МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

20.1. Задачи экспериментального изучения движения жидкостей

Математические методы решения задач гидромеханики в большинстве случаев оказываются несостоятельными без привлечения экспериментальных данных. Это обусловлено следующими обстоятельствами.

1. Уравнения динамики вязкой жидкости (уравнения Навье—Стокса), решения которых должны обеспечить получение полной информации о полях скоростей и давлений, являются нелинейными уравнениями с частными производными. Реализация численного или аналитического решения таких уравнений в полном виде и даже изучение свойств этих решений до сих пор остаются серьезными математическими проблемами.

2. Большинство потоков, встречающихся в практически важных случаях, являются турбулентными. Наиболее распространенный аппарат, позволяющий описывать поля скорости и давления в турбулентных потоках — модель Рейнольдса—Буссинеска осредненного турбулентного потока и основанные на этой модели уравнения Рейнольдса. Как было отмечено в гл. 17, эти уравнения не замкнуты, они содержат больше неизвестных, чем допускает количество уравнений, и для их замыкания они должны быть дополнены зависимостями, полученными из экспериментальных данных о структуре турбулентных потоков.

3. Многие задачи, особенно в инженерно-строительных приложениях, требуют описания потоков со свободными поверхностями. Постановка и решение таких задач на основе уравнений Навье—Стокса или Рейнольдса исследованы в исключительно редких случаях, не представляющих, как правило, практического интереса. Использование более эффективных моделей (например, уравнений Сен-Венана) требует привлечения экспериментальных данных.

4. Ключевой вопрос при решении внутренних задач (течение в трубопроводах, реках, каналах) — это вопрос о диссипации механической энергии и о потерях напора. Он решается исключительно с помощью экспериментов. Даже, на первый взгляд, чисто теоретическая формула Борда для потерь при резком расширении потока при строгом анализе таковой не является, так как структура потока с разделением на транзитную и водоворотную части и отдельные допущения могут быть использованы только после соответствующего экспериментального изучения потока.

Учитывая изложенное, можно выделить три основных вида объектов экспериментального гидромеханического исследования.

1. *Уникальные объекты*: водосбросные тракты гидротехнических сооружений, водозаборные сооружения, гидроагрегаты (насосы, турбины), самолеты, подводные и надводные корабли, системы наполнения шлюзов и т.п.

2. *Типовые объекты*: трубопроводы, элементы регулирования и контроля расхода (задвижки, диафрагмы и т.п.), открытые каналы, напри-

мер, мелиоративного или энергетического назначения, водосливы, здания и сооружения, водобойные колодцы и т.п.

3. *Универсальные объекты*: потоки, не всегда привязанные специально к конкретным конструкциям; здесь целью исследований является изучение структурных связей между локальными гидромеханическими характеристиками турбулентных потоков: результаты таких экспериментов могут использоваться в качестве дополнительных замыкающих зависимостей при математическом моделировании потоков, связанных с объектами первых двух типов.

Объект следует считать уникальным, если его не удается подразделить на части, каждую из которых можно рассматривать как типовую, работающую независимо от остальных. Например, пусть водосбросной тракт состоит из подводящего канала, водосливной стенки с затворами, водобойного колодца и отводящего канала. При некоторых расчетных условиях (все затворы полностью открыты, в нижнем бьефе глубина соответствует расчетному расходу согласно кривой связи и т.п.) этот объект можно рассчитать, разбив его на элементы, каждый из которых рассматривается как типовой. При других расчетных условиях (в частности, при открытии части затворов, когда в нижнем бьефе имеют место пространственные (не плоские) условия сопряжения, либо когда в начальный период сброса воды уровень нижнего бьефа не соответствует сбрасываемому расходу) этот объект нельзя разделить на взаимно независимые типовые элементы, и его следует рассматривать как уникальный, т.е. моделировать его целиком.

Сходное соотношение имеет место между типовыми и универсальными объектами. Некоторые режимы течения в типовых объектах могут быть рассчитаны с помощью математических моделей, которые замыкаются (дополняются) исследованиями универсальных объектов. Например, резкое расширение турбулентного потока в трубе можно рассчитать, используя уравнения Рейнольдса, замыкаемые с помощью экспериментальных полуэмпирических зависимостей между локальными характеристиками турбулентности. Однако универсальность этих зависимостей ограничена, как правило, достаточно большими числами Рейнольдса. При числах Рейнольдса, близких к критическому $\left(\mathrm{Re_D}\right)_{\text{кр}} = 2300$, а также при нестационарных режимах исследование и использование структурных связей между турбулентными характеристиками становятся неэффективными для решения практических задач.

Во всех указанных случаях экспериментальных исследований возникает проблема практической ценности, общности полученных результатов. Так, например, изучение характеристик потоков жидкости в уникальных объектах, как правило, выполняется на физических моделях, имеющих размеры, отличные от натурных (лабораторная модель гидроузла во много раз меньше, чем натурный гидроузел; модель самолета или автомобиля в аэродинамической трубе меньше, чем эти объекты в натуре и т.п.). При проведении опытов необходимо быть уверенным, что существуют надежные способы перенесения полученных результатов с модели на натуру, другими словами, что исследуемый модельный поток *подобен* натурному потоку в пределах изучаемого объекта. Следовательно, должны быть сформулированы *критерии, гарантирующие подобие* натурного и модельного объектов, и правила пересчета модельных результатов на натурные условия.

При исследовании типовых объектов необходимо обеспечить диапазон изменения характеристик объекта и жидкости и способы представления экспериментальных результатов (организации информации о потоках), которые позволили бы эффективно использовать опытные данные. Например, изучение гидравлических потерь энергии при течении жидкости в цилиндрических трубах, естественно, может быть выполнено на ограниченном количестве труб, различающихся диаметром, состоянием внутренней поверхности, с использованием ограниченного количества различных жидкостей и т.п. Обобщая результаты таких исследований, необходимо их так организовать и представить, чтобы можно было указать диапазоны параметров труб и характеристик жидкостей, для которых результаты проведенных экспериментов могут быть использованы, а также способы этого использования. Аналогично при изучении обтекания потоком жидкости каких-либо тел, например, цилиндра, результаты исследований должны быть так организованы и представлены, чтобы с их помощью можно было рассчитать, например, нагрузку от действия ветра и на телеграфный столб и на провода, прикрепленные к нему. Следовательно, и в этом случае возникает проблема подобия экспериментально исследуемых явлений (объектов) и явлений (объектов), на которые следует распространить результаты этих исследований.

При изучении структуры турбулентных потоков обобщение результатов измерений также должно быть обосновано введением критериев локального гидродинамического (возможно, кинематического) подобия турбулентных потоков.

Таким образом, при экспериментальном изучении гидромеханических явлений практически неизбежно возникает проблема возможности моделирования этих явлений, подобия потоков, имеющих различные размеры, или подобия потоков жидкостей с различными физическими свойствами.

Один из наиболее эффективных методов, позволяющих организовать информацию о потоках, выработать критерии, устанавливающие подобие гидромеханических явлений, и обобщить опытные данные — анализ размерностей.

20.2. Предпосылки использования анализа размерностей

Практически важные характеристики потока жидкости или газа, такие как силовое воздействие на обтекаемое тело, диссипация механической энергии движения жидкости в каналах и т.п., определяются значительным количеством параметров. Например, обтекание однородным потоком несжимаемой жидкости кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна вектору скорости потока, определяется гидромеханическими свойствами жидкости, т.е. плотностью ρ и вязкостью η, диаметром цилиндра D, скоростью потока V_∞ и состоянием обтекаемой поверхности цилиндра. В первом приближении можно принять, что на поверхность цилиндра наклеены песчинки с характерным размером Δ, и эту величину, называемую шероховатостью и имеющую размерность длины, считать характеристикой состояния обтекаемой поверхности.

