся жидкости [см. (2-39)]; под величиной  $h$  здесь надо понимать только заглубление рассматриваемой точки под криволинейной свободной поверхностью.

## § 2-10. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПЛОСКУЮ ФИГУРУ ЛЮБОЙ ФОРМЫ

Представим на рис. 2-15,а открытый сосуд, наполненный жидкостью и имеющий плоскую наклонную стенку  $OM$ . В плоскости этой стенки наметим оси координат  $Oz$  и  $Ox$ . Ось  $Ox$  направим перпендикулярно к плоскости чертежа.

На стенке сосуда  $OM$  наметим некоторую плоскую фигуру любого очертания, имеющую площадь  $S$ . Эта фигура на рис. 2-15,а будет проектироваться в линию (показанную на чертеже жирно). Представим еще на рис. 2-15,б стенку сосуда  $OM$ , повернутую относительно оси  $Oz$  на  $90^\circ$  (совмещенную с плоскостью чертежа). Ясно, что на рис. 2-15,б намеченная плоская фигура будет изображаться без искажения.

В соответствии с первым свойством гидростатического давления (см. § 2-2) можем утверждать, что во всех точках площади  $S$  давление жидкости будет направлено нормально к стенке. Отсюда заключаем, что сила абсолютного гидростатического давления  $P_A$ , действующая на произвольную плоскую фигуру площадью  $S$ , будет также направлена по отношению к стенке нормально (как это показано на рис. 2-15,а).

Поставим перед собой цель найти:

- силу  $P_A$  абсолютного гидростатического давления;
- положение линии действия силы  $P_A$ .

<sup>1</sup> Учитывая поверхностное давление  $p_0$  со стороны воздушной среды на поверхность жидкости, мы при этом пренебрегали выше силами трения, возникающими между жидкостью и воздушной средой.

1. Сила  $P_A$ . Наметим на рассматриваемой фигуре произвольную точку  $m$ , заглубленную под уровнем жидкости на  $h$  и имеющую координату  $z$ ; ясно, что

$$h = z \sin \theta, \quad (2-75)$$

где  $\theta$  — угол наклона боковой стенки сосуда к горизонту.

У точки  $m$  выделим элементарную площадку  $dS$ . Сила абсолютного гидростатического давления, действующая на эту площадку,

$$dP_A = p_A dS, \quad (2-76)$$

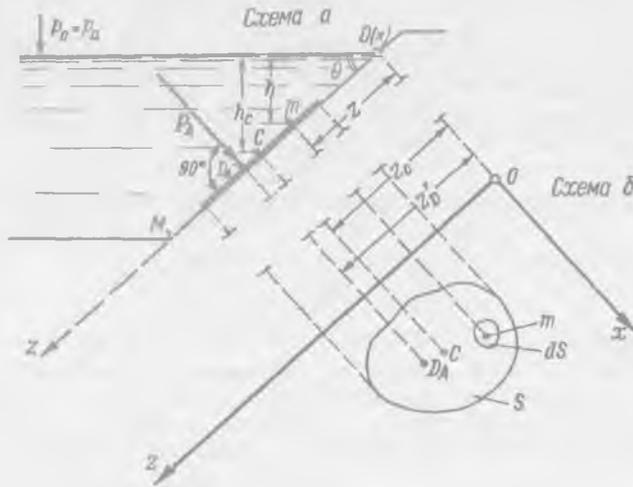


Рис. 2-15. Давление жидкости на плоскую наклонную фигуру площадью  $S$

или, согласно (2-40),

$$dP_A = (p_a + \gamma h) dS = p_a dS + \gamma h dS = p_a dS + \gamma z \sin \theta dS. \quad (2-77)$$

Интегрируя это выражение по всей площади  $S$ , получаем:

$$P_A = p_a \int_S dS + \gamma \sin \theta \int_S z dS. \quad (2-78)$$

Ясно, что:

$$\int_S dS = S; \quad \int_S z dS = (St)_{Ox} = z_C S, \quad (2-79)$$

где  $(St)_{Ox}$  — статический момент плоской фигуры относительно оси  $Ox$ ;  $z_C$  — координата центра тяжести (точки  $C$ ) данной плоской фигуры.

Подставляя (2-79) в (2-78), получаем:

$$P_A = p_a S + \gamma S z_C \sin \theta. \quad (2-80)$$

Так как

$$z_C \sin \theta = h_C,$$

где  $h_C$  — заглубление центра тяжести  $C$  плоской фигуры под горизонтом жидкости, то

$$P_A = p_a S + \gamma h_C S \quad (2-81)$$

$$P_A = (p_a + \gamma h_C) S = S(p_A)_C, \quad (2-82)$$

где  $(p_A)_C$  — абсолютное гидростатическое давление в точке, являющейся центром тяжести рассматриваемой плоской фигуры.

Формулу (2-81) можно представить еще в виде:

$$P_A = P_a + P, \quad (2-83)$$

здесь  $P_a$  — сила, обусловленная атмосферным (поверхностным) давлением, передающимся через жидкость на плоскую фигуру:

$$P_a = p_a S; \quad (2-84)$$

$P$  — сила избыточного в данном случае весового давления:

$$P = \gamma h_C S = p_C S, \quad (2-85)$$

где  $p_C$  — избыточное (весовое) давление в центре тяжести фигуры.

Как видно, сила гидростатического давления (абсолютного или избыточного), действующая на плоскую фигуру любой формы, равна площади этой фигуры, умноженной на соответствующее гидростатическое давление  $[(p_A)_C$  или  $p_C$ ] в центре тяжести этой фигуры.

Точка  $D_A$  пересечения линии действия силы  $P_A$  с плоскостью, в которой лежит рассматриваемая фигура, называется центром давления силы  $P_A$ . Найдем положение точки  $D_A$ ; этим и определится линия действия силы  $P_A$ .

2. Положение центра давления. Представим на рис. 2-16 деталь предыдущего чертежа. Центр давления силы  $P_a$  будет совпадать с центром тяжести фигуры, так как поверхностное давление  $p_0 = p_a$ , передаваясь через жидкость, равномерно распределяется по рассматриваемой площади. Что касается избыточного давления, то оно распределяется неравномерно по площади фигуры: чем глубже расположена точка фигуры, тем большее давление она испытывает; поэтому центр давления силы  $P$  будет лежать ниже центра тяжести фигуры (см. точку  $D$ ).

