

№ 10. Для приведенных на рис. 2-35 схем построить тела давления и эпюры, выражающие горизонтальную составляющую силы избыточного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 2-1 Гидравлика, гидромашины, гидроприводы./Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. — М.: Машиностроение, 1970.
2-2 Павловский Н. Н. Собрание сочинений, т. I. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1955.
2-3 Семенов-Тянь-Шанский В. В. Статика и динамика корабля. — Л.: Судостроение, 1973.
2-4 Угличус А. А., Чугаева Е. А. Гидравлика. — Л.: Стройиздат, 1971.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 3-1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ И ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЯ. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Одним из основных понятий гидродинамики является понятие о «гидродинамическом давлении (в точке пространства)», т. е. понятие об «интенсивности силы давления в точке».

1. Гидродинамическое давление. При движении реальной жидкости в ней, как правило, возникают силы трения, обуславливающие появление касательных напряжений τ , которые отсутствуют в покоящейся жидкости (см. § 1-4, п. 4). В связи с наличием τ напряженное состояние в данной точке M движущейся жидкости должно быть представлено уже не «шаром напряжений» (рис. 1-10, б), что мы имели в гидростатике, а — в общем случае — трехосным эллипсоидом напряжений или — для плоской задачи — эллипсом напряжений (рис. 1-10, а). Отсюда ясно, что при движении реальной жидкости в рассматриваемой ее точке нормальное напряжение σ_n будет зависеть (в общем случае) от ориентировки площадки действия: *в гидродинамике для намеченных в данной точке площадок действия, имеющих разный наклон, значение σ_n будет (в отличие от гидростатики) разное.*

Вместе с тем, чтобы упростить решение задач гидродинамики, здесь вводят особое понятие — понятие «гидродинамического давления в точке» p , и условно считают, что p в данной точке движущейся реальной жидкости, являясь также скалярной величиной (как и в гидростатике), не зависит от ориентировки площадки действия и равняется:

а) для пространственной задачи:

$$p = \frac{1}{3} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|); \quad (3-1')$$

б) для плоской задачи

$$p = \frac{1}{2} (|\sigma_1| + |\sigma_2|), \quad (3-1'')$$

где $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$, $|\sigma_3|$ — значения (модули) соответствующих, например, главных напряжений.

Как видно, в отличие от гидростатического давления p , гидродинамическое давление p выражает только некоторое среднее значение напряжений в данной точке. Гидростатическое и гидродинамическое давления принято обозначать одной и той же буквой p ; вместе с тем эти две величины существенно отличаются друг от друга: для покоящейся жидкости p является значением (модулем) реально существующего напряжения; для движущейся же реальной жидкости p представляет собой некоторую среднюю (а следовательно, фиктивную) величину, определяемую по формулам (3-1).

Разумеется, при движении идеальной жидкости силы трения в ней отсутствуют ($\tau = 0$); поэтому для такой жидкости мы получаем «шаровой тензор» напряжений (см. рис. 1-10. б), причем здесь, как и в гидростатике, гидродинамическое давление оказывается не зависящим от ориентировки площадки действия.

В случае, когда под p приходится понимать как гидростатическое, так и гидродинамическое давление, эту величину p следует называть *гидромеханическим давлением*.

Естественно возникает вопрос о нагрузке, необходимой для статического расчета, например металлической стенки трубопровода, вдоль которой движется реальная жидкость. Эта нагрузка, приложенная со стороны жидкости к стенке, должна реально существовать, а не быть некоторой фиктивной, средней величиной. Отвечая на этот вопрос, необходимо подчеркнуть, что в математической гидромеханике доказывается, что величина p , определенная по формулам (3-1) для направления, ортогонального к упомянутой выше стенке, приобретает реальное значение: давление p , действующее на такую стенку, теоретически в точности равно вычисленному по формулам (3-1). Заметим также, что величину p , определенную по указанным формулам, нам будет давать также пьезометр, подключенный к рассматриваемой точке.

Как будет показано ниже, в частном случае движения реальной жидкости, когда мы имеем равномерное распределение скоростей движения жидкости (см. ниже), касательные напряжения в реальной жидкости должны отсутствовать, причем мы получим вместо «эллипсоида напряжений» «шар напряжений» (как и в гидростатике).

2°. *Общая постановка задачи технической гидродинамики.* К числу основных гидродинамических характеристик потока жидкости относятся: а) поясненная выше скалярная величина p и б) векторная величина скорости u движения частиц жидкости. Для разных точек неподвижного пространства, занятого движущейся жидкостью, величины p и u в общем случае должны быть различны (в данный момент времени); кроме того, в любой данной неподвижной точке пространства эти величины могут изменяться во времени.

Имея в виду сказанное, можем написать:

$$\left. \begin{aligned} p &= f_1(x, y, z, t); \\ u_x &= f_2(x, y, z, t); \\ u_y &= f_3(x, y, z, t); \\ u_z &= f_4(x, y, z, t); \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

где u_x, u_y, u_z — проекции скорости u на оси декартовой (прямоугольной) системы координат.

Найдя функции f_1, f_2, f_3, f_4 , мы могли бы представить (например, для данного момента времени t_1) наш поток в виде скалярного поля давлений p и векторного поля скоростей u .

Именно так ставится вопрос в так называемой *математической гидродинамике*. Как видно, здесь мы интересуемся величинами p и u , относящимися к отдельным точкам пространства.

Однако задача об отыскании функций f_1, f_2, f_3, f_4 является столь сложной, что даже, заменяя реальную жидкость «воображаемой моделью» в виде идеальной жидкости, мы такую задачу часто решить не в состоянии. Кроме того, во многих случаях практики приходится сталкиваться с проблемами, когда

нам нет необходимости стремиться к такой точности и подробности расчета, на которую «претендует» математическая механика (такое положение создается, например, когда точность исходной информации, полагаемой в основу расчета, невысока, что достаточно часто может иметь место в практике¹).

В силу всего сказанного, в *технической гидродинамике* отказываются от использования зависимостей (3-2) и идут по иному пути — «гидравлическому».

Гидравлический метод, т. е. метод *технической гидродинамики*, согласно которому мы, как правило, не интересуемся давлениями p и скоростями u в отдельных точках пространства, основан на использовании некоторых осредненных и суммарных (интегральных) характеристик потока. Следуя этому методу, в основу технической гидродинамики полагают уравнения, существенно отличающиеся от уравнений (3-2). К числу таких основных уравнений гидравлики (технической гидромеханики) относятся следующие:

- 1) гидравлическое уравнение несжимаемости и неразрывности жидкости;
- 2) гидравлическое уравнение кинетической энергии (уравнение Бернулли) для «целого потока» реальной жидкости;
- 3) гидравлическое уравнение количества движения для «целого потока» реальной жидкости;²

4) эмпирические и полуэмпирические зависимости (Дарси и Вейсбаха), служащие для оценки работы сил трения, возникающих в реальной жидкости.

Все эти уравнения имеют достаточно общий характер. Сочетая данные уравнения с рядом особых весьма существенных приемов рассмотрения гидравлических явлений (эти приемы подробно поясняются далее),³ получаем обширную законченную техническую теорию, позволяющую решать (с приемлемой точностью) большой круг достаточно сложных (линейных, плоских и пространственных) практических задач, относящихся к механике реальной жидкости.

Следует, однако, учитывать, что при решении отдельных задач практики нам все же иногда (см., например, гл. 18) приходится сочетать приемы технической механики жидкости с приемами математической механики жидкости. Кроме того, надо иметь в виду, что раскрывая сущность интегральных зависимостей, относящихся к технической гидродинамике, нам, естественно, приходится в ряде случаев (см. ниже, хотя бы § 3-2—3-7) интересоваться в некоторой мере и «точечными характеристиками» потока, подробно изучаемыми в «математической гидродинамике».

3. Две разных задачи гидродинамики. Рассматривая движущуюся жидкость, различают:

- 1) так называемую внешнюю задачу; здесь задан поток жидкости,

¹ Надо всегда учитывать, что точность расчета должна соответствовать: а) точности исходной информации и б) потребности практики.

² Это уравнение, как 3-е основное уравнение гидравлики в форме (3-124), удобное для гидравлических расчетов, было введено нами в учебный курс гидравлики в 1960 г. [3-12].

³ К ним относятся, в частности, приемы, основанные на использовании понятий: об «осредненной» и «средней» скорости движения жидкости, о «плоском живом сечении» (в котором давление распространяется по гидростатическому закону) и т. п.

требуется же найти силы, приложенные к тому или другому твердому телу, обтекаемому жидкостью;

2) так называемую внутреннюю задачу; здесь, наоборот, заданы силы, действующие на жидкость (в частности, объемные силы, например, силы тяжести); требуется же найти гидродинамические характеристики потока (скорости, давления и т. п.).

Внешняя задача возникает, например, при проектировании турбинных лопастей (в области гидромашиностроения), в судостроительной гидравлике и т. п. Мы ниже, имея в виду проблемы гидротехнические (инженерно-строительные) главным образом (почти исключительно) будем заниматься рассмотрением внутренних задач (зная силы, действующие на поток, отыскивать величины скоростей и давлений в жидкости).

§ 3-2. ОСНОВНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Различают два принципиально разных аналитических метода исследования движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

1°. Метод Лагранжа. Выделим контуром K некоторую область, занятую движущейся жидкостью (рис. 3-1). Наметим неподвижные оси координат Ox и Oz . Будем рассматривать ряд движущихся частиц жидкости: M_1, M_2, M_3, \dots , находящихся в начальный момент времени на границе изучаемой области. Обозначим через x_0 и z_0 начальные координаты этих жидких частиц.

Будем считать, что для каждой частицы M нам известны зависимости

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(x_0, z_0, t); \\ z &= f_2(x_0, z_0, t). \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

Тогда, пользуясь этими зависимостями, легко можно построить траектории намеченных частиц жидкости. Далее можем в любом месте этих траекторий найти длину пути ds , проходимого частицей за время dt . Деля же ds на dt , можем найти скорость в данной точке; можно также найти и ускорение любой частицы M в любой точке пространства в тот или другой момент времени. Как видно, в данном случае мы следим за отдельными частицами жидкости в течение времени t , за которое эти частицы, двигаясь по своим траекториям, проходят всю рассматриваемую область.

Согласно Лагранжу, о потоке жидкости в целом мы судим по совокупному рассмотрению траекторий, описываемых частицами жидкости.

Существенно подчеркнуть, что здесь (в отличие от метода Эйлера, см. ниже) x и z представляют собой текущие координаты частиц жидкости. Поэтому величины dx и dz должны в данном случае рассматриваться как проекции пути ds на соответствующие координаты. В силу этого, согласно Лагранжу, можем написать:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (3-4)$$

2°. Метод Эйлера. Представим себе снова некоторую область, занятую движущейся жидкостью (рис. 3-2). Согласно Эйлеру, мы не следим за движением отдельных частиц жидкости M и не интересуемся их траекториями.

В соответствии с предложением Эйлера мы намечаем точки 1, 2, 3, ..., которые считаем скрепленными с рассматриваемым неподвижным пространством. Эти точки неподвижны при протекании через них жидкости. Здесь вели-

чины x и z не есть текущие координаты частиц жидкости, а просто координаты неподвижных точек пространства.

Рассмотрим момент времени t_1 . В этот момент времени в точке 1 (рис. 3-2) будет находиться некоторая частица жидкости, имеющая скорость $u_1(t_1)$; в этот же момент времени в точке 2 будем иметь скорость $u_2(t_1)$; в точке 3 — скорость $u_3(t_1)$ и т. д.

Как видно, для момента времени t_1 поток оказывается представленным векторным полем скоростей, причем каждый вектор скорости относится к определенной неподвижной точке пространства (и к данному моменту времени t).

В следующий момент времени в точках 1, 2, 3, ... получаем соответственно скорости $u_1(t_2)$, $u_2(t_2)$, $u_3(t_2)$ и т. д., причем в общем случае получаем другое поле скоростей.

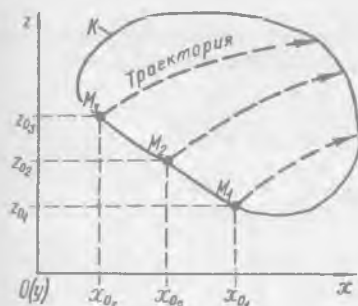


Рис. 3-1. К методу Лагранжа:
 M_1, M_2, M_3, \dots — частицы жидкости

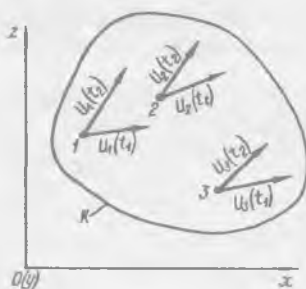


Рис. 3-2. К методу Эйлера:
1, 2, 3, ... — неподвижные точки пространства

Как видно, согласно Эйлеру, поток в целом в данный момент времени называется представленным векторным полем скоростей, относящихся к неподвижным точкам пространства.

Сопоставляя векторное поле скоростей, отвечающее моменту времени t_1 , с векторным полем скоростей, отвечающим моменту времени t_2 , легко можно себе представить, как рассматриваемый поток изменяется с течением времени.

Выше было отмечено, что координаты x и z , согласно Эйлеру, являются координатами неподвижных произвольных точек пространства. Поэтому в данном случае величины dx и dz нельзя рассматривать как проекции элементарного пути ds , проходимого частицами жидкости за время dt . Величины dx и dz здесь являются просто произвольными приращениями координат x и z . В связи с этим зависимости (3-4) в случае метода Эйлера — неприемлемы.

3. Метод исследования движения жидкости, применяемый в гидравлике.

Метод Лагранжа ввиду его сложности не нашел широкого применения в технической механике жидкости. Далее в основном будем пользоваться методом Эйлера. Однако, применяя его, все же не будем совершенно отречься от рассмотрения движения частиц жидкости M . Мы будем следить за их движением, но не в продолжение времени t (как это следует по Лагранжу), а в продолжение только элементарного отрезка времени dt , в течение которого данная частица жидкости проходит через рассматриваемую точку пространства.

Принимая такую постановку вопроса, можем считать, что в каждой точке пространства за время dt соответствующая частица жидкости проходит путь ds , проекции которого равны dx и dz . При этом, очевидно, для определения проекций скорости u_x и u_z можно будет пользоваться соотношениями (3-4).

Сказанное дополнительно поясним следующим образом. Представим себе поток воды (например, на лабораторной площадке), который мы наблюдаем в плане (сверху). Предположим, что над таким потоком установлен фотографический аппарат, который через определенные постоянные промежутки времени dt фотографирует изменяющееся во времени векторное поле скоростей движения частиц жидкости (считаем, что выполнение такой фотографии возможно). Очевидно, что, используя при рассмотрении данного примера метод Эйлера, мы сможем пользоваться зависимостью Лагранжа (3-4) только при соблюдении следующего условия: упомянутые выше фотографии векторных полей должны осуществляться не через произвольные промежутки времени, а через отрезки времени, равные

$$dt = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{ds}{u}$$

(во всех точках любого векторного поля скоростей эта величина постоянна).

§ 3-3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ (НЕВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ (УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА)

Ранее были получены дифференциальные уравнения покоя жидкости (см. § 2-3), которые были отнесены к единице массы жидкости. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости можно получить из указанных уравнений покоя, если согласно началу Даламбера ввести в эти уравнения силу инерции, отнесенную к единице массы движущейся жидкости.

Обозначим силу инерции, действующую на единицу массы, через I ; проекции этой силы на оси координат — через I_x, I_y, I_z . При этом можем написать

$$I_x = -1 \frac{du_x}{dt}; \quad I_y = -1 \frac{du_y}{dt}; \quad I_z = -1 \frac{du_z}{dt}, \quad (3-5)$$

где $\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}$ — проекции ускорений на соответствующие оси координат

(исчисляемые по Лагранжу — представляя себе единицу массы жидкости, движущуюся в соответствующем векторном поле).

Сила инерции направлена в сторону, противоположную ускорению; поэтому в соотношения (3-5) входит знак минус. Вводя в уравнение (2-13) третье слагаемое в виде $(\rho dx dy dz) I_x$, представляющее собой проекцию на ось Ox сил инерции жидкого параллелепипеда (см. рис. 2-5), получаем 1-е уравнение; остальные пишем по аналогии. В результате вместо (2-14) имеем следующие дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (отнесенные к единице массы):

$$\left. \begin{aligned} \phi_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ \phi_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}; \\ \phi_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

Эти уравнения называются уравнениями Эйлера, или уравнениями движения, или уравнениями динамического равновесия.

Надо заметить, что, переходя от идеальной жидкости к реальной (вязкой) жидкости, в уравнение (3-6) приходится вводить дополнительное слагаемое, учитывающее силы трения, отнесенные к единице массы жидкости. Такая операция приводит нас к системе трех уравнений, называемых уравнениями Навье — Стокса. Эти уравнения при направлении оси z вверх и при рассмотрении случая, когда массовыми (объемными) силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести, т. е. случая, когда

$$\phi_x = \phi_y = 0 \text{ и } \phi_z = -g,$$

приобретают вид (будучи по-прежнему отнесенными к единице массы жидкости):

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{du_z}{dt} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

где последнее дополнительное слагаемое (учитывающее силы трения) содержит коэффициент ν , называемый кинематическим коэффициентом вязкости жидкости [см. далее формулу (3-128)]. Выражения в скобках представляют собой соответствующие суммы вторых частных производных от u_x , u_y и u_z по координатам x , y , z . Уравнения (3-6) редко могут быть использованы в практике, в частности, потому, что распределение сил трения в реальных потоках (особенно при так называемом «резкоизменяющемся движении» жидкости) учесть весьма трудно.

В соответствии с методом Эйлера (см. § 3-2) и, учитывая зависимости (3-2), можем написать:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial t}; \quad (3-7)$$

имея же в виду зависимость Лагранжа (3-4), получаем следующие выражения для проекций ускорения, входящих в правые части (3-6) [первое выражение вытекает из (3-7); остальные пишем по аналогии]:¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t}; \\ \frac{du_y}{dt} &= u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial t}; \\ \frac{du_z}{dt} &= u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

В правые части уравнений (3-8) входит девять частных производных проекций скорости (u_x , u_y , u_z) по координатам (x , y , z).

Три из этих девяти производных

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

называются прямыми или продольными; каждая из них взята по координате, отмеряемой вдоль той оси, на которую проектируется скорость. Остальные шесть частных производных называются косыми или поперечными; каждая из них берется по координате, отмеряемой поперек оси, на которую проектируется скорость.

С прямыми (продольными) производными нам придется столкнуться при выводе уравнения несжимаемости жидкости (см. § 3-10). Здесь остановимся на пояснении физического смысла шести косых (поперечных) производных.

¹ Как видно, зависимость (3-8) сочетает в себе два разных подхода: а) подход Эйлера, когда $u = f(x, y, z, t)$; б) подход Лагранжа, когда $u = f(t)$.

В математической механике жидкости такое сочетание обосновывается путем использования так называемой «субстанциональной» («индивидуальной») частной производной.

Физический смысл косых (поперечных) частных производных от проекций скорости (u_x, u_y, u_z) по координатам (x, y, z). Рассмотрим для примера одну из шести производных, именно $\frac{\partial u_z}{\partial x}$.

Возьмем на оси x (рис. 3-3) отрезок ab , соединяющий две частицы жидкости (a и b) и имеющий бесконечно малую длину dx . Этот отрезок при движении вдоль оси z переместится за время dt в положение $a'b'$, причем отрезок aa' будет представлять собой путь, пройденный в направлении оси z частицей a :

$$\overline{aa'} = u_z dt, \quad (3-9)$$

отрезок же bb' — путь, пройденный в направлении оси z частицей b :

$$\overline{bb'} = u'_z dt = \left(u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \right) dt; \quad (3-10)$$

здесь u_z — скорость движения частицы a вдоль оси z ; u'_z — скорость движения частицы b вдоль той же оси z :

$$u'_z = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx. \quad (3-11)$$

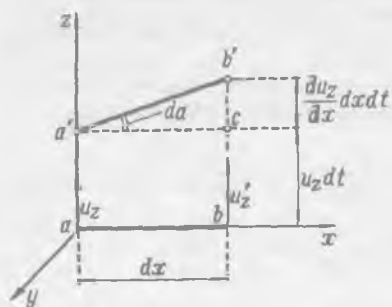


Рис. 3-3. Вращение отрезка ab

Так как в общем случае $\overline{aa'} \neq \overline{bb'}$, то, как видно из рис. 3-3, отрезок ab за время dt совершает не только поступательное движение вдоль оси z , но еще и поворачивается относительно оси y на некоторый угол $d\alpha$.

Найдем угловую скорость вращения отрезка ab относительно оси y . Очевидно,

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{\overline{cb'}}{\overline{a'c}} = \frac{u'_z dt - u_z dt}{dx} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt. \quad (3-12)$$

Так как угол $d\alpha$ мал, то тангенс этого угла можно заменить самим углом; при этом вместо (3-12) получаем:

$$d\alpha = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt \quad (3-13)$$

или

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3-14)$$

Из этого соотношения видно, что рассматриваемая частная производная дает нам угловую скорость вращения бесконечно малого отрезка ab относительно оси y .

Исследуя точно так же остальные пять производных, легко убедиться, что все они представляют собой соответствующие угловые скорости вращения бесконечно малого отрезка ab (относительно осей x, y и z). Таков физический смысл рассматриваемых шести частных производных:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3-15)$$

Ясно, что первые две производные дают угловые скорости вращения в плоскости xz (относительно оси z); вторые две производные — угловые скорости в плоскости yz (относительно оси x); третьи две производные — угловые скорости в плоскости xz (относительно оси y).