Пусть целью экспериментального исследования является определение силы **F**, действующей на цилиндр со стороны потока. Вследствие симметрии эта сила совпадает по направлению со скоростью потока, и приложена она к оси цилиндра. Следовательно, опытным путем необходимо измерить лишь численное значение **F**, приходящееся на единицу длины цилиндра; согласно изложенному выше:

$$F = f\left(\rho, \eta, V_{\infty}, D, \Delta\right). \tag{20.1}$$

В результате экспериментального исследования следует получить данные, достаточные для того, чтобы с их помощью определить силу, действующую на любой, встречающийся в инженерной практике цилиндрический объект. Это может быть ветровая нагрузка на дымовую трубу диаметром 5 метров или же на электрический провод диаметром 0,5 см, нагрузка от руслового потока на нефтепровод диаметром 1,4 м, пересекающий реку, а может быть нагрузка на стержень диаметром 2 см системы охлаждения электрического трансформатора в потоке масла.

Организуем эксперименты следующим образом. Зафиксируем значения ρ и η (т.е. используем в качестве рабочей жидкости, например, воздух при заданных температуре и давлении). Поместим цилиндр диаметром D и шероховатостью Δ в поток жидкости (например, в аэродинамическую трубу) и, задавая несколько значений скорости воздуха V_{∞}, с помощью динамометра определим силу, действующую на единицу длины цилиндра. В результате получим зависимость $F = f_1(V_{\infty})$. Изменив шероховатость поверхности цилиндра (наклеив на его поверхность другие песчинки) и проведя такие же опыты, получим $F = f_2(V_{\infty})$. Использовав песчинки 10 различных размеров (чтобы изучить возможно более широкий диапазон встречающихся на практике шероховатостей), представим результаты экспериментов в виде графика (рис. 20.1).

Рис. 20.1. Экспериментальное определение силы, действующей на обтекаемый цилиндр: *а* — схема обтекания; *б* — зависимость $F = F(V_{\infty}, \Delta)$

Для того, чтобы установить большую часть встречающихся на практике сочетаний параметров, подобные графики следует получить для различных сочетаний оставшихся параметров ρ, η и D. Если для каждого из них в диапазоне возможных значений задать по 10 точек для экспериментального построения указанного графика, то материалы исследований будут представлены в виде 1000 графиков. Помимо неудобства и громоздкости представления, следует иметь в виду практически неприемлемую стоимость подобной программы исследований (например, представим себе лабораторную установку, позволяющую измерить, задавая различные скорости течения, силу, действующую со стороны потока воды на цилиндр диаметром 2 м).

Объем экспериментов может быть существенно сокращен, а результаты исследований можно представить в несравненно более компактном виде, если предварительно воспользоваться упрощением зависимости (20.1) на основе *анализа размерностей.*

20.3. Основные положения анализа размерности. П-теорема

Основой анализа размерности является положение о том, что все математические равенства, выражающие связь между физическими величинами (параметрами потока жидкости или газа в гидромеханике), должны быть размерно-однородными или однородными по размерностям. Это означает, что:

размерность правой части равенства должна быть такой же как и размерность левой части того же равенства;

складывать и вычитать можно только величины, имеющие одинаковые размерности.

Эти очевидные правила (вряд ли кому-нибудь представится возможность сложить один килограмм с один метром) позволяют получить нетривиальные результаты, что вызывает у начинающих исследователей настороженное отношение к анализу размерностей. С одной стороны, результаты получаются как бы “из ничего”, из бесспорных предпосылок, которые не похожи на привычный фундамент физических наук; с другой стороны, результаты не имеют вида окончательных физических зависимостей, они требуют дополнительного, чаще всего экспериментального изучения явлений.

Продемонстрируем на примерах основные особенности технических приемов, используемых в анализе размерностей, и возможности, которые он предоставляет.

Предварительно зафиксируем, что в механике жидкости и газа используются первичные размерности: масса M; длина L; время T; температура θ.

В дальнейшем с помощью анализа размерности будут рассмотрены лишь изотермические задачи, и температура не будет входить в число размерных параметров, определяющих интересующие нас гидромеханические явления. Поэтому примем, что в нашем распоряжении имеются три независимые первичные размерности: M, L, T. Размерности других физических параметров называются вторичными, или производными. Они получаются из зависимостей, определяющих эти параметры. Размерности наиболее употребительных в гидромеханике величин (размерных параметров) представлены в табл. 20.1.

Таблица 20.1

Размерность гидромеханических величин

Размерный параметр	Обозначение	Определяющее выражение	Размерность	Единица величины
Масса	m	—	M	кг
Длина	ℓ	—	L	м
Время	t	—	T	с
Площадь	A, ω	$A = \ell_1 \cdot \ell_2$	L^2	$м^2$
Объем	$\forall$	$\forall = \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \ell_3$	L^3	$м^3$
Скорость	v u	$v = \frac{d\ell}{dt}$	$\frac{L}{T}$	м/с
Ускорение	a	$a = \frac{du}{dt}$	$\frac{L}{T^2}$	$м/с^2$
Сила	F	$F = ma$	$\frac{ML}{T^2}$	Н
Напряжение (плотность распределения поверхностной силы)	p	$p = \frac{F}{A}$	$\frac{M}{LT^2}$	$Па = \frac{Н}{м^2}$
Давление	p	$p = -\frac{1}{3}\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right)$	$\frac{M}{LT^2}$	Па
Плотность (плотность распределения массы)	ρ	$\rho = \frac{m}{\forall}$	$\frac{M}{L^3}$	$\frac{кг}{м^3}$
Плотность распределения объемной силы (на единицу массы)	f	$f = \frac{F}{\rho\forall}$	$\frac{L}{T^2}$	$\frac{м}{с^2}$
Динамический коэффициент вязкости	η	$\eta = \frac{p_{zx}}{\frac{du}{dz}}$	$\frac{M}{LT}$	пуаз Па·с
Кинематический коэффициент вязкости	ν	$\nu = \frac{\eta}{\rho}$	$\frac{L^2}{T}$	стокс $\frac{м^2}{с}$
Объемный расход	Q	$Q = v\omega$	$\frac{L^3}{T}$	$\frac{м^3}{с}$
Массовый расход	Q_M	$Q_M = \rho v\omega$	$\frac{M}{T}$	$\frac{кг}{с}$
Весовой расход	$Q_в$	$Q_в = \rho g Q$	$\frac{ML}{T^3}$	$\frac{Н}{с}$

Размерный параметр	Обозначение	Определяющее выражение	Размерность	Единица величины
Кинетическая энергия, работа	КЭ, W, k	$КЭ = \frac{mV^2}{2}$	$\frac{ML^2}{T^2}$	Дж Н·м
Количество движения	КД	КД = mu	$\frac{ML}{T}$	$\frac{кг \cdot м}{с}$
Мощность	N	$N = \frac{КЭ}{t} = \frac{W}{t}$	$\frac{ML^2}{T^3}$	Вт $\frac{Н \cdot м}{с}$

В качестве примера, на котором могут быть показаны основные приемы анализа размерности, рассмотрим задачу с распространением возмущения свободной поверхности в покоящейся жидкости, заполняющей широкий прямоугольный канал с горизонтальным дном (рис. 20.2). Жидкость имеет плотность ρ, она невязкая ($\eta = 0$), влиянием боковых стенок пренебрегаем и изменение всех характеристик рассматриваем лишь в плоскости (x, z).