Искомая сила  $P_A$  является геометрической суммой сил  $P_a$  и  $P$ . Точка  $D_A$  будет лежать между точками  $C$  и  $D$ ; эта точка  $D_A$  найдется в результате геометрического сложения сил  $P_a$  и  $P$ . Таким образом, вопрос сводится к отысканию точки  $D$ , определяемой координатой  $z_D$ . Зная  $z_D$ , мы далее, как указано выше, найдем и величину  $z'_D$ , определяющую положение точки  $D_A$ .

Расчетную зависимость для величины  $z_D$  находят, исходя из следующего условия: сумма моментов составляющих элементарных сил  $p dS$  относительно оси  $Ox$  равна моменту равнодействующей силы  $P$  относительно той же оси  $Ox$ .

Имея в виду это условие, можем написать:

$$\int_S (p dS) z = P z_D, \quad (2-86)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\int_S (\gamma h dS) z = (\gamma h_C S) z_D$$

или

$$\int_S (\gamma \sin \theta z dS) z = (\gamma \sin \theta z_C S) z_D,$$

откуда

$$z_D = \frac{\int_S z^2 dS}{S z_C} = \frac{I_{Ox}}{(St)_{Ox}}, \quad (2-87)$$



плоскости  $AB$ . Поэтому в данном случае  $e = 0$  и центры давления  $D_A$  и  $D$  должны совпадать с центром тяжести  $C$ . Величина силы избыточного давления  $P$ , действующего на горизонтальное дно сосуда, показанного на рис 2-17, будет выражаться эпюрой  $ANMB$  (весом жидкости в объеме  $ANMB$ ).

Представим себе, что рассматриваемый сосуд поставлен на весы. Ясно, что на весы будет передаваться вес  $G$  жидкости, находящейся в сосуде, выражаемый площадью эпюры  $A-1-2-3-4-5-6-B$  (весом стенок сосуда пренебрегаем). Вместе с тем, как это было указано выше, на дно сосуда  $AB$  действует сила  $P$  давления жидкости, выражаемая площадью  $ANMB$ , причем эта площадь может значительно отличаться по величине от площади  $A-1-2-3-4-5-6-B$ .

Как видно, надо различать две разные силы: а) силу  $P$  давления жидкости на дно, б) силу  $G$  давления дна на весы, причем в общем случае

$$P \neq G.$$

Такое положение объясняется следующим.

Силы  $P_{1-2}$  и  $P_{5-6}$  (рис. 2-17) вертикального давления жидкости на стенки  $1-2$  и  $5-6$  выражаются эпюрами  $1-2-3-N$  и  $4-5-6-M$ . Эти силы передаются через стенки сосуда на дно  $AB$  сосуда:

$$F_A = P_{1-2}; F_B = P_{5-6};$$

следовательно,

$$G = P - F_A - F_B.$$

## § 2-11. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ПЛОСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ

Возьмем плоскую вертикальную фигуру  $OA$  (рис. 2-18,а), имеющую горизонтальное основание; ширину этого прямоугольника обозначим через  $b$  (рис. 2-18,б). Будем рассматривать только избыточное давление на эту фигуру; поверхностное давление, которое часто равно атмосферному, учитывать не будем. Заметим, что при статическом расчете стенки  $OA$  нам приходится учитывать только избыточное давление, так как атмосферное давление, которое передается через жидкость и действует на стенку слева, полностью уравнивается атмосферным давлением, действующим непосредственно на стенку справа.

Наметим на поверхности фигуры  $OA$  точку  $m$ . Давление в этой точке будет

$$p = \gamma h. \quad (2-93)$$

Представим себе, что точка  $m$  перемещается от  $O$  до  $A$  по прямой линии; при этом, как видно из (2-93), гидростатическое давление будет изменяться по линейному закону. Для точки  $O$  при  $h = 0$

$$p = 0; \quad (2-94)$$

для точки  $A$

$$p = \gamma h_1, \quad (2-95)$$

где  $h_1$  — «глубина воды» (или любой жидкости) перед плоской фигурой (заглубление точки  $A$  под свободной поверхностью жидкости).

Учитывая приведенные соотношения, отложим на рис. 2-18,а перпендикулярно поверхности  $OA$  отрезок  $\gamma h_1$ , причем получим точку  $B$ . Соединим теперь точку  $O$  и точку  $B$  прямой линией. В результате получим треугольник  $OAB$ . Этот треугольник называется эпюрой гидростатического давления.

Площадь треугольника  $OAB$ , умноженная на ширину  $b$ , дает нам силу  $P$  гидростатического давления, действующего на прямоугольную фигуру:

$$P = \Omega b = \frac{1}{2} h_1^2 \gamma b. \quad (2-96)$$

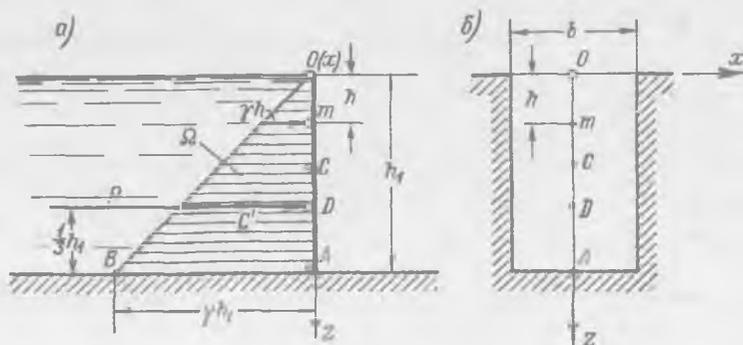


Рис. 2-18. Одностороннее гидростатическое давление на вертикальную плоскую фигуру прямоугольной формы  
 $D$  – центр давления;  $C$  – центр тяжести плоской фигуры;  $C'$  – центр тяжести эпюры давления

