

дополнительные потери энергии, особенно на участке расширения потока за сжатым сечением. Эти потери характеризуются коэффициентами скорости φ и m , которые зависят от формы стеснения потока в плане (плавное и неплавное), а также от условий и степени сжатия.

Данные для коэффициентов φ и m приводятся в справочной литературе [26].

Так как стеснение потока снизу и с боков однозначно, то все приведенные в данном параграфе расчетные схемы и зависимости справедливы и для расчета водосливов с широким порогом при его высоте равной нулю и боковом сжатии.

Вопросы для самопроверки

1. Основные параметры водослива.
2. Классификация водосливов по толщине порога
3. Классификация водосливов по геометрической форме водосливного отверстия.
4. Водосливы с боковым сжатием и без него
5. Характеристика и расчетные зависимости для прямоугольных водосливов с тонкой стенкой.
6. Затопленные (подтопленные) водосливы с тонкой стенкой.
7. Треугольный водослив с тонкой стенкой.
8. Трапециевидный водослив с тонкой стенкой.
9. Формула Павловского для расчета водосливов практического профиля.
10. Водосливы полигонального очертания.
11. Водосливы криволинейного очертания.
12. Водосливы из мягкой синтетической ткани.
13. Неподтопленный водослив с широким порогом.
14. Определение глубины потока h_c в сжатом сечении.
15. Подтопленный водослив с широким порогом.
16. Безпороговые водосливы с широким порогом.

Глава 10. ОСНОВЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 10.1. Основные понятия о подобии гидравлических процессов

Моделирование гидравлических процессов бывает двух видов: математическое и физическое.

Математическое моделирование. При исследовании гидравлических процессов с помощью математического моделирования изучаются явления, отличные от натуральных (физических), но описываемые теми же математическими уравнениями. Совокупность уравнений, описывающих определенный физической процесс, называют *математической моделью*, а изучение его поведения в тех или иных условиях путем решения этих уравнений — *математическим моделированием*. В отличие от физического применение математического моделирования при соответствующей математической модели не ограничено.

Математическая модель гидравличе-

ского явления или процесса обычно создается на основании применения к ним наиболее общих законов механики, таких, как сохранение движения, массы и энергии. Записывая эти законы в виде систем дифференциальных уравнений и аналитически их исследуя, то есть используя методы классической механики, можно получить информацию о процессах или явлениях, которые не наблюдались в природе или наблюдались в ограниченном диапазоне изменения исследуемых величин.

Применяя общие теоремы механики или термодинамики к частным случаям потока жидкости в конкретных условиях, получают математические модели гидравлических процессов, как правило, в виде сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Аналитические методы интегрирования и исследования таких уравнений, традиционные для классической меха-

ники и гидравлики, в настоящее время все чаще вытесняются *методами численного расчета* подобных систем с использованием ЭВМ.

Другой путь состоит в том, что аналитические приемы интегрирования и исследования систем дифференциальных уравнений используются *в сочетании с эмпирическими приемами*. В этом случае зависимости, выведенные из фундаментальных законов механики, применяются при аналитическом исследовании совместно с зависимостями, установленными экспериментальным путем, обычно на основе осреднения данных натурных измерений. Классическими примерами являются полуэмпирические теории турбулентности и теории пограничного слоя.

Численный, или вычислительный, эксперимент — это современный метод теоретических исследований, опирающийся на «экспериментирование» с математической моделью, только роль лабораторной установки выполняет ЭВМ, ведущая вычисления по заданной программе.

В настоящее время широкое развитие получили численные методы, ориентированные на использование современных быстродействующих ЭВМ. Среди них можно выделить два альтернативных метода численной, или вычислительной, гидравлики [26], быстро развивающиеся в настоящее время, — *метод конечного элемента (МКЭ)* и *метод конечных разностей (МКР)*. Применение этих методов заставило обратить внимание на целый ряд новых аспектов при исследовании гидравлических процессов. Особенно важным достижением в этой области следует считать исследование, связанные с изучением граничных условий при различных типах движения жидкости.

Следует считать, что все последующие значительные достижения в гидравлике должны базироваться на рациональном

использовании в одном исследовании всех трех методов: аналитического, эмпирического и вычислительного.

Примерами математического моделирования являются: исследование движения грунтовых вод методом электрогидродинамических аналогий (ЭГДА), исследования и расчеты турбулентных свободных пограничных слоев, струй и следов, стратифицированных течений, неустановившихся течений в руслах и сооружениях, переходных процессов в ирригационных каналах, русловых процессов в зоне мостовых переходов и т. п.

Детально вопросы математического моделирования с анализом расчетных схем, алгоритмов и программ расчетов проводятся в специальной литературе [26].