§ 3-4. ТРИ ОСНОВНЫХ ВИДА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ПОНЯТИЕ ВИХРЕВОГО И БЕЗВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЙ

Возьмем некоторое твердое тело A (рис. 3-4, *a*). Наметим две какие-либо частицы этого тела (частицу a и частицу b), причем мысленно соединим эти две частицы прямой ab . При движении данного твердого тела прямая ab будет

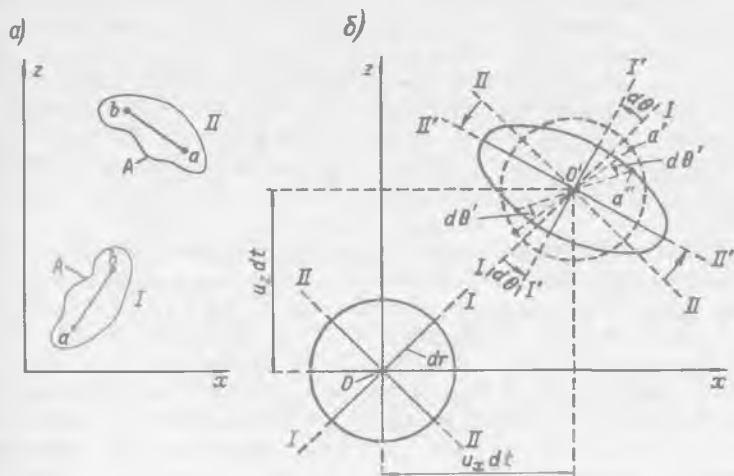


Рис. 3-4. Виды движения: а — два вида движения твердого тела; б — три вида движения элементарного объема жидкости

всегда сохранять свою длину. Поэтому, как известно, любое движение твердого тела может быть представлено как сумма только двух движений:

1) поступательного, при котором упомянутая прямая ab , соединяющая любые две частицы a и b , всегда сохраняет одно и то же направление (остается при перемещении тела параллельной своему начальному направлению),

2) вращательного, при котором прямая ab поворачивается относительно, например, точки a .

При движении жидкости вопрос усложняется тем, что отрезок ab , соединяющий две определенные частицы жидкости (частицу a и частицу b), при течении жидкости почти всегда изменяет свою длину. Изменение при движении жидкости длин произвольно намеченных отрезков ab обуславливает изменение формы движущихся объемов жидкости. Такое положение отсутствует в случае твердого тела. Это тело при движении все время сохраняет свою форму.

Можно показать (после соответствующего строгого обоснования), что в общем случае движение элементарного объема жидкости оказывается возможным представить как сумму не двух, а трех различных движений: 1) поступательного; 2) вращательного (как в случае твердого тела); 3) особого

движения, обуславливающего изменение формы движущихся объемов жидкости; этот последний вид движения называется деформационным.

Рассмотрим данный вопрос подробнее. Представим на рис. 3-4,б пучок бесконечно малых лучей одинаковой длины, равной dr , исходящих из центра O . Концы радиусов dr расположатся по окружности.

Рассмотрим элементарный объем жидкости, ограниченный этой окружностью. Предположим, что за время dt данный элементарный объем переместится в новое положение (центр его O переместится в точку O').

Рассматривая такое элементарное (бесконечно малое) перемещение выделенного жидкого объема, можем движение его разложить, как только что было отмечено, на три разных вида:

а) поступательное движение; благодаря этому движению центр O пучка радиусов перемещается в точку O' ; выделяя это движение, надо в точке O' представить себе начальную окружность, радиусы которой параллельны соответствующим радиусам окружности с центром в точке O ;

б) вращательное движение; благодаря этому движению главные оси деформации $I-I$ и $II-II$ круглого элементарного объема жидкости, представленного в точке O' , поворачиваются на некоторый угол $d\theta$; при этом поясненные выше отрезки ab должны сохранять свою длину (как в случае твердого тела);

в) деформационное движение; благодаря этому движению каждый из намеченных радиусов поворачивается еще на дополнительный угол $d\theta'$ и, кроме того, удлиняется или укорачивается;¹ углы $d\theta'$ поворота (дополнительные к среднему углу $d\theta$, упомянутому в п. б) и укорочения или удлинения разных радиусов будут различны; поэтому начальная окружность с центром O' претерпевает деформацию и обращается в фигуру, изображенную сплошной линией на рис. 3.4, б. Высказанное положение о трех видах движения жидкости впервые было сформулировано Гельмгольцем.

Как видно, движение жидкости в общем случае можно условно представить себе как движение бесконечного множества бесконечно малых волчков (частиц жидкости), которые перемещаются поступательно и дополнительно (при бесконечно малом перемещении) вращаются относительно своих мгновенных осей, а также еще деформируются (изменяют свою форму).

1) Остановимся на дополнительном пояснении второго вида движения — вращательного. Угловую скорость вращения элементарных объемов жидкости относительно своих мгновенных осей обозначим через Ω , а компоненты ее — через Ω_x , Ω_y , Ω_z . Найдем соответствующие выражения для величин Ω_x , Ω_y и Ω_z . С этой целью выделим элементарный объем жидкости в виде прямой треугольной призмы abc (рис. 3-5). Через aA обозначим биссектрису угла cab , являющуюся главной осью деформации объема abc .

Предположим, что поступательного движения нет; имеются только вращение и деформация. Тогда при движении объема abc начальная точка a будет оставаться на месте. За время dt рассматриваемый объем abc :

а) в результате вращения примет положение $ab'c'$, причем биссектриса aA повернется на угол $d\theta$ и получит направление aA' ;

б) в результате деформации примет окончательную форму $ab''c''$.

Надо считать, что в процессе деформации (п. «б») биссектриса aA' должна сохранять свое направление — не поворачиваться (биссектрисы углов $c'ab'$ и $c''ab''$ должны совпадать).

¹ Например, точка a' перемещается в точку a'' .

Имея в виду это положение, можем написать, что

$$\begin{aligned} d\theta'_1 &= d\theta'_2; \\ d\alpha_1 - d\theta &= d\alpha_2 + d\theta; \\ d\theta &= \frac{1}{2} (d\alpha_1 - d\alpha_2), \end{aligned} \quad (3-16)$$

где $d\alpha_1$ и $d\alpha_2$ представляют собой углы поворота отрезков ab и ac (рис. 3-5).

Разделив третье уравнение (3-16) на время dt , получаем:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_1}{dt} - \frac{d\alpha_2}{dt} \right). \quad (3-17)$$

В этом уравнении величина $\frac{d\theta}{dt}$ представляет собой среднюю угловую скорость вращения Ω_y главной оси деформации aA элементарного жидкого объема abc относительно оси y :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_y. \quad (3-18)$$

Что касается величин, входящих в правую часть уравнения (3-17), то они равны [см. уравнение (3-14) и пояснение к (3-15)]:

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3-19)$$

Подставляя (3-19) и (3-18) в (3-17), получаем окончательное выражение для Ω_y ; выражения для Ω_x и Ω_z пишем по аналогии:¹

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \Omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \Omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3-20)$$

где индексы x, y, z у величины Ω указывают на то, что вращение происходит соответственно относительно осей x, y и z или вокруг осей, параллельных названным.

Геометрически складывая векторы Ω_x, Ω_y и Ω_z , можем получить вектор угловой скорости Ω , который и характеризует вращательное движение рассматриваемого элементарного объема жидкости относительно его мгновенной оси.

2) О безвихревом и вихревом движениях. В частном случае, вычислив соответствующие частные производные от компонентов скорости по

¹ В соответствующих местах уравнений (3-20) порядок расстановки букв x, y, z выдержан согласно так называемой круговой последовательности (x, y, z, x, y, z, \dots): 1) x, y, z ; 2) y, z, x ; 3) z, x, y . В скобках уравнения (3-20) заключены, как иногда говорят, «накрест взятые производные»:

$$1) \frac{\partial u_x}{\partial y} \wedge \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad 2) \frac{\partial u_x}{\partial z} \wedge \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad 3) \frac{\partial u_y}{\partial x} \wedge \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

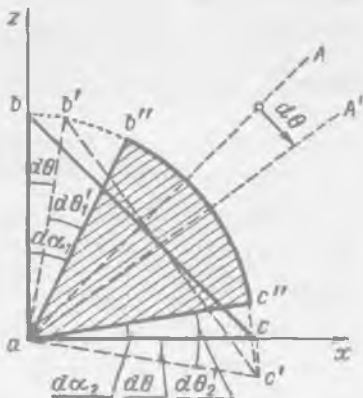


Рис. 3-5. Вращение и деформация элементарного объема жидкости

координатам и подставив их в (3-20), можно получить значения $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ равными нулю. При этом обратится в нуль также и угловая скорость Ω . Такой частный случай будет характеризоваться наличием только двух видов движения: поступательного и деформационного (или наличием одного из этих видов движения). При этом элементарные объемы жидкости при бесконечно малом (но не при конечном) перемещении не вращаются вокруг своих мгновенных осей; вернее сказать, здесь отсутствует вращение так называемых главных осей деформации любого элементарного объема жидкости. Этот частный случай движения, когда главные оси деформаций элементарных объемов перемещаются на бесконечно малой длине только поступательно, называется безвихревым движением. Движение же, когда $\Omega \neq 0$, т. е. когда главные оси деформации элементарных частиц при бесконечно малом перемещении этих частиц вращаются, называется вихревым.¹

§ 3-5. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Область, занятую движущейся жидкостью, можно себе представить как векторное поле скоростей (см. рис. 2-7, а). Рассмотрим частный случай движения жидкости, когда это векторное поле является потенциальным, т. е. таким, которое может быть описано некоторой функцией $\varphi(x, y, z)$, обладающей следующим свойством (см. конец § 2-4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z. \quad (3-21)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по y и второе по x , получаем:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (3-22)$$

вычитая теперь из второго равенства (3-22) первое равенство (3-22), имеем:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0. \quad (3-23)$$

Рассуждая аналогично, можем показать, что имеют место также равенства:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad (3-24)$$

Подставляя выражения (3-23) и (3-24) в уравнения (3-20), получаем

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0. \quad (3-25)$$

Отсюда можно сделать следующий вывод:

если рассматриваемое поле скоростей имеет потенциальную функцию (потенциал скорости φ), т. е. является потенциальным, то угловые скорости Ω вращения главных осей деформации частиц жидкости должны равняться нулю, и мы будем иметь безвихревое движение.²

¹ О главных осях деформации см. стр. 24. Различают еще так называемые главные оси скоростей деформации, которые для однородной изотропной среды совпадают с главными осями деформации.

² Говоря так, надо иметь в виду, что в случае потенциального (безвихревого) движения, элементарные объемы жидкости на конечном (а не на бесконечно малом) перемещении могут получать некоторый поворот (т. е. иметь «вращение»)

Следует запомнить, что потенциальное движение всегда является безвихревым.

Можно показать, что и наоборот: безвихревое движение жидкости (в случае так называемой односвязной области) всегда является потенциальным.

Все существующие формы движения жидкости можно разбить на два вида:

а) движения безвихревые (потенциальные), обладающие потенциалом скорости φ ;

б) движения вихревые, для которых функция φ , поясненная выше, не существует.

В случае потенциального (безвихревого) потока жидкости приходится отыскивать одну функцию φ , удовлетворяющую соответствующим граничным и начальным условиям и выражающую согласно (3-21) компоненты скорости u_x, u_y, u_z .

В случае же вихревого движения задача должна состоять, вообще говоря, в отыскании трех функций, которые должны зависеть от координат и времени, удовлетворять соответствующим граничным и начальным условиям и выражать соответственно компоненты скорости u_x, u_y, u_z .

Отсюда видно, что исследование безвихревого (потенциального) потока является задачей значительно более простой, чем исследование вихревого потока.

Для простейших потенциальных потоков функция φ отыскивается иногда достаточно просто. Например, предположим, что нам задано движение, характеризуемое условием:

$$u_x = u_0 = \text{const}; u_y = 0; u_z = 0.$$

При таком движении траектории частиц жидкости представляют собой прямые линии, параллельные оси x , а поверхности равного потенциала ($\varphi = \text{const}$) — плоскости, параллельные координатной плоскости yOz . В данном случае величина

$$\varphi = u_0 x.$$

Действительно, дифференцируя это соотношение по координатам, получаем приведенные выше величины u_x, u_y, u_z .

В более сложных случаях потенциального движения для отыскания φ приходится пользоваться особыми методами (изучаемыми в курсах математики). Иногда может быть использован так называемый метод сложения («наложения») — суперпозиции) потенциальных потоков. Он заключается в следующем.

Положим, что нам известно несколько потенциальных функций: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$, каждая из которых дает вполне определенный потенциальный поток.

Возьмем алгебраическую сумму указанных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n. \quad (3-25')$$

Можно доказать, что функция φ будет давать новый потенциальный поток (доказательства здесь не приводим). Такой поток будет более сложным. Например, составляющая u_x скорости этого потока будет

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = (u_x)_1 + (u_x)_2 + \dots + (u_x)_n$$

где $(u_x)_1, (u_x)_2, (u_x)_3, \dots, (u_x)_n$ — составляющие u_x скорости для указанных простейших потоков, найденные в соответствующей точке.

Из сказанного заключаем, что новый поток, описываемый функцией φ , характеризуется следующим: скорость в любой точке такого потока равна геометрической сумме соответствующих скоростей простейших потоков:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \dots,$$

где $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots$ — векторы скорости простейших потоков, найденные для рассматриваемой точки заданной области.

Если мы имеем сложный поток, то, как ясно из сказанного, для отыскания u можно иногда поступить следующим образом. Разложить скорости u сложного потока на составляющие их (u_1, u_2, u_3, \dots). Рассматривая затем отдельно поле скоростей u_1, u_2, u_3, \dots , можем найти для каждого простейшего поля свою потенциальную функцию ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$). Наконец, по формуле (3-25) вычислить искомую функцию φ .

§ 3-6. УСТАНОВИВШЕЕСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Представим поток жидкости, ограниченный на рис. 3-6 линиями a_1b_1 и a_2b_2 . Возьмем точку 1 пространства, причем будем считать, что эта точка является неподвижной при протекании через нее жидкости. Далее наметим ряд жидких частиц M , которые, двигаясь в общем случае по разным траекториям, попадают в точку 1 в различные моменты времени t : частица M' — в момент t' ; частица M'' — в момент t'' и т. д.

При *установившемся движении* скорость (u) в каждой данной точке пространства, например в точке 1 , изменяется с течением времени, т. е. в общем случае получаем следующее:

частица M' , придя в точку 1 пространства, имеет в этой точке в момент времени t' скорость u' ;

частица M'' , придя в ту же точку 1 пространства, в другой момент времени t'' имеет в этой точке другую скорость u'' и т. д.

В точке 2 пространства получается аналогичная картина. Следовательно, при *установившемся движении*

$$u = f_1(x, y, z, t). \quad (3-26)$$

При *установившемся (или иначе, стационарном) движении* каждая точка пространства характеризуется определенной, не изменяющейся во времени скоростью (u); частицы M', M'', M''', \dots , придя в точку 1 в различные моменты времени, будут иметь в этой точке одну и ту же скорость u (постоянную по величине и направлению).

При *установившемся движении*

$$u = f_1(x, y, z), \quad (3-27)$$

т. е. здесь u не зависит от времени, а потому в случае установившегося движения

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0. \quad (3-28)$$

Если бы мы учитывали сжимаемость жидкости, то к соотношениям (3-28) нам следовало бы добавить еще условие $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, так как с изменением давления (во времени)

плотность сжимаемой жидкости должна изменяться. Для абсолютно же несжимаемой жидкости указанное дополнительное условие является излишним.

В общем случае для установившегося движения величина $\frac{du}{dt} \neq 0$.

Разумеется, вместо условия (3-28) писать условие $\frac{du}{dt} = 0$ нельзя, так как равенство

нулю этой производной указывает лишь на то, что значение скорости не изменяется во времени; направление же скорости при этом во времени может изменяться.

При установившемся движении траектории частиц M , проходящие через одну и ту же точку 1 пространства (см. линии $M' - 1$, $M'' - 1$, $M''' - 1$ на рис. 3-6), характеризуются следующим:

1) эти траектории совпадают друг с другом (сливаются в одну линию);

2) они являются неизменными во времени.

Рисунок 3-6 относится к общему случаю неустановившегося движения.

При установившемся движении получаем картину, представленную на рис. 3-7.

Справедливость сказанного можно доказать следующими рассуждениями.

При установившемся движении (рис. 3-7) частица M' , придя в точку простран-

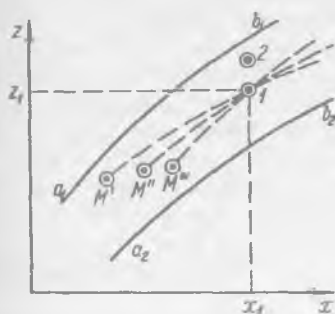


Рис. 3-6. Схема траекторий частиц жидкости при неустановившемся движении

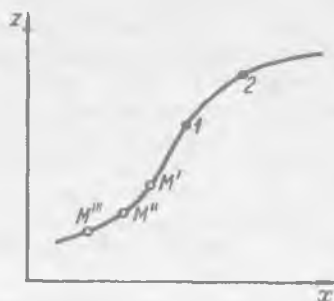


Рис. 3-7. Схема траекторий частиц жидкости M' , M'' , M''' при установившемся движении

ства 1 , получает в этой точке определенную скорость u_1 и уходит из этой точки в определенном направлении (в направлении скорости u_1), причем по истечении времени dt попадает в точку пространства 2 , где получает скорость u_2 . Следующая частица M'' , придя в точку 1 , получит здесь ту же самую скорость u_1 и уйдет из этой точки в том же самом направлении, причем по истечении времени dt окажется в точке 2 , и т. д.

Рассматривая неустановившееся движение, можем различать случаи:

а) когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно медленно, в связи с чем величинами $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$ можно пренебрегать;

б) когда скорость в отдельных точках пространства изменяется относительно быстро.

Первый из указанных случаев неустановившегося движения (п. «а») условимся называть медленно изменяющимся движением,¹ а второй (п. «б») — быстро изменяющимся движением.

§ 3-7. ЛИНИЯ ТОКА И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СТРУЙКА

1. Линия тока. Рассмотрим установившееся и неустановившееся движения.

1. Установившееся движение. Линия тока при установившемся движении представляет собой неизменную во времени траекторию, вдоль которой одна за другой движутся частицы жидкости (см. линию $M''' - M'' - M' - 1 - 2$; рис. 3-7).

¹ Термин «медленно изменяющееся» движение ранее применялся в ином смысле: так называли движение, именуемое нами «плавно изменяющимся» (стр. 85).

2. Неустановившееся движение. Рассмотрим некоторый момент времени t_1 . Представим себе точку 1, скрепленную с пространством (рис. 3-8). Отложив по длине вектора u_1 , относящегося к этой точке, небольшой отрезок δs_1 , получим точку 2; далее по длине вектора скорости u_2 , относящегося к точке 2, отложим небольшой отрезок δs_2 ; при этом получим точку 3, и т.д. В результате такого построения имеем в общем случае ломаную линию 1-2-3... Подчеркнем, что скорости u_1, u_2, u_3, \dots относятся к рассматриваемому моменту времени t_1 .

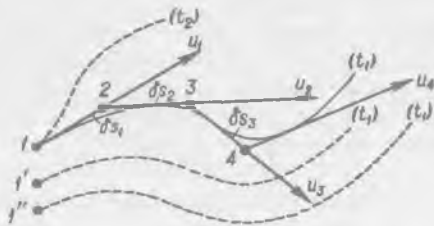


Рис. 3-8. Линии тока при неустановившемся движении

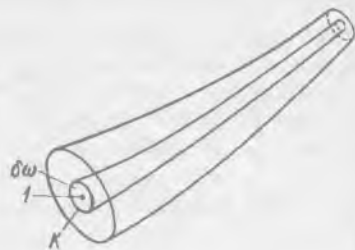


Рис. 3-9. Элементарная струйка, выделенная внутри потока

Если теперь длина отрезков δs будет стремиться к нулю, то в пределе вместо ломаной линии 1-2-3... получим кривую линию, проходящую через точку 1, причем эта кривая будет характеризоваться тем, что в данный момент времени t_1 во всех ее точках векторы скорости будут к ней касательны. Полученная кривая и называется линией тока.

Как видно, линия тока в случае неустановившегося движения есть кривая, проведенная внутри потока так, что в данный момент времени векторы скорости во всех точках этой кривой являются касательными к ней.

В следующий момент времени t_2 скорость в точке 1 может изменить свое направление. Поэтому в общем случае неустановившегося движения линия тока, отвечающая моменту t_2 , будет представлять собой уже совсем другую кривую.

Надо помнить, что в общем случае неустановившегося движения система линий тока, проведенных через начальные точки 1, 1', 1'',..., выражает только мгновенную картину движения жидкости (отвечающую определенному моменту времени).

Только в том частном случае, когда с течением времени скорости u изменяют лишь свою величину (направление остается постоянным), система линий тока при неустановившемся движении оказывается неизменной во времени; при этом линии тока и в случае неустановившегося движения являются траекториями частиц жидкости. Разумеется, в общем случае неустановившегося движения линии тока не будут представлять собой траекторий жидких частиц.

2°. Элементарная струйка. Представим на рис. 3-9 поток жидкости, наметим внутри потока точку 1 и у этой точки, как показано на рисунке, выделим элементарную площадку $\delta\omega$, ограниченную контуром K . Далее через все точки площадки $\delta\omega$ проведем линии тока, отвечающие определенному моменту времени.

Совокупность линий тока, проведенных через все точки элементарной площадки $\delta\omega$,¹ называется элементарной струйкой.² Элементарная струйка представ-

¹ Об элементарной площадке см. стр. 23.

² В математической гидромеханике термину «струйка» приписывают иногда несколько иной смысл.

плет собой как бы пучок линий тока. Можно сказать также, что элементарная струйка представляет собой часть движущейся жидкости, ограниченную системой линий тока, проведенных через все точки бесконечно малого простого замкнутого контура K , находящегося в области, занятой жидкостью.

В случае установившегося движения элементарная струйка обладает следующими тремя свойствами.

1. Так как линии тока (рис. 3-7) при установившемся движении жидкости с течением времени не меняют своей формы (являются «застывшими» во времени), то и струйка тока является неизменной во времени.

2. Так как боковая поверхность струйки образована линиями тока, вдоль которых одна за другой скользят жидкие частицы, то, следовательно, проникновение жидкости через боковую поверхность невозможно. Элементарная струйка как бы заключена в жесткие, не изменяющиеся во времени, водонепроницаемые стенки, не имеющие толщины.

3. Так как площадка $d\omega$ является элементарной, то величины u и r для всех точек данного поперечного сечения струйки следует считать одинаковыми. Однако вдоль струйки величины u и r в общем случае могут изменяться.

Далее в настоящей главе условимся рассматривать в основном только установившееся движение. Вопросам неустановившегося движения посвящена глава 9.