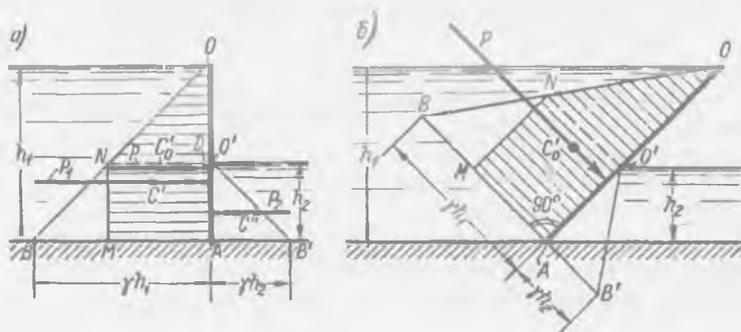


Рис. 2-19. Эпюры давления на плоские прямоугольные фигуры:  $a$  – вертикальная фигура;  $b$  – наклонная фигура

Сила  $P$  должна быть перпендикулярна к линии  $OA$  и проходить через центр тяжести  $C'$  эпюры давления. Отсюда заключаем, что центр давления силы  $P$  (точка  $D$ ) должен располагаться на расстоянии  $\frac{1}{3} h_1$  от дна прямоугольного лотка, в котором установлен рассматриваемый вертикальный прямоугольный щит.

Иногда при построении эпюры давления по перпендикуляру от точки  $A$  откладывают не  $\gamma h_1$ , как это мы делали выше, а  $h_1$ . При таком построении эпюры давления вместо формулы (2-96) будем иметь:

$$P = \Omega b \gamma = \frac{1}{2} h_1^2 \gamma b. \quad (2-97)$$

Надо помнить, что эпюра гидростатического давления характеризуется следующими двумя свойствами:

1) каждая ордината эпюры давления, измеренная перпендикулярно к щиту  $OA$ , выражает заглубление соответствующей точки щита, а следовательно, и гидростатическое давление в этой точке;

2) площадь эпюры давления выражает силу  $P$  гидростатического давления (суммарное гидростатическое давление).

При наличии воды с двух сторон рассматриваемого щита  $OA$  (рис. 2-19, а) приходится строить отдельно две эпюры давления (два треугольника гидростатического давления): для жидкости, находящейся слева от щита (см. треугольник  $OAB$ ), и для жидкости, находящейся справа от щита (см. треугольник  $O'AB'$ ). После этого два полученных треугольника складываем, как показано на чертеже; в результате получаем эпюру давления в виде трапеции  $OAMN$ . Очевидно, площадь этой трапеции будет выражать искомую силу  $P$ ; линия действия силы  $P$  должна проходить через центр тяжести  $C_0$  трапеции перпендикулярно к щиту  $OA$ .

В случае наклонного прямоугольного щита окончательная эпюра давления, учитывающая давление воды слева и справа на щит, будет иметь вид трапеции  $OAMN$ , показанной на рис. 2-19, б.

## § 2-12. СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

В практике приходится определять силу гидростатического давления не только на плоские поверхности, но и на поверхности криволинейные любого вида. Ниже рассмотрим только простейший частный случай криволинейной поверхности — цилиндрическую поверхность, которая встречается наиболее часто.<sup>1</sup>

Будем рассматривать только избыточное давление, вовсе не интересуясь поверхностным давлением.

1-й случай цилиндрической поверхности. Представим на рис. 2-20 цилиндрическую поверхность  $ABC$ . Эта поверхность расположена перпендикулярно к плоскости чертежа, и потому она проектируется в одну линию  $ABC$  (кривая  $ABC$  есть направляющая рассматриваемой цилиндрической поверхности). Обозначим длину образующей цилиндрической поверхности, перпендикулярной к плоскости чертежа, через  $b$  ( $b = \text{const}$ ). Наметим вертикальную плоскость  $CC'$  и оси координат  $x$  и  $z$ . Обозначим через  $P_x$  и  $P_z$  горизонтальную и вертикальную составляющие силы  $P$  гидростатического давления, действующего со стороны жидкости на цилиндрическую поверхность.

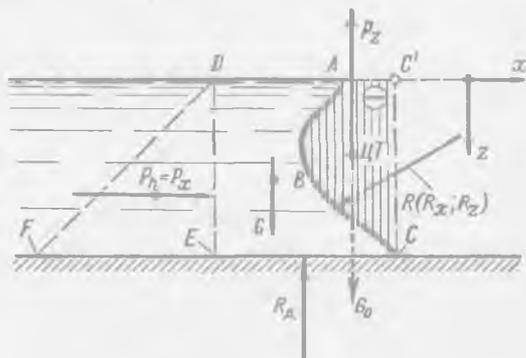


Рис. 2-20. Давление на цилиндрическую поверхность  $ABC$  (вертикаль  $C - C'$  лежит вне жидкости)

Обратимся вначале к отысканию составляющих  $P_x$  и  $P_z$  искомой силы  $P$ . С этой целью проведем вертикальную плоскость  $DE$ . Плоскость  $DE$  выделит

<sup>1</sup> Существующие методы расчета, относящиеся к общему случаю криволинейной поверхности, излагаются в специальной литературе [2-2, с. 56–64].

объем покоящейся жидкости  $ABCED$ , равновесие которого далее рассматриваем. На этот объем действуют следующие силы:

1) сила  $P_h$ , действующая на вертикальную грань  $DE$  со стороны жидкости, расположенной слева от этой грани;

2) сила  $R_d$  — со стороны дна  $EC$  (реакция дна; см. конец § 2-10):

$$R_d = [\text{площадь } (C'CED)] b\gamma; \quad (2-98)$$

3) реакция  $R$  — со стороны цилиндрической поверхности; горизонтальную и вертикальную составляющие этой реакции обозначим соответственно  $R_x$  и  $R_z$ ; значения и направления этих сил (в отличие от других) нам неизвестны;