Широкое внедрение в инженерную практику микроЭВМ, персональных диалоговых ЭВМ дает возможность всестороннего развития математического моделирования наиболее сложных гидравлических процессов. Численные расчеты (эксперименты) позволяют решать двух- и трехмерные задачи гидравлики. В последние годы появилось новое направление: *вычислительная гидравлика потоков со свободными поверхностями*.

Достоверность численных расчетов математического моделирования была подтверждена уникальными натурными исследованиями в широком диапазоне.

Физическое моделирование При таком моделировании изучаемые гидравлические процессы воспроизводятся на модели, отличающейся в масштабе от природы, на основе общих законов подобия механических систем. Явления (процессы) будут механически подобны в том случае, если в них одинаково отношение всех геометрических элементов — размеров, расстояний, перемещений, одинаково отношение плотностей и сил, действующих в соответственных точках и направлениях.

Моделью в этом случае называется уменьшенное гидротехническое сооруже-

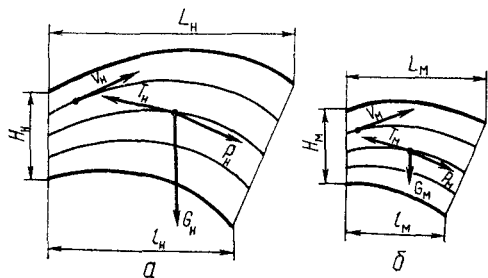


Рис. 10.1

ние или гидравлическая машина вместе с омывающим ее потоком жидкости.

Для *полного гидродинамического подобия* потоков необходимо их геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Два потока будут *геометрически подобными*, если между их соответствующими линейными размерами существует постоянное соотношение

$$l_n/l_m = a = \text{const}, \quad (10.1)$$

где a — линейный масштаб, показывающий во сколько раз размеры модели l_m уменьшены по сравнению с размерами природы l_n .

Отметим, что в геометрически подобной модели русла все размеры, в том числе и высота выступов шероховатости Δ , должны быть меньше, чем в природе в a раз и, следовательно, в подобных потоках относительная шероховатость Δ/R остается постоянной, такой же как в природе, то есть $\Delta/R = \text{idem}$.

Должны быть также постоянными соотношения площадей $\omega_n/\omega_m = a^2 = \text{const}$ и объемов $W_n/W_m = a^3 = \text{const}$.

Два потока будут *кинематически подобными* при подобии полей скоростей и ускорений природы и модели, которое выполняется если скорости V_n и V_m и ускорения j_n и j_m в сходственных точках природы и модели находятся в одинаковых соотношениях, то есть существуют

масштабы скоростей a_V и ускорений a_j :

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_n}{V_m} &= \frac{l_n/t_n}{l_m/t_m} = \frac{l_n}{l_m} \frac{t_m}{t_n} = \frac{a}{a_t} = a_V; \\ a_j &= j_n/j_m = \frac{a}{a_t^2} = \frac{a_V^2}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

При этом $a_V = \text{const}$ и $a_j = \text{const}$. Кинематическое подобие обязательно включает в себя геометрическое подобие.

Для *динамического подобия* необходимо, чтобы все силы, действующие в подобных точках модели и природы на частицы жидкости, отличались между собой только постоянными масштабами при равенстве углов, характеризующих направление этих сил.

Другими словами, явления динамически подобны, если физическая природа действующих на жидкость сил одинакова и векторы этих сил образуют геометрически подобные силовые многоугольники.

На любую частицу жидкости в общем случае (рис. 10.1) действуют следующие силы. Сила тяжести, пропорциональная плотности жидкости, ускорению свободного падения g и объему W (или кубу линейного размера частицы l^3):

$$G = mg = \rho g W \sim \rho g l^3. \quad (10.3)$$

Сила давления, пропорциональная гидродинамическому давлению p и площади s (или квадрату линейного размера частицы l^2):

$$P = pS \sim p l^2. \quad (10.4)$$

Сила трения, пропорциональная вязкости частицы жидкости μ , скорости ее движения V и линейному размеру l :

$$T = \mu \frac{dV}{dh} S \sim \mu l V. \quad (10.5)$$

Равнодействующая этих сил F , согласно второму закону И. Ньютона,

равна произведению массы на ускорение:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= [\vec{G} + \vec{P} + \vec{T}] = mj = \\ &= \rho W j \sim \rho l^3 \frac{V^2}{l} = \rho l^2 V^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Эта равнодействующая численно равна силе инерции:

$$|I| = |F| \sim \rho l^2 V^2. \quad (10.7)$$

Из условия подобия отношения всех пар сходственных сил природы (рис. 10.1, а) и модели (рис. 10.1, б) равны

$$\begin{aligned} \frac{G_n}{G_m} = \frac{P_n}{P_m} = \frac{T_n}{T_m} = \frac{F_n}{F_m} = \frac{I_n}{I_m} = \\ = a_F = \text{const}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где a_F — масштаб сил, то есть число, показывающее во сколько раз силы в натуре (с индексом «н») больше соответствующих сил в модели (с индексом «м»).