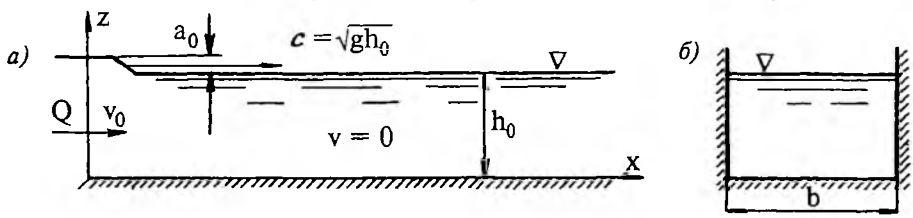


Рис. 20.2. Длинная волна в прямоугольном канале:
а — продольный разрез; *б* — поперечное сечение

Пусть через сечение 1—1 начинает поступать расход Q; в результате отметка свободной поверхности возрастет в этом сечении на величину a_0, а скорость изменится от 0 до $v_0 = \frac{Q}{b h_0}$, где h_0 — глубина; а b — ширина канала. Это возмущение (сочетание a_0 и v_0) будет распространяться вдоль оси x с некоторой скоростью c. Напомним, что эта задача была рассмотрена в главе 10, и на основе решения дифференциальных уравнений мелкой воды (Сен-Венана) было определено, что если $a_0 \ll h_0$, то

$$c = \sqrt{g h_0}. \tag{20.2}$$

Покажем, как аналогичный результат можно получить, используя анализ размерностей. Здесь следует выделить несколько этапов решения задачи.

1-й этап. Устанавливаем, от каких величин может зависеть искомая скорость распространения возмущения c. Это наиболее ответственный этап, требующий глубокого понимания физики процесса. В данном случае характерными величинами, определяющими процесс распространения, является плотность жидкости ρ, глубина в канале h_0, ускорение силы тяжести g, амплитуда возмущения a_0 и скорость поступления жидкости в канал v_0. Для упрощения задачи с тем, чтобы результат ее решения можно было сравнить с (20.2), допустим, как и в гл. 10, что $a \ll h_0$ и $v_0 \ll c$, так что эти величины не оказывают влияния на процесс (в принятии подобных допущений и заключается ответственность первого этапа). При этом

$$c = f(\rho, h_0, g), \tag{20.3}$$

Все величины, от которых зависит значение c, имеют различные размерности. Поскольку в соответствии с положением об однородности по размерностям их нельзя суммировать, то остается только возможность добиться одинаковой размерности левой и правой частей (20.2), возводя эти величины (ρ, h_0 и g) в какие-либо степени и составляя произведения из этих степеней:

$$c = k\rho^{x_1} \cdot h_0^{x_2} \cdot g^{x_3}, \tag{20.4}$$

где k — безразмерный коэффициент; x_1, x_2, x_3 — числа, которые следует определить.

2-й этап. Подставим вместо всех величин, входящих в (20.4), размерности и потребуем, чтобы размерность левой части была равна размерности правой:

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{x_1} \cdot (L)^{x_2} \cdot \left(\frac{L}{T^2}\right)^{x_3};$$

$$M^0L^1T^{-1} = M^{x_1}L^{(-3x_1+x_2+x_3)}T^{-2x_3}.$$

Приравняв показатели степени у одноименных размерностей, получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} M&:\ 0 = x_1;\\ L&:\ 1 = -3x_1 + x_2 + x_3;\\ T&:\ -1 = -2x_3.\end{aligned}\right\}$$

3-й этап. Решив эту систему, найдем

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0;\\ x_2 &= \frac{1}{2};\\ x_3 &= \frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}$$

В результате выражение (20.2) приобретает вид

$$c = k\rho^0 h_0^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$$

или

$$c = k\sqrt{g h_0}. \tag{20.5}$$

Сравнивая (20.5) с (20.2), отметим, что с помощью анализа размерности получена структура зависимости c от g и h_0 такая же, как и с помощью дифференциальных уравнений мелкой воды. Но для вычисления скорости c по формуле (20.5) необходимо определить значение безразмерного коэффициента k; для этого анализа размерностей недостаточно, необходимо либо провести эксперимент, либо использовать дифференциальные уравнения движения жидкости. Этот параметр k, являясь безразмерным, обладает универсальностью в том смысле, что достаточно провести один опыт в одном лотке при одной глубине h_0, и найденное в этом опыте значение k можно использовать для всех других глубин.

Кроме того, анализ размерностей позволил установить, что скорость c не зависит от рода жидкости, т.е. и в воде и в ртути скорость распространения возмущений свободной поверхности одинакова.

Отметим, что приведенный пример показал основные особенности анализа размерностей. С одной стороны, не проводя экспериментов и не используя физических законов, только из условий однородности по размерности мы установили, что скорость c не зависит от рода жидкости, установили структуру зависимости c от глубины. С другой стороны, полученная зависимость (20.5) дает лишь структуру зависимости и требует дополнительных (но, что существенно, значительно меньших по объему) исследований (экспериментальных или теоретических).

Рассмотрим ту же задачу о скорости распространения возмущения в канале, приняв на первом этапе, что c зависит не только от ρ, h_0 и g, но также и от a_0 (т.е. a_0 — не бесконечно малая величина):

$$c = f(\rho, h_0, g, a_0). \tag{20.6}$$

Как и первом случае, представим эту зависимость в виде

$$c = k\rho^{x_1} h_0^{x_2} g^{x_3} a_0^{x_4}. \tag{20.7}$$

2-й этап. Подставив в (20.7) размерности

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{x_1} (L)^{x_2} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{x_3} (L)^{x_4} \tag{20.8}$$

и приравняв показатели степени у M, L и T, получим

$$\left.\begin{aligned} M&:\ 0 = x_1; \\ L&:\ 1 = -3x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ T&:\ -1 = -2x_3. \end{aligned}\right\} \tag{20.9}$$

3-й этап. Полученная система уравнений не имеет единственного решения, так как здесь количество неизвестных (4) больше количества уравнений (3). Одну из неизвестных x_i можно задать. Пусть это будет x_4; выразив остальные неизвестные через нее:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0; \\ x_2 &= \frac{1}{2} - x_4; \\ x_3 &= \frac{1}{2}, \end{aligned}\right\}$$

получим

$$c = k\rho^0 h_0^{\frac{1}{2}-x_4} g^{\frac{1}{2}} a_0^{x_4}$$

или

$$c = k\left(\frac{a_0}{h_0}\right)^{x_4} \sqrt{gh_0}. \tag{20.10}$$

Поскольку x_4 является произвольным безразмерным числом, то полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Положим, что $x_4 = 1, 2, 3, \ldots$; при этом c можно представить в виде ряда

$$c = \left[\sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(\frac{a_0}{h_0}\right)^j\right] \sqrt{gh_0}. \tag{20.11}$$

Этот ряд (если он сходится, что вполне правдоподобно при $a < h_0$) представляет собой некоторую неизвестную функцию:

$$\varphi\left(\frac{a_0}{h_0}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \left(\frac{a_0}{h_0}\right)^j.$$

Тогда зависимость (20.12) можно записать в виде

$$c = \varphi\left(\frac{a_0}{h_0}\right)\sqrt{gh_0}. \tag{20.12}$$

Таким образом на этом примере выявлена еще одна особенность анализа размерностей: если количество размерных параметров, от которых зависит искомая величина, больше трех (количества первичных размерностей), то с помощью анализа размерностей можно установить структуру зависимости, выявить безразмерные комбинации независимых размерных величин и в результате упростить определение окончательной зависимости, уменьшив количество независимых переменных. Так, вместо экспериментального определения скорости c как функции *четырех* переменных (ρ, h_0, g, a_0) анализ размерности позволил свести задачу к определению c как функции *одной* переменной $\left(\frac{a_0}{h_0}\right)$.

В общем виде полученный частный результат формулируется в виде так называемой П-*теоремы*, которую приведем без доказательства.

Если физический процесс описывается однородным по размерности равенством

$$y_1 = f(y_2, y_3, \ldots, y_n), \tag{20.13}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — размерные параметры, то существует эквивалентное равенство для меньшего количества $(n - m)$ безразмерных параметров:

$$\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{n-m}), \tag{20.14}$$

где $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}$ — безразмерные параметры, составленные из $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значение m обычно равно (теоретически — не больше) числу первичных размерностей, с помощью которых выражаются размерности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (если первичные размерности M, L и T, как в рассмотренном выше примере, то $m = 3$).

Название П-теоремы происходит от использованной для обозначения безразмерных параметров греческой буквы П. Эту теорему часто связывают с именем Бэкингэма, хотя анализ размерности впервые был предложен Фурье.