4) собственный вес  $G$  рассматриваемого объема жидкости:

$$G = [\text{площадь } (ABCED)] b\gamma. \quad (2-99)$$

Проектируя все силы, действующие на покоящийся объем  $ABCED$ , соответственно на оси  $x$  и  $z$ , получаем следующие уравнения равновесия [не зная направления  $R_x$  и  $R_z$ , вводим их в уравнения (2-100) со знаком плюс]:

$$P_h + R_x = 0; \quad G + R_z - R_d = 0, \quad (2-100)$$

откуда

$$R_x = -P_h; \quad R_z = R_d - G. \quad (2-101)$$

Так как силы  $P_x$  и  $P_z$  направлены противоположно силам  $R_x$  и  $R_z$ , то можем написать:

$$P_x = -R_x \text{ и } P_z = -R_z, \quad (2-102)$$

при этом вместо (2-101) имеем:

$$\boxed{P_x = P_h}; \quad (2-103)$$

$$P_z = -(R_d - G). \quad (2-104)$$

Далее преобразуем уравнение (2-104); подставляя в него (2-98) и (2-99), получаем:

$$P_z = -[\text{площадь } (C'CED) - \text{площадь } (ABCED)] b\gamma \quad (2-105)$$

или

$$\boxed{P_z = -[\text{площадь } (ABCC')] b\gamma}. \quad (2-106)$$

Рассмотрев (2-103) и (2-106), можно заключить следующее.

1. Горизонтальная составляющая  $P_x$  искомой силы равна силе давления жидкости на плоскую вертикальную прямоугольную фигуру  $DE$ , представляющую собой проекцию рассматриваемой цилиндрической поверхности на вертикальную плоскость. В связи с этим сила  $P_x = P_h$  может быть выражена, как и в случае плоских фигур, треугольником гидростатического давления  $DEF$ .

2. Вертикальная составляющая  $P_z$  искомой силы равна взятому со знаком минус весу воображаемого жидкого тела площадью сечения  $ABCC'$ . Это воображаемое жидкое тело называется телом давления (см. площадь, покрытую на чертеже штриховкой).

Обозначим вес тела давления через  $G_0$ . Тогда вместо (2-106) можно написать

$$\boxed{P_z = -G_0}. \quad (2-107)$$

Найдя таким образом составляющие  $P_x$  и  $P_z$ , путем геометрического сложения их определяем искомую силу  $P$  давления жидкости на рассматриваемую цилиндрическую поверхность.

Как видно, 1-й случай цилиндрической поверхности характеризуется тем, что вертикаль  $CC'$  лежит вне жидкости.

2-й случай цилиндрической поверхности (вертикаль  $CC'$  лежит внутри жидкости). Представим на рис. 2-21 случай, когда жидкость находится над цилиндрической поверхностью. Ограничимся здесь отысканием только составля-

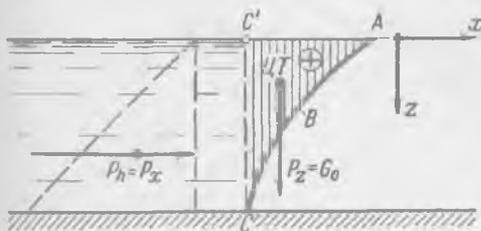


Рис. 2-21. Эпюры давления на цилиндрическую поверхность  $ABC$  (вертикаль  $C - C'$  лежит внутри жидкости)

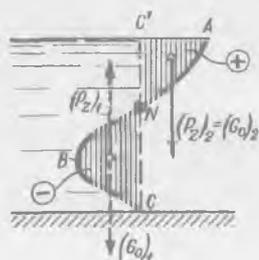


Рис. 2-22. Эпюра вертикального давления (тела давления) на цилиндрическую поверхность  $ANBC$  (вертикаль  $C - C'$  частично лежит вне жидкости, частично — внутри жидкости)

ющих  $P_x$  и  $P_z$ . Рассуждая, как и выше, можно показать, что горизонтальная составляющая  $P_x$  выражается точно так же, как и в предыдущем случае. Что же касается составляющей  $P_z$ , то оказывается, что для цилиндрической поверхности, показанной на рис. 2-21,

$$P_z = + G_0. \quad (2-108)$$

Как видно, в данном случае «тело давления» (см. заштрихованную площадь на рис. 2-21) лежит в области действительной, а не воображаемой жидкости. Имея это в виду, такое тело давления называют положительным; тело же давления в первом случае цилиндрической поверхности называют отрицательным.

3-й случай цилиндрической поверхности. Представим на рис. 2-22 такую цилиндрическую поверхность  $ABC$ , которая пересекается в некоторой «узловой точке»  $N$  с вертикалью  $CC'$ , проведенной через нижнюю точку  $C$  цилиндрической поверхности. Как видно, в данном случае одновременно получаем и положительное и отрицательное тела давления. Складывая силы  $(P_z)_1$ ,  $(P_z)_2$  и  $P_x$  (определенные, как указано выше), находим искомую силу  $P$ .

4-й случай цилиндрической поверхности. Плоский прямоугольник, проектирующийся в линию  $ABC$  (рис. 2-23), является частным случаем цилиндрической поверхности. Поэтому при отыскании  $P$  для этого прямоугольника можно поступить так же, как во втором случае цилиндрической поверхности. В результате найдем составляющие  $P_x$  и  $P_z$ . Складывая геометрически эти две силы, получим силу, выражаемую эпюрой  $OA'B$ , представленной на рис. 2-19, б.

**Заключительное замечание.** При построении поперечного сечения тела давления, т. е. эпюры, выражающей вертикальную составляющую  $P_z$ , в общем случае можно поступать следующим образом.

Имеем цилиндрическую поверхность  $ABC$ , для которой следует построить тело давления (рис. 2-24); при этом прежде всего фиксируем крайние точки  $A$  и  $C$  этой поверхности; далее от этих точек проводим вверх вертикали до горизонта жидкости или его продолжения; наконец, намечаем контур тела давления, причем руководствуемся правилом:

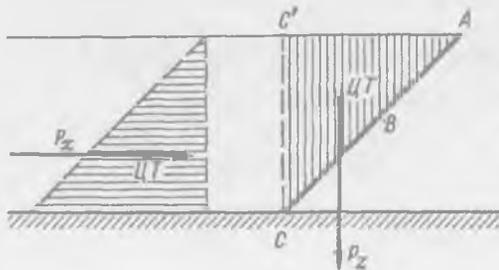


Рис. 2-23. Эпюры составляющих сил давления на плоскую прямоугольную фигуру

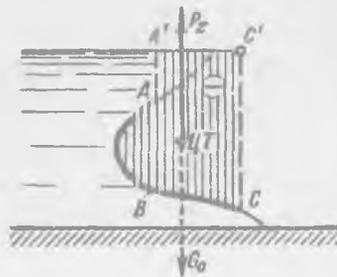


Рис. 2-24. Построение поперечного сечения тела давления для цилиндрической поверхности  $ABC$

поперечное сечение тела давления (отрицательного или положительного) представляет собой фигуру, заключенную между указанными вертикалями, самой цилиндрической поверхностью  $ABC$  и горизонтом жидкости (или его продолжением). Если рассматриваемая цилиндрическая поверхность со стороны тела давления не смачивается жидкостью, то имеем отрицательное тело давления (рис. 2-24); в противном случае — положительное тело давления.