Величины a , a_V , a_F называются *масштабными множителями*. Выбор всех масштабных множителей для подобных потоков не произволен, так как между ними существует определенная взаимосвязь.

Равнодействующая всех сил, действующих на произвольно взятую в потоке частицу жидкости, выражается, согласно (10.6), в виде

$$F = \rho W j.$$

Следовательно, равнодействующие силы, действующие на две сходственные частицы жидкости потока в натуре и модели, равны:

$$F_n = \rho_n W_n j_n;$$

$$F_m = \rho_m W_m j_m.$$

Если выразить их соотношение в масштабных множителях, то получим

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{\rho_n W_n j_n}{\rho_m W_m j_m} = a_F = a_\rho a^3 a_j, \quad (10.9)$$

где a_ρ — масштабный множитель плотности ρ .

Учитывая, что масштабный множитель ускорения a_j выражается через масштабные множители скорости a_V и длины a (геометрический масштабный множитель) в виде

$$a_j = \frac{a_V^2}{a},$$

получим, что

$$a_F = a_\rho a^2 a_V^2, \quad (10.10)$$

или

$$\frac{a_F}{a_\rho a^2 a_V^2} = 1. \quad (10.11)$$

Зависимости (10.10) и (10.11) называют *законом подобия Ньютона в масштабных множителях*.

Выражая масштабные множители соответствующими отношениями, получим

$$\frac{F_n}{\rho_n l_n^2 V_n^2} = \frac{F_m}{\rho_m l_m^2 V_m^2}, \quad (10.12)$$

или

$$Ne_n = Ne_m, \text{ то есть } Ne = \text{idem},$$

где величина $Ne = \frac{F}{\rho l^2 V^2}$ называется *критерием Ньютона*.

Критерий Ньютона можно записать и в другом виде, умножив числитель и знаменатель на l , и тогда $Ne = \frac{Fl}{MV^2}$, так как $M = \rho l^3$. При этом закон подобия Ньютона (10.10) в физических величинах запишется в виде

$$\frac{F_n l_n}{M_n V_n^2} = \frac{F_m l_m}{M_m V_m^2}.$$

Гидродинамическое (гидравлическое) подобие потоков обеспечивается равенством критериев Ньютона модели и натуре ($Ne_m = Ne_n$).

§ 10.2. Критерии гидродинамического подобия и основные правила моделирования

Условием гидродинамического подобия является равенство на модели и в натуре отношений всех сил (тяжести, давления, инерции, трения, поверхностного натяжения и др.). Вследствие физических особенностей этих сил полное подобие всех сил практически недостижимо и необязательно. Поэтому устанавливают критерии подобия для частных случаев, когда в качестве преобладающей принимается какая-нибудь одна (главствующая) из действующих сил.

Критерий Фруда. Если преобладает действие сил тяжести, то необходимо выполнение условия, вытекающего из зависимости (10.8)

$$\frac{G_n}{G_m} = \frac{I_n}{I_m}, \text{ или } \frac{I_n}{G_n} = \frac{I_m}{G_m}.$$

С учетом зависимостей (10.3) и (10.4) следует

$$\frac{V_n^2}{g l_n} = \frac{V_m^2}{g l_m} = Fr, \quad (10.13)$$

где Fr — число Фруда, или $\frac{a_V^2}{a g a} = 1$.

Следовательно, геометрически подобные потоки можно считать гидродинамически подобными, если будут равны числа Фруда для сходственных сечений обоих потоков:

$$Fr_n = Fr_m, \text{ или } Fr = idem. \quad (10.14)$$

При этом справедливы следующие соотношения для скоростей и расходов:

$$V_n = V_m \sqrt{a}; \quad (10.15)$$

$$Q_n = Q_m a^{2.5}. \quad (10.16)$$

Масштабный множитель для времени

$$a_t = \sqrt{a} = const. \quad (10.17)$$

При моделировании по Фрудру справедливо равенство гидравлических уклонов (потерь на трение) $I_n = I_m$, что

соответствует турбулентному режиму движения в квадратичной области сопротивления.

Критерий Рейнольдса. При преобладающем действии сил трения необходимо выполнение условия, вытекающего из зависимости (10.8), по аналогии с предыдущим,

$$\frac{V_n l_n}{\nu_n} = \frac{V_m l_m}{\nu_m} = Re. \quad (10.18)$$

Таким образом, потоки будут гидродинамически подобны для движения жидкости при ламинарном режиме или в «гладкой» области сопротивления при турбулентном режиме, если будут равны числа Рейнольдса для сходственных сечений обоих потоков:

$$Re_n = Re_m, \text{ или } Re = idem. \quad (10.19)$$

При $\nu_n = \nu_m$ справедливы следующие соотношения скоростей, расходов, времени и гидравлического уклона:

$$V_n = \frac{V_m}{a}; \quad (10.20)$$

$$Q_n = Q_m a; \quad (10.21)$$

$$t_n = t_m a^2; \quad (10.22)$$

$$I_n = \frac{I_m}{a^3}. \quad (10.23)$$

Критерий Эйлера. Если преобладает действие сил давления, то необходимо выполнение условия по аналогии с предыдущим

$$\frac{P_n}{\rho_n V_n^2} = \frac{P_m}{\rho_m V_m^2} = Eu, \quad (10.24)$$

где Eu — критерий Эйлера, который должен быть равен для модели и натуре:

$$Eu_n = Eu_m, \text{ или } Eu = idem. \quad (10.25)$$

При соблюдении критерия Рейнольдса критерий Эйлера выполняется автоматически, и тогда

$$Eu = \lambda \frac{l}{2d}.$$

Критерий Вебера. При преобладающем действии сил поверхностного натяжения (капиллярных) необходимо выполнение условия

$$\frac{\rho_n V_n^2 l_n}{\sigma_n} = \frac{\rho_m V_m^2 l_m}{\sigma_m} = We, \quad (10.26)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, а We — критерий Вебера, который должен быть равен для модели и природы:

$$We_n = We_m, \text{ или } We = idem. \quad (10.27)$$

Критерий Струхалия. Если преобладает действие сил инерции в условиях неустановившегося движения, то необходимо выполнение условия

$$\frac{V_n t_n}{l_n} = \frac{V_m t_m}{l_m} = St, \quad (10.28)$$

где St — критерий Струхалия, который должен быть равен для модели и природы:

$$St_n = St_m, \text{ или } St = idem. \quad (10.29)$$

Соотношение для времени будет

$$t_n = t_m \sqrt{a}. \quad (10.30)$$

Критерий Маха. При преобладающем влиянии сжимаемости жидкости (обтекание тел потоком сжимаемой жидкости с большими скоростями) необходимо выполнение условия

$$V_n/c_n = V_m/c_m = M, \quad (10.31)$$

где c — скорость распространения звука в жидкости, а M — критерий Маха, который должен быть равен для модели и природы:

$$M_n = M_m, \text{ или } M = idem. \quad (10.32)$$

Критерий Архимеда. При действии архимедовых сил, возникающих вследствие разности плотностей двух сред ($\rho - \rho_1$) (подъемная сила нагретого воздуха), необходимо выполнение условия

$$\frac{g_n l_n}{V_n^2} \frac{(\rho - \rho_1)_n}{\rho_{n1}} = \frac{g_m l_m}{V_m^2} \frac{(\rho - \rho_1)_m}{\rho_{m1}} = Ag, \quad (10.33)$$

Таблица 10.1. Масштабные коэффициенты моделирования

Условие моделирования (критерий)	Масштабные коэффициенты							
	длины	площади	объема	времени	скорости	ускорения	расхода	силы
Fr	a	a^2	a^3	$a^{0,5}$	$a^{0,5}$	1	$a^{2,5}$	a^3
Re	a	a^2	a^3	a^2	a^{-1}	a^{-3}	a	1
Ag	a	a^2	a^3	$a^{3,5}$	$a^{-2,5}$	a^{-6}	$a^{-0,5}$	a^{-3}
We	a	a^2	a^3	$a^{1,5}$	$a^{-0,5}$	a^{-2}	$a^{1,5}$	a
Co	a	a^2	a^3	a	1	a^{-1}	a^2	a^2

где Ag — критерий Архимеда, который должен быть равен для модели и природы:

$$Ag_n = Ag_m, \text{ или } Ag = idem. \quad (10.34)$$

Критерий Коши. Если преобладает действие упругих сил (гидравлический удар в трубах), необходимо выполнение условия

$$\frac{V_n^2 \rho_n}{E_n} = \frac{V_m^2 \rho_m}{E_m} = Co, \quad (10.35)$$

где E — модуль упругости материала; Co — критерий Коши, который должен быть равен для модели и природы:

$$Co_n = Co_m, \text{ или } Co = idem. \quad (10.36)$$

Критерий Лагранжа. Этот критерий служит для установления подобия медленных течений вязких жидкостей и может быть представлен как произведение критериев Эйлера и Рейнольдса:

$$La = EuRe = idem. \quad (10.37)$$

Существуют и другие критерии, относящиеся к частным случаям: **число Прандтля, число Ричардсона и др.**

Масштабные коэффициенты для наиболее часто встречающихся критериев подобия приведены в табл. 10.1.

Основные правила моделирования. При выборе масштаба модели с учетом принятого критерия подобия необходи-

мо соблюдать ряд условий, вытекающих из общих законов подобия:

1. Если поток в натуре турбулентный, то он должен быть турбулентным и на модели ($Re_m > Re_{кр}$); при этом минимально допустимый масштаб модели

$$a_{min} = (30 \dots 50) \sqrt[3]{V_n^2 R_n^2} \quad (10.38)$$

где V_n и R_n — скорость, м/с, и гидравлический радиус, м, для натуре.