§ 3-8. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОЕ, ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ И РЕЗКО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЖИВОЕ СЕЧЕНИЕ, РАСХОД И СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ. ЭПЮРА СКОРОСТЕЙ

1. Параллельноструйное, плавно изменяющееся и резко изменяющееся движения. Можно различать частный случай потока, когда линии тока его являются строго параллельными прямыми. Такое движение жидкости назовем

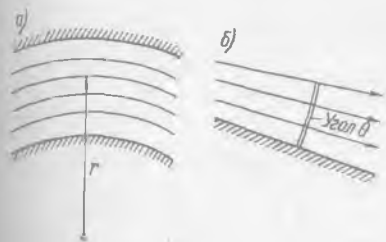


Рис 3-10. К пояснению плавно и резко изменяющегося движения

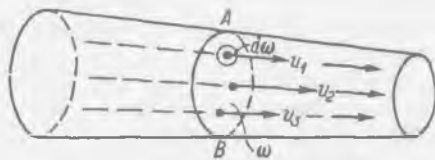


Рис. 3-11. Живое сечение $A - B$

параллельноструйным. Часто, однако, приходится сталкиваться с потоками, отличными от параллельноструйных. Рассматривая такого рода потоки, различаем так называемые плавно изменяющееся движение и резко изменяющееся движение.

Плавно изменяющимся движением называется движение, близкое к параллельноструйному¹. При плавно изменяющемся движении поток должен удовлетворять следующим двум условиям:

а) радиус r кривизны линий тока должен быть весьма велик (рис. 3-10, а);

¹ В устаревшей литературе плавно изменяющееся движение иногда называют медленно изменяющимся (см. сноску на стр. 83).

б) угол θ , образованный крайними линиями тока, рассматриваемого потока (или элементарной струйки), должен быть близок к нулю (рис. 3-10, б).

При несоблюдении этих двух условий или одного из них получаем движение, называемое резко изменяющимся.

2°. **Живое сечение.** Изобразим на рис. 3-11 поток жидкости и покажем внутри этого потока целый ряд линий тока. Проведем нормально к этим линиям тока¹ поверхность AB .

Поверхность AB , нормальная к линиям тока и лежащая внутри потока, называется живым сечением.

Площадь AB принято обозначать через ω (ω — площадь живого сечения).

При параллельноструйном движении живые сечения являются плоскими.

При плавно изменяющемся движении живые сечения должны быть близкими к плоским.²

Покажем на рис. 3-12 живое сечение AB ; в случае плавно изменяющегося движения это живое сечение должно иметь небольшую кривизну.

При расчетах плавно изменяющихся потоков всегда действительные несколько искривленные живые сечения заменяют плоскими расчетными живыми сечениями (см. на рис. 3-12 плоское расчетное живое сечение $A'B'$).

Действительная линия тока, проходящая через точку m живого сечения, будет ортогональна к действительному живому сечению AB . Разложим действительную скорость u , имеющуюся в точке m , на две составляющих: u_n , нормальную к сечению $A'B'$, и u_τ , лежащую в плоскости сечения $A'B'$. Можно сказать, что плавно изменяющееся движение есть такое движение, при котором величиной составляющей скорости u_τ и величиной составляющей ускорения w_τ , направленными вдоль плоского расчетного сечения, можно пренебречь и считать, что

$$u_n \approx u; \quad w_n \approx w,$$

где w — ускорение в точке m ; w_n — составляющая его, нормальная к сечению $A'B'$.

3°. **Расход жидкости.** Расходом жидкости называется объем ее, проходящий в единицу времени через живое сечение. Расход принято обозначать буквой Q . Размерность Q :

$$[Q] = \frac{L^3}{t},$$

например, m^3/c , dm^3/c (т. е. л/с) и т. п.

Если через $d\omega$ обозначить элементарную часть площади живого сечения, которое в общем случае представляет собой криволинейную поверхность, то

¹ Существуют системы кривых, к которым нельзя провести ортогональную поверхность. Такого рода системы линий тока рассматривать здесь не будем.

² Можно, однако, представить себе частный случай плавно и резко изменяющихся движений, когда и в этом случае живые сечения будут строго плоскими (случай движения в трубе, изогнутой по окружности при условии, если пренебрегаем «вторичными течениями», см. § 4-19).

элементарный расход, проходящий через площадку $d\omega$, выразится так:

$$dQ = u d\omega. \quad (3-29)$$

Поскольку скорости u в разных точках живого сечения в общем случае различны, то величину Q , исходя из выражения (3-29), можно представить в виде:

$$Q = \int_{\omega} u d\omega, \quad (3-30)$$

где интеграл берется по всей площади живого сечения ω (в общем случае криволинейного).

4°. Средняя скорость. Было отмечено, что скорости течения u в разных точках живого сечения, как правило, различны (рис. 3-11):

$$u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq \dots$$

Имея это в виду, для упрощения расчетов в случаях параллельноструйного и плавно изменяющегося движений вводят понятия средней для данного живого сечения скорости течения. Эту скорость (фиктивную, в действительности не существующую) принято обозначать через v . Скорость v определяется соотношением

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega} \quad \text{или} \quad v = \frac{Q}{\omega}, \quad (3-31)$$

откуда и ясен ее смысл. Как видно, v есть гидравлическая характеристика данного живого сечения потока.

Расход Q для данного живого сечения выражается согласно (3-31) формулой

$$Q = \omega v. \quad (3-32)$$

Подчеркнем, что понятием средней скорости v пользуются только при параллельноструйном и плавно изменяющемся движении, когда оперируют плоскими живыми сечениями (иногда, впрочем, понятием v пользуются также при решении так называемых осесимметричных задач; см., например, § 3-32, п. 4°).

5. Эпюра скоростей. Будем рассматривать поток, имеющий плоские живые сечения: наметим на рис. 3-13 вертикаль $M-N$, принадлежащую одному из живых сечений потока. Покажем векторами u_1, u_2, u_3, \dots скорости течения в различных точках этой вертикали. Соединив концы этих векторов линией ABM , получим фигуру $ABMN$, которая представляет характер распределения скоростей u по вертикали. Эта фигура называется эпюрой скоростей (построенной в данном случае для вертикали $M-N$).

Обозначим ее площадь через Ω и представим себе далее, что канал на рис. 3-13 имеет прямоугольное поперечное сечение шириной b , причем эпюры скоростей для любых вертикалей, взятых в плоскости рассматриваемого живого сечения, одинаковы. В этом случае величина Ωb дает расход:

$$Q = \Omega b; \quad (3-33)$$

величина же Ω , т. е. площадь эпюры скоростей, численно равна расходу, приходящемуся на единицу ширины канала:

$$\Omega = \frac{Q}{b}. \quad (3-34)$$

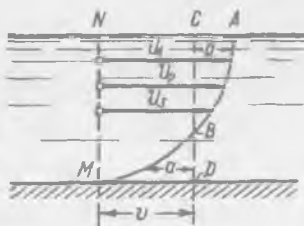


Рис. 3-13. Эпюра скоростей u (см. $ABMN$)
 v — средняя скорость

Проведем на рис. 3-13 линию $C-D$ с таким расчетом, чтобы площадь полученного прямоугольника $CDMN$ равнялась Ω . Ясно, что ширина этого прямоугольника даст величину средней скорости v .

В действительности эпюры скоростей для различных вертикалей $M-N$ не везде будут одинаковы (с приближением к берегам скорости уменьшаются). Поэтому в действительности «эпюра» скоростей, построенная для в сего живого сечения канала, будет представлять собой некоторое пространственное тело (объем которого дает величину Q).

§ 3-9. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (ИЛИ СПЛОШНОСТИ) ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В СЛУЧАЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ¹

1. **Случай резко изменяющегося движения жидкости.** Представим на рис. 3-14 поток (струю) жидкости и наметим два его живых сечения $1-1$ и $2-2$. Рассмотрим отсек $abcd$, заключенный между этими сечениями и ограниченный с боков поверхностью AB , образованной линиями тока. Будем считать, что этот отсек принадлежит пространству и является неподвижным, жидкость же протекает через него.

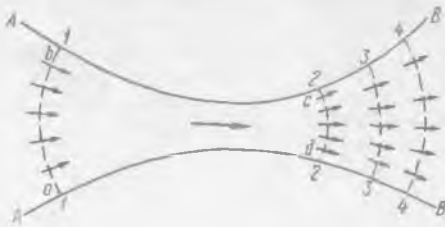


Рис. 3-14. К выводу уравнения (3-38)

Обозначим через Q_1 и Q_2 расходы соответственно для сечений $1-1$ и $2-2$. За время dt в отсек $abcd$ через живое сечение $1-1$ поступит объем жидкости, равный $Q_1 dt$; за это же время через живое сечение $2-2$ из отсека $abcd$ выйдет объем жидкости, равный $Q_2 dt$.

Учтем следующие три обстоятельства:

1) проникновение жидкости через боковую поверхность AB отсека $abcd$ невозможно, так как эта поверхность образована линиями тока (траекториями), вдоль которых одна за другой движутся частицы жидкости;

2) жидкость является несжимаемой;

3) жидкость движется сплошным потоком, без образования в нем разрывов (ограничимся рассмотрением только такого случая; вопросов кавитации, аэрации потока и т. п. [см. § 1-5] здесь касаться не будем).

Имея в виду эти три обстоятельства, можем утверждать, что объем жидкости $Q_1 dt$ должен быть равен объему жидкости $Q_2 dt$:

$$Q_1 dt = Q_2 dt \quad (3-35)$$

или

$$Q_1 = Q_2. \quad (3-36)$$

Помимо сечений $1-1$ и $2-2$, можно наметить целый ряд других живых сечений: $3-3$, $4-4$ и т. д. Рассматривая все эти сечения так же точно, как и сечения $1-1$ и $2-2$, можно прийти к выводу, что

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q = \text{const}, \quad (3-37)$$

т. е.

$$Q = \text{const (вдоль потока)}. \quad (3-38)$$

Как видно, если жидкость движется без образования разрывов, то при установившемся движении расход Q для всех живых сечений потока (ограничен-

¹ О случае неустановившегося движения см. гл. 9.

назо с боков линиями тока, т. е. при условии отсутствия бокового притока или оттока жидкости) одинаков.

Уравнение (3-38) и является искомым уравнением. Оно отражает свойства несжимаемости (см. выше п. 2) и неразрывности, другими словами, сплошности (см. выше п. 3) движущейся жидкости. Поэтому данное уравнение следовало бы называть уравнением несжимаемости и неразрывности (сплошности) движущейся жидкости. Мы, однако, будем далее именовать его просто уравнением неразрывности.

Заметим, что уравнение (3-38) можно распространить и на любые поперечные сечения потока (не обязательно только на его живые сечения); важно только, чтобы при поясненных выше условиях (см. пп. 1-3) рассматриваемые сечения полностью пересекали данный поток жидкости. При этом уравнение (3-38) можно переписать в виде: $Q = \text{const}$ (для всех поперечных сечений потока), где Q — объем жидкости, проходящей в единицу времени через любое поперечное сечение потока.

2°. Случай плавно изменяющегося и параллельноструйного движений жидкости. В этом случае оперируют плоскими живыми сечениями, причем величину Q выражают зависимостью (3-32). Имея это в виду, для плавно изменяющегося и параллельноструйного движений уравнение неразрывности (3-38) можно представить еще в виде

$$\omega v = \text{const (вдоль потока)}, \quad (3-39)$$

откуда получаем: $\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$ или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3-40)$$

Как видно, средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений потока.

Если бы вместо целого потока жидкости мы рассматривали только элементарную струйку его, то уравнения (3-39) и (3-40) для такой струйки следовало бы переписать в виде

$$\delta Q = u \delta \omega = \text{const (вдоль струйки)}; \quad (3-41)$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta \omega_2}{\delta \omega_1} \quad (3-42)$$

§ 3-10. УРАВНЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Представим на рис. 3-15 оси координат x и z ; ось y наметим перпендикулярно к плоскости чертежа. Возьмем некоторую неподвижную точку пространства A , определяемую координатами x , y , z .

Составляющие скорости u в точке A для определенного момента времени t обозначим через u_x , u_y , u_z .

Выделим у точки A элементарный параллелепипед ¹ $1-2-3-4$; бесконечно малые длины его сторон обозначим через dx , dy , dz (размер dy перпендикулярен к плоскости чертежа). Данный параллелепипед считаем как бы скрепленным с неподвижным пространством. Определим объем жидкости, поступившей в него за время dt , и объем жидкости, вышедшей из него (через его грани) за то же время dt .²

¹ Понятие элементарного объема (параллелепипеда) определяется аналогично понятию элементарной площадки (см. сноску на стр. 23).

² Предполагая, что внутри параллелепипеда каких-либо так называемых «источников» нет.

Если в точке A горизонтальная составляющая скорости равна u_x , то в точке M_1 , удаленной от точки A на расстояние $\frac{1}{2} dx$, горизонтальная составляющая скорости (с точностью до величин высшего порядка малости)

$$(u_x)_{M_1} = u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (3-43)$$

в точке же M_2 горизонтальная составляющая скорости

$$(u_x)_{M_2} = u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (3-44)$$

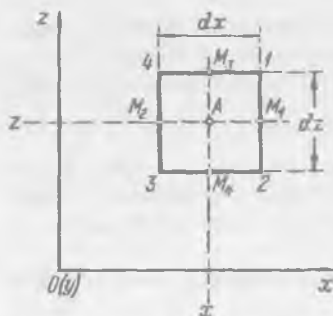


Рис. 3-15. К выводу уравнения (3-51)

где $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ представляет собой изменение величины u_x , приходящееся на единицу длины, измеренную вдоль линии M_1M_2 , параллельной оси Ox .

Объем жидкости, вышедшей из параллелепипеда за время dt через грань 1-2,

$$\delta W_1 = (u_x)_{M_1} dt dy dz = \left(u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dy dz dt, \quad (3-45)$$

где $dy dz$ — площадь грани 1-2.

Объем жидкости, вошедшей в параллелепипед за время dt через противоположную грань 3-4,

$$\delta W_2 = (u_x)_{M_2} dt dy dz = \left(u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dy dz dt. \quad (3-46)$$

Изменение объема жидкости в параллелепипеде за время dt за счет движения жидкости через две противоположные его грани 1-2 и 3-4 будет

$$\delta W_1 - \delta W_2 = \left(u_x + \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dy dz dt - \left(u_x - \frac{1}{2} dx \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dy dz dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz dt. \quad (3-47)$$

Аналогичные выражения можно написать для остальных двух пар противоположных граней параллелепипеда:

$$\delta W_3 - \delta W_4 = \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz dt; \quad (3-48)$$

$$\delta W_5 - \delta W_6 = \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz dt, \quad (3-49)$$

где индексами 3, 4, 5, 6 указаны объемы жидкости, протекающей за время dt через соответствующие грани параллелепипеда (третья и четвертая грани параллелепипеда параллельны плоскости чертежа; расход жидкости через эти грани определяется проекцией скорости u на ось y).

Считая жидкость несжимаемой (и полагая температуру ее неизменяющейся), можем написать:

$$(\delta W_1 - \delta W_2) + (\delta W_3 - \delta W_4) + (\delta W_5 - \delta W_6) = 0. \quad (3-50)$$

Подставим в эту зависимость выражения (3-47), (3-48) и (3-49); сокращая результаты на $dx dy dz dt$, окончательно получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3-51)$$

Это уравнение и может быть названо уравнением несжимаемости однородной движущейся жидкости (записанным в дифференциальной форме).

Уравнение (3-51) можно было бы вывести, подсчитывая не объемы жидкости, поступившей в элементарный параллелепипед и вышедшей из него, а массы этих объемов. При этом уравнение (3-51) оказалось бы «отнесенным к единице массы» (так же как и уравнение Эйлера; см. § 3-3).

Частные производные, входящие в (3-51), являются продольными (прямыми) производными (см. § 3-3). Из (3-51) ясно, что сумма трех продольных частных производных, вычисленных для любой точки пространства, занятого движущейся несжимаемой жидкостью, не может являться произвольной величиной. Эта сумма (для данного момента времени) всегда должна равняться нулю.

В случае газообразных тел (являющихся сжимаемыми) сумма продольных (прямых) частных производных может быть не равна нулю. Однако эта сумма (называемая скоростью объемного расширения газа) и здесь должна подчиняться определенному закону.

В отличие от уравнения неразрывности (см. § 3-9), уравнение несжимаемости жидкости (3-51) относится только к точке пространства, занятого движущейся жидкостью. Поэтому уравнение (3-51), строго говоря, не отражает условий сплошности (неразрывности) движущейся жидкости: при соблюдении соотношения (3-51) разрывы жидкости конечных размеров (например, кавитационные разрывы) вблизи рассматриваемой точки могут появляться. Несмотря на указанное обстоятельство, уравнение (3-51) часто в литературе называют, так же как и уравнение (3-38), уравнением сплошности (или неразрывности) движения жидкости.

§ 3-11. НЕРАВНОМЕРНОЕ И РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЯ. НАПОРНОЕ И БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЯ, СВОБОДНЫЕ СТРУИ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЖИВОГО СЕЧЕНИЯ. СВОДКА КЛАССИФИКАЦИЙ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

Г. Неравномерное и равномерное движения жидкости. Рассмотрим отдельно установившееся и неустановившееся движения.

1) Установившееся движение.

Представим на рис. 3-16 продольный разрез цилиндрического потока ($\omega = \text{const}$ вдоль течения). Наметим несколько расчетных плоских живых сечений этого потока и несколько прямых линий, параллельных стенкам, ограничивающим поток (эти линии не всегда будут линиями тока; см. ниже). Точки, принадлежащие одной и той же намеченной прямой линии и лежащие в разных живых сечениях (см. точки $1', 2', 3', \dots$, или $1'', 2'', 3'', \dots$ и т.д.), могут быть названы соответственными точками.



Рис. 3-16. Соответственные точки ($1', 2', 3', \dots; 1'', 2'', 3'', \dots$)

Неравномерным движением называется такое движение, при котором:

а) или живые сечения вдоль потока изменяют свою величину: $\omega \neq \text{const}$ (рис. 3-17);

б) или живые сечения вдоль потока сохраняют свою величину ($\omega = \text{const}$), но скорости в соответственных точках (u_1, u_2, u_3, \dots) оказываются неравными

друг другу: $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq \dots$. На рис. 3-18 представлен такой случай неравномерного движения. Для плоской задачи площадь Ω эпюр скоростей, показанных на рис. 3-18, разумеется, должна быть всюду одинаковой ($\Omega_1 = \Omega_2$), поскольку площадь Ω выражает величину расхода. Однако форма эпюр скоростей по длине потока изменяется, причем мы и получаем так называемое неравномерное движение жидкости.

Равномерным движением называется прямолинейное движение, при котором $\omega = \text{const}$ (поток имеет цилиндрическую форму), причем скорости u в соответственных точках одинаковы (по своему значению и по направлению). При равномерном движении эпюры скоростей для всех сечений имеют не только одинаковую площадь, но и совершенно одинаковую форму.



Рис. 3-17. Неравномерное движение

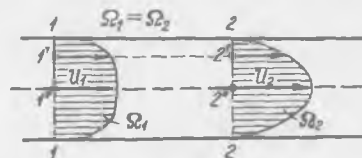


Рис. 3-18. Неравномерное движение в цилиндрическом трубопроводе

Равномерное движение является параллельноструйным движением (эти два термина, по существу, представляют собой как бы синонимы). Живые сечения при равномерном движении — плоские, причем средняя скорость v при таком движении всегда

$$v = \text{const} \text{ (вдоль потока)}. \quad (3-52)$$

Однако это условие является еще недостаточным для определения равномерного движения [в случае неравномерного движения, представленного на рис. 3-18, также удовлетворяется условие (3-52)].

Что касается неравномерного движения, то именно внутри этого вида движения следует различать:

- а) движение, плавно изменяющееся (когда расчетные живые сечения принимаются плоскими);
- б) движение, резко изменяющееся (когда живые сечения нельзя считать плоскими).

2) Неустановившееся движение.

Не следует смешивать понятие равномерного (или неравномерного) движения данной (одной) частицы жидкости с понятием одновременного равномерного (или неравномерного) движения множества «жидких частиц». Кроме того, необходимо учитывать, что при определении рассматриваемых понятий применительно к случаю неустановившегося движения исходят из представлений Эйлера (а не Лагранжа, см. § 3-2). В связи с этим, рассматривая векторное поле скоростей, отвечающее данному моменту времени, считают, что если это поле является так сказать однородным в отношении скоростей (т. е. в пределах данного поля векторы скоростей всюду одинаковы и по их значению и по их направлению), то такое движение может быть названо равномерным в данный момент времени; если же это поле скоростей является неоднородным, то отвечающее ему движение, естественно, должно быть названо неравномерным в данный момент времени.

Из сказанного ясно, что при неустановившемся «равномерном (в данный момент времени) движении жидкости» отдельные жидкие частицы движутся неравномерно во времени (согласно Лагранжу).

2°. Напорное и безнапорное движения жидкости, свободные струи. Представим на рис. 3-19, а и б две схемы поперечного сечения потока.

Напорным движением называется такое движение, при котором поток со всех боковых сторон ограничен твердыми стенками (рис. 3-19, а).

Безнапорным движением называется движение, характеризующееся наличием свободной поверхности (рис. 3-19, б).

Свободной струей жидкости называется поток (струя), вовсе не ограниченный твердыми стенками. Примером свободной струи может являться так называемая пожарная струя, выходящая из брандспойта.

3°. Гидравлические элементы живого сечения потока. Различают три основных гидравлических элемента живого сечения:

1) площадь живого сечения ω ;

2) смоченный периметр χ , представляющий собой периметр той части поперечного сечения русла, которая смочена движущейся жидкостью (см линию 1-2-3 на рис. 3-19, б; для круглого сечения на рис. 3-19, а величина $\chi = 2\pi r$, где r — радиус сечения);

3) гидравлический радиус:

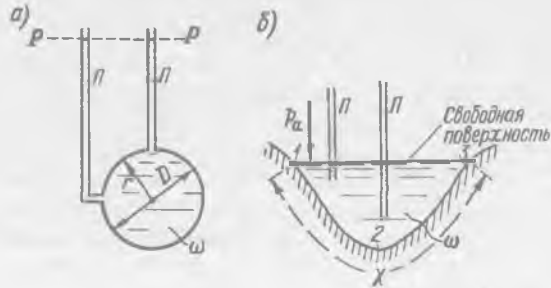


Рис. 3-19. Напорное (а) и безнапорное (б) движение

χ — смоченный периметр

$$R = \frac{\omega}{\chi} \quad (3-53)$$

Величина R не имеет особого физического смысла; при помощи этой величины пытаются приближенно учесть влияние формы (а также размеров) живого сечения потока на движение жидкости.

Для схемы на рис. 3-19, а

$$R = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{r}{2}, \quad (3-54)$$

где D — диаметр круглой напорной трубы.

Для круглого живого сечения гидравлический радиус равен половине геометрического радиуса.