Обратим еще внимание на то, что сила гидростатического давления  $P$  для криволинейной (цилиндрической) поверхности, в отличие от силы  $P$ , действующей на плоскую поверхность, не может быть представлена площадью только одной эпюры давления; выше мы представляли эту силу (в общем случае цилиндрической поверхности) двумя эпюрами — для  $P_x$  и  $P_z$ .

### § 2-13. КРУГЛАЯ ТРУБА, ПОДВЕРЖЕННАЯ ВНУТРЕННЕМУ ГИДРОСТАТИЧЕСКОМУ ДАВЛЕНИЮ

Будем рассматривать давление на стенки трубы со стороны жидкости, находящейся внутри трубы (внутреннее гидростатическое давление).

1°. Сила гидростатического давления на стенки прямолинейной трубы. Представим на рис. 2-25 поперечное сечение горизонтальной трубы, заполненной покоящейся жидкостью. Обозначим через  $p$  гидростатическое давление в центре трубы  $O$ . Ясно, что давление в самой верхней точке трубы будет

$p - \frac{D}{2}\gamma$ , где  $D$  — диаметр трубы; давление же в самой нижней точке трубы

будет равно  $p + \frac{D}{2}\gamma$ . Часто величиной  $\frac{D}{2}\gamma$  сравнительно с величиной  $p$  можно пренебречь и считать, что давление жидкости, находящейся в трубе, одинаково по всему ее поперечному сечению ( $p = \text{const}$ ). Этот случай и будем рассматривать

Под действием внутреннего давления  $p$  труба может разорваться, например, по плоскости  $AB$ . С тем чтобы рассчитать толщину  $e$  стенок трубы, обеспечивающую достаточную прочность трубы, нам необходимо знать силу  $P_x$  гидростатического давления, действующего на цилиндрическую поверхность  $abc$  или на цилиндрическую поверхность  $adc$ . Можно показать, что искомая сила  $P_x$  равна давлению на плоскую прямоугольную фигуру  $ac$ , являющуюся вертикальной проекцией цилиндрической поверхности  $abc$  (или  $adc$ ).



Рис. 2-25. Внутреннее гидростатическое давление  $P_x$ , разрывающее трубу по плоскости  $AB$

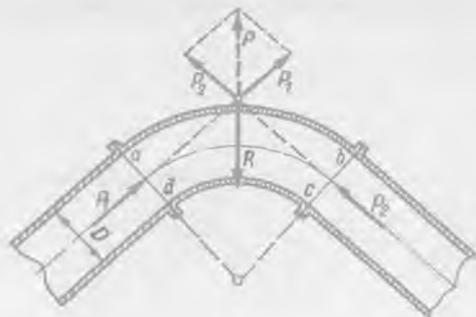


Рис. 2-26. Сила гидростатического давления  $P$ , действующего на колено трубы

Поскольку указанная прямоугольная фигура  $ac$  представляет собой диаметральный сечение трубы, то искомая сила

$$P_x = Dlp, \quad (2-109)$$

где  $l$  — длина трубы. Пользуясь этой формулой, в практике рассчитывают толщину стенок круглоцилиндрических сосудов и труб, находящихся под внутренним гидростатическим давлением. Поскольку сила  $P_x$  стремится разорвать рассматриваемую трубу в двух местах (у точки  $a$  и у точки  $c$ ), то толщину стенок трубы следует рассчитывать на разрыв ее силой, равной  $P_x/2$ .

2°. Сила гидростатического давления на стенки изогнутой трубы. Рассмотрим трубу, имеющую поворот (рис. 2-26). Колено трубы  $abcd$  под действием внутреннего гидростатического давления будет стремиться сдвинуться в направлении силы  $P$ . Эта сила представляет собой разность давлений: а) на относительно большую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии  $ab$ , и б) на относительно малую внутреннюю поверхность трубы, лежащую в районе линии  $cd$ .

Силу  $P$  находим следующим образом.

Выделяем отсек жидкости  $abcd$ , находящейся в трубе. Если пренебречь собственным весом этого отсека, то можно сказать, что данный отсек находится в покое под действием сил, показанных на рис. 2-26:

$$P_1 = \frac{\pi D^2}{4} p \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{\pi D^2}{4} p, \quad (2-110)$$

а также под действием реакции  $R$  стенок трубы в пределах колена  $abcd$  ( $|R| = |P|$ ). Имея это в виду, складываем геометрически  $P_1$  и  $P_2$  и получаем силу  $P$  (рис. 2-26). На величину силы  $P$  обычно рассчитывают так называемые анкерные опоры трубопроводов, устраиваемые в местах поворота труб.

## § 2-14. ПРОСТЕЙШИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Передача давления и энергии при помощи жидкости часто находит применение в практике машиностроения. Встречаются следующие так называемые простейшие гидравлические машины: гидравлические прессы, мультипликаторы (повысители давления), домкраты, подъемники и др. Во всех этих машинах, имеющих разное назначение и различную конструкцию, используется один и тот же гидравлический принцип, вытекающий из зависимостей, найденных в § 2-5 и 2-10.