2. Если поток в натуре в спокойном состоянии ($Fr < 1$) или в бурном ($Fr > 1$), то он должен быть соответственно в таком же состоянии и на модели. На соблюдение этого условия нужно обращать особое внимание при искажении масштаба модели.

3. При моделировании следует стремиться к геометрическому подобию шероховатости, хотя иногда это практически трудно осуществимо (тогда возможно моделирование по условию $\lambda = idem$).

4. Если исследование связано с изучением движения наносов, то наносы на модели должны двигаться подобно натуре.

5. Если кавитация (разрыв сплошности струи) есть в натуре, то она должна быть в том же месте и на модели.

6. Влияние поверхностного натяжения должно быть настолько относительно малым, чтобы оно не мешало образованию волн.

§ 10.3. Метод анализа размерности (Пи-теорема)

Методы подобия и размерностей тесно связаны между собой, так как оба требуют отчетливого представления о механизме рассматриваемого явления. Однако для применения теории подобия нужны уравнения, определяющие процесс, а метод анализа размерностей применяется, когда уравнения процесса неизвестны. С помощью этого метода обрабатывают данные опытов и делают последующие обобщения.

Начало общей теории этого метода было впервые положено в 1911 г. русским ученым Г. А. Федерманом (Известия Петербургского политехнического института, т. XVI, вып. 1), доказавшим фундаментальную теорему подобия — Пи-теорему: *всякое уравнение, выражающее некоторую физическую закономерность и поэтому не зависящее от выбора системы единиц измерения, связывающее собой N физических величин, среди которых n величин обладают независимыми размерностями, может быть преобразовано в уравнение, связывающее $(N - n)$ независимых безразмерных комплексов, составленных из упомянутых N физических величин.*

Суть этой теоремы заключается в следующем.

Пусть W является функцией N размерных величин:

$$W = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (10.39)$$

Можно доказать, что эту зависимость можно заменить *критериальным уравнением*

$$P = f(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-n}), \quad (10.40)$$

где роль размерных величин играют $(N - n)$ безразмерных величин. Если основная система состоит из трех единиц (масса, длина, время), то $n = 3$ и вместо N величин рассматриваемое явление представляется в виде зависимости между безразмерными комплексами этих величин.

Таким образом, в составленном путем логических рассуждений уравнении, характеризующем данное явление, размерности величин в правой и левой частях, выраженные через размерности основных физических величин (масса M , длина L и время T) должны соответствовать друг другу.

Последовательность вычислений при составлении критериального уравнения

(10.39) с использованием Пи-теоремы рассмотрена в примерах.

Пример 1. Необходимо установить зависимость для числа Рейнольдса (см. § 5.2).

Решение. Исследуемое явление, то есть режим движения, определяется средней скоростью V , динамической вязкостью μ и плотностью жидкости ρ , а также диаметром трубы d . Для данного случая общая функциональная зависимость (10.39) выражается четырьмя переменными величинами через функцию Π , являющуюся в данном случае безразмерной (число Рейнольдса):

$$\Pi = f(V, \mu, \rho, d).$$

В соответствии с Пи-теоремой эту функцию можно выразить безразмерным комплексом N — $-3 = 4 - 3 = 1$, то есть одной величиной π :

$$\pi = V^x \mu^y \rho^z d^k,$$

где x, y, z, k — показатели степеней, подлежащие определению.

Заменяем величины в последнем уравнении их размерностями:

$$M^0 L^0 T^0 = (L T^{-1})^x (M L^{-1} T^{-1})^y (M L^{-3})^z (L)^k.$$

В левой части безразмерная величина π выражена через размерности величин в нулевой степени.

Приравнивая показатели степеней у одинаковых оснований в левой и правой частях, получаем систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} y + z &= 0; \\ x - y - 3z + k &= 0; \\ -x - y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы уравнений дает следующие результаты:

$$x = -y, \quad x = z \quad \text{и} \quad x = k.$$

Тогда искомая безразмерная функция π принимает вид

$$\pi = \left(\frac{V \rho d}{\mu} \right)^m,$$

где m может иметь любое значение, отличающееся от нуля, так как безразмерное число в любой степени остается безразмерным. Проще принять $m = 1$ и тогда получаем искомое число Рейнольдса

$$\pi = \text{Re} = \frac{V \rho d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}.$$

Пример 2. Необходимо установить зависимость для гидравлического коэффициента трения λ .

Решение. Касательные напряжения на стенках трубы τ зависят от диаметра трубы d , средней в сечении скорости V , плотности жидкости ρ и динамической вязкости μ и тогда

$$\tau = c d^x V^y \rho^z \mu^k, \quad (10.41)$$

где c — безразмерный коэффициент пропорциональности.