При помощи гидравлического радиуса R в гидравлических расчетах удастся учесть некоторым приближением форму поперечного сечения русел сравнительно «правильного» очертания (круглого, трапециoidalного, приближающегося к круглому и трапециoidalному и т. п.), когда касательные напряжения τ_0 (см. далее § 2) распределяются достаточно равномерно вдоль смоченного периметра. В сечениях «неправильного» очертания (например, встречающегося в практике машиностроения — звездообразного сечения, характеризующегося наличием острых углов) гидравлический радиус непригоден для учета формы поперечного сечения русла.

4. Сводка классификаций видов движения жидкости. На протяжении предшествующего изложения был введен ряд классификаций видов движения жидкости (по различным признакам). Все эти классификации можно представить в следующем виде:

1-я классификация; здесь все возможные виды движения разбивались на две категории:

1) безвихревое (оно же потенциальное) движение, когда вращение элементарных частиц жидкости на бесконечно малом перемещении их отсутствует;

2) вихревое движение.

2-я классификация:

1) установившееся (стационарное) движение;

2) неустановившееся (нестационарное) движение: а) медленно изменяющееся и б) быстро изменяющееся.

Эту классификацию проводили по признаку зависимости движения жидкости от времени.

3-я классификация:¹

1) равномерное движение, оно же параллельноструйное ($v = \text{const}$, причем эпюра скоростей не деформируется вдоль потока);

2) неравномерное движение ($v \neq \text{const}$ или $v = \text{const}$, но эпюра скоростей деформируется вдоль потока); внутри этого вида движения различаем:

а) плавно изменяющееся движение (живые сечения принимаются плоскими);

б) резко изменяющееся движение (живые сечения криволинейны).

Здесь потоки классифицировались в зависимости от геометрической формы линий тока (с учетом вопроса о деформации эпюры скоростей вдоль потока).

Впрочем, вопрос о деформации эпюры скоростей вдоль потока сводится также к вопросу о геометрической форме линий тока: если учесть, что расход между двумя заданными линиями тока постоянен по длине, то легко понять, что линии тока для потока на рис. 3-18 не являются параллельными прямыми (участки эпюры скоростей в сечениях 1-1 и 2-2, лежащие между двумя рассматриваемыми линиями тока, должны иметь одинаковые площади, поскольку эти площади выражают расход).

4-я классификация:

1) напорное движение (рис. 3-19, а);

2) безнапорное движение (рис. 3-19, б);

3) свободные струи.

В дальнейшем нам придется столкнуться еще со следующими двумя классификациями.

5-я классификация (см. § 3-23).

1) ламинарный режим движения жидкости;

2) турбулентный режим движения жидкости;

6-я классификация (см. § 7-6), относящаяся только к безнапорному движению;

1) спокойное движение жидкости;

2) бурное движение жидкости.

Пользуясь приведенными шестью классификациями, можно достаточно точно определять тот или другой изучаемый вид движения жидкости.

Заметим, что следует различать еще 7-ю классификацию движений (в зависимости от характера, например, векторных полей скорости и ускорения):

Все виды движения жидкости, рассматриваемой как сплошная среда (континуум), являются пространственными (происходят в пространстве). Вместе с тем внутри пространственного движения можно различать, например, следующие частные случаи его (которые и составляют упомянутую седьмую классификацию):

¹ Здесь ограничиваемся кратким пояснением этой классификации только для случая установившегося движения.

1) плоско-параллельное движение (сокращенно говорят «плоское движение»); это движение должно одновременно удовлетворять двум условиям: а) в данный момент времени область движения можно пересечь такими плоскими параллельными поверхностями, в которых лежат векторы скоростей и ускорений, отвечающие всем точкам этих поверхностей; б) во всех точках любого перпендикуляра, проведенного к указанным поверхностям, скорости и ускорения в данный момент времени одинаковы (по величине и направлению);

2) осесимметричное движение (точнее плоско-осесимметричное движение); в этом случае в данный момент времени поле скоростей и ускорений имеет одинаковый вид для всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, являющуюся осью симметрии данного поля скоростей (векторы скоростей и ускорений здесь, разумеется, должны лежать в упомянутых выше плоскостях);

3) линейное движение — также частный случай пространственного (и иногда плоского) движения — когда гидромеханические параметры жидкости (скорость, давление) могут быть представлены для данного момента времени зависящими только от одной координаты пространства, отмеряемой обычно по известной нам оси потока (прямолинейной или криволинейной), вдоль которой изменяется состояние потока (т. е. скорость и давление); в направлениях, нормальных к этой оси, состояние потока считается неизменным.

Надо заметить, что иногда в указанных выше случаях вместо слова «движение» говорят «задача»: «плоская задача», «осесимметричная задача», «линейная задача», а также «пространственная задача»¹.

§ 3-12. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Для вывода уравнения Бернулли используем известную из механики теорему, касающуюся изменения кинетической энергии. Напомним, что эта теорема читается так: изменение кинетической энергии² рассматриваемого тела на некотором его перемещении равно сумме работ всех сил (внешних и внутренних), приложенных к данному телу, на том же перемещении.³

Возьмем элементарную струйку потока (рис. 3-20). Выделим сечениями 1-1 и 2-2 некоторый отсек струйки AB . Обозначим через z_1 и z_2 превышения сечений 1-1 и 2-2 над плоскостью сравнения OO , через $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_2$ — площади живых сечений струйки в сечениях 1-1 и 2-2.

Будем считать, что за время δt отсек AB струйки переместится в положение $A'B'$: при этом сечение 1-1 струйки переместится на расстояние δs_1 и

¹ С 7-й классификацией движений (т. е. физических явлений) не следует смешивать классификацию математических задач: «задача трехмерная», «задача двумерная», «задача одномерная». Здесь имеется в виду зависимость того или другого параметра потока (скорости, давления) соответственно от трех, двух или одной координат пространства. Для заданного случая движения жидкости та или другая математическая задача из названных выше часто получается в зависимости от принятой системы координат. Например, решение вопроса об осесимметричном движении при использовании прямоугольной системы декартовых координат может привести нас к трехмерной задаче; при использовании в этом же случае полярной системы координат — к двумерной (а иногда и к одномерной) задаче.

² Т. е. величины $\frac{Mv^2}{2}$, где M — масса тела и v — скорость его движения.

³ На стр. 4 и 39—41 было подчеркнуто, что повсеместное использование векторного представления скоростей и сил в гидравлике нерационально. Имея это в виду, мы, поясняя, в частности, уравнение Бернулли, не используем отмеченных представлений.

сечение 2-2 струйки — на расстояние δs_2 . Заметим, что

$$\delta s_1 = u_1 \delta t, \quad \delta s_2 = u_2 \delta t,$$

где u_1 и u_2 — скорости в сечениях 1-1 и 2-2.

Рассуждая, как и в § 3-9, можем показать, что объемы элементарных отсеков струйки AA' и BB' равны, т. е.

$$\text{объем } (AA') = \text{объему } (BB') = \delta V \text{ (обозначение),}$$

причем

$$\delta V = \delta \omega_1 \delta s_1 = \delta \omega_2 \delta s_2 = \delta Q \delta t,$$

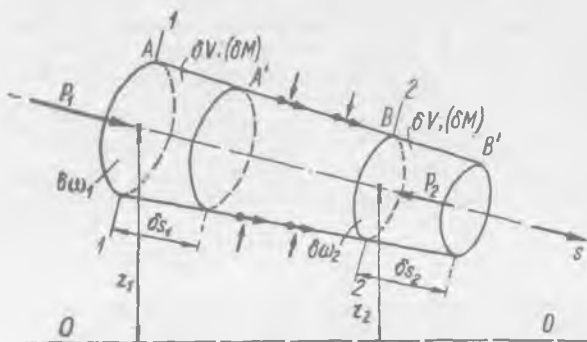


Рис. 3-20. К выводу уравнения (3-60)

где δQ — расход жидкости для струйки.

Обозначим массу элементарного объема δV через δM :

$$\delta M = \rho \delta V = \frac{\gamma}{g} \delta V, \quad (3-55)$$

где ρ — плотность жидкости.

Найдем теперь изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в положение $A'B'$ и работу сил, приложенных к этому отсеку, на указанном перемещении.

1°. Изменение кинетической энергии отсека AB при перемещении его в положение $A'B'$. Обозначим упомянутое изменение кинетической энергии ($KЭ$) через $\delta(KЭ)$. Тогда можно написать (см. рис. 3-20):

$$\begin{aligned} \delta(KЭ) &= KЭ(A'B') - KЭ(AB) = KЭ(A'B + BB') - \\ &- KЭ(AA' + A'B) = KЭ(BB') - KЭ(AA'), \end{aligned}$$

т. е.

$$\delta(KЭ) = \frac{u_2^2 \delta M}{2} - \frac{u_1^2 \delta M}{2},$$

или, учитывая (3-55),

$$\delta(KЭ) = \frac{\gamma}{g} \delta V \frac{u_2^2}{2} - \frac{\gamma}{g} \delta V \frac{u_1^2}{2} = \left(\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} \right) \gamma \delta V. \quad (3-56)$$

2°. Работа сил при перемещении отсека AB в положение $A'B'$. При указанном перемещении получаем работу следующих сил.

1. Работа силы тяжести. Как видно, эффект действия силы тяжести проявился как бы в том, что отсек AA' переместился в положение BB' (а отсек $A'B$ остался на месте). Пользуясь такой условной схемой, работу силы тяжести (PCT) получаем в виде

$$PCT = (z_1 - z_2) \gamma \delta V. \quad (3-57)$$

Справедливость (3-57) может быть обоснована и более строго.

Разбиваем отсек $A'B$ на элементарные отсеки объемом δV . Тогда исконая работа силы тяжести может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} PCT &= \gamma \delta V (z_1 - z') + \gamma \delta V (z' - z'') + \gamma \delta V (z'' - z''') + \dots + \\ &+ \gamma \delta V (z^{(n)} - z_2) = \gamma \delta V (z_1 - z_2), \end{aligned}$$

где $z, z'', z''', \dots, z^{(n)}$ — возвышения над плоскостью OO граничных сечений, выделяющих элементарные объемы δV .

2. Работа сил гидродинамического давления, действующего на торцовые сечения 1-1 и 2-2 отсека AB (со стороны окружающей его жидкости). Эта работа

$$P_{CD} = (p_1 \delta \omega_1) \delta s_1 - (p_2 \delta \omega_2) \delta s_2 = (p_1 - p_2) \delta V, \quad (3-58)$$

где p_1 и p_2 — гидродинамические давления соответственно в сечениях 1-1 и 2-2.

3. Работа внешних сил давления окружающей жидкости на боковую поверхность отсека AB . Эта работа равна нулю, так как силы направлены перпендикулярно к перемещениям жидких частиц, движущихся вдоль боковой поверхности отсека AB .

4. Работа внутренних сил давления (нормальных сил взаимодействия отдельных частиц жидкости, составляющих объем AB) Эти силы являются парными (противоположно направленными) с одинаковыми перемещениями. Сумма работ их равна нулю.

5. Работа внешних и внутренних сил трения равна нулю (силы трения в рассматриваемой нами идеальной жидкости отсутствуют).

3°. Окончательный вывод. Используя теорему изменения кинетической энергии, можем написать:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \gamma \delta V = (z_1 - z_2) \gamma \delta V + (p_1 - p_2) \delta V.$$

Разделим это выражение на $\gamma \delta V = \gamma \delta Q \delta t$, т. е. отнесем его к единице веса того объема жидкости, который проходит за время δt через живое сечение струйки. При этом полученное уравнение представим в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (3-59)$$

Так как сечения 1-1 и 2-2 были намечены произвольно, то (3-59) можно переписать также в виде:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const (вдоль струйки)}. \quad (3-60)$$

Уравнение (3-59) или (3-60), относящееся к элементарной струйке идеальной жидкости, называется уравнением Даниила Бернулли, который в 1738 г. описал (словесно) соотношение величин, входящих в данное уравнение в случае установившегося движения.

Обратим внимание еще на следующее:

1) уравнение Бернулли связывает величины z, p, u ;
 2) как видно из (3-60), в случае идеальной жидкости сумма трех слагаемых $\frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ является постоянной величиной вдоль рассматриваемой струйки;

3) если указанная постоянная величина для данной струйки равна A_1 , то для соседней струйки сумма приведенных трех слагаемых равняется A_2 , причем в общем случае $A_1 \neq A_2$;

4) зная для данной струйки постоянную величину A , а также зная для данного сечения струйки из трех величин (z, u, p) какие-либо две величины, мы можем, пользуясь уравнением Бернулли, найти третью неизвестную величину для рассматриваемого сечения струйки.

Выше мы рассматривали частный случай движения жидкости, когда на нее в качестве объемных сил действуют только силы тяжести. Однако уравнение (3-60) может быть получено и для любой системы объемных сил, но только такой, которая имеет потенциальную функцию (см. далее § 9-2, где дополнительно к силам тяжести при выводе уравнения Бернулли учитываются еще и объемные силы инерции, действующие на жидкость и имеющие потенциал).

Отмеченный более общий вывод уравнения (3-60) выполняется путем интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера, приведенных в § 3-3. В этом случае мы рассматриваем не элементарную струйку жидкости, что мы делали выше, а определенную ее линию тока, вдоль которой осуществляется интегрирование (в связи с этим уравнение Бернулли (3-60) называют иногда «интегралом Бернулли»)

Более подробное рассмотрение данного вопроса показывает, что уравнение Бернулли (интеграл Бернулли) в виде (3-60) оказывается справедливым (при соблюдении отмеченных выше условий):

а) как для безвихревого (потенциального) установившегося движения идеальной жидкости;

б) так и для вихревого установившегося движения идеальной жидкости.

Дополнительно можно доказать, что для упомянутого безвихревого движения жидкости величина A , о которой мы говорили выше, является одинаковой для всех линий тока, образующих поток жидкости: $A_1 = A_2 = A_3 = \dots$. В этом случае уравнение (3-60) оказывается справедливым для всей области, занятой жидкостью, а не только для определенной линии тока.

Необходимо еще подчеркнуть, что при рассмотрении вихревого движения жидкости под скоростью u , входящей в уравнение Бернулли, следует понимать (также как и в случае безвихревого движения) скорость, относящуюся к действительному векторному полю скоростей, отражающему рассматриваемое движение жидкости: к разложению движения на три его вида, поясненные в § 3-4, здесь обращаться не следует.

§ 3-13. ЗНАЧЕНИЯ ТРЕХ СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Координата z называется отметкой: z представляет собой возвышение рассматриваемого живого сечения струйки над горизонтальной плоскостью OO , которая называется плоскостью сравнения.

2. Член p/γ представляет собой пьезометрическую высоту, отвечающую гидродинамическому давлению p в точке. Можно сказать, что p/γ является высотой столба жидкости в пьезометре, приключенном к рассматриваемому живому сечению струйки.

3. Член $u^2/(2g)$ называется скоростным напором. Размерность этого слагаемого, так же как и размерность двух других слагаемых, линейная. Действительно,

$$\left[\frac{u^2}{2g} \right] = \left[\frac{L^2}{t^2} \right] \cdot \left[\frac{L}{L^2} \right] = [L],$$

где L — символ длины; t — символ времени.

Известно, что величина $u^2/(2g)$ представляет собой высоту, с которой в пустоте должно свободно (без начальной скорости)

упасть тело, чтобы приобрести скорость u . Величина $u^2/(2g)$ может быть измерена при помощи так называемой трубки Пито (рис. 3-21)¹, у которой

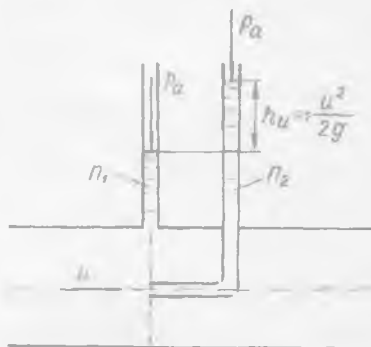


Рис. 3-21 Трубка Пито (P_2) и пьезометр (P_1)

¹ Иногда «трубкой Пито» называют измерительное устройство (прибор), состоящее из двух трубок P_2 и P_1 .

нижний конец загнут так, чтобы скорость u была направлена во входное отверстие трубки. Оказывается, что горизонт воды в трубке Π_2 устанавливается выше горизонта воды в трубке Π_1 на величину

$$h_u = \frac{u^2}{2g}. \quad (3-61)$$

Измерив величину h_u , находим скорость u в рассматриваемой точке:

$$u = \sqrt{2gh_u}; \quad (3-62)$$

надо, однако, заметить, что полученная формула дает обычно некоторую погрешность. Практически данную формулу переписывают в виде

$$u = \varphi \sqrt{2gh_u}, \quad (3-63)$$

где φ — поправочный коэффициент, который находится для данной трубки Пито путем ее тарирования.

§ 3-14. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. ПОЛНЫЙ НАПОР ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ

Представим на рис. 3-22 элементарную струйку идеальной жидкости; наметим два живых сечения ее (1 — 1 и 2 — 2), возвышающиеся над плоскостью сравнения OO на z_1 и z_2 ; через точки a_1 и a_2 , принадлежащие этим

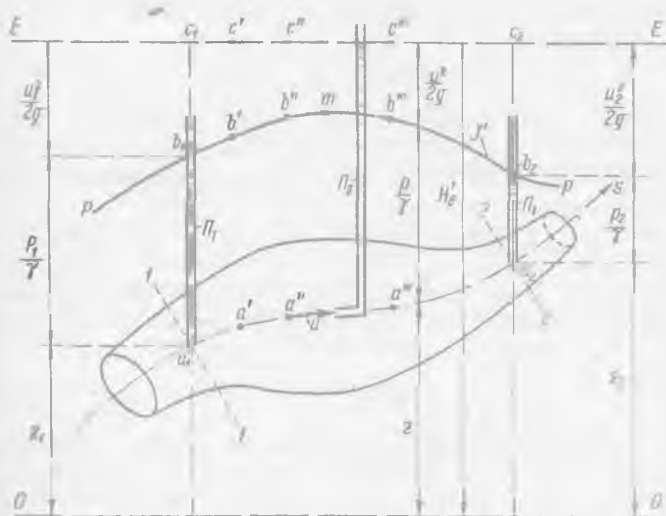


Рис. 3-22. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости
 $O-O$ — плоскость сравнения; $P-P$ — пьезометрическая линия,
 $E-E$ — напорная линия, H_e — полный напор, J' — пьезометрический уклон

сечениям, проведем вспомогательные вертикали. К этим точкам a приключим пьезометры Π_1 ; через b_1 и b_2 обозначим точки пересечения горизонтов жидкости в этих пьезометрах и вспомогательных вертикалей; от этих точек b отложим вверх соответствующие величины скоростных напоров $u^2/(2g)$, причем получим

точки c_1 и c_2 . На оси струйки s наметим целый ряд точек a (a', a'', \dots), после чего отметим на чертеже соответствующие точки b и c ($b', b'', \dots; c', c'', \dots$), имеющие тот же смысл, что и точки b_1, b_2, c_1, c_2 .

Дадим следующие четыре определения:

1. Линия $P-P$, проходящая по точкам b и, следовательно, возвышающаяся на величину p/γ над осью струйки, называется пьезометрической линией. Можно сказать, что пьезометрическая линия проходит по горизонтам жидкости в пьезометрах Π_1 , установленных вдоль оси струйки.

2. Линия $E-E$, проходящая по точкам c и, следовательно, возвышающаяся над линией $P-P$ на величину скоростного напора, называется напорной линией. Можно сказать, что напорная линия проходит по горизонтам жидкости в трубках Пито Π_2 , установленных вдоль оси струйки.

3. Пьезометрическим уклоном J' струйки в данном ее сечении называется элементарное падение $\left[d \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \right]$ пьезометрической линии $P-P$, отнесенное к соответствующей элементарной длине (ds) струйки (отмеренной по ее оси):

$$J' = - \frac{d(z + p/\gamma)}{ds} \quad (3-64)$$

Минус в данном соотношении поставлен с той целью, чтобы величины J' для участка линии $P-P$, поднимающейся вверх, получить отрицательными, а для участка линии $P-P$, опускающейся вниз (см. участок этой линии правее точки m), получить положительными. Следует запомнить, что пьезометрический уклон положителен, если линия $P-P$ понижается по течению струйки.

4. Полный напор H'_e представляет собой сумму трех членов:¹

$$H'_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \quad (3-65)$$

С геометрической точки зрения H'_e является возвышением напорной линии над плоскостью сравнения.

Для идеальной жидкости имеем соотношение (3-60). Отсюда заключаем, что в случае такой жидкости напорная линия должна лежать в плоскости, параллельной плоскости сравнения. Другими словами, при движении идеальной жидкости напорная линия лежит в горизонтальной плоскости; величина же полного напора H'_e является постоянной вдоль струйки:

$$H'_e = \text{const (вдоль струйки)} \quad (3-66)$$

К правой и левой частям уравнения Бернулли (3-59) можно прибавить одну и ту же величину p_a/γ . При этом вместо давлений p_1 и p_2 , входящих в данное уравнение, получим давления $(p_1 + p_a)$ и $(p_2 + p_a)$. Как видно, под величинами p/γ в уравнении Бернулли можно понимать не только пьезометрическую высоту, отвечающую избыточному давлению p , но также и пьезометрическую высоту, отвечающую абсолютному давлению p_a . Поэтому, выполняя чертеж на рис. 3-22, мы могли бы пользоваться не открытыми, а закрытыми трубками Π_1 и Π_2 ; при этом линии $P-P$ и $E-E$ расположились бы на чертеже выше (на величину p_a/γ) соответствующих линий $P-P$ и $E-E$, найденных при помощи открытых трубок Π_1 и Π_2 . Надо отметить, однако, что в практике обычно оперируют величинами p/γ , а не величинами p_a/γ (что мы выше и имели в виду).

¹ Значком «прим» (*) обозначаются (как здесь, так и ниже) величины, относящиеся к элементарной струйке.

§ 3-15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ
 ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ
 ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим три слагаемых, составляющих полный напор [см. (3-65)], с энергетической точки зрения. Как известно из гидростатики, первые два слагаемых представляют собой потенциальный напор:

$$H = z + \frac{p}{\gamma}, \quad (3-67)$$

т. е. удельную энергию потенциальную, являющуюся мерой потенциальной энергии, принадлежащей единице веса жидкости (в данном случае единице веса жидкости, проходящей через данное живое сечение элементарной струйки).