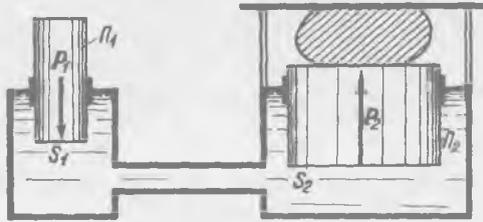


Рис. 2-27. Гидравлический пресс

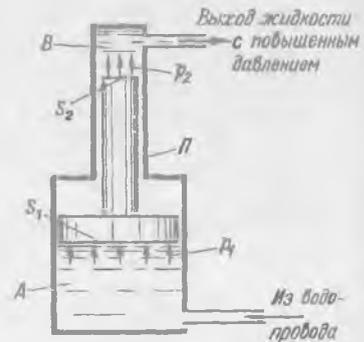


Рис. 2-28. Мультипликатор

На рис. 2-27 показана схема гидравлического прессы. Если к поршню  $\Pi_1$ , имеющему площадь  $S_1$ , приложим силу  $P_1$ , то эта сила будет передаваться на жидкость; жидкость же будет давить на поршень  $\Pi_2$ , имеющий площадь  $S_2$ , с силой

$$P_2 = P_1 \frac{S_2}{S_1}, \quad (2-111)$$

поскольку гидростатические давления в точках площади  $S_1$  и площади  $S_2$  практически равны между собой:

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2} = p. \quad (2-112)$$

Как видно, при помощи прессы сила  $P_1$  увеличивается в  $(S_2 : S_1)$  раз.<sup>1</sup>

На рис. 2-28 показана схема мультипликатора. Если в камере  $A$  создается гидростатическое давление  $p_1$ , то гидростатическое давление  $p_2$  в камере  $B$  должно удовлетворять условиям:

$$p_2 S_2 = p_1 S_1, \quad (2-113)$$

откуда

$$p_2 = p_1 \frac{S_1}{S_2}, \quad (2-114)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — нижняя и верхняя площади поршня  $\Pi$ .

Как видно, при помощи мультипликатора гидростатическое давление повышается в  $(S_1 : S_2)$  раз. Заметим, что как только поршень  $\Pi$  вытеснит всю жидкость из камеры  $B$ , данный мультипликатор выключают из работы,

<sup>1</sup> Как здесь, так и ниже (рис. 2-28) при выполнении практических расчетов учитывают еще и силу трения в подвижных частях механизма.

поршень  $\Pi$  опускают и камеру  $B$  заполняют жидкостью (со стороны). После этого мультипликатор снова вступает в работу.

## § 2-15. РАВНОВЕСИЕ ПЛАВАЮЩИХ ТЕЛ

Возьмем твердое тело  $AB$ , погруженное в жидкость (рис. 2-29). Разобьем его на ряд вертикальных цилиндров с площадью поперечного сечения  $dS$ . Рассматривая один такой цилиндр, видим, что сверху на него давит вес столба жидкости, равный  $\gamma h_1 dS$ ; снизу — вес столба жидкости, равный  $\gamma h_2 dS$ . Ясно, что рассматриваемый цилиндр твердого тела будет испытывать подъемное усилие (направленное вверх), равное:

$$dP_v = (h_2 - h_1) \gamma dS. \quad (2-115)$$

Сумма элементарных подъемных сил  $dP_v$ , действующих на все цилиндры, составляющие данное твердое тело, даст нам полную подъемную силу  $P_v$ , стремящуюся поднять тело вверх.

Как видно, вертикальная подъемная сила  $P_v$  (архимедова сила) равна весу жидкости в объеме рассматриваемого тела, точкой приложения силы  $P_v$  является центр тяжести  $D$  объема жидкости  $AB$ . Точка  $D$  называется центром водоизмещения. В общем случае точка  $D$  не совпадает с центром тяжести  $C$  твердого тела, где приложен его собственный вес  $G$ .

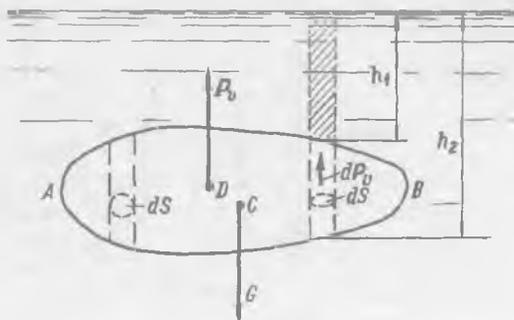


Рис. 2-29. Вертикальная подъемная сила  $P_v$  (архимедова сила),  $G$  — вес твердого тела,  $C$  — центр тяжести его,  $D$  — центр водоизмещения

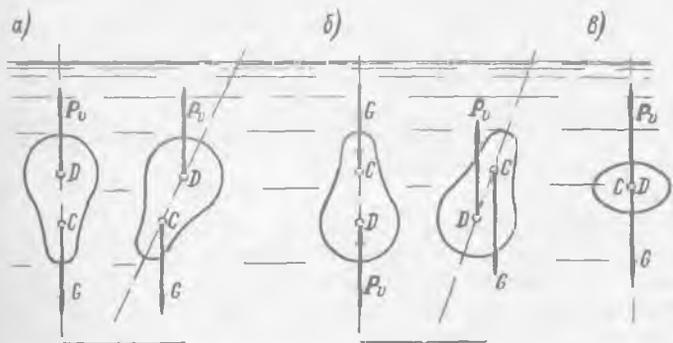


Рис. 2-30. Плавание тела в полностью погруженном состоянии

Можно различать следующие три случая:

$P_v < G$  — тело тонет;

$P_v > G$  — тело всплывает на поверхность жидкости;

$P_v = G$  — тело плавает в погруженном состоянии.

1°. Случай  $P_v = G$ . Здесь, в свою очередь, можем различать (рис. 2-30):

а) устойчивое равновесие тела (схема а);

б) неустойчивое равновесие тела (схема б);

в) безразличное равновесие (схема в).

2°. Случай  $P_v > G$ . В этом случае тело будет всплывать до тех пор, пока часть его не выйдет из жидкости (рис. 2-31, а), причем будет соблюдено условие

$$G = P'_v, \quad (2-116)$$

где  $P'_v$  — вес жидкости, вытесненной плавающим телом.