П-теорема, как типичная математическая теорема существования, лишь устанавливает возможность перехода от равенства (20.13) к равенству (20.14); в ней отсутствуют указания на то, как из размерных параметров y_i составить безразмерные параметры Π_j, и тем более какой набор Π_j будет эффективен при решении той или иной физической задачи. Отметим, что из любого безразмерного параметра, например, из Π_j, возведением в степень можно образовать также безразмерные параметры $\left(\sqrt{\Pi_j}, \frac{1}{\Pi_j}, \Pi_j^2 \text{ и т.п.}\right)$. Более того, безразмерные параметры можно образовывать, составляя произведения степеней двух и более безразмерных параметров $\left(\Pi_j \cdot \sqrt{\Pi_i};\ \Pi_j^{-\frac{2}{3}} \cdot \Pi_i^2 \text{ и т.п.}\right)$.

В связи с этим возникает вопрос о том, как при использовании П-теоремы сформировать такой набор безразмерных параметров $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-m}$, который обеспечит наиболее простой вид функции F. Эта функция, как правило, определяется экспериментально, и поэтому точность ее определения существенно зависит от вида функции, аппроксимирующей экспериментальные данные. Как было указано, П-теорема не дает ответа на этот вопрос.

В разд. 20.1 было показано, что в конечном итоге все задачи экспериментального исследования гидромеханических явлений связаны с вопросами их подобия и моделирования, поэтому для установления набора безразмерных параметров, позволяющих эффективно решать ту или иную задачу, обратимся к общим вопросам о подобии и моделировании физических процессов.

20.4. Подобие гидромеханических явлений

Для того, чтобы два гидромеханических объекта (два потока жидкости или газа) были подобны, необходимо соблюдение трех типов подобия этих явлений (потоков):

геометрическое подобие;

кинематическое подобие;

динамическое подобие.

Для определенности будем считать один из объектов натурным, или прототипом, а второй объект — модельным; все параметры натурного объекта обозначим индексом "н", а модельного — "м".

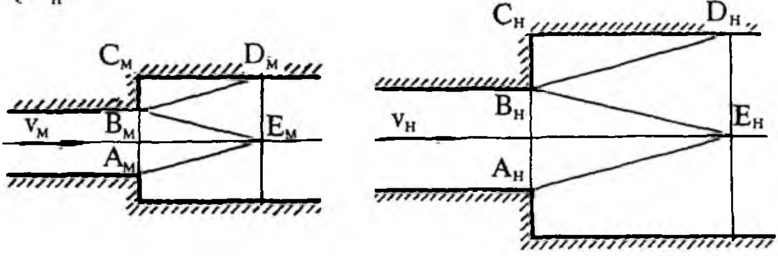
Геометрическое подобие натурного и модельного объектов обеспечивается, если подобны все треугольники, связывающие сходственные точки физических границ этих объектов.

Так, на рис. 20.3 подобны треугольники $A_м B_м E_м$ и $A_н B_н E_н$; $C_м B_м D_м$ и $C_н B_н D_н$ и т.д. Постоянное отношение расстояния между двумя произвольными точками модельного объекта к расстоянию между соответствующими точками натурного объекта называется *линейным масштабом модели*:

$$M_\ell = \frac{A_м B_м}{A_н B_н} = \frac{D_м E_м}{D_н E_н} = \ldots = \text{const}. \qquad (20.15)$$

Из определения геометрического подобия следует, что угол между двумя плоскими элементами физических границ в модельном объекте равен углу между соответствующими элементами натурного объекта.

Геометрическое подобие криволинейных границ потока обеспечивается аппроксимацией с необходимой точностью этих границ кусочно-плоскими поверхностями. При этом, в частности, круглоцилиндрической поверхности диаметром $D_н$ в натурном объекте будет соответствовать в модельном объекте также круглоцилиндрическая поверхность диаметром $D_м = M_\ell D_н$.



Модельный объект *Натурный объект*

Рис. 20.3. Геометрическое подобие гидравлических объектов

Кинематическое подобие предполагает, что картина течения в модельном объекте подобна натурной картине течения, другими словами, в сходственных точках скорости жидкости (или какая-либо другая скорость, например, скорость движущегося в жидкости тела) в натурном и модельном объектах одинаково ориентирована относительно физических границ, а отношение значений модельной и натурной скоростей постоянно во всех точках потока:

$$\frac{u_м}{u_н} = M_u = \text{const}. \qquad (20.16)$$

Это условие особенно важно при возможности образования отрывных течений: одни и те же физические границы могут формировать качественно различающиеся картины течения; примеры таких течений, когда физическими границами являются труба с резким увеличением диаметра и круговой цилиндр, представлены на рис. 20.4 и 20.5, соответственно. Очевидно, что

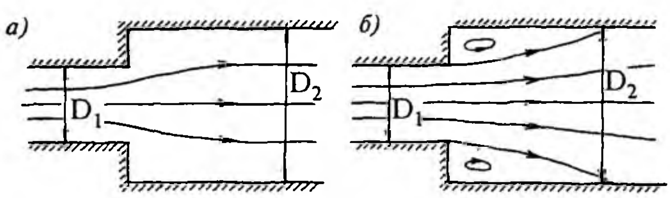


Рис. 20.4. Геометрически подобные границы не обеспечивают кинематического подобия потоков

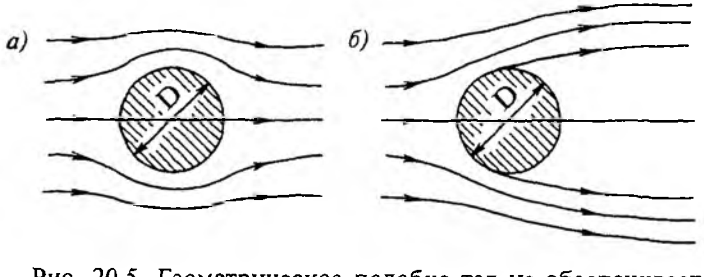


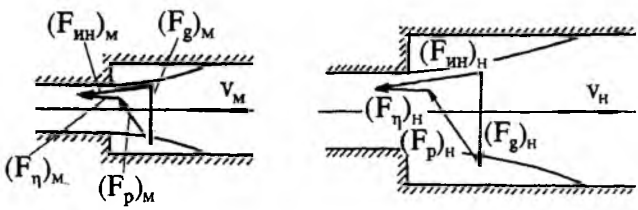
Рис. 20.5. Геометрическое подобие тел не обеспечивает кинематического подобия потоков

потоки при безотрывном обтекании физических границ (рис. 20.4,*а* и 20.5,*а*) не подобны кинематически потокам, имеющим отрывные зоны (водовороты, каверны и т.п. на рис. 20.4,*б* и 20.5,*б*), и следовательно, такие пары течений не могут рассматриваться как модельный и натурный объекты.

Динамическое подобие потоков формулируется на основе закона подобия Ньютона, согласно которому в каждой из сходственных точек модельного и натурного потоков *многоугольники сил*, действующих на жидкую частицу (включая силу инерции), должны быть:

подобны, причем коэффициент подобия (масштаб сил $M_F = \dfrac{F_м}{F_н}$) должен быть постоянен во всей области течения;

одинаково ориентированы относительно физических границ (рис. 20.6).



Модельный объект *Натурный объект*

Рис. 20.6. Динамическое подобие гидравлических объектов

Из условий подобия следует, что отношение двух каких-либо сил, действующих на жидкую частицу в любой точке модельного объекта (например, силы вязкости $(F_\eta)_м$ к силе давления $(F_p)_м$, должно быть равно отношению аналогичных сил, действующих в сходственной точке натурного объекта, т.е.

$$\frac{(F_\eta)_м}{(F_p)_м} = \frac{(F_\eta)_н}{(F_p)_н}. \tag{20.17}$$

Такие равенства, записанные для различных сочетаний сил, формирующих течение жидкости, рассматривают как *критерии динамического подобия* натурного и модельного объектов.