Третье, новое слагаемое $u^2/(2g)$ — скоростной (кинетический) напор — представляет собой удельную энергию кинетическую, т. е. меру кинетической энергии, принадлежащей единице веса жидкости (также проходящей через данное живое сечение струйки)¹. Чтобы убедиться в этом, возьмем массу жидкости M , движущуюся со скоростью u . Вес этой массы равен Mg , где g — ускорение силы тяжести. Энергия кинетическая (ЭК) массы M

$$(ЭК) = \frac{Mu^2}{2};$$

энергия кинетическая, отнесенная к единице веса массы M , т. е. удельная энергия кинетическая

$$(УЭК) = \frac{(ЭК)}{\text{вес}} = \frac{(ЭК)}{Mg} = \frac{Mu^2}{2Mg} = \frac{u^2}{2g}.$$

Как видно, полный напор H_e представляет собой сумму двух напоров: потенциального напора и скоростного (кинетического) напора $h_u = u^2/(2g)$. Можно сказать также, что полный напор представляет собой сумму трех напоров: геометрического z , напора давления p/γ и скоростного напора $u^2/(2g)$, причем сумма первых двух напоров равна удельной энергии потенциальной (УЭП). Энергетическое выражение полного напора можно представить следующей записью:

$$H_e = \underbrace{z}_{\text{УЭП}} + \underbrace{\frac{p}{\gamma}}_{\text{УЭП}} + \underbrace{\frac{u^2}{2g}}_{(УЭК)} = \text{УЭП} + (УЭК) = \text{УЭП полная}.$$

Отсюда видно, что полный напор H_e (полную удельную энергию) для элементарной струйки следует рассматривать как меру полной механической энергии, принадлежащей единице веса жидкости, проходящей через данное поперечное сечение струйки. Достаточно H_e умножить на вес жидкости, равный $\gamma \delta Q dt$, и мы получим полную величину механической энергии, пронесимой жидкостью через рассматриваемое поперечное сечение струйки за время dt ; как видно, здесь жидкость рассматривается как носитель энергии: она переносит энергию от сечения к сечению.

Согласно Бернулли, для идеальной жидкости имеем соотношение (3-66); следовательно, можно утверждать, что удельная полная механическая энергия, несомая жидкостью, является постоянной вдоль элементарной струйки, если жидкость идеальная. Отдельные удельные энергии вдоль струйки могут изменять свою величину, но сумма их вдоль струйки идеальной жидкости

¹ Можно показать, что $u^2/(2g)$ является потенциальной функцией векторного поля конвективных ускорений частиц жидкости.

должна быть неизменной. Как видно, рассмотренное уравнение Бернулли выражает известный закон сохранения энергии, примененный к случаю движения жидкости (когда жидкость идеальная, движение установившееся, расход жидкости постоянен по течению).

§ 3-16. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ. «ДИФфуЗИЯ» МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ БОКОВУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ¹

Реальная вязкая жидкость характеризуется наличием сил трения, которые возникают при ее движении. Силы трения в потоке жидкости, состоящем из множества элементарных струек, играют двоякую роль:

во-первых, благодаря работе сил трения часть механической энергии жидкости переходит в тепло, которое рассеивается; это обстоятельство должно способствовать уменьшению вдоль струйки (по течению) механической энергии, проносимой жидкостью через поперечные сечения струйки.

во-вторых, в связи с наличием сил трения между отдельными элементарными струйками создаются такие условия, при которых (в общем случае) механическая энергия одной струйки передается другой (соседней) струйке; получается «диффузия» механической энергии через боковые поверхности струек; в результате возникает поток энергии, движущейся поперек потока жидкости. Существенно подчеркнуть, что такая передача энергии может осуществляться без передачи вещества (материи), т.е. жидкости, от одной струйки к другой (соседней струйке).

Вопрос о передаче механической энергии через боковую поверхность движущегося тела (без передачи вещества) легко пояснить на следующем примере. Представим себе, что на поверхности стола лежит небольшая тонкая доска, на которую человек положил руку (ладонь) и передвигает рукой эту доску равномерно по поверхности стола. За счет сил трения между доской и столом кинетическая энергия доски должна уменьшиться, причем движение доски должно замедляться. Однако это движение не замедляется, так как через поверхность соприкосновения руки и доски благодаря силам трения передается энергия от руки к доске (без передачи «вещества»).

Как показывает подробное рассмотрение этого вопроса, движение (поперечная «диффузия») энергии, например, в горизонтальной напорной трубе происходит от центральной части потока к стенкам русла. За счет этого обстоятельства (см. далее § 4-13) удельная энергия центральных струек соответственно уменьшается по их длине (на некоторую величину $h'_{\Delta E}$); удельная же энергия периферийных (пристенных) струек соответственно возрастает (на величину $h'_{\Delta E}$).

¹ Д. Бернулли не рассматривал реальную жидкость; величина h'_r , о которой говорится ниже, была введена в рассматриваемое уравнение другими авторами. Насколько нам известно, вопрос о поперечной (по отношению к потоку жидкости) «диффузии» энергии впервые в достаточно ясной форме осветили в печати Б. А. Бахметев и В. Алэн (см. Bakhmeteff B. A. and Allan W. The Mechanism of Energy Loss in Fluid Friction. Transactions ASCE, vol. 11, 1946, p. 1043 - 1102).

Правильный вид «уравнения Бернулли» для элементарной струйки реальной жидкости [с дополнительным членом ($h'_{\Delta E}$)] впервые был опубликован в нашем учебнике «Гидравлика», издания 1970 г.

Учитывая сказанное, видим, что механическая энергия рассматриваемой элементарной струйки реальной жидкости должна вдоль течения изменяться (в общем случае) за счет двух различных обстоятельств:

а) за счет работы внутри данной струйки сил трения;

б) за счет «диффузии» механической энергии через боковую поверхность струйки, что учитывается поясненной выше величиной $\pm h'_{\Delta E}$.

Имея это в виду, а также учитывая пояснения, приведенные в § 3-15, уравнение баланса энергии для элементарной струйки реальной жидкости следует записать в виде

$$H'_{e1} = H'_{e2} \pm h'_{\Delta E} + h'_f, \quad (3-68)$$

или в виде см. (3-65)

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \pm h'_{\Delta E} + h'_f,} \quad (3-69)$$

где H'_{e1} и H'_{e2} — соответственно удельные энергии (полные) для живых сечений струйки 1-1 и 2-2 (живое сечение 1-1 расположено выше по течению сечения 2-2); h'_f — мера полной механической энергии, теряемой (переходящей в тепло в связи с работой сил трения) единицей веса жидкости при перемещении ее вдоль данной элементарной струйки от живого сечения 1-1 до живого сечения 2-2. Можно сказать, что h'_f есть потеря удельной энергии, обусловленная трением.

Величину h'_f назовем «потерей напора на трение»; величину же $h'_{\Delta E}$ — «диффузионным изменением напора». Сумму величин

$$h'_f \pm h'_{\Delta E} = H'_{e1} - H'_{e2} = \delta H'_e,$$

по-видимому, рационально именовать «полным изменением напора» (для данной элементарной струйки реальной жидкости). Легко видеть, что величина $\delta H'_e$ для всех элементарных струек, составляющих поток жидкости в достаточно длинной напорной трубе (при истечении под уровень) является одинаковой (равной разности уровней жидкости в двух рассматриваемых сосудах, соединяемых данной трубой). Следует еще отметить, что величина суммы положительных и отрицательных значений $h'_{\Delta E}$, подсчитанных для всех струек, составляющих данный поток жидкости, всегда, разумеется, должна равняться нулю

$$\sum h'_{\Delta E} = 0.$$

Только для некоторых струек можем получить $h'_{\Delta E} = 0$, причем уравнение (3-69) для этих струек запишется в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_f, \quad (3-70)$$

где h'_f в данном частном случае оказывается равным

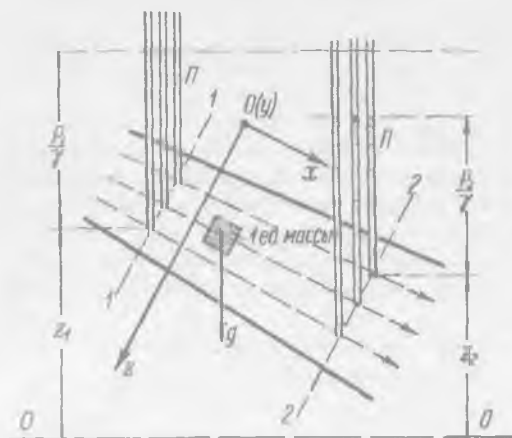
$$h'_f = H'_{e1} - H'_{e2}. \quad (3-71)$$

Пояснив таким образом уравнение Бернулли (3-69), относящееся к одной элементарной струйке реальной жидкости, далее распространим это уравнение на целый поток реальной жидкости, состоящий из множества струек. Однако прежде чем обратиться к этой задаче, остановимся вначале (в § 3-17 и 3-18) на рассмотрении двух вспомогательных положений, используемых при переходе от элементарной струйки к целому

потoku. Дополнительно в § 3-19 рассмотрим еще понятие о полном напоре, относящемся к целому потоку.¹

§ 3-17. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ЖИВЫХ СЕЧЕНИЯХ ПОТОКА ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТРУЙНОМ И ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ (ПЕРВОЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим случай установившегося движения, причем будем считать, что объемными силами, действующими на жидкость, являются только силы тяжести. Напомним, что при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях расчетные живые сечения являются плоскими (§ 3-8, п. 2°).



Представим на рис. 3-23 плавно изменяющийся поток, причем наметим два плоских живых сечения 1-1 и 2-2; к различным точкам этих сечений присоединим пьезометры П. Как показывает опыт, в случае указанного движения горизонт воды во всех пьезометрах П, присоединенных к разным точкам одного и того же сечения (например, сечения 1-1), устанавливается на одном и том же уровне. Для различных точек данного живого сечения величины z и p/γ имеют разное значение, однако сумма их постоянна:

Рис. 3-23. Распределение давления в плоских живых сечениях

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const} \quad (\text{для данного живого сечения}), \quad (3-72)$$

если движение жидкости плавно изменяющееся или параллельноструйное.

В другом живом сечении (например, в сечении 2-2) сумма $z + \frac{p}{\gamma}$ будет иная, но постоянная для всех точек этого сечения. Выражение (3-72) можно прочесть так: при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях сумма отметки z и пьезометрической высоты $\frac{p}{\gamma}$ для всех точек данного плоского живого сечения постоянна.

Вспомним понятие потенциального напора:

$$H = z + \frac{p}{\gamma}. \quad (3-73)$$

¹ Отметим, что «интеграл Бернулли» (см. конец § 3-12) относится только к линии тока, которая не имеет тела. Поэтому геометрическая интерпретация «Интеграла Бернулли» должна осуществляться для реальной жидкости без учета энергетических соображений, поясненных выше. Именно в связи с этим «Интегралом Бернулли», как правило, нерационально пользоваться в технической механике жидкости.

Ранее было доказано (§ 2-8), что в случае покоящейся жидкости

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (по всему объему)}. \quad (3-74)$$

Таков закон гидростатики. Как видно, этот закон в случае гидродинамики относится только к живым сечениям; в связи с этим часто говорят так: *при параллельноструйном и плавно изменяющемся движениях жидкости распределение давления в данном плоском живом сечении потока следует гидростатическому закону*. В этом и заключается первое вспомогательное положение, которое понадобится нам при переходе от элементарной струйки к целому потоку.

Данное положение можно обосновать и теоретически, пользуясь дифференциальными уравнениями движения (3-6). Располагая оси координат так, чтобы оси Oy и Oz лежали в плоскости, параллельной живым сечениям (а ось Ox была направлена вдоль течения), можем написать

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{du_z}{dt} = 0, \quad (3-75)$$

поскольку эти выражения представляют собой составляющие ускорений, лежащих в плоскости живых сечений; величиной же таких составляющих в случае плавно изменяющегося движения мы должны пренебрегать (см. § 3-8, п. 2°).

При наличии соотношений (3-75) два последних дифференциальных уравнения Эйлера (3-6) переписутся в виде

$$\phi_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \phi_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3-76)$$

Эти два уравнения движения ничем не отличаются от соответствующих двух дифференциальных уравнений равновесия жидкости (см. § 2-3). Так как именно уравнениям (3-76) подчиняется распределение давления в плоскости живых сечений, то заключаем, что в этих сечениях при плавно изменяющемся, а также при параллельноструйном движении, давление будет распределяться так же, как и в покоящейся жидкости.

Здесь необходимо сделать следующую оговорку. Уравнения движения (3-6) были получены для идеальной жидкости. Поток же, представленный на рис. 3-23, образован реальной жидкостью, отличающейся от идеальной наличием сил трения. Однако влиянием сил трения в данном случае можно пренебречь. Поэтому уравнения (3-76) здесь оказываются справедливыми и для реальной (вязкой) жидкости.

§ 3-18. ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ ПО ПЛОСКОМУ ЖИВОМУ СЕЧЕНИЮ НА ВЕЛИЧИНУ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И ВЕЛИЧИНУ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НЕКОТОРОЙ МАССЫ ЖИДКОСТИ, ПРОТЕКАЮЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННОЕ ЖИВОЕ СЕЧЕНИЕ (ВТОРОЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим две разные схемы потока, имеющего плоские живые сечения; схему a (рис. 3-24), на которой изображен продольный разрез действительного потока, характеризуемого неравномерным распределением скоростей по живому сечению AB , и схему b (рис. 3-24), на которой изображен продольный разрез соответствующего расчетного (условного) потока, характеризуемого тем обстоятельством, что все частицы жидкости проходят через соответствующее живое сечение $A'B'$ с одинаковой скоростью, равной средней скорости v (размеры живых сечений AB и $A'B'$ и расходы Q данных потоков считаются одинаковыми).

Обозначим через $KД (M)$ и $КЭ (M)$ соответственно количество движения и кинетическую энергию некоторой массы M жидкости, проходящей через живое сечение AB за время dt (рис. 3-24, a). Через $[KД (M)]_{ср}$ и

$[KЭ(M)]_{\text{ср}}$ обозначим соответственно количество движения и кинетическую энергию той же массы M жидкости, проходящей через живое сечение $A'B'$ за то же время dt (рис. 3-24, б).

Как видно, величины $KД(M)$ и $KЭ(M)$ должны подсчитываться в предположении, что скорости u в разных точках рассматриваемого живого сечения различны (см. схему а); величины $KД(M)$ и $KЭ(M)$ будем называть действительными. Величины же $[KД(M)]_{\text{ср}}$ и $[KЭ(M)]_{\text{ср}}$ должны подсчитываться в предположении, что скорости u во всех точках рассматриваемого живого сечения одинаковы и равны средней скорости v (см. схему б); величины $[KД(M)]_{\text{ср}}$ и $[KЭ(M)]_{\text{ср}}$ условно будем называть «средними» (вычисленными по средней скорости v).

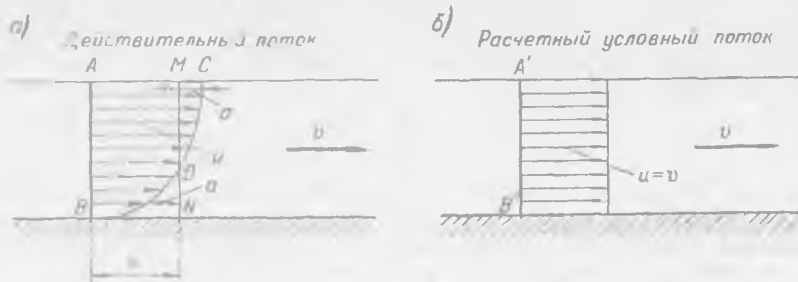


Рис. 3-24. К вопросу о коэффициентах α_0 и α

Наша задача должна заключаться в количественном сопоставлении величин $KД$ или $KЭ$, найденных для схемы а и схемы б. Другими словами, мы должны выяснить вопрос о том, как влияет неравномерность распределения скоростей по живому сечению (см. схему а) на величины $KД$ и $KЭ$ массы M , найденные исходя из рассмотрения схемы б. Данный вопрос будет решен, если мы найдем величины отношений:

$$KД(M) : [KД(M)]_{\text{ср}} \text{ и } KЭ(M) : [KЭ(M)]_{\text{ср}}.$$

Обращаясь к рассмотрению этого вопроса, выпишем предварительно следующие соотношения, справедливость которых должна быть ясна из предыдущего изложения [см. формулы (3-29), (3-30), (3-31)]:

$$dQ = u d\omega; \quad Q = \int_{\omega} u d\omega = v\omega; \quad (3-77)$$

$$dV = dt dQ; \quad V = dt \int_{\omega} u d\omega = v\omega dt; \quad (3-78)$$

$$dM = \rho dV = \rho u d\omega dt; \quad (3-79)$$

$$M = \rho dt \int_{\omega} u d\omega = \rho v\omega dt. \quad (3-80)$$

Здесь: $d\omega$ — площадь элементарной площадки живого сечения; v — средняя скорость; V — объем жидкости, проходящей за время dt через живое сечение; M — масса этого объема

1°. Влияние неравномерности распределения скоростей u по плоскому живому сечению на количество движения ($KД$) массы M . Действительное количество движения массы dM :

$$KД(dM) = u dM = \rho u^2 d\omega dt. \quad (3-81)$$

Действительное количество движения массы M :

$$KД(M) = \int_{\omega} KД(dM) = \rho dt \int_{\omega} u^2 d\omega. \quad (3-82)$$

«Среднее» количество движения массы M :

$$[KД(M)]_{\text{ср}} = vM = v(\rho v\omega dt) = \rho v^2\omega dt. \quad (3-83)$$

Существенно подчеркнуть, что ¹

$$KД(M) > [KД(M)]_{\text{ср}}. \quad (3-84)$$

Действительно,

$$KД(M) = \rho dt \int_{\omega} u^2 d\omega = \rho dt \int_{\omega} (v + a)^2 d\omega, \quad (A)$$

где a есть положительная или отрицательная величина, переменная по живому сечению, $a = u - v$ (см. рис. 3-24, а).

Из рассмотрения этого чертежа видно, что

$$\int_{\omega} a d\omega = 0, \quad (Б)$$

коль скоро площадь MCD должна равняться площади BDN . Имея это в виду, выражение (A) можно представить так:

$$\begin{aligned} KД(M) &= \rho dt \left[\int_{\omega} v^2 d\omega + 2 \int_{\omega} v a d\omega + \int_{\omega} a^2 d\omega \right] = \rho dt \left[v^2 \int_{\omega} d\omega + 2v \int_{\omega} a d\omega + \int_{\omega} a^2 d\omega \right] = \\ &= \rho dt \left[v^2\omega + \int_{\omega} a^2 d\omega \right] = \rho v^2\omega dt + \rho dt \int_{\omega} a^2 d\omega = [KД(M)]_{\text{ср}} + \rho dt \int_{\omega} a^2 d\omega, \end{aligned}$$

где последнее слагаемое всегда является положительным и обращается в нуль, только когда $a = 0$, т. е. когда $u = v$ (имеем равномерное распределение действительных скоростей по живому сечению); это положение и подтверждает справедливость (3-84).

Разделим (3-82) на (3-83):

$$\frac{KД(M)}{[KД(M)]_{\text{ср}}} = \frac{\int_{\omega} u^2 d\omega}{v^2\omega} = \alpha_0 \text{ (обозначение)}. \quad (3-85)$$

Пользуясь введенным обозначением α_0 , можем написать:

$$\int_{\omega} u^2 d\omega = \alpha_0 v^2\omega; \quad (3-86)$$

$$KД(M) = \alpha_0 [KД(M)]_{\text{ср}} = \alpha_0 \rho v^2\omega dt = \alpha_0 \rho v Q dt. \quad (3-87)$$

Из (3-87) ясно, что действительная величина количества движения массы жидкости M , проходящей за время dt через рассматриваемое живое сечение, равна условной («средней») величине количества движения (подсчитанной в предположении, что все частицы жидкости проходят данное живое сечение с оди-

¹ Т. е., например, всегда имеем: $(a^2 + b^2 + c^2) \geq d^2 + d^2 + d^2$, где $d = \frac{a + b + c}{3}$.

наковой скоростью v), умноженной на некоторый безразмерный поправочный коэффициент α_0 . Следует запомнить, что поправочный коэффициент α_0 равен отношению действительного количества движения к «среднему» количеству движения массы M .

2°. Влияние неравномерности распределения скоростей u по плоскому живому сечению на кинетическую энергию (КЭ) массы M . Действительная кинетическая энергия массы dM [см. (3-79)]:

$$КЭ (dM) = \frac{u^2 dM}{2} = \frac{1}{2} \rho u^3 d\omega dt. \quad (3-88)$$

Действительная кинетическая энергия всей массы M :

$$КЭ (M) = \frac{1}{2} \rho dt \int_{\omega} u^3 d\omega. \quad (3-89)$$

«Средняя» (условная) кинетическая энергия массы M :

$$[КЭ (M)]_{cp} = \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2} \rho v^3 \omega dt. \quad (3-90)$$

Подчеркнем, что ¹

$$КЭ (M) > [КЭ (M)]_{cp}. \quad (3-91)$$

Разделим (3-89) на (3-90):

$$\frac{КЭ (M)}{[КЭ (M)]_{cp}} = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \alpha \text{ (обозначение)}. \quad (3-92)$$

Пользуясь введенным обозначением α , можем написать:

$$\int_{\omega} u^3 d\omega = \alpha v^3 \omega; \quad (3-93)$$

$$КЭ (M) = \alpha [КЭ (M)]_{cp} = \alpha \frac{1}{2} \rho v^3 \omega dt. \quad (3-94)$$

Из (3-94) ясно, что действительная кинетическая энергия массы жидкости M , проходящей за время dt через рассматриваемое живое сечение, равна условной («средней») кинетической энергии (подсчитанной исходя из средней скорости v), умноженной на некоторый безразмерный поправочный коэффициент α . Следует запомнить, что поправочный коэффициент α равен отношению действительной кинетической энергии к «средней» кинетической энергии массы M .

3°. Численные значения коэффициентов α_0 и α . Можно показать [см., например, пояснения, относящиеся к формуле (3-84)], что α_0 и α всегда больше единицы; только при равномерном распределении скорости u по живому сечению, что в практике встречается очень редко, α_0 и α оказываются равными единице. Чем больше неравномерность распределения скоростей по живому сечению, тем больше значения α_0 и α .

При равномерном движении жидкости (см. § 3-11, п. 1°) α_0 и α , установленные на основании опытов, часто оказываются равными:²

$$\alpha_0 \approx 1,03 \div 1,05; \quad \alpha \approx 1,10 \div 1,15.$$

¹ Доказательство этого положения аналогично доказательству положения (3-84).