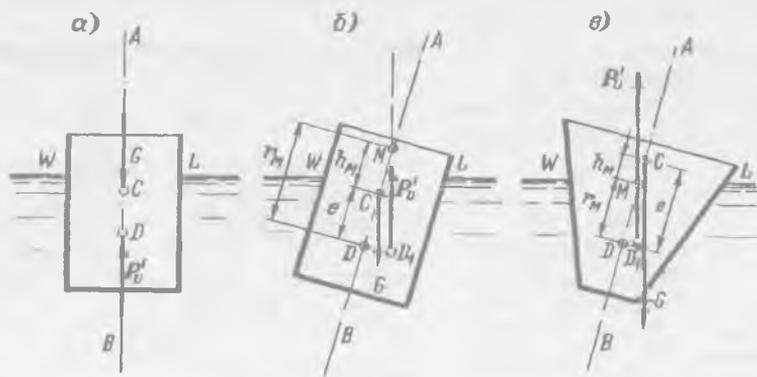


Рис. 2-31. Плавание судна в частично погруженном состоянии: а — состояние равновесия; б — остойчивое; в — нестойчивое  
 С — центр тяжести судна, D — центр водоизмещения при отсутствии крена  
 D<sub>1</sub> — то же при наличии крена, М — метациентр, r<sub>М</sub> — метациентрический радиус, h<sub>М</sub> — метациентрическая высота, e — эксцентриситет

Рассмотрим схему, когда точка С (центр тяжести плавающего тела) выше точки D (центра водоизмещения). В этом случае, в отличие от схемы б на рис. 2-30, можем получить как неустойчивое, так и устойчивое равновесие. Поясним этот вопрос применительно к плаванию судна (в покоящейся воде), причем будем пользоваться следующими терминами и обозначениями (рис. 2-31):

WL — площадь грузовой ватерлинии (площадь горизонтального сечения судна по линии WL);

AB — ось плавания;

С — центр тяжести судна;

D — центр водоизмещения при равновесии судна;<sup>1</sup>

D<sub>1</sub> — центр водоизмещения при крене судна;

М — точка пересечения оси плавания AB с вертикалью, проведенной через центр водоизмещения D<sub>1</sub>; эта точка называется метациентром.

Сопоставляя два разных судна, представленных на рис. 2-31, б, в, видим следующее:

а) на схеме б центр водоизмещения D<sub>1</sub> при крене оказался правее точки С, причем возник момент, возвращающий судно в положение покоя. Данный случай характеризуется тем, что метациентр М лежит выше точки С;

б) на схеме в центр водоизмещения D<sub>1</sub> при крене оказался левее точки С, причем возник момент, опрокидывающий судно. Данный случай характеризуется тем, что метациентр М лежит ниже точки С.

<sup>1</sup> Центр водоизмещения иногда именуют «центром величины».

Обозначим длины отрезков  $DC$ ,  $CM$  и  $DM$  соответственно через  $e$ ,  $h_M$  и  $r_M$ ;

$$\overline{DC} = e; \quad \overline{CM} = h_M; \quad \overline{DM} = r_M = e + h_M. \quad (2-117)$$

Эти отрезки называются:  $e$  — эксцентриситетом;  $h_M$  — метацентрической высотой;  $r_M$  — метацентрическим радиусом. Величина  $h_M$  считается положительной, если точка  $M$  располагается выше точки  $C$  (рис. 2-31, б), и отрицательной, если точка  $M$  располагается ниже точки  $C$  (рис. 2-31, в).

Остойчивостью судна называется способность его возвращаться в состояние равновесия после получения крена. Имея в виду сказанное, можем утверждать следующее:

1) если для данного судна  $h_M > 0$ , или, что то же,  $r_M > e$ , то это судно является остойчивым (2-31, б);

2) если для данного судна  $h_M < 0$ , или, что то же,  $r_M < e$ , то такое судно является нестойчивым (рис. 2-31, в).

Для данного судна эксцентриситет  $e$  является постоянной величиной.

При небольшом угле крена (меньше, например,  $15^\circ$ ) можно считать, что точка  $D_1$  перемещается по дуге окружности, описанной из метацентра радиусом  $r_M$ , причем сама точка  $M$  не меняет своего положения на оси плавания.

Как видно, для данного судна метацентрический радиус  $r_M$  и метацентрическая высота  $h_M$  считаются постоянными (в случае небольших кренов).

Можно показать, что метацентрический радиус

$$r_M = \frac{I}{V}, \quad (2-118)$$

где  $V$  — объем воды, вытесненной судном (объемное водоизмещение судна);  $I$  — момент инерции площади грузовой ватерлинии (рис. 2-31, а) относительно горизонтальной продольной оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Ясно, что чем больше для данного судна величина  $r_M$  (сравнительно с величиной  $e$ ), тем больше остойчивость судна.<sup>1</sup>

## МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ГИДРОСТАТИКЕ

### Задачи

№ 1. Определить заглубление  $h$  точки под уровнем воды в водоеме, если избыточное гидростатическое давление в этой точке равно  $100 \text{ кПа} \approx 1 \text{ кгс/см}^2$ .

Ответ:  $h = 1000 \text{ см}$ .

№ 2. Определить абсолютное  $p_A$  и избыточное  $p$  гидростатические давления в точке дна открытого сосуда, наполненного водой; глубина воды в сосуде  $200 \text{ см}$ .

Ответ:  $p_A = 120 \text{ кПа} \approx 1,2 \text{ кгс/см}^2$ ;  $p = 20 \text{ кПа} \approx 0,2 \text{ кгс/см}^2$ .

№ 3. Найти силу  $P_A$  абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в предыдущей задаче, если площадь дна сосуда  $1000 \text{ см}^2$ .

Ответ:  $P_A = 12 \text{ кН} \approx 1200 \text{ кгс}$ .

№ 4. Найти силу  $P_A$  абсолютного гидростатического давления, действующего на дно сосуда, указанного в задаче № 3, если этот сосуд закрыт, причем внешнее поверхностное давление равно  $250 \text{ кПа} \approx 2,5 \text{ кгс/см}^2$ .

Ответ:  $P_A = 27 \text{ кН} \approx 2700 \text{ кгс}$ .

<sup>1</sup> В § 2-15 мы коснулись только некоторых основных понятий из области теории плавания тел (сама эта теория является весьма обширной и здесь не излагается); более подробно см. [2-3].