В большинстве задач гидромеханики сила инерции жидкой частицы является формирующей течение силой, в то время как силы другой природы (силы вязкости, давления, тяжести, электромагнитного происхождения, поверхностного натяжения) не всегда вносят ощутимый вклад в баланс сил, и в отдельных задачах те или иные силы целесообразно исключать из рассмотрения, считая их вклад исчезающе малым. Поэтому принято при составлении критериев подобия рассматривать отношения внешних для заданной жидкой частицы сил к силе инерции этой частицы.

Для того, чтобы выразить критерии подобия через параметры модельного и натурного объекта, введем понятия характерной скорости u и характерного линейного размера ℓ объекта. В различных случаях величина u может обозначать либо среднюю скорость потока в трубе v, либо линейно-связанную с ней скорость жидкой частицы в фиксированной точке потока, либо пульсационную скорость при турбулентном движении, либо динамическую скорость u_*, определяемую через касательное напряжение на твердой границе. Аналогично и характерный линейный размер ℓ может представлять собой либо диаметр трубы D, в которой течет жидкость, либо глубину потока в открытом канале h, либо диаметр шара, обтекаемого жидкостью, либо линейный размер жидкой или твердой частицы при определении действующих на них сил.

Оценим значения сил, действующих на жидкие частицы, полагая на основании изложенного выше, что характерная для данного объекта площадь поверхности, на которую действует сила, равна ℓ^2, характерный объем — ℓ^3, а пространственная производная скорости $\frac{\partial u}{\partial \ell} \sim \frac{u}{\ell}$.

Сила инерции $F_{ин}$ жидкой частицы равна произведению ее массы $\rho\ell^3$ на ускорение; при установившемся движении ускорение жидкой частицы имеет только конвективную составляющую $u\frac{\partial u}{\partial \ell} \sim u\frac{u}{\ell}$, поэтому

$$F_{ин} = \rho\ell^3 u \frac{u}{\ell} = \rho u^2 \ell^2. \qquad (20.18)$$

Аналогично найдем выражение для других сил:
сила тяжести

$$F_g \sim \rho\ell^3 g, \qquad (20.19)$$

сила вязкости

$$F_\eta = \tau\ell^2 = \eta\frac{\partial u}{\partial \ell}\ell^2 = \eta\frac{u}{\ell}\ell^2 = \eta u\ell, \qquad (20.20)$$

сила давления

$$F_p = \Delta p\ell^2. \qquad (20.21)$$

Составим отношения значений каждой из трех последних сил к силе инерции (20.18) для модельного объекта и приравняем соответствующим отношениям для натурного объекта.

1. Сила тяжести и сила инерции:

$$\left(\frac{\rho\ell^3 g}{\rho u^2 \ell^2}\right)_м = \left(\frac{\rho\ell^3 g}{\rho u^2 \ell^2}\right)_н$$

или

$$\left(\frac{u^2}{g\ell}\right)_м = \left(\frac{u^2}{g\ell}\right)_н,$$

или

$$\frac{u_м^2}{g\ell_м} = \frac{u_н^2}{g\ell_н}. \qquad (20.22)$$

Безразмерное выражение $u^2/g\ell$ называют *числом Фруда* и обозначают

$$Fr = \frac{u^2}{g\ell}. \qquad (20.23)$$

Число Фруда является критерием динамического подобия, если в состав сил, определяющих гидродинамическое явление (формирующих поток), входят силы *тяжести* и *инерции*. Используя (20.23), условие подобия (20.22) представим в виде:

$$(\mathrm{Fr})_{\text{м}} = (\mathrm{Fr})_{\text{н}}. \tag{20.24}$$

2. Сила вязкости и сила инерции:

$$\left(\frac{\eta u\ell}{\rho u^2\ell^2}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{\eta u\ell}{\rho u^2\ell^2}\right)_{\text{н}}$$

или

$$\left(\frac{\eta}{\rho u\ell}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{\eta}{\rho u\ell}\right)_{\text{н}},$$

или

$$\frac{u_{\text{м}}\ell_{\text{м}}}{\nu_{\text{м}}} = \frac{u_{\text{н}}\ell_{\text{н}}}{\nu_{\text{н}}}. \tag{20.25}$$

Безразмерное выражение $u\ell/\nu$ называют *числом Рейнольдса* и обозначают

$$\mathrm{Re} = \frac{u\ell}{\nu} = \frac{\rho u\ell}{\eta}. \tag{20.26}$$

Число Рейнольдса является критерием динамического подобия, если в состав сил, формирующих поток, входят силы *вязкости* и *инерции*. Используя (20.26), перепишем условие подобия (20.25) в виде

$$(\mathrm{Re})_{\text{м}} = (\mathrm{Re})_{\text{н}}. \tag{20.27}$$

3. Сила давления и сила инерции:

$$\left(\frac{\Delta p\ell^2}{\rho u^2\ell^2}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{\Delta p\ell^2}{\rho u^2\ell^2}\right)_{\text{н}}$$

или

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho u^2}\right)_{\text{м}} = \left(\frac{\Delta p}{\rho u^2}\right)_{\text{н}},$$

или

$$\frac{\Delta p_{\text{м}}}{\rho_{\text{м}} u_{\text{м}}^2} = \frac{\Delta p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}} u_{\text{н}}^2}.$$

Безразмерное выражение $\Delta p\Big/\frac{1}{2}\rho u^2$ называют *числом Эйлера* или коэффициентом давления и обозначают Eu (множитель $\frac{1}{2}$ вводят в знаменатель, чтобы последний был близок по форме к скоростному напору в уравнении Бернулли):

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u^2}. \tag{20.28}$$

Число Эйлера обычно не рассматривается как независимый критерий динамического подобия; согласно уравнениям гидродинамики (в частности, уравнению Бернулли) поле давления и поле скорости жидкости связаны друг с другом; перепад давления Δp, например, при обтекании жидкостью твердого тела связан со скоростью потока, а скорость потока связана с перепадом давления, так что значение числа Эйлера, как правило, не может рассматриваться как независимый критерий подобия. Вместе с тем, в динамически подобных потоках

$$(\mathrm{Eu})_{\text{м}} = (\mathrm{Eu})_{\text{н}}. \tag{20.29}$$

Кроме критериев подобия, получаемых из закона динамического подобия Ньютона, при моделировании гидромеханических явлений необходимо принимать во внимание еще целый ряд безразмерных величин.

4. При моделировании натурных объектов, в которых возможны эффекты, связанные со *сжимаемостью* жидкости, в качестве критерия подобия следует использовать *число Маха*

$$\mathrm{M} = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}}, \tag{20.30}$$

где a — скорость звука в жидкости.

При этом для подобия модельного и натурного объектов необходимо равенство

$$\mathrm{M}_{\text{м}} = \mathrm{M}_{\text{н}} \tag{20.31}$$

или

$$\frac{u_{\text{м}}}{a_{\text{м}}} = \frac{u_{\text{н}}}{a_{\text{н}}}. \tag{20.32}$$

Кроме того, в этом случае следует включить в число независимых безразмерных параметров, определяющих подобие процессов, и показатель адиабаты $k = c_p / c_v$.

5. При необходимости учесть *поверхностные* эффекты на границе, разделяющей различные жидкости (например, воду и воздух), в число критериев подобия включают *число Вебера*

$$\mathrm{We} = \frac{\rho u^2 \ell}{\sigma}, \tag{20.33}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Этот критерий следует иметь в виду, рассматривая лишь течения тонких слоев жидкости со свободной поверхностью (пленочные течения).