² Эти численные значения α и α_0 имеют место в случае так называемого турбулентного режима движения жидкости (см. § 3-23).

При неравномерном движении значения α_0 и α могут иногда значительно отличаться от единицы. Вместе с тем очень часто в практике мы встречаем такие случаи движения жидкости, когда α_0 и α все же достаточно близки к единице. Поэтому при выполнении гидравлических расчетов коэффициенты α_0 и α часто принимаются равными единице, т. е. при расчетах их вовсе не учитывают.

Коэффициенты α_0 и α удобно именовать: α_0 — *коррективом количества движения потока* и α — *коррективом кинетической энергии потока*. Иногда их называют: α_0 — коэффициентом Буссинеска и α — коэффициентом Кориолиса.

§ 3-19. ПОЛНЫЙ НАПОР ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА

Под «целым» потоком понимаем поток, имеющий поперечные сечения конечных размеров.

По-прежнему рассматриваем только параллельноструйное и плавно изменяющееся движение, т. е. случай, когда расчетные живые сечения плоские, причем будем пользоваться понятием средней скорости v .

Каждая элементарная струйка в данном живом сечении потока имеет (в общем случае) свой полный напор H'_e , выражаемый зависимостью (3-65). Чтобы получить полный напор H_e , являющийся гидродинамической характеристикой всего живого сечения, осредняем по плоскости живого сечения значения H'_e , принадлежащие отдельным струйкам. При этом рассуждаем следующим образом:

1) умножаем выражение (3-65) на вес жидкости, протекающей за время dt через живое сечение элементарной струйки $d\omega$, т. е. на $\gamma dQ dt$; при этом получаем полную механическую энергию, проносимую жидкостью через данное поперечное сечение струйки за время dt ;

2) интегрируем полученное выражение по всей плоскости живого сечения ω ; при этом получаем полную механическую энергию, проносимую жидкостью за время dt через все живое сечение потока;

3) делим полученную энергию на $\gamma Q dt$, причем получаем меру механической энергии, проносимой в среднем одной единицей веса жидкости через данное живое сечение потока; эту меру мы и принимаем за полный напор H_e , относящийся ко всему рассматриваемому живому сечению;

4) можно видеть (см. ниже), что такая величина H_e является некоторой средней среди величин H'_e .

Следуя по такому пути и учитывая, что $dQ = u d\omega$, а $Q = v\omega$, можем написать:

$$H_e = \frac{\int_{\omega} H'_e (\gamma dQ dt)}{\gamma Q dt} = \frac{\int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) dQ}{Q} = \frac{\int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) dQ}{Q} + \frac{\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} u d\omega}{v\omega} \quad (3-95)$$

или, сообразуясь с (3-72),

$$H_e = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \frac{\int_{\omega} dQ}{Q} + \frac{1}{2g} \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v\omega}; \quad (3-96)$$

учтя, наконец. (3-93), имеем:

$$H_e = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{1}{2g} \frac{(\alpha v^3 \omega)}{v \omega}, \quad (3-97)$$

что и приводит нас к окончательному выражению для H_e :

$$H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (3-98)$$

Как видно, в случае целого потока скоростной напор, т. е. удельная кинетическая энергия (являющаяся мерой кинетической энергии, проносимой в среднем единицей веса жидкости, проходящей данное живое сечение) выражается через среднюю скорость v в виде:

$$h_v = \frac{\alpha v^2}{2g}, \quad (3-99)$$

где α — корректив кинетической энергии.

Что касается величины $\left(z + \frac{p}{\gamma} \right)$, то она, как известно, представляет собой потенциальный напор, являющийся одинаковым (в данном плоском живом сечении) для всех элементарных струек, пересекающих это сечение (см. § 3-17).

Дополнительно необходимо отметить следующее. Если бы мы разбили поток на отдельные струйки так, чтобы все они имели одинаковые элементарные расходы (равные δQ), то при этом для H_e можно было бы написать выражение:

$$H_e = \frac{\int_{\omega} H'_e (\gamma \delta Q dt)}{\gamma Q dt} = \frac{\sum_1^n H'_e}{(\gamma Q dt) : (\gamma \delta Q dt)} = \frac{\sum_1^n H'_e}{n}, \quad (3-100)$$

где n — число выделенных струек.

Как видно из зависимости (3-100), величину полного напора H_e можно трактовать как *среднеарифметическую величину среди напоров H'_e , относящихся к отдельным элементарным струйкам, слагающим поток (и имеющим одинаковые расходы)*.

§ 3-20. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ («УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ») ДЛЯ ЦЕЛОГО ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ (ВЯЗКОЙ) ЖИДКОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ¹

Будем рассматривать целый поток жидкости, ограниченный с боков водонепроницаемыми стенками русла, а также при безнапорном движении еще и свободной поверхностью. Ставя такое условие, мы остановимся только на случае, когда через боковую поверхность потока отсутствует приток (или отток) жидкости, а также диффузия энергии (см. § 3-16).

¹ Данное уравнение принято называть уравнением Бернулли. Однако Д. Бернулли рассматривал только соотношение (3-60), приведенное в § 3-12 (для случая установившегося движения идеальной жидкости, подверженной действию только сил тяжести). Уравнения, описываемые в настоящем параграфе и в § 3-16 (а также приводимые далее в гл. 9 для неустановившегося движения), были составлены в дальнейшем на основании как работ Д. Бернулли, так и работ других авторов (Эйлера, Кориолиса, Буссинеска, Вейсбаха и др.).

Благодаря работе сил трения полная удельная энергия жидкости вдоль потока (вниз по течению) должна уменьшаться. Поэтому для реальной (вязкой) жидкости должны написать:

$$H_{e1} > H_{e2},$$

где H_{e1} и H_{e2} — полные напоры (полные удельные энергии) в живых сечениях: 1-1, взятом выше по течению, и 2-2, взятом ниже по течению (рис. 3-25).

Имея в виду это соотношение и зависимость (3-98), гидравлическое уравнение кинетической энергии («уравнение Бернулли») для целого потока можем представить в виде¹ (предполагая, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_f, \quad (3-101)$$

или более наглядно (с энергетических позиций) в виде:

$$H_{e1}(\gamma Q t) - H_{e2}(\gamma Q t) = h_f(\gamma Q t), \quad (3-101')$$

где

$$h_f = H_{e1} - H_{e2} \quad (3-102)$$

называется потерей напора; h_f есть полная энергия, теряемая в среднем единицей веса жидкости на пути от первого до второго сечения за счет внешних сил трения, а также внутренних сил трения, которые неравномерно распределяются по живым сечениям (см. § 3-16, а также § 4-14). В левой части уравнения (3-101'), как видно, представлена разность механических энергий, проносимых жидкостью, через сечения потока (1-1) и (2-2).

На рис. 3-25, аналогичном рис. 3-22, показаны пьезометрическая линия $P-P$ и напорная линия $E-E$ для целого потока. Но в отличие от рис. 3-22 на рис. 3-25 напорная линия $E-E$ оказывается негоризонтальной. Эта линия понижается по течению, поскольку H_e по течению убывает, причем снижение линии $E-E$ на протяжении от живого сечения 1-1 до живого сечения 2-2 представляет собой потерю напора h_f .

Элементарное снижение $\left[-d \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) \right]$ напорной линии, отнесенное к соответствующей элементарной длине ds , отмеренной по оси потока, называется гидравлическим уклоном и обозначается через J_e , причем J_e может быть выражено одной из следующих трех зависимостей:

$$J_e = - \frac{dH_e}{ds}; \quad (3-103)$$

$$J_e = - \frac{d \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)}{ds}; \quad (3-104)$$

¹ Для изотермического течения несжимаемой жидкости.



Рис. 3-25. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для целого потока реальной жидкости при установившемся движении

$O-O$ — плоскость сравнения, $P-P$ — пьезометрическая линия, $E-E$ — напорная линия, H_{e1} и H_{e2} — полные напоры, h_f — потеря напора, J_e — пьезометрический уклон, J_e — гидравлический уклон

$$J_e = + \frac{dh_f}{ds} \quad (3-105)$$

Величина J_e , в общем случае переменная по длине потока, всегда положительна (при установившемся движении): $J_e > 0$; только для случая идеальной жидкости $J_e = 0$. Понятие пьезометрического уклона в данном случае сохраняется полностью (см. § 3-14). Этот уклон в случае целого потока обозначается через J и выражается зависимостью:

$$J = - \frac{d}{ds} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \quad (3-106)$$

Как видно, рис. 3-25 дает нам полную гидродинамическую картину:

а) фигура, заключенная между линией $P-P$ и осью s потока, представляет собой эпюру изменения величины p/γ вдоль потока;

б) фигура, заключенная между линиями $P-P$ и $E-E$, дает эпюру изменения величины скоростного напора $\frac{av^2}{2g}$; следовательно, эта фигура выражает

и характер изменения скорости v вдоль потока;

в) фигура, заключенная между линией $P-P$ и плоскостью сравнения OO , дает эпюру изменения потенциального напора вдоль потока;

г) фигура, заключенная между линией $E-E$ и плоскостью сравнения OO , представляет собой эпюру изменения полного напора вдоль потока.

Уравнение Бернулли (3-101) выражает связь между гидродинамическими элементами двух живых сечений; оно как бы «связывает», соединяет два живых сечения $1-1$ и $2-2$ (из которых сечение $1-1$ всегда расположено выше по течению, чем сечение $2-2$).

Величины z_1 и z_2 , входящие в (3-101) представляют собой превышения над плоскостью сравнения OO точек соответствующих живых сечений; величины p_1/γ и p_2/γ — пьезометрические высоты для этих точек. Естественно, может возникнуть вопрос о том, какие именно точки живых сечений $1-1$ и $2-2$ следует рассматривать, когда мы соединяем эти сечения уравнением Бернулли. При построении пьезометрической линии $P-P$ для целого потока, представляющей собой линию, проведенную по горизонтам жидкости в воображаемых пьезометрах, приключенных к разным живым сечениям, также может возникнуть вопрос о том, к каким именно точкам живых сечений следует мысленно присоединить упомянутые пьезометры.

Ответ на этот вопрос вытекает из сказанного в § 3-17: так как для данного живого сечения при плавно изменяющемся и параллельноструйном движении $z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$, то безразлично, какие точки живых сечений будем рас-

сматривать и к каким точкам этих сечений будем присоединять пьезометры; высотное положение точки линии $P-P$, отвечающей данному живому сечению, будет всегда одинаковым, какую бы точку этого сечения мы ни рассматривали. На рис. 3-26 показан поток; для построения линии $P-P$ мы приключили пьезометры Π в сечении $1-1$ к самой верхней точке, в сечении $2-2$ — к средней точке, в сечении $3-3$ — к самой нижней точке живого сечения и т. д.

Следует помнить, что любая пара точек, лежащих на одной вертикали и принадлежащих линиям $P-P$ и $E-E$ (см., например, точки m и n на рис. 3-25), относится к определенному живому сечению потока (например, к сечению $1-1$ на рис. 3-25), а не к точкам живого сечения.

Из всего сказанного выше вытекают три основных условия применимости уравнения Бернулли (3-101) к потоку жидкости (эти три условия должны соблюдаться одновременно).

1-е условие. Расход Q между сечениями 1-1 и 2-2 должен быть постоянен ($Q = \text{const}$).

2-е условие. Движение жидкости должно быть установившимся, поскольку при выводе уравнения (3-60), положенного в основу уравнения (3-101), считали, что кинетическая энергия жидкости, заключенной в объеме между сечениями 1-1 и 2-2 (в пределах отсека $A'B$, показанного на рис. 3-20) не изменяется во времени.¹



Рис 3-26 К построению линии $P-P$



Рис. 3-27. Условия применения уравнения Бернулли

3-е условие. Движение жидкости в сечениях 1-1 и 2-2, соединяемых уравнением Бернулли, должно быть параллельноструйным или плавно изменяющимся; в промежутке же между сечениями 1-1 и 2-2 движение жидкости может быть и резко изменяющимся. Это условие вытекает из следующих соображений. Если бы в сечениях 1-1 и 2-2 движение было резко изменяющимся (расчетные живые сечения 1-1 и 2-2 были бы криволинейными), то для этих сечений не имело бы место условие $z + \frac{p}{\gamma} = \text{const}$. Такое положение

не позволило бы нам получить выражение (3-98) для полного напора H_e и, следовательно, писать неравенство $H_{e1} > H_{e2}$.

Что касается промежутка между сечениями 1-1 и 2-2, то обстоятельства движения на длине этого промежутка непосредственно учитываются в уравнении Бернулли (3-101) только членом h_f . Если мы имеем возможность определить h_f для участка резко изменяющегося движения (см. гл. 4),² то наличие такого участка не может препятствовать применению уравнения Бернулли.

На рис. 3-27 представлен поток, имеющий участки плавно изменяющегося движения (на этих участках живые сечения показаны сплошными линиями) и участки резко изменяющегося движения (где живые сечения показаны штриховыми линиями). Очевидно, уравнением Бернулли можно соединять между собой сечения 1 и 3, 3 и 6 и т. д.; соединять же, например, сечения 1 и 2 или 2 и 4 и т. д. уравнением Бернулли нельзя.

¹ В гл. 9 будет получено уравнение Бернулли, относящееся к неустановившемуся движению (§ 9-2; 9-3; 9-4).

² В этой главе рассматриваются способы определения потерь напора h_f .

§ 3-21. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ФОРМЕ НАПОРНОЙ И ПЬЕЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ЛИНИЙ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ.
ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ О СЛАГАЕМЫХ, ВХОДЯЩИХ В УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. Случай равномерного движения жидкости. Рассмотрим напорное и безнапорное движения.

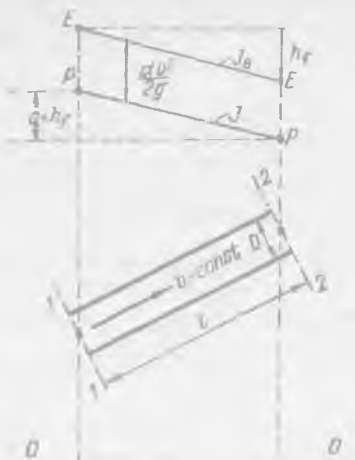


Рис. 3-28. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного напорного движения

Напорное движение. Представим на рис. 3-28 напорный круглоцилиндрический трубопровод диаметром D и длиной l . Условия протекания жидкости на каждой отдельной единице длины этого

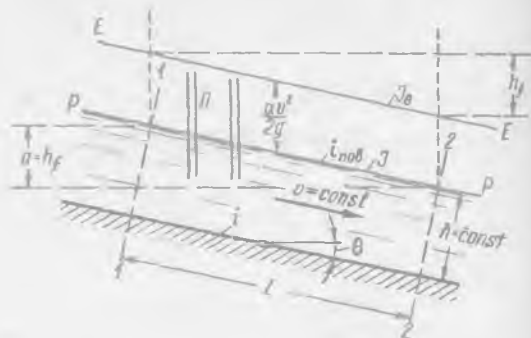


Рис. 3-29. Линии $P-P$ и $E-E$ для равномерного безнапорного движения

трубопровода будут одинаковы. Следовательно, потеря напора на каждой единице длины трубы также будет одинакова; падение напорной линии $E-E$ на каждой единице длины трубы также будет одинаково; уклон напорной линии $E-E$ будет постоянен вдоль потока $J_e = \text{const}$ (вдоль потока).

Отсюда заключаем, что в случае равномерного движения напорная линия $E-E$ представляет собой наклонную прямую.

Так как для равномерного движения

$$\frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const (вдоль потока)}, \quad (3-107)$$

то, следовательно, пьезометрическая линия $P-P$ в случае равномерного движения должна представлять собой прямую, параллельную напорной линии:

$$PP \parallel EE.$$

Рис. 3-30. Линии $P-P$ и $E-E$ для неравномерного безнапорного движения

Падение линии $E-E$ на длине l выражает потерю напора. В данном частном случае (равномерное движение) падение пьезометрической линии $P-P$, равное a , также выражает собой потерю напора:

$$a = h_f. \quad (3-108)$$

В случае равномерного напорного движения можно написать:

$$J_e = J = \frac{h_f}{l} = \frac{a}{l} \quad (3-109)$$

Безнапорное движение. В этом случае (рис. 3-29) пьезометрическая линия $P-P$, если строить ее для самой верхней линии тока, будет совпадать со свободной поверхностью. Так как здесь имеет место соотношение (3-107), то напорная линия $E-E$ оказывается на рис. 3-29 параллельной свободной поверхности потока, причем получаем равенство четырех уклонов:

$$J_e = J = i_{\text{пов}} = i = \frac{hr}{l} = \frac{a}{l} \quad (3-110)$$

где i — уклон дна русла; $i_{\text{пов}}$ — уклон свободной поверхности; a — падение свободной поверхности на длине l потока.

Как видно, в данном частном случае (*равномерное движение*) падение свободной поверхности потока равно потере напора.

2°. **Случай неравномерного движения жидкости.** Здесь ограничимся рассмотрением только безнапорного движения, при этом без пояснений приведем на рис. 3-30 две схемы неравномерного движения жидкости.¹

Как видно, в данном случае получаем:

$$J_e \neq J = i_{\text{пов}} \neq i \quad (3-111)$$

3. **Дополнительные замечания в отношении энергетического смысла слагаемых, входящих в «уравнение Бернулли для целого потока жидкости».** В отношении слагаемых этого уравнения (которое, вообще говоря, имеет только некоторое чисто внешнее сходство с «интегралом Бернулли», полученным Эйлером) отметим дополнительно следующее:

1) Три основных слагаемых уравнения Бернулли $\left(z, \frac{p}{\gamma}, \frac{\alpha v^2}{2g} \right)$ являются приведенными (к единице веса жидкости) потенциальными функциями, описывающими силовые потенциальные поля: z — поле сил тяжести, $\frac{p}{\gamma}$ — поле градиентов давления J_p (см. зависимость на стр. 50); $\frac{\alpha v^2}{2g}$ — осредненное поле конвективных сил инерции;

2) $H_e = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}$ является суммарной приведенной потенциальной функцией, описывающей силовое потенциальное поле, под действием которого движется рассматриваемая жидкость, образуя векторное поле скоростей (потенциальное или не потенциальное — вихревое);

3) h_f — снижение суммарной потенциальной функции H_e , обусловленное работой сил трения.

МАТЕРИАЛЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ВОПРОСАМ, СВЯЗАННЫМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

1°. **Общая схема применения уравнения Бернулли.** Уравнение Бернулли удобно применять, следуя такой схеме:

1) устанавливаем два сечения которые будем соединять уравнением Бернулли. Здесь надо намечать такие сечения, для которых известно возможно большее число гидродинамических элементов. Если потребуется найти тот или другой гидродинамический элемент для какого-либо живого сечения, то это живое сечение должно быть включено в число двух сечений, соединяемых уравнением Бернулли;

¹ На основании данных, приводимых ниже, читателю следует рассмотреть вопрос о том, почему на рис. 3-30, а выпуклость линии $E-E$ направлена вниз, а на рис. 3-30, б — вверх.

2) намечаем горизонтальную плоскость сравнения. Часто эту плоскость удобно назначать так, чтобы z_1 или z_2 , входящее в уравнение Бернулли, обратилось в нуль;

3) пишем уравнение Бернулли в полном виде, как оно было нами получено, см. (3-101);

4) устанавливаем значения отдельных слагаемых, входящих в это уравнение;

5) подставляем найденные выражения для отдельных слагаемых в уравнение Бернулли и производим необходимые преобразования.

2°. **Задачи. № 1.** На рис. 3-31 представлен сосуд, от которого отходит труба. Истечение жидкости из трубы происходит в атмосферу. Предполагаем, что движение жидкости в трубе — установившееся, потерями напора можно пренебречь.

Дано: $z_1 = 4$ м; $z_2 = 2$ м; $z_3 = 0,5$ м; $z_4 = 0$; $\omega_1 = \infty$; $\omega_2 = 0,015$ м²; $\omega_3 = 0,04$ м²; $\omega_4 = 0,02$ м², где z и ω (площади живых сечений) показаны на чертеже.

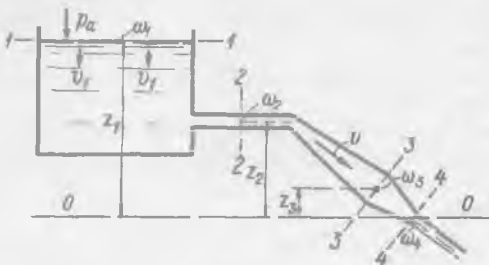


Рис. 3-31. К задаче № 1, п. 2°

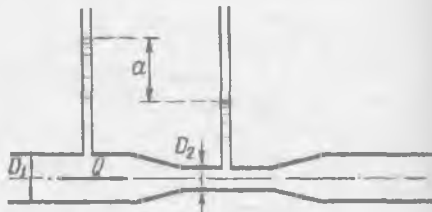


Рис. 3-32. К задаче № 2, п. 2°

Требуется найти: а) расход Q жидкости, вытекающей из трубы; б) давления и скорости в сечениях, указанных на чертеже.

Примечания. 1. Скоростью v_1 движения жидкости в сосуде (в сечении 1'-1) обычно пренебрегают ввиду ее малости. 2. При решении этой задачи, помимо уравнения Бернулли, следует пользоваться уравнением неразрывности.

Ответ: $Q = 177,2$ л/с; $v_1 = 0$; $v_2 = 11,80$ м/с; $v_3 = 4,43$ м/с; $v_4 = 8,86$ м/с; $\frac{P_1}{\gamma} = 0$,

$$\frac{P_2}{\gamma} = -5,1 \text{ м}; \quad \frac{P_3}{\gamma} = 2,5 \text{ м}; \quad \frac{P_4}{\gamma} = 0.$$

№ 2. На рис. 3-32 показан водомер Вентури, представляющий собой местное сужение, созданное на круглом трубопроводе.

Дано (обозначения см. на чертеже): $a = 1,0$ м; $D_1 = 0,1$ м; $D_2 = 0,05$ м.

Требуется найти расход Q в трубе, пренебрегая потерями напора ($h_f \approx 0$) и считая движение жидкости установившимся.

Ответ: $Q = 9,0$ л/с.

3°. **Построение напорной и пьезометрической линий.** Рассмотрим трубопровод, соединяющий два сосуда A и B (рис. 3-33), наполненные жидкостью. Будем считать, что в трубопроводе имеет место установившееся движение, а, следовательно, расход Q в трубопроводе во времени не изменяется. Ставя так вопрос, надо при этом предполагать, что расходы жидкости, подаваемой в сосуд A и удаляемой из сосуда B , одинаковы. При этом уровни жидкости в сосудах A и B все время будут поддерживаться на одной и той же высоте.