Размерность в левой части уравнения

$$\tau = (F L^{-2}) = (M L T^{-2} L^{-2}) = (M L^{-1} T^{-2}).$$

Размерности в правой части

$$V = (L T^{-1}); \quad d = (L); \quad \rho = (M L^{-3}) \quad \text{и} \quad \mu = (M L^{-1} T^{-1}).$$

Подставляя установленные размерности в зависимость (10.41), получим

$$M L^{-1} T^{-2} = c (L^x L^y T^{-y} M^z L^{-3z} M^k L^{-k} T^{-k}).$$

Приравнивая показатели степени у одинаковых оснований в левой и правой частях, получаем систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} 1 &= z + k; \\ -1 &= x + y - 3z - k; \\ -2 &= -y - k. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы дает следующие результаты:

$$k = 2 - y; \quad z = y - 1 \quad \text{и} \quad x = y - 2.$$

В связи с этим уравнение (10.41) может быть представлено в виде

$$\tau = c d^{y-2} V^y \rho^{y-1} \mu^{2-y}. \quad (10.42)$$

Умножив и разделив правую часть этого уравнения на $V^{2-y} \rho$, получим

$$\tau = c \frac{\rho V^2 \mu^{2-y}}{V^{2-y} d^{2-y} \rho^{2-y}}.$$

Зная, что $\mu = \rho \nu$, а $\frac{V d}{\nu} = \text{Re}$, получим

$$\tau = c \frac{\rho V^2}{\text{Re}^{2-y}}. \quad (10.43)$$

В § 5.3. было получено уравнение (5.16), которое выражает закон распределения касательных напряжений при равномерном движении в виде

$$\frac{\tau}{\gamma} = R i_e,$$

или

$$i_e = \frac{\tau}{\rho g R}.$$

Зная, что $i_e = \frac{h_l}{l}$, так как в данном случае $h_w = h_l$, а для трубы $R = \frac{d}{4}$, получим

$$h_l = \frac{4\tau l}{\rho g d}. \quad (10.44)$$

Подставляя (10.43) в зависимость (10.44), будем иметь

$$h_l = \frac{4c\rho V^2 l}{\rho g d \operatorname{Re}^{2-\gamma}} = \frac{8c}{\operatorname{Re}^{2-\gamma}} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \quad (10.45)$$

Обозначив

$$\lambda = \frac{8c}{\operatorname{Re}^{2-\gamma}}, \quad (10.46)$$

получим известную зависимость (5.39) для определения потерь напора по длине

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}.$$

Зависимость (10.46) — это обобщенное выражение для коэффициента гидравлического трения λ . При ламинарном режиме движения потерн прямо пропорциональны скорости в первой степени и тогда из (10.41) следует, что $\gamma = 1$. Считая, что коэффициент пропорциональности $c = 8$, получим

$$\lambda = \frac{64}{\operatorname{Re}},$$

что ранее было выведено теоретическим путем.

В квадратичной области при турбулентном режиме движения $\gamma = 2$ и тогда из (10.46) следует, что λ не зависит от числа Рейнольдса, а определяется относительной шероховатостью, которая выражается через коэффициент пропорциональности c .

В переходной области сопротивления и в области гладких поверхностей показатель степени в формуле (10.46) $\gamma < 2$, что приводит к зависимости, полученным в § 5.7.

Пример 3. Необходимо установить формулу для определения расхода Q через водослив (см. гл. 9).

Решение. Многочисленные эксперименты показывают, что расход через неподтопленный водослив зависит от ширины (отверстия) водослива b , напора H , скорости подхода V_0 , ускорения свободного падения g_0 .

При этом напор H_0 с учетом скорости подхода

$$H_0 = H + \frac{\alpha V_0^2}{2g}.$$

Функция

$$Q = f(b, g, H_0). \quad (10.47)$$

Для установления формулы расхода применим метод анализа размерностей и тогда

$$Q = cb^x g^y H_0^z, \quad (10.48)$$

где c — безразмерный коэффициент пропорциональности учитывающий форму водослива.

Размерность в правой части $Q = (L^3, T^{-1})$, а в правой $b = (L)$, $g = (LT^{-2})$ и $H_0 = (L)$.

Подставляя установленные размерности в зависимость (10.48), получим

$$L^3 T^{-1} = (L)^x (LT^{-2})^y (L)^z.$$

Эксперименты показывают, что расход Q пропорционален отверстию водослива b в первой степени и тогда $x = 1$.