6. При *нестационарных* граничных условиях, когда, например, какое-нибудь твердое тело колеблется с некоторой частотой Ω в потоке жидкости, из трех размерных величин, определяющих этот процесс: из скорости потока u, линейного размера тела ℓ и частоты Ω — можно образовать безразмерную величину, которую называют *числом Струхала*:

$$\mathrm{Sh} = \frac{\Omega \ell}{u}. \tag{20.34}$$

Если колебания тела задаются внешней по отношению к потоку силой (рис. 20.7), то число Струхала является *независимым* критерием подобия, и при изучении этого явления на модели следует потребовать выполнения условия

$$(\mathrm{Sh})_{м} = (\mathrm{Sh})_{н} \qquad (20.35)$$

или

$$\frac{\Omega_{м}\ell_{м}}{u_{м}} = \frac{\Omega_{н}\ell_{н}}{u_{н}}.$$

В некоторых случаях колебания тела в турбулентном потоке обусловлены именно обтеканием его жидкостью, образованием за телом турбулентного следа, цепочки вихрей и т.п. Такие явления приходится рассматривать при проектировании дымовых труб, мостов, линий электропередач; здесь число Струхала — это зависимый безразмерный параметр, а независимыми будут число Рейнольдса и, возможно, число Маха.

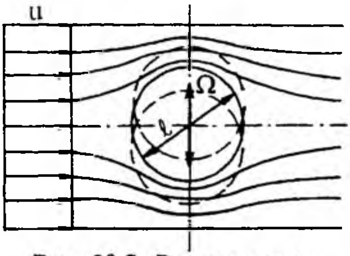


Рис. 20.7. Вынужденное колебание цилиндра в потоке жидкости

Безразмерные параметры, представляющие собой произведения величин, имеющих отличающиеся друг от друга размерности (например, числа Рейнольдса, Фруда и т.п.), называют безразмерными *комплексами*. Наряду с ними, используют безразмерные параметры в виде отношения двух величин, имеющих одинаковую размерность; например, число Маха, относительная ширина открытого потока $\beta = b / h$, относительная шероховатость $\Delta_{r} = \Delta / \ell$ (в круглой трубе ℓ — диаметр D, а в открытом русле ℓ — глубина потока h), относительная длина трубы ℓ / D и т.п. Такие параметры называются безразмерными *симплексами*.

Безразмерные комплексы и симплексы, которые используются как *критерии подобия* (для обеспечения геометрического и динамического подобия), называют *независимыми безразмерными параметрами*. Кроме них в гидромеханике используют так называемые *зависимые* (искомые) *безразмерные параметры*. В их число входят из приведенных выше число Эйлера Eu, в некоторых задачах — число Струхала Sh. Кроме этих чисел, зависимыми безразмерными параметрами являются:

коэффициент гидравлического трения для круглой трубы диаметром D:

$$\lambda = \frac{2gh_{\ell}D}{\ell v^{2}}; \qquad (20.36)$$

коэффициент местной потери напора:

$$\zeta_{м} = \frac{2gh_{м}}{v^{2}}; \qquad (20.37)$$

коэффициент лобового сопротивления движущегося тела:

$$c_{x} = \frac{F_{x}}{\frac{1}{2}\rho v^{2}\ell^{2}}; \qquad (20.38)$$

коэффициент подъемной силы:

$$c_{z} = \frac{F_{z}}{\frac{1}{2}\rho v^{2}\ell^{2}}.$$

Зависимые (искомые) безразмерные параметры рассматривают как функцию от независимых (задаваемых) безразмерных параметров.

Представим набор приведенных выше безразмерных параметров и их интерпретации, которые позволяют установить, в каких гидромеханических объектах эти параметры играют важную роль (например, в каких случаях их следует рассматривать как критерии подобия), а в каких объектах их роль несущественна (табл. 20.2).

Таблица 20.2

Интерпретации и области применения безразмерных параметров

Наименование и обозначение параметра	Интерпретация	Альтернативная интерпретация	Область эффективного применения
Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho u \ell}{\eta}$	$\dfrac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкости}}$	$\dfrac{\text{поток кинетической энергии}}{\text{диссипация механической энергии}}$	Ламинарные и турбулентные течения
Число Фруда $\mathrm{Fr} = \dfrac{u^2}{g\ell}$	$\dfrac{\text{сила инерции}}{\text{сила тяжести}}$	$\dfrac{\text{кинетическая энергия}}{\text{потенциальная энергия}}$ $\sqrt{\mathrm{Fr}} = \dfrac{\text{скорость потока}}{\text{скорость распространения поверхностных возмущений}}$	Течения в открытых руслах
Число Маха $M = \dfrac{u}{a}$	$\dfrac{\text{сила инерции}}{\text{сила упругого сопротивления сжатию}}$	$\dfrac{\text{кинетическая энергия}}{\text{тепловая энергия}}$	Течения сжимаемых жидкостей
Число Вебера $\mathrm{We} = \dfrac{\rho u^2 \ell}{\sigma}$	$\dfrac{\text{сила инерции}}{\text{сила поверхностного натяжения}}$	$\dfrac{\text{кинетическая энергия}}{\text{поверхностная энергия}}$	Пленочные течения
Число Эйлера $\mathrm{Eu} = \dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u^2}$	$\dfrac{\text{сила давления}}{\text{сила инерции}}$	$\dfrac{\text{работа сил давления}}{\text{кинетическая энергия}}$	Все потоки
Число Струхала $\mathrm{Sh} = \dfrac{\Omega \ell}{u}$	$\dfrac{\text{частота колебаний тела}}{\text{характерная частота потока}}$	$\dfrac{\text{скорость границ}}{\text{скорость потока}}$	Колебательные движения границ потока
Коэффициент гидравлического трения $\lambda = \dfrac{2gh_l D}{v^2 \ell}$	$\dfrac{\text{потеря механической энергии}}{\text{кинетическая энергия}}$		Внутренняя задача

Наименование и обозначение параметра	Интерпретация	Альтернативная интерпретация	Область эффективного применения
Коэффициент местной потери напора $\zeta_м = \frac{2gh_м}{v^2}$	$\frac{\text{потеря механической энергии}}{\text{кинетическая энергия}}$		Внутренняя задача
Коэффффициент лобового сопротивления $c_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho v^2 \ell^2}$	$\frac{\text{лобовая сила}}{\text{сила инерции}}$		Внешняя задача
Коэффициент подъемной силы $c_z = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho v^2 \ell^2}$	$\frac{\text{подъемная сила}}{\text{сила инерции}}$		Внешняя задача

20.5. Особенности и основные приемы моделирования гидромеханических явлений

Пусть требуется исследовать гидромеханические (гидравлические) явления, происходящие в крупном береговом водозаборе (рис. 20.8) при различных режимах его работы (при изменении уровня воды в реке, при различных положениях затворов, регулирующих подачу воды в канал и т.п.). Ширина водозаборного фронта 40 м, длина объекта, на границах которого можно пренебречь его влиянием (на уровень воды в реке на границе А—А и на равномерное движение в отводящем канале на границе В—В) — 120 м. В лаборатории имеется площадка шириной 3 м и длиной 6 м. Максимально возможный в этих условиях линейный масштаб модели $M_\ell = \frac{6\,м}{120\,м} = \frac{1}{20}$. В данном масштабе на лабораторной площадке следует построить геометрически подобную модель. Для обеспечения динамического подобия необходимо установить, какие силы определяют рассматриваемое явление и, следовательно, какие безразмерные параметры следует принять в качестве критериев подобия. В открытых (безнапорных) потоках сжимаемостью воды можно пренебречь; большие размеры (измеряемые метрами и десятками метров) модельного и натурного объектов исключают необходимость учитывать влияние поверхностного натяжения. Таким образом, устанавливаем, что течение будет определяться силами тяжести, вязкости и инерции, при этом критериями подобия являются числа Фруда и Рейнольдса.