№ 5. Определить значение внешнего поверхностного давления в закрытом сосуде, если горизонт воды в открытом пьезометре, приключенном к сосуду, вышшеается над горизонтом воды в сосуде на 300 см.

Ответ:  $p_0 = 130 \text{ кПа} = 1,3 \text{ кгс/см}^2$ .



Рис. 2-32. К задаче № 7

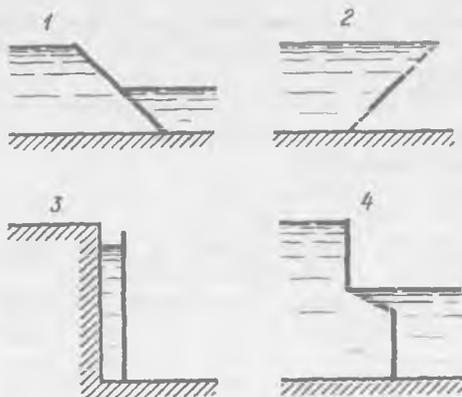


Рис. 2-33. К задаче № 8

№ 6. Определить высоту вакуума  $h_{\text{вак}}$  (см. рис. 2-10), если абсолютное гидростатическое давление в точке  $m$ , к которой присоединен вакуумметр, равно  $30 \text{ кПа} \approx 0,3 \text{ кгс/см}^2$ .

Ответ:  $h_{\text{вак}} = 700 \text{ см}$ .

№ 7. В сосуд, имеющий форму, указанную на рис. 2-32, налиты две разные жидкости. Линия  $AB$  является линией раздела этих жидкостей.

Дано: вес единицы объема жидкости I равен  $\gamma_I = 100 \text{ кН/м}^3 \approx 0,01 \text{ кгс/см}^3$ ; вес единицы объема жидкости II равен  $\gamma_{II} = 10 \text{ кН/м}^3 \approx 0,001 \text{ кгс/см}^3$ ; внешнее поверхностное давление  $(p_0)_I = 100 \text{ кПа} \approx 1,0 \text{ кгс/см}^2$ , внешнее поверхностное давление  $(p_0)_{II} = 150 \text{ кПа} \approx 1,5 \text{ кгс/см}^2$ ,  $h_1 = 100 \text{ см}$ .

Требуется найти величину  $h = h_1 - h_2$ .

Ответ:  $h = -400 \text{ см}$ .

№ 8. Для приведенных на рис. 2-33 плоских прямоугольных фигур построить эпюру избыточного гидростатического давления.

№ 9. Для приведенных на рис. 2-34 схем построить тела давления (эпюры, выражающие вертикальную составляющую силы избыточного давления).

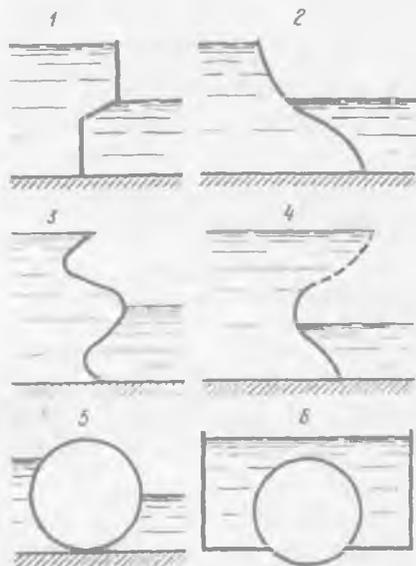


Рис. 2-34. К задаче № 9

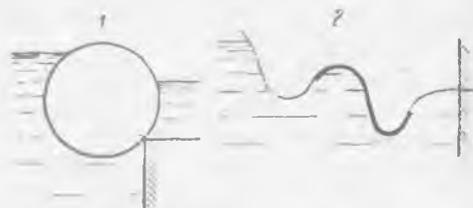


Рис. 2-35. К задаче № 10

№ 10. Для приведенных на рис. 2-35 схем построить тела давления и эпюры, выражающие горизонтальную составляющую силы избыточного давления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 2-1 Гидравлика, гидромашины, гидроприводы./Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. — М.: Машиностроение, 1970.  
2-2 Павловский Н. Н. Собрание сочинений, т. I. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1955.  
2-3 Семенов-Тянь-Шанский В. В. Статика и динамика корабля. — Л.: Судостроение, 1973.  
2-4 Угличус А. А., Чугаева Е. А. Гидравлика. — Л.: Стройиздат, 1971.

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

# ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

### § 3-1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ И ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЯ. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Одним из основных понятий гидродинамики является понятие о «гидродинамическом давлении (в точке пространства)», т. е. понятие об «интенсивности силы давления в точке».

1. Гидродинамическое давление. При движении реальной жидкости в ней, как правило, возникают силы трения, обуславливающие появление касательных напряжений  $\tau$ , которые отсутствуют в покоящейся жидкости (см. § 1-4, п. 4). В связи с наличием  $\tau$  напряженное состояние в данной точке  $M$  движущейся жидкости должно быть представлено уже не «шаром напряжений» (рис. 1-10, б), что мы имели в гидростатике, а — в общем случае — трехосным эллипсоидом напряжений или — для плоской задачи — эллипсом напряжений (рис. 1-10, а). Отсюда ясно, что при движении реальной жидкости в рассматриваемой ее точке нормальное напряжение  $\sigma_n$  будет зависеть (в общем случае) от ориентировки площадки действия: *в гидродинамике для намеченных в данной точке площадок действия, имеющих разный наклон, значение  $\sigma_n$  будет (в отличие от гидростатики) разное.*

Вместе с тем, чтобы упростить решение задач гидродинамики, здесь вводят особое понятие — понятие «гидродинамического давления в точке»  $p$ , и условно считают, что  $p$  в данной точке движущейся реальной жидкости, являясь также скалярной величиной (как и в гидростатике), не зависит от ориентировки площадки действия и равняется:

а) для пространственной задачи:

$$p = \frac{1}{3} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|); \quad (3-1')$$

б) для плоской задачи

$$p = \frac{1}{2} (|\sigma_1| + |\sigma_2|), \quad (3-1'')$$

где  $|\sigma_1|$ ,  $|\sigma_2|$ ,  $|\sigma_3|$  — значения (модули) соответствующих, например, главных напряжений.