Приравнивая показатели степени γ одинаковых оснований в левой и правой частях, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$3 = 1 + y + z;$$

$$-1 = -2y.$$

Решая эту систему получим, что $y = 0,5$, а $z = 1,5 = 3/2$ и, следовательно, зависимость (10.48) приобретает вид

$$Q = cb \sqrt{g} H_0^{3/2} = \frac{c}{\sqrt{2}} b \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

Обозначая через коэффициент расхода $m = c/\sqrt{2}$, получаем зависимость (9.4) для неподтопленного водослива любого профиля

$$Q = mb \sqrt{2g} H_0^{3/2}.$$

§ 10.4. Моделирование течений в напорных водоводах

Критериальное уравнение (10.40) для моделирования установившегося движения в напорных водоводах при отсутствии объемных сил тяжести можно записать в виде

$$f(\Delta/R, \operatorname{Re}, \operatorname{Eu}) = 0, \quad (10.49)$$

где Δ/R — относительная шероховатость стенок водовода.

Условия моделирования для случая, когда неизвестна величина перепада давления Δp , входящего в критерий Эйлера, определяются числом $\operatorname{Re} = \operatorname{idem}$.

Тогда

$$Eu = f(\Delta/R, Re). \quad (10.50)$$

При соблюдении критерия Рейнольдса критерий Эйлера (см. § 10.2) выполняется автоматически и равен

$$Eu = \lambda \frac{l}{d} = \lambda \frac{l}{4R}.$$

Тогда

$$\lambda = f(\Delta/R, Re). \quad (10.51)$$

Гидравлический коэффициент трения λ может и не зависеть от числа Рейнольдса, что справедливо в области гидравлически шероховатых труб, называемой *областью квадратичного сопротивления* и характеризующейся большими числами Рейнольдса (см. § 5.7). Такая область потока, где λ не зависит от числа Рейнольдса, называется *автомодельной*, в ней можно пренебречь силами вязкости и принять $\Delta/R = \text{const}$. В этом случае условия подобия определяются при

$$\left. \begin{aligned} Eu &= \text{idem}; \\ \lambda_n &= \lambda_m. \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

Если поток в натуре находится в зоне квадратичного сопротивления, то задача моделирования сводится к подбору шероховатости русла модели для обеспечения условия $\lambda_n = \lambda_m$. Нижнюю границу квадратичной зоны можно установить по формуле Никурадзе:

$$Re_{гр} = \frac{84d_m}{\Delta_m V \lambda_m}, \quad (10.53)$$

где d_m и Δ_m — диаметр трубы и высота выступов шероховатости на модели.

С учетом того, что в переходной зоне сопротивления (см. § 5.7) изменение гидравлического коэффициента трения невелико, предельное число Рейнольдса может быть уменьшено по формуле Зегжда

$$Re_{гр} = \frac{14d_m}{\Delta_m V \lambda_m}. \quad (10.54)$$

Приведенные условия позволяют установить предельное уменьшение линейных размеров модели, то есть масштаб длин

$$a = \frac{1}{a_v} \frac{Re_n}{Re_{гр}}; \quad (10.55)$$

Масштаб расходов при этом

$$a_Q = a \frac{Re_n}{Re_{гр}}. \quad (10.56)$$

Если принять линейный масштаб по условиям шероховатости $\lambda = f(Re)$, то из зависимостей (10.55) и (10.56) при $Re_{гр} = Re_n$ определятся масштабные коэффициенты a_v и a_Q , а при $Eu = \text{idem}$ будет справедливым соотношение $a_{\Delta p} = a_v^2$.

Так как условия входа в трубопровод оказывают влияние на характеристики турбулентного потока, то необходимо учитывать длину участка стабилизации, которая равна 50 диаметрам. На расстоянии большем, чем длина участка стабилизации, характеристики турбулентности становятся соответствующими данной форме русла и его шероховатости. Кроме того, имеются рекомендации, определяющие минимальное расстояние, при котором не сказывается взаимное влияние местных сопротивлений.

Для гладких водоводов (полиэтиленовые, стеклянные, деревянные, иногда бетонные и стальные) подобие устанавливается при условии

$$\left. \begin{aligned} Re &= \text{idem}; \\ \lambda &= f(Re). \end{aligned} \right\} \quad (10.57)$$

При протекании одной и той же жидкости в натуре и на модели ($a_v = 1$ и $a_Q = 1$) связь между масштабами основных величин следующая:

$$\left. \begin{aligned} a_v &= \frac{1}{a}; \\ a_{\Delta p} &= a_v^2 = \frac{1}{a^2}; \\ a_Q &= a_v a^2 = a. \end{aligned} \right\} \quad (10.58)$$

Эти условия при малых масштабах выполнить трудно и поэтому проводятся исследования в широком диапазоне чисел Re на моделях различных масштабов (*масштабная серия исследований*). Получаемые результаты позволяют перечислить модельные значения на натуре с учетом масштабных поправок на влияние сил вязкости:

$$\Delta V = f_1(Re), \Delta p = f_2(Re), \Delta Q = f_3(Re) \text{ и т.д.} \quad (10.59)$$