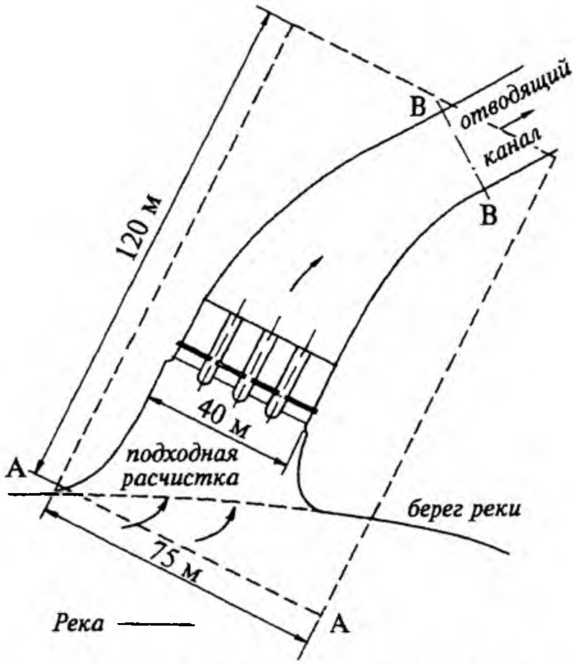


Рис. 20.8. Схема берегового водозабора

Из условия (20.22)

$$\frac{u_м^2}{g\ell_м} = \frac{u_н^2}{g\ell_н}$$

получаем масштаб скорости

$$M_u = \frac{u_м}{u_H} = \sqrt{\frac{\ell_M}{\ell_H}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

и масштаб расхода

$$M_Q = \frac{Q_м}{Q_н} = \frac{u_м \ell_м^2}{u_н \ell_н^2} = \frac{1}{\sqrt{20} \cdot 20^2}.$$

Согласно второму критерию на модели следует обеспечить условие

$$\frac{u_н \ell_н}{\nu_н} = \frac{u_м \ell_м}{\nu_м},$$

откуда следует масштаб кинематического коэффициента вязкости

$$M_\nu = \frac{\nu_м}{\nu_м} = \frac{u_м \ell_м}{u_м \ell_н} = \frac{1}{\sqrt{20} \cdot 20}.$$

В соответствии с полученным масштабом M_ν на модели вместо воды необходимо в качестве рабочей использовать жидкость, у которой кинематический коэффициент вязкости почти в 100 раз меньше. Кинематический коэффициент вязкости воды $\nu \approx 0{,}01$ см^2/с; есть жидкости, у которых ν в сотни и даже в тысячи раз больше (глицерин, технические масла), но практически только ртуть имеет $\nu \approx 0{,}001$ $см^2/с$, что всего в 10 раз меньше, чем у воды; другие жидкости имеют значения ν либо того же порядка, что вода, либо больше. Возникает безвыходное, на первый взгляд, положение: оказывается невозможным удовлетворить одновременно двум критериям подобия. Практический выход из этого положения заключается в экспериментально установленной возможности *приближенного моделирования*. Опытным путем установлено, что на участках, где движение резкоизменяющееся (это имеет место в пределах рассматриваемого объекта), все основные характеристики потока, определяемые зависимыми безразмерными параметрами, практически постоянны при всех значениях числа Рейнольдса $Re > 10000$. Поэтому вместо условия (20.25) достаточно потребовать выполнения двух условий:

$$\frac{u_м \ell_м}{\nu_м} > 10^4 \quad и \quad \frac{u_н \ell_н}{\nu_н} > 10^4, \tag{20.39}$$

Как правило, в натурных объектах скорость $u_н$ имеет порядок десятка сантиметров, глубина — сотен сантиметров, что обеспечивает $Re > 10^5$. Следовательно, условия (20.39) накладывают ограничения лишь на масштаб модели. В некоторых случаях, когда глубина потока на модели недостаточна, чтобы обеспечить выполнение условия (20.39), а горизонтальные размеры лабораторной площадки не позволяют увеличить линейный масштаб модели, приходится использовать искаженное геометрическое моделирование объекта, вводя более крупный (по сравнению с горизонтальным) вертикальный линейный масштаб.

Диапазон изменения критерия подобия, в пределах которого его влияние на моделируемый процесс практически пренебрежимо мало, называется *автомодельным*. В рассмотренном выше примере автомодельность имеет место при числах Рейнольдса $Re > 10^4$. В этом же объекте можно считать, что имеют место автомодельные диапазоны чисел Маха и Вебера.

При равномерном движении в трубах и каналах автомодельность по критерию Рейнольдса (т.е. независимость основной безразмерной характеристики таких потоков — коэффициента гидравлического трения λ от числа Re) имеет место в области квадратичного сопротивления (при $Re_D > (Re_D)''_{пред} = \dfrac{500}{\Delta_г}$; см. гл. 5).

Экспериментальными исследованиями установлен и автомодельный диапазон чисел Фруда — $Fr < 0{,}1$. Если, например, в рассмотренном примере в пределах всего натурного водозабора $Fr < 0{,}1$, то на модельном объекте вместо условия (20.22) достаточно наряду с геометрическим подобием обеспечить на модели условие $Fr < 0{,}1$. Особое место занимает вопрос о кинематическом подобии потоков на входе и выходе из водозабора.

Рассмотрим особенности моделирования типовых объектов, выбрав в качестве примера истечение из резервуара в атмосферу через цилиндрический насадок (см. рис. 8.2). Насадок длиной ℓ и с внутренним диаметром D присоединен к резервуару, в котором свободная поверхность воды имеет отметку, равную H (горизонтальная координатная плоскость проходит по оси насадка), а абсолютное давление на свободную поверхность равно p_0; атмосферное давление обозначим p_a. Требуется определить скорость v истечения из насадка в атмосферу. Согласно технике анализа размерностей первый этап заключается в установлении параметров, от которых зависит скорость. На этом этапе решающую роль играют интуиция и опыт исследователя: с одной стороны, нельзя упустить из поля зрения какие-то важные факторы, влияющие на явление, с другой стороны, параметров не должно быть слишком много.

Примем, что

$$v = f(H,\ p_0,\ p_a,\ \rho,\ \eta,\ D,\ \ell,\ \sigma,\ g). \tag{20.40}$$

Здесь, например, исключена из рассмотрения шероховатость внутренней поверхности насадка, мы посчитали ее влияние несущественным; вместе с тем учтена сила поверхностного натяжения, характеризуемая коэффициентом σ.

Зависимость (20.40) содержит 10 разных параметров, следовательно, согласно П-теореме с помощью анализа размерностей можно определить, что эквивалентная зависимость будет содержать семь безразмерных параметров. Столь большое количество параметров сделает экспериментальное исследование чрезвычайно трудоемким, а обобщение экспериментальных результатов практически невозможным, поэтому перед формальным использованием анализа размерностей обратим внимание на то, что на поток жидкости в насадке влияют давления p_0, p_a и давление столба жидкости высотой H (равное ρgH) не по отдельности, а в виде перепада давлений между началом и концом трубы

$$\Delta p = (p_0 + \rho g H) - p_a .$$

Кроме того, влияние силы тяжести на это явление ограничивается лишь созданием давления у входа в насадке от столба высотой H. Поэтому, введя в число независимых размерных параметров вместо p_0, H и p_a одну величину Δp, можно вместе с тем исключить из числа размерных параметров ускорение силы тяжести g. В результате получим

$$v = f_1(\Delta p,\ \rho,\ \eta,\ D,\ \ell,\ \sigma). \tag{20.41}$$

Выражение (20.41) показывает, что v зависит всего от шести размерных параметров, и анализ размерности позволит установить три независимых безразмерных параметра. Эти параметры следует выбирать из набора принятых в гидромеханике стандартных безразмерных комплексов и симплексов. В качестве зависимого (искомого) безразмерного параметра выберем число Эйлера, которое содержит скорость v, являющуюся в данной постановке искомым (зависимым) размерным параметром:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2} = f_2(\eta,\ D,\ \ell,\ \sigma). \tag{20.42}$$

При этом Δp и ρ исключаются из числа независимых размерных величин. Следующий за ρ в выражении (20.41) размерный параметр — это динамический коэффициент вязкости η. Он входит в число Рейнольдса $Re_D = \frac{\rho v D}{\eta}$, которое и заменит его в зависимости (20.42); кроме того, в число Рейнольдса вошел диаметр D, поэтому η и D исключаем из числа независимых размерных параметров; получаем

$$Eu = f_3(Re_D, \ell, \sigma). \tag{20.43}$$

Вместо размерной длины ℓ введем безразмерный симплекс ℓ/D:

$$Eu = f_4(Re_D, \frac{\ell}{D}, \sigma), \tag{20.44}$$

а вместо коэффициента поверхностного натяжения σ — число Вебера $We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$; в итоге получаем искомый набор из трех безразмерных параметров, зависимость от которых следует установить экспериментально:

$$Eu = F(Re_D, \frac{\ell}{D}, We). \tag{20.45}$$

Эксперименты показали, что поверхностное натяжение проявляется лишь при малых числах Вебера ($We < 2500$), когда жидкость из насадка не вытекает струей, а сочится в виде отдельных капель. При очень малых диаметрах D, измеряемых долями миллиметра, вода может перестать вытекать из резервуара, ее будет удерживать поверхностное натяжение в выходном сечении насадка. При $We > 2500$ явление автомодельно в отношении числа Вебера.