Поскольку поперечное (горизонтальное) сечение сосудов A и B велико сравнительно с поперечным сечением трубопровода, считаем:

$$v_A \approx v_B \approx 0.$$

Так как сосуды A и B открыты, то на поверхность жидкости в них действует атмосферное давление p_a . Однако мы не будем учитывать это давление, понимая в уравнении Бернулли под величиной p/γ пьезометрическую высоту, отвечающую избыточному давлению (см. конец § 3-14).

Наметим плоскость сравнения OO , а также несколько точек (1, 2, 3, ...) в сосуде A .

Для этих точек величины z и величины p/γ будут различны. Однако сумма величин $z + \frac{p}{\gamma}$ будет постоянна. Скоростной напор в этих точках пренебрежимо мал. Ясно, что полный напор H_e для всех точек жидкости в сосуде равен потенциальному напору H :

$$H_e = H = z + \frac{p}{\gamma} = \text{const (по всему объему сосуда)}$$

Отсюда получаем следующий общий вывод: для жидкости в сосуде напорная и пьезометрическая линии совпадают и располагаются на уровне горизонта жидкости в сосуде

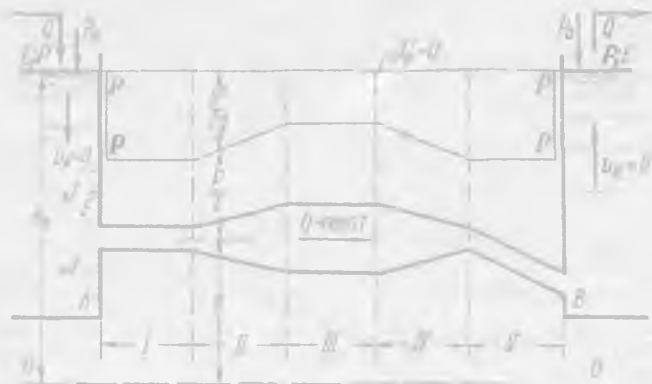


Рис. 3-33. Пьезометрическая линия $P-P$ для участков трубопровода разного вида (случай идеальной жидкости)

Переходя к построению линий $E-E$ и $P-P$ для трубопровода, ограничимся рассмотрением только идеальной жидкости¹. Так как потеря напора при такой жидкости отсутствует, то можем утверждать, что напоры в сосудах A и B будут одинаковы, а, следовательно, горизонты жидкости в сосудах A и B будут находиться на одном уровне (несмотря на наличие движения жидкости в трубопроводе).²

Как известно, напорная линия $E-E$ для идеальной жидкости представляет собой горизонтальную прямую. Эту прямую, прежде чем обратиться к построению линии $P-P$, мы и проводим на чертеже (на уровне горизонтов воды в сосудах). Далее вниз от прямой $E-E$ откладываем соответствующие скоростные напоры $v^2/(2g)$ (коэффициент α считаем $\approx 1,0$) и получаем линию $P-P-P-P$.

Анализируя характер изменения скорости, а следовательно, и скоростного напора вдоль трубопровода, можно сделать следующие замечания в отношении линии $P-P$:

¹ Точнее говоря, будем рассматривать жидкость весьма близкую к идеальной (когда можно пренебрегать потерями напора). При этом, например, сжатием струи, поступающей из сосуда A в трубопровод, отрывом транзитной струи от стенок и др. подобного рода обстоятельствами движения (см. далее гл. 4) будем пренебрегать.

² В случае движения в трубе реальной жидкости, характеризующейся ощутимыми потерями напора, уровень жидкости в сосуде B должен располагаться ниже уровня жидкости в сосуде A ; при этом линия $E-E$ получает некоторый наклон в сторону сосуда B . Если бы мы не пренебрегали скоростями v_A и v_B и считали $v_A \neq v_B$, то и в случае «идеальной» жидкости имели бы разность уровней в сосудах A и B , равную

$\left(\frac{v_A^2}{2g} - \frac{v_B^2}{2g} \right)$, причем величина Q определялась бы однозначно по этой разности уровней

(и площади горизонтальных сечений сосудов A и B)

а) если поток расширяется (см. участок II трубопровода), то скорость и скоростной напор вдоль трубопровода уменьшаются. Поэтому для расширяющегося трубопровода линия $P-P$ вдоль потока должна подниматься. При этом на длине рассматриваемого участка кинетическая энергия потока частично переходит в потенциальную;

б) если поток сужается (см. участок IV трубопровода), получаем обратную картину;

в) если поток цилиндрический ($v = \text{const}$; см. участки I, III и V трубопровода), то линия $P-P$ оказывается прямой, параллельной $E-E$, т.е. в случае идеальной жидкости для цилиндрических трубопроводов линия $P-P$ получается всегда в виде горизонтальной прямой (или линии, лежащей в горизонтальной плоскости);

г) при изменении высотного положения рассматриваемого трубопровода высотное положение линий $E-E$ и $P-P$ не должно изменяться (см. участок VI);

д) от положения плоскости сравнения OO высотное положение линий $E-E$ и $P-P$, разумеется, вовсе не зависит. Однако от высотного положения плоскости OO зависит полный напор H_e .

Рассмотрим теперь два особых случая.

1. Истечение жидкости в атмосферу (рис. 3-34). При истечении в атмосферу в точке B будем иметь атмосферное давление, которое обычно не учитывают (см. выше). Избыточное давление в точке B равно нулю. Превышение пьезометрической

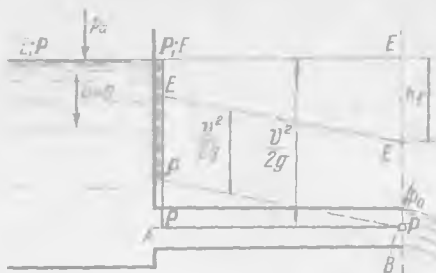


Рис. 3-34. Истечение в атмосферу из цилиндрической трубы (случаи идеальной и реальной жидкостей)

линии над осью трубы, как известно, выражает давление в трубе. Если избыточное давление в точке B равно нулю, то можем утверждать, что пьезометрическая линия должна проходить через эту точку.

Следует запомнить правило: при истечении в атмосферу пьезометрическая линия проходит через центр выходного сечения (если при построении линии $P-P$ мы оперируем избыточным давлением).

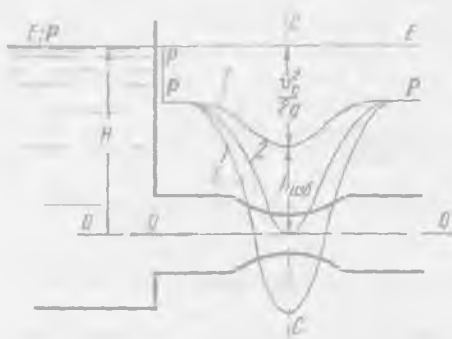


Рис. 3-35. Возникновение вакуума при сужении трубы

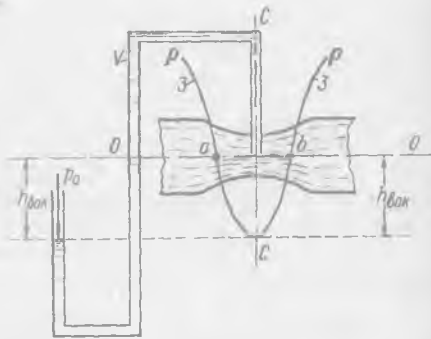


Рис. 3-36. Измерение вакуума в месте сужения трубы

На рис. 3-34 сплошными линиями показаны линии $E-E$ и $P-P$, относящиеся к идеальной жидкости, и штриховыми линиями — те же линии, относящиеся к реальной жидкости. Как видно, скоростной напор, а следовательно, и скорость в случае реальной жидкости получаются меньшими, чем в случае идеальной жидкости.

2. Местное сужение в трубе; вакуум. Представим на рис. 3-35 горизонтальную трубу, имеющую местное сужение. Ограничимся рассмотрением только идеальной жидкости, причем будем считать, что течение в трубе направлено слева направо и расход воды в трубе равен Q .

Обозначим через H полный напор H_e в сосуде, относительно плоскости сравнения OO (рис. 3-35).

Пьезометрическая высота $h_{изб}$ (отвечающая избыточному давлению) в сечении CC , где имеется местное сужение (см. пьезометрическую линию 1),

$$h_{изб} = H - \frac{v_c^2}{2g} = H - \frac{Q^2}{\omega_c^2 2g};$$

где ω_c — площадь живого сечения по линии CC ; v_c — скорость в этом сечении.

Будем считать, что величины H и Q нам заданы: $H = \text{const}$ и $Q = \text{const}$ (во времени и по длине).

При этом условии представим себе, что ω_c постепенно уменьшается. Очевидно, когда окажется, что

$$\frac{Q^2}{\omega_c^2 2g} = H, \text{ т. е. } \omega_c = \sqrt{\frac{Q^2}{2gH}} = \frac{Q}{\sqrt{2gH}}$$

величина $h_{изб}$ обратится в нуль, и пьезометрическая линия примет положение 2.

В случае же

$$\omega_c < \frac{Q}{\sqrt{2gH}}$$

получим отрицательное значение пьезометрической высоты $h_{изб}$, отвечающей избыточному давлению, причем пьезометрическая линия займет положение 3: на некоторой длине трубы линия $P-P$ будет располагаться ниже оси трубы. Легко видеть, что на этой длине в трубе будет иметь место вакуум.

Необходимо запомнить следующее правило: если линия $P-P$ располагается выше оси трубы, то в трубе имеется давление больше атмосферного причем превышение этой линии над осью трубы выражает избыточное давление в трубе, если же линия $P-P$ располагается ниже оси трубы, то в трубе имеет место вакуум, причем превышение оси трубы над линией $P-P$ выражает величину этого вакуума¹.

Величина такого вакуума может быть измерена вакуумметром (рис. 3-36).

Разумеется, при наличии пьезометрической линии 2 (рис. 3-35) в центре сечения CC будет атмосферное давление, в точках a и b на рис. 3-36, где линия $P-P$ пересекает ось трубы, также будет иметь место атмосферное давление.

Известно (см. § 1-5), что при снижении давления (при постоянной температуре) из жидкости выделяется растворенный в ней воздух (газ); кроме того, при достаточно большом снижении давления (при большом вакууме) возникает явление кавитации.

Эти явления, подобные представленным на рис. 3-35 и 3-36, обуславливают следующее (см. § 1-5):

а) Давление в жидкости на участке трубы ab (рис. 3-36) не может снизиться ниже давления $p_{н.п.}$ насыщенных паров жидкости (при данной температуре): с уменьшением ω_c объем паровоздушной области (области разрывов) будет расти; давление же в жидкости практически будет оставаться равным $p_{н.п.}$. Это абсолютное давление будет отвечать предельному вакууму ($h_{вак.пред.}$ т. е. такому вакууму, больше которого невозможно получить для данной жидкости при данной ее температуре.

¹ Имеется в виду линия $P-P$, построенная для избыточного давления.

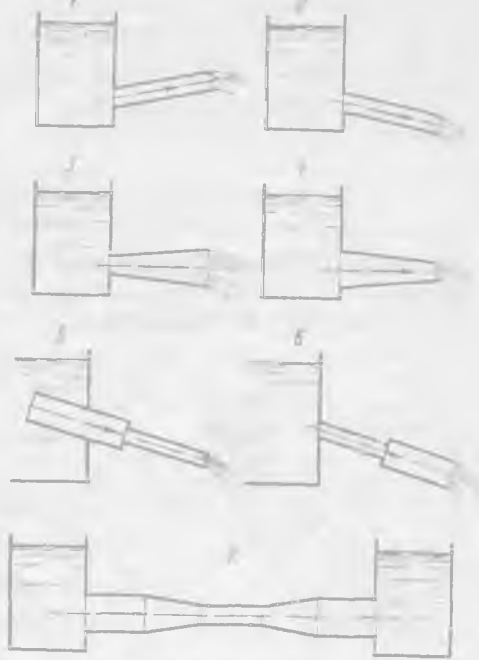


Рис. 3-37. К задачам п. 4^а

б) При некотором вакууме, несколько меньшем $(h_{\text{вак}})_{\text{пред}}$ развивающаяся кавитация может вызывать, например, опасную эрозию стенок трубопровода. В этом случае вакуум в трубе недопустимо увеличивать выше некоторой величины $(h_{\text{вак}})_{\text{доп}}$, называемой допустимым вакуумом (по условиям кавитации).

в) При наличии разрывов в жидкости, нарушающих сплошность ее движения, особенно в случаях, когда объем этих разрывов изменяется во времени, уравнение Бернулли и уравнение баланса расхода, полученные для сплошной среды, могут оказаться неприемлемыми для анализа движения жидкости в суженном месте трубопровода.

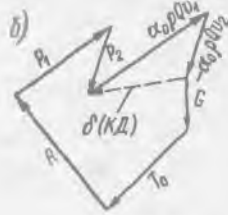
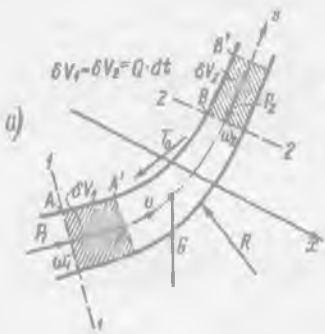
4°. **Задачи.** Построить линии $E-E$ и $P-P$ для схем, представленных на рис. 3-37 в предположении, что жидкость близка к идеальной (потери напора можно пренебречь).

При этом следует:

- а) отметить случаи наличия вакуума (и его наибольшую величину);
- б) показать величины напоров H_e для нескольких сечений при различных положениях плоскости сравнения;
- в) рассмотреть вопрос о том, как должны изменяться линии $E-E$ и $P-P$ при переходе от жидкости, близкой к идеальной, к жидкости реальной.

§ 3-22. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОТОКА

Возьмем поток произвольной формы (рис. 3-38, а), наметим два живых сечения 1-1 и 2-2, покажем произвольную ось x . Поставим себе цель привести известную из теоретической механики теорему о количестве движения



материальных точек к виду,

удобному для расчета установившегося движения

жидкости, когда в районе живых сечений 1-1 и 2-2

(рис. 3-38, а) имеет место параллельноструйное или плавно

изменяющееся движение (в промежутке же между

этими живыми сечениями может быть и резко изменяющееся движение).

Дополнительно будем считать, что

распределения скоростей и

в сечениях 1-1 и 2-2 примерно одинаковы, а поэтому

можно считать, что

Рис. 3-38. К обоснованию гидравлического уравнения количества движения. В промежутке между сечениями (1-1) и (2-2) может иметь место любое резко изменяющееся движение.

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0. \quad (3-112)$$

Напомним, что упомянутая теорема читается так: проекция на произвольно намеченную ось x приращения количества движения δ (КД) движущегося тела равна сумме проекций на ось x импульсов внешних сил (ИС), действующих на тело, за соответствующий промежуток времени. Данную теорему условно можно написать в виде:

$$\delta(KD)_x = \sum (ИС)_x. \quad (3-113)$$

Применим эту теорему к отсеку жидкости AB , заключенному в начальный момент времени между сечениями 1-1 и 2-2 и перемещающемуся за время dt в положение $A'B'$.

1°. Приращение количества движения $[\delta(KD)]$ тела AB . Обозначим элементарные объемы, заштрихованные на чертеже, соответственно через δV_1 и δV_2 .

Очевидно,

$$\begin{aligned}\delta(KД) &= КД(A'B') - КД(AB) = КД(A'B + BB') - КД(AA' + A'B) = \\ &= КД(\delta V_2) - КД(\delta V_1).\end{aligned}\quad (3-114)$$

Известно, что количество движения ($KД$) тела равно

$$KД = \text{массе тела} \times \text{скорость тела.}$$

Имея это в виду, найдем количества движения объемов жидкости δV_1 и δV_2 , т. е. величины $KД(\delta V_1)$ и $KД(\delta V_2)$. Масса жидкости в объеме δV_1 есть та масса жидкости, которая за время dt проходит через сечение $1-1$:

$$\text{масса}(\delta V_1) = \rho Q dt. \quad (3-115)$$

Если бы все жидкие частицы этой массы проходили через живое сечение $1-1$ с одинаковой скоростью v_1 , то количество движения $KД(\delta V_1)$ выразилось бы в виде:

$$[KД(\delta V_1)]_{\text{ср}} = (\rho Q dt) v_1. \quad (3-116)$$

Так как в различных точках сечения $1-1$ в действительности имеем разные скорости u , то согласно (3-87) искомое количество движения должно записаться в виде:

$$KД(\delta V_1) = \alpha_0 [KД(\delta V_1)]_{\text{ср}} = \alpha_0 \rho Q v_1 dt, \quad (3-117)$$

где v_1 — средняя скорость в живом сечении $1-1$.

Для величины $KД(\delta V_2)$ аналогично (3-117) можем написать:

$$KД(\delta V_2) = \alpha_0 \rho Q v_2 dt, \quad (3-118)$$

где v_2 — средняя скорость в живом сечении $2-2$.

Подставив (3-117) и (3-118) в (3-114) и заменив v_1 и v_2 проекциями этих векторов на ось x , т. е. величинами v_{1x} и v_{2x} , получаем:

$$\delta(KД)_x = \alpha_0 \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) dt. \quad (3-119)$$

2°. Импульсы внешних сил ($ИС$), приложенных к телу AB . Известно, что импульс силы

$$ИС = \text{силе} \times \text{время.}$$

Рассмотрим все *внешние* силы, действующие на жидкое тело AB при перемещении его в положение $A'B'$.

Сила собственного веса тела AB . Обозначим эту силу через G и ее проекцию на ось x через G_x . Проекция импульса этой силы равна

$$G_x dt. \quad (3-120)$$

Сила внешнего трения T_0 , приложенного к боковой поверхности жидкого тела AB со стороны боковых стенок, ограничивающих это тело. Проекция импульса этой силы равна

$$(T_0)_x dt, \quad (3-121)$$

где $(T_0)_x$ — проекция данной силы на ось x .

Сила реакции боковых стенок, ограничивающих жидкое тело AB (без учета сил трения, рассмотренных выше). Проекция импульса этой силы равна

$$R_x dt, \quad (3-122)$$

где R_x — проекция данной силы на ось x .

Сила гидродинамического давления, действующего на торцовые сечения жидкого тела AB (на сечения $1-1$ и $2-2$) со стороны остальной жидкости (см на чертеже силы P_1 и P_2). Проекция импульса этих двух сил

$$(P_{1x} + P_{2x}) dt = P_x dt, \quad (3-123)$$

где P_x — сумма проекций на ось x указанных двух сил.

3°. Гидравлическое уравнение количества движения. Подставляя в (3-113) выражения (3-119)–(3-123) и деля полученный результат на dt , искомое уравнение получаем в виде

$$\alpha_0 \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) = G_x + (T_0)_x + R_x + P_x \quad (3-124)$$

где ρQ — масса жидкости, проходящая в единицу времени (в секунду) через любое живое сечение потока, $\rho Q = \text{const}$ (вдоль потока); $\alpha_0 \rho Q v$ — количество движения указанной массы в данном плоском живом сечении, к которому относится скорость v ; величина $\alpha_0 \rho Q v$ может быть названа *секундным количеством движения потока* (эта величина представляет собой как бы расход количества движения). Размерность секундного количества движения потока — размерность силы.

Проекции сил и скоростей, направленных против оси x , должны иметь в уравнении (3-124) отрицательную величину.

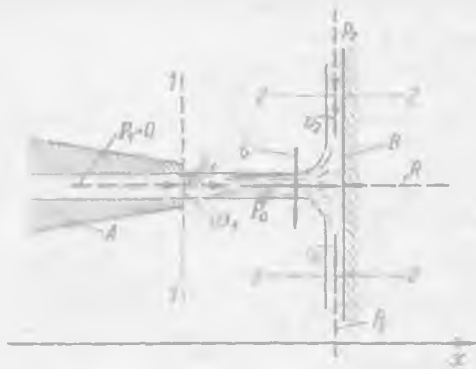


Рис. 3-39. Давление P_0 горизонтальной струи на вертикальную плоскую стенку

ваемый отсек жидкости (см. силы G , R , T_0 , P_1 и P_2 на рис. 3-38, а), вместе с векторами секундного количества движения ($\alpha_0 \rho Q v_1$) и ($\alpha_0 \rho Q v_2$) должны давать замкнутый многоугольник сил при условии, если вектор секундного количества движения ($\alpha_0 \rho Q v_2$) мы повернем на 180° и направим его внутрь данного отсека жидкости. Такой замкнутый многоугольник сил и секундных количеств движения показан на рис. 3-38, б. Разумеется, сумма моментов указанных векторов относительно любой точки должна равняться нулю.

4°. *Пример использования уравнения количества движения.* Уравнением (3-124) удобно пользоваться при решении различных практических задач.

Для примера рассмотрим случай, когда струя, выходящая из круглоцилиндрического сопла A , ударяется о плоскую стенку B , расположенную нормально к ней (рис. 3-39).

Как видно, здесь (при достаточно больших скоростях истечения жидкости) получаем так называемую осесимметричную задачу растекания потока по стенке B . Живое сечение $2-2$, показанное на чертеже, имеет круглоцилиндрическую форму: на вертикальную плоскость, нормальную к чертежу, контур этого сечения проектируется в окружность, причем линии тока пересекают такую окружность в радиальном направлении.

Данный случай может рассматриваться как исключение: несмотря на наличие криволинейного живого сечения $2-2$ и резко изменяющегося движения жидкости в нем,

Гидравлическое уравнение количества движения (3-124) — уравнение баланса секундного количества движения — можно прочесть так: при переходе от плоского живого сечения $1-1$ к плоскому живому сечению $2-2$ проекция (на какую-либо ось) секундного количества движения потока изменяется на величину, равную сумме проекций на ту же ось всех четырех внешних сил (G , T_0 , R , P), действующих на отсек потока, заключенный между сечениями $1-1$ и $2-2$.

Из сказанного ясно, что векторы всех внешних сил, действующих на рассматриваемый отсек жидкости (см. силы G , R , T_0 , P_1 и P_2 на рис. 3-38, а), вместе с векторами секундного количества движения ($\alpha_0 \rho Q v_1$) и ($\alpha_0 \rho Q v_2$) должны давать замкнутый многоугольник сил при условии, если вектор секундного количества движения ($\alpha_0 \rho Q v_2$) мы повернем на 180° и направим его внутрь данного отсека жидкости. Такой замкнутый многоугольник сил и секундных количеств движения показан на рис. 3-38, б. Разумеется, сумма моментов указанных векторов относительно любой точки должна равняться нулю.