Преобразуем зависимость

$$Eu = F_1(Re_D, \frac{\ell}{D}),$$

выделив искомую размерную величину

$$v = \frac{1}{F_1(Re_D, \frac{\ell}{D})}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \tag{20.46}$$

В соответствии с обозначениями, принятыми в гл. 8, и учитывая, что при $p_0 = p_a$ имеем $\Delta p = \rho g H$, введем коэффициент скорости

$$v = \varphi\sqrt{2gH} = \varphi\sqrt{2g\frac{\Delta p}{\rho g}} = \varphi\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \tag{20.47}$$

Сравнивая (20.47) и (20.46), получим

$$\frac{1}{F_1(Re_D, \frac{\ell}{D})} = \varphi(Re_D, \frac{\ell}{D}). \tag{20.48}$$

В случае цилиндрического насадка коэффициент скорости $\varphi_н$ равен коэффициенту расхода $\mu_н$ (см. гл. 8).

Экспериментальная зависимость коэффициента расхода $\mu_н$ от числа Re_D и от относительной длины ℓ/D представлена на рис. 20.9 (опытные данные З.И. Геллера и Ю.А. Скобельцына). Согласно этим данным при $Re > 10^4$ имеет место автомодельная область значений чисел Рейнольдса; при этом коэффициент скорости уменьшается от максимального значения $\mu_н = 0{,}82$ при $\ell/D = 2{,}5$—$3{,}0$ до $\mu_н = 0{,}79$ при $\ell/D = 5{,}0$ (об ограничениях $3D < \ell < 8D$ см. гл. 8).

Таким образом, анализ размерностей и экспериментальные данные позволили обобщить результаты исследований и, в частности, опреде-

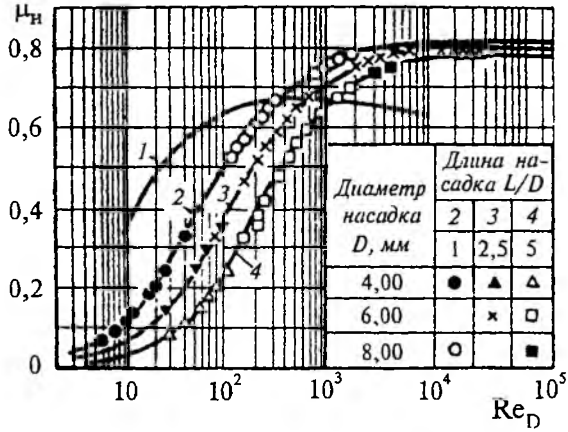


Рис. 20.9. Экспериментальные данные о зависимости коэффициента расхода насадка от его длины и числа Рейнольдса; кривая *1* — для отверстия с острой кромкой, кривые *2*, *3*, *4* — для насадков

лить автомодельные области изменения безразмерных параметров, в пределах которых представляется возможным использовать значения коэффициентов скорости φ, представленные в гл. 8.

Рассмотренные примеры показывают, что на практике, как правило, нецелесообразно использовать формальный аппарат анализа размерностей с составлением на 2-м этапе системы уравнений и с решением на 3-м этапе этой системы для определения структуры зависимости и установления безразмерных переменных, как это было показано в разд. 20.2. Если следовать этой методике, то можно получить не общепринятые безразмерные комплексы, которые имеют физическую интерпретацию, обеспечивающую их оценку и использование при обработке опытных данных (см. табл. 20.2), а случайные комбинации произведений этих параметров в каких-либо степенях.

Еще раз проиллюстрируем технику анализа размерностей, доведя до конца решение задачи об обтекании цилиндра, сформулированной в начале разд. 20.2, где было установлено, что сила лобового воздействия потока жидкости на круговой цилиндр единичной длины

$$F = f(\rho,\ \eta,\ V_\infty,\ D,\ \Delta).$$

В правой части сформируем зависимый (искомый) безразмерный параметр согласно табл. 20.2:

$$c_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 D^2}. \tag{20.49}$$

Параметры ρV_{∞}^{2} и D при этом исключаются из числа параметров функции в левой части (20.1), которым следует придать безразмерный вид, и остаются только η и Δ. В наборе параметров они представлены в табл. 20.2 и входят в число Рейнольдса Re и в относительную шероховатость Δ_r, соответственно:

$$Re_D = \frac{\rho V_{\infty} D}{\eta}, \quad \Delta_r = \frac{\Delta}{D}. \tag{20.50}$$

Таким образом,

$$c_x = F(Re_D, \Delta_r). \tag{20.51}$$

Эта зависимость экспериментально изучена и представлена на рис. 16.20 в виде одного графика. Как было отмечено в разд. 20.2, без анализа размерностей опытные данные должны быть представлены в виде 1000 размерных графиков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 224 с.

Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. Гидравлика и аэродинамика. М.: Стройиздат, 1987, 414 с.

Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: ГИТТЛ, 1953. 616 с.

Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т.М. Башта, С.С. Руднев, Б.Б. Некрасов и др. М.: Машиностроение, 1982. 423с.

Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1985. 182 с.

Gerhart Ph.M., Gross R.J., Hochstein J.I. Fundamental of Fluid Mechanics. Massachusets,Addison Wesley Publ. Comp., 1985. 983 p.

Гидравлические расчеты водосбросных гидротехнических сооружений: Справочное пособие. М.: Энергия, 1988. 624 с.

John James E.A., Haberman William L. Introduction to Fluid Mechanics. New Jersey.: Prentice Hall, 1988. 608 p.

Девнин С.И. Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: Справочник. Л.: Судостроение, 1983. 320 с.

Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. 440 с.

Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1973. 559 с.

Константинов Н.М. и др. Гидравлика, гидрология, гидрометрия: Учебник для вузов: В 2 ч. Ч. I. М.: Высш. шк., 1987. 304 с. Ч. II. М.: Высш. шк., 1987. 431 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.

Лятхер В.М., Прудовский А.М. Гидравлическое моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1984. 392 с.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. М: Наука, 1965. 640 с. Ч. II. М.: Наука, 1967. 720 с.

Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Прандтль Л., Титьенс О. Гидро- и аэромеханика. Т. 1. М.—Л.: ГТТИ, 1932. 222 с. Т. 2. М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 283 с.

Справочник по гидравлическим расчетам/ Под ред. П.Г. Киселева. М.: Энергия, 1977. 312с.

Строительные нормы и правила. Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. СНиП II-А-6-74. М.: Стройиздат, 1976.

Чертоусов М.Д. Гидравлика. Специльный курс. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962. 640 с.

Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Стройиздат, 1969. 464 с.

Чугаев Р.Р. Гидравлика: Учебник для вузов. Л.: Энергоиздат, 1982. 670 с.

Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов: В 2 кн. Кн. 1. М.: Энергоатомиздат, 1991. 351 с. Кн. 2. М.: Энергоатомиздат, 1991. 367 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