мы все же, рассматривая такое сечение, можем пользоваться понятием средней скорости, а следовательно, и уравнением (3-124).

Чтобы найти давление P_0 струи на стенку B , намечаем ось x , как показано на чертеже, и затем выделяем сечениями 1-1 и 2-2 отсек жидкости, к которому и прилагаем уравнение (3-124).

1. Изменение проекции секундного количества движения при переходе от сечения 1-1 к сечению 2-2

$$\alpha_0 \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) = \alpha_0 \rho Q (0 - v_{1x}) \approx -\rho Q v_{1x}$$

где

$$v_{2x} = 0; \quad v_{1x} = v_1; \quad \alpha_0 \approx 1.$$

Обычно насадок A делают несколько сходящимся по течению. При этом распределение скоростей u в сечении 1-1 оказывается весьма близким к равномерному (когда $\alpha_0 = 1,0$).

2. Проекция на ось x сил, действующих на рассматриваемый отсек: $G_x = 0$; $P_{1x} = P_1 = 0$ (так как в сечении 1-1 давление атмосферное); $P_{2x} = 0$; $P_x = P_{1x} + P_{2x} = 0$; $(T_0)_x \approx 0$; $R_x = R = -P_0$.

3. Как видно, согласно уравнению (3-124), получаем:

$$-\rho Q v_1 = -P_0,$$

откуда искомая сила давления струи на преграду

$$P_0 = \rho Q v_1 = \frac{\gamma}{g} (\omega_1 v_1) v_1$$

или

$$P_0 = 2\omega_1 \frac{v_1^2}{2g} \gamma,$$

где ω_1 — площадь живого сечения струи (в сечении 1-1).

§ 3-23. СИЛА «ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ» ТВЕРДОГО ТЕЛА, ЧАСТИЧНО ИЛИ ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОГО В ДВИЖУЩУЮСЯ ЖИДКОСТЬ

В п. 4°, § 3-22 был освещен пример так называемой внешней задачи (см. § 3-1). Ниже рассмотрим еще один такой пример.

Предположим, что твердое тело (полностью или частично погруженное в установившийся поток жидкости) совершает равномерное прямолинейное движение в направлении приложенной к нему внешней силы P_x .

Будем считать, что направление силы P_x , а следовательно, и направление движения тела нам заданы. Вдоль этого заданного направления наметим ось x .

При подходе к телу (в достаточном удалении от него) наметим также живое сечение потока, причем через u_0 обозначим скорости, отвечающие этому «подходному сечению»; дополнительно будем считать, что скорости u_0 распределяются примерно равномерно по подходному живому сечению ($u_0 \approx \text{const}$). Направления и значения скоростей u_0 следует считать заданными.

В общем случае направление скоростей u_0 и направление сил не совпадают. На рассматриваемое твердое тело, помимо собственного веса и механического воздействия жидкости, могут действовать и другие внешние силы.

Рассмотрим поверхность твердого тела, омываемую жидкостью. К элементарным площадкам, составляющим эту поверхность, со стороны жидкости приложены: а) элементарные нормальные силы гидродинамического давления и б) элементарные касательные силы трения.

Представим себе главный вектор упомянутых элементарных сил (давления и трения); причем разложим этот вектор на два направления: а) на известное нам направление оси x , полученную при этом составляющую обозначим через R_x и б) на направление, нормальное к оси x ; эту вторую составляющую обозначим через R_z .

Силу R_x , если она оказывается направленной вертикально вверх, именуют подъемной силой.

Сила R_x направлена в сторону, противоположную движению тела.¹ Именно эту силу и называют лобовым сопротивлением. Как видно, сила лобового сопротивления твердого тела (движущегося равномерно и прямолинейно в установившемся потоке) представляет собой проекцию упомянутого главного вектора на направление движения тела.

Силу R_x для твердого тела произвольной формы придется определять по эмпирической формуле:

$$R_x = c_x S \frac{(v_T \pm u_{0x})^2}{2g}, \quad (3-125)$$

где γ — вес единицы объема жидкости («удельный вес жидкости»); $(v_T \pm u_{0x})$ — скорость движения жидкости относительно тела, причем здесь v_T — абсолютная скорость движения тела и u_{0x} — проекция скорости u_0 на ось x ; S — площадь проекции тела (или его части, погруженной в жидкость) на плоскость, нормальную к оси x , т. е. к направлению движения тела; c_x — эмпирический безразмерный коэффициент, который может быть назван коэффициентом лобового сопротивления.

Для так называемой квадратичной области сопротивления (см. далее § 4-10) величина c_x зависит только от формы тела и шероховатости его поверхности, а также от положения (от ориентировки) этого тела в потоке. В справочной литературе приводятся соответствующие численные значения коэффициента c_x .

По формуле (3-125), разумеется, можно определить силу R_x и для покоящегося тела (тела неподвижно закрепленного), обтекаемого жидкостью.

Необходимо отметить, что для тел простейшей геометрической формы (шара, цилиндра и т. п.) формула (3-125) может быть обоснована теоретически, причем для величины c_x могут быть получены (для некоторых случаев движения жидкости) соответствующие приближенные теоретические зависимости.

§ 3-24. ДВА РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В 1839 и 1854 гг. немецким инженером-гидротехником Г. Хагеном было открыто существование двух принципиально разных режимов движения жидкости. В 1880 г. этот вопрос рассматривал Д. И. Менделеев. Дополнительно данный вопрос в 1883 г. исследовал английский физик и инженер О. Рейнольдс.

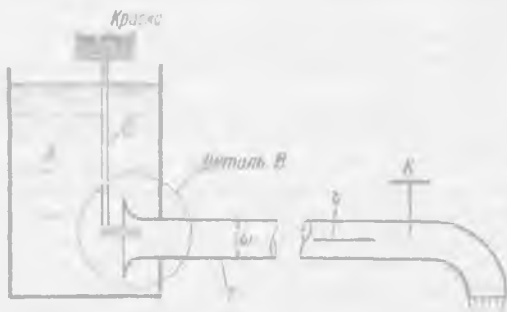


Рис. 3-40. Схема прибора Рейнольдса

Представим на рис. 3-40 сосуд A , наполненный какой-либо жидкостью; от этого сосуда отходит труба T с прозрачными стенками, имеющая на конце кран K . Над сосудом A располагается бачок с краской, от которого тонкой трубкой подводится к входному сечению трубы T . Открывая или закрывая кран K , изменяем расход Q жидкости в трубе, а следовательно, и среднюю скорость $v = Q/\omega$.

В результате таких опытов было установлено следующее.

1. При скоростях v в трубе, меньших некоторой скорости v_k :

$$v < v_k, \quad (3-126')$$

краска, попадающая в трубу T (рис. 3-40), окрашивает только одну струйку потока. Если к входному сечению трубы T приключить вторую трубку, подво-

¹ Имеется в виду только случай движения тела в направлении силы P_x .

дующую краску (см. рис. 3-41а, на котором изображена деталь В, указанная на рис. 3-40), то при этом окрасится вторая струйка потока и т. д.

2. При скоростях v в трубе, больших v_k :

$$v > v_k, \quad (3-126'')$$

вся жидкость, находящаяся в трубе, окрашивается по всему своему объему (рис. 3-41,б). Здесь жидкость в целом имеет поступательное движение слева направо, вместе с тем все составляющие ее частицы перемещаются по случайным неопределенно искривленным траекториям, имеющим пространственную форму; при этом движении траектории частиц, проходящие в разные моменты времени через неподвижную точку пространства, имеют различный вид (занимают разное положение в пространстве и имеют различную форму); данное движение носит беспорядочный хаотический характер и сопровождается постоянным как бы поперечным перемешиванием жидкости.

Движение жидкости, показанное на рис. 3-41, а, получающееся при условии (3-126'), называется ламинарным движением. Здесь частицы жидкости движутся по траекториям, параллельным стенкам трубы, без перемешивания.

Движение жидкости, показанное на рис. 3-41, б, получающееся при условии (3-126''), называется турбулентным движением. Здесь имеет место перемешивание жидкости.¹

Скорость v_k , входящая в соотношения (3-126') и (3-126''), при которой турбулентный режим (при уменьшении скоростей в трубе²) переходит в ламинарный режим движения жидкости, называется критической скоростью.

О. Рейнольдс на основании приближенных теоретических рассуждений, проверенных в дальнейшем опытами, получил следующую формулу³ для v_k :

$$v_k = \frac{v Re_k}{R} \quad (3-127)$$

где R — гидравлический радиус; v — так называемый кинематический коэффициент вязкости жидкости:

$$v = \frac{\eta}{\rho}; \quad (3-128)$$

здесь η — так называемый динамический коэффициент вязкости жидкости, учитывающий степень вязкости жидкости (см. ниже § 4-3); Re_k — безразмерный эмпирический коэффициент, называемый критическим числом Рейнольдса.

¹ Слово «ламинарный» происходит от латинского слова, означающего «слоистый». Слово «турбулентный» происходит также от латинского слова, означающего «беспорядочный».

² При увеличении скоростей v в трубе T (когда ламинарный режим переходит в турбулентный) значение v_k получается иное (см. конец настоящего параграфа).

³ О. Рейнольдс, собственно, рассматривал только круглые трубы и вместо гидравлического радиуса, входящего в (3-127), использовал диаметр трубы $D = 4R$.

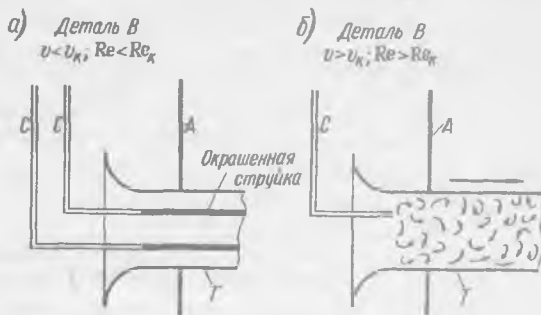


Рис. 3-41. Режимы движения: а — ламинарный; б — турбулентный

О. Рейнольдс дал приближенный вывод зависимости (3-127), основанный на использовании особого метода, называемого методом размерностей.

Предположив, что v_k зависит только от трех величин: ρ , η и D , можно написать зависимость для v_k в следующем виде:

$$v_k = a\rho^x \eta^y D^z, \quad (A)$$

где a — неизвестный постоянный безразмерный коэффициент; x , y , z — неизвестные показатели степени.

Размерность величин, входящая в (A), следующая:

$$[v_k] = \frac{L}{t}; \quad [\eta] = \frac{M}{Lt}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}; \quad [D] = L, \quad (B)$$

где L , t , M — символы соответственно длины, времени и массы (в отношении η см. § 4-3).

Учитывая (B), зависимость (A) можно представить в форме:

$$\frac{L}{t} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^x \left(\frac{M}{Lt}\right)^y (D)^z, \quad (B)$$

что и приводится к виду

$$L t^{-1} = M^{x+y} L^{-3x-y+z} t^{-y}. \quad (Г)$$

Чтобы эта зависимость имела смысл, показатели степени при M , L , t в правой и левой частях ее должны быть одинаковыми:

$$x + y = 0; \quad -3x - y + z = 1; \quad -y = -1, \quad (Д)$$

откуда

$$x = -1; \quad y = +1; \quad z = -1$$

Подставляя эти значения x , y , z в зависимость (A) и заменяя обозначение a безразмерной величиной $4Re_k$, а диаметр трубы D гидравлическим радиусом $R = D/4$, мы и получаем формулу для v_k .

Безразмерный эмпирический коэффициент Re_k (критическое число Рейнольдса), входящий в формулу (3-127), как показывают опыты, равен:

а) для круглоцилиндрических напорных труб, согласно экспериментам Рейнольдса:

$$Re_k \approx 500; \quad (3-129)$$

согласно же данным некоторых других авторов число Re_k для круглоцилиндрических труб имеет значительно меньшее значение:

б) для безнапорных цилиндрических каналов широкого прямоугольного сечения, по данным Хопфа,¹

$$Re_k \approx 300. \quad (3-130)$$

При обычно встречающейся шероховатости стенок труб принято считать величину Re_k от нее не зависящей. В случае цилиндрических достаточно длинных потоков величина Re_k оказывается зависящей только от формы поперечного сечения потока.²

Формулу (3-127) можно представить в виде:

$$Re_k = \frac{v_k R}{\nu}. \quad (3-131)$$

¹ В литературе приводятся и другие значения для этого числа (по данным А. П. Зегжда, $Re_k = 900 - 1000$).

² На величину Re_k в значительной мере влияет степень отклонения формы потока от цилиндрической. При сужающихся по длине потоках ламинарное движение с увеличением скоростей переходит в турбулентное позже, чем при расширяющихся по длине потоках (при одинаковых прочих условиях).

Введем новое обозначение:

$$\frac{vR}{\nu} = Re, \quad (3-132)$$

где v — действительная (а не критическая) средняя скорость.

Умножим затем неравенства (3-126') и (3-126'') на постоянное для данного потока число (R/ν) . Тогда, учтя выражения (3-131) и (3-132), условия существования того или другого режима движения жидкости можем переписать в виде:

1) если $Re < Re_k$, то должен иметь место ламинарный режим; (3-133)

2) если $Re > Re_k$, то должен иметь место турбулентный режим. (3-134)

Безразмерная величина Re , выражаемая, согласно (3-132), через среднюю скорость v (вычисленную для действительного потока), называется числом Рейнольдса. Не следует смешивать понятий: числа Рейнольдса Re и критического числа Рейнольдса Re_k . Соотношениями (3-133) и (3-134) пользоваться удобнее, чем соотношениями (3-126') и (3-126''), поскольку безразмерная величина Re_k является постоянной для потока заданной геометрической формы; величина же ν_k зависит еще от свойств жидкости (что учитывается коэффициентом ν), а также от размеров потока.

В заключение приведем следующие отдельные замечания.

1. При изучении напорного движения жидкости в круглых трубах число Рейнольдса обычно выражают не через гидравлический радиус, что мы имели выше, а через диаметр трубы D . Такое число Рейнольдса, учтя (3-54), можно представить в виде:

$$Re_D = \frac{vD}{\nu} = \frac{v(4R)}{\nu} = 4 Re. \quad (3-135)$$

Пользуясь вместо Re величиной Re_D , получаем [см. формулу (3-129)], что

$$(Re_D)_k = 4 Re_k = 4 \cdot 500 = 2000.$$

Некоторые другие авторы полагают, что $(Re_D)_k$ приближается или к 1000, или к 2300. Имея в виду такое положение, далее будем считать, что критическое число Рейнольдса $(Re_D)_k$ лежит в пределах от 1000 до 2300:

$$(Re_D)_k = 1000 \div 2300. \quad (3-136)$$

2. В гидротехнической практике обычно сталкиваемся с турбулентным движением. Движение воды в трубах, каналах, реках, как правило, является турбулентным. Имеется только один часто встречающийся в гидротехнике случай ламинарного движения — это движение грунтовой воды (воды, просачивающейся через поры грунта). В области же других специальностей, где имеют дело с движением особенно вязких жидкостей (масел и т. п.), ламинарный режим может встречаться достаточно часто.

3. Необходимо особенно подчеркнуть, что приведенные ранее основные уравнения гидродинамики (уравнение неразрывности, уравнение Бернулли и гидравлическое уравнение количества движения) применимы как к ламинарному, так и к турбулентному движению. При этом, однако,

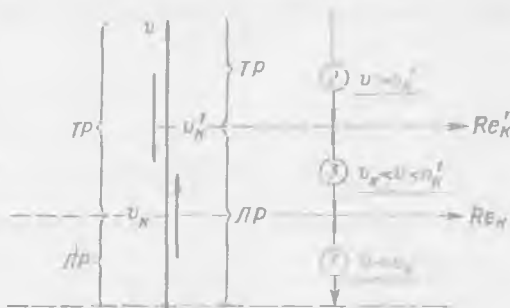


Рис. 3-42. Переход ламинарного режима (ЛР) в турбулентный (ТР) и переход турбулентного режима в ламинарный

1 — зона ламинарного режима; 2 — зона турбулентного режима; 3 — неустойчивая или переходная зона

в частности величина потерь напора h_f , входящая в уравнение Бернулли, в случае турбулентного и в случае ламинарного потока выражается различными зависимостями. Далее (в гл. 4) будут приведены эти зависимости, а также пояснен вопрос о том, каким образом «беспорядочное», турбулентное движение жидкости (рис. 3-41, б) для расчета заменяется той «струйчатой моделью», которую рассматривали ранее (в предшествующих параграфах).

4. При выполнении соответствующих опытов (рис. 3-40), оградив опытную установку от возможных сотрясений, обеспечив плавный вход жидкости в трубу и т. п., мы можем, постепенно увеличивая скорости v в трубе T , «затянуть» существование ламинарного режима до некоторой скорости v'_k , где $v'_k > v_k$. Однако ламинарный режим при соотношениях $v_k < v < v'_k$ является неустойчивым: в этом случае при малейшем возмущении потока (например, при сотрясении трубы T) ламинарный режим может «разрушиться» и перейти в турбулентный. Скорость v'_k иногда называют верхней критической скоростью. Величина ее неопределенна (зависит от условий проведения опытов).

Если при $v > v_k$ мы можем хотя бы в искусственной обстановке опыта получить ламинарный режим, то при $v > v_k$ турбулентный режим ни при каких условиях получить не может.

Поясним сказанное выше при помощи рис. 3-42. На этом рисунке показана ось скоростей v . Если мы движемся по этой оси вверх (увеличивая скорость v), то ламинарный режим ($ЛР$) переходит в турбулентный режим ($ТР$) при скорости v'_k ; если же спускаемся по этой оси вниз, то турбулентный режим переходит в ламинарный при скорости v_k , причем скорость v_k можно здесь назвать нижней критической скоростью.

Область скоростей $v_k < v < v'_k$ называют неустойчивой или переходной зоной.

В соответствии со сказанным о скоростях v_k и v'_k следует различать нижнее число Рейнольдса Re_k в частности (Re_{Dk} ; [см. (3-136)] и верхнее число Рейнольдса Re'_k , выражаемое через скорость v'_k . При практических расчетах всегда полагают, что в переходной зоне имеет место турбулентный режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 3-1. Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. И. Гидравлика. — М.-Л.: Энергия, 1964.
- 3-2. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика. — Л.: Стройиздат, 1975.
- 3-3. Бернар Ле Меоте. Введение в гидравлику и теорию волн на воде. — Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- 3-4. Богомолов А. И., Михайлов К. А. Гидравлика. — М.: Стройиздат, 1973.
- 3-5. Емцев Б. Т. Техническая гидромеханика. — М.: Машиностроение, 1978.
- 3-6. Избаш С. В. Основы гидравлики. — М.: Госстройиздат, 1952.
- 3-7. Киселев П. Г. Гидравлика. — М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963.
- 3-8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1972.
- 3-9. Оглоблин А. П. Основы гидромеханики. — М.: Оборонгиз, 1945.
- 3-10. Патрашев А. Н. Гидромеханика. — М.: Военно-морское изд-во, 1953.
- 3-11. Повх И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. — Л.: Машиностроение, 1974.
- 3-12. Чугаев Р. Р. Гидравлика, ч. I. — Л.: Изд. ЛПИ, 1960.
- 3-13. Лабораторный курс гидравлики, насосов и гидропередач./Под ред. С. С. Руднева и Л. Г. Подвида. — М.: Машиностроение, 1974.
- 3-14. Примеры гидравлических расчетов./Под ред. А. И. Богомолова. — М.: Транспорт, 1977.
- 3-15. Справочник по гидравлике/Под ред. В. А. Большакова. — Киев: Высшая школа, 1977.

**ПОТЕРИ НАПОРА
ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ.
ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ.
РАСЧЕТНАЯ СХЕМА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА**

**§ 4-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О ПОТЕРЯХ НАПОРА.
ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ**

К потоку могут быть приложены различные внешние силы, имеющие некоторые перемещения: такие силы будут совершать работу и изменять величину механической энергии, несомой жидкостью. Например, поток воды может приводить в действие гидравлическую турбину, причем полная механическая энергия потока за счет работы лопастей турбины будет уменьшаться; стенки металлического напорного трубопровода могут вибрировать, причем эта вибрация будет «поглощать» энергию, несомую жидкостью, и т. п. Мы далее не будем касаться таких случаев. Далее будем иметь в виду потерю механической энергии потоком, находящимся в неподвижном русле, обусловленную работой только сил трения, возникающих в реальной жидкости при ее движении (см. § 4-2; конец п. 1). Именно эту потерю энергии («потерю напора») мы учитывали выше при рассмотрении уравнения Бернулли. Различают два вида такого рода потерь напора:

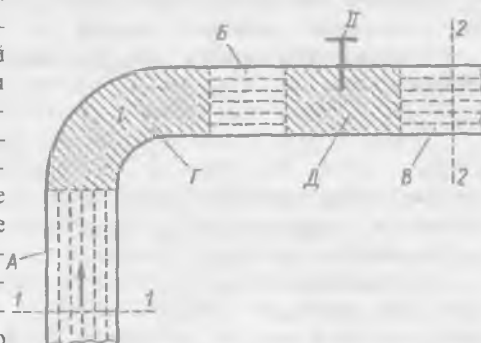


Рис. 4-1. Области, внутри которых напряжения трения τ распределяются: *a* — равномерно — см. области *A*, *B*, *V* — здесь получаются «потери напора по длине»; *b* — неравномерно (беспорядочно) — см. области *G* и *D* — здесь получаются «местные потери напора»

1) так называемую потерю напора по длине. Она распределяется по длине потока равномерно (при равномерном движении) или несколько неравномерно (при плавно изменяющемся неравномерном движении). Такую потерю напора, получающуюся на длине l потока, будем обозначать через h_l ;

2) так называемые местные потери напора, получающиеся только в отдельных местах потока, где поток претерпевает ту или другую резкую местную деформацию. Каждую отдельную местную потерю напора будем обозначать через h_j .

На рис. 4-1 представлен трубопровод, имеющий особые узлы: поворот *I*, задвижку *II* (частично открытую). Помимо потери напора по длине между сечениями 1-1 и 2-2 (на участках *A*, *B*, *V*), в данном случае будут еще две местные потери напора: на участках *G* и *D*, где происходит местная деформация потока, причем, как это будет пояснено ниже, в них получается резко изменяющееся неравномерное движение жидкости.

На участке потока, где имеют место «потери по длине», касательные напряжения трения τ распределяются вдоль потока равномерно или примерно равномерно; на участках же потока, где имеют место «местные потери», напряжения τ распределяются резко неравномерно.