Для напорных водоводов существует еще одна автомодельная область ламинарного режима весьма медленных течений вязких жидкостей, когда можно пренебречь силами инерции. В этом случае условие подобия определяется критерием Лагранжа (10.37):

$$La = EuRe = idem,$$

что приводит к условию

$$Eu = \frac{idem}{Re}.$$

§ 10.5. Моделирование течений в открытых руслах и гидротехнических сооружениях

В открытых руслах движение воды происходит под действием сил тяжести и трения, и поэтому критериальное уравнение для определения любой физической величины в общем случае имеет вид

$$f(Fr, Re, St) = 0, \quad (10.60)$$

а для установившегося движения

$$f(Fr, Re) = 0. \quad (10.61)$$

При равномерном движении составляющая сила тяжести уравнивается силами трения и задача моделирования подобна задаче моделирования в напорных водоводах (см. § 10.4).

При моделировании течений в открытых руслах (естественных и искусственных) обычно имеет место *неравномерное*

движение. При моделировании турбулентных потоков, отвечающих квадратичной зоне сопротивления, исходя из критерия Фруда, считая, что такого рода движение обуславливается только силами тяжести. Как отмечено выше, такая область потока, где λ не зависит от числа Рейнольдса, называется *автомодельной*.

Для автомодельной области движения при $\lambda_n = \lambda_m$ моделировать можно при условии

$$\left. \begin{aligned} Fr &= idem; \\ Re_m &\geq Re_{пр}. \end{aligned} \right\} \quad (10.62)$$

Значения $Re_{пр}$ для квадратичной и переходной зон сопротивления, по аналогии с зависимостями (10.53) и (10.54), определяются из формул

$$Re_{R_{пр}} = \frac{84R_m}{\Delta_m \sqrt{\lambda_m}}; \quad (10.63)$$

$$Re_{R_{пр}} = \frac{14R_m}{\Delta_m \sqrt{\lambda_m}}, \quad (10.64)$$

где $Re_R = \frac{VR}{\nu}$ — число Рейнольдса, подсчитанное по гидравлическому радиусу (см. § 5.2).

При этих условиях минимально допустимый линейный масштаб

$$a_{min} = \left(\frac{V_n \Delta_m \sqrt{\lambda_m}}{14\nu} \right)^2. \quad (10.65)$$

В практике моделирования гидравлических процессов иногда применяют геометрическое искажение моделей. Это допускается в таких случаях:

если нельзя обеспечить подобие шероховатости, то есть сопротивление потока на модели больше, чем в натуре ($\lambda_m > \lambda_n$);

когда размеры или расход воды в лаборатории не позволяют принять геометрические масштабы, обеспечивающие подобие (см. 6.65));

при необходимости обеспечить на модели достаточные глубины или подвижность наносов, соответствующие натуре.

При перечисленных условиях не может быть выполнено полное гомотрическое подобие, а поэтому не соблюдается и гидродинамическое подобие, то есть не будет подобия характеристик во всех точках пространства, занятого потоком.

В то же время можно добиться подобия между средними скоростями, расходами и уклонами свободной поверхности. Для этого необходимо установить зависимости, которые позволят определить среднюю скорость, расход и уклон в натуре, если соответствующие величины замерены на модели, геометрически не подобной натуре. Такое условие подобия называется *гидравлическим*.

При этом получается модель с двумя масштабами для линейных элементов: размеры живого (поперечного) сечения (в том числе и вертикальные h) уменьшены в a_h раз, а продольные в a_l раз. Тогда соответствующие масштабные коэффициенты.

$$\left. \begin{aligned} a_l &= a_h/a_i; \\ a_\lambda &= a_h/a_i; \\ a_\omega &= a_h/a_i; \\ a_V &= \sqrt{a}; \\ a_a &= a_l a_h^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.66)$$

Обычно искажение масштабов составляет 2—5, а в отдельных случаях до 10 раз.

Детально вопросы моделирования с искаженными масштабами, в том числе при размывах русла и движении наносов, рассмотрены в специальной литературе [19].

При большом искажении вертикальных и горизонтальных масштабов, по предложению В. М. Маккавеева и А. Г. Аверкиева, применяется *моделирование открытых потоков на воздушно-напорных моделях*, при котором свободная поверхность заменяется жесткой горизонтальной поверхностью.

За пределами области автомодельности при $\lambda = f(Re)$ определяющим критерием становится также число Рейнольдса ($Re = idem$), то есть при моделировании по Фруду необходимо учитывать влияние сил вязкости, вводя масштабные поправки типа (10.59).

Сопоставление результатов опытов на воздушно-напорной модели с данными, полученными на гидравлических моделях показывает, что мелкие воздушные напорные модели при искажении масштабов вполне могут заменить гидравлические модели для изучения плана течений и распределения скоростей потока в плане.

При моделировании гидротехнических сооружений большое значение уделяется экспериментальному исследованию коэффициентов скорости, расхода, бокового и вертикального сжатия потоков (струй), условий сопряжения бьефов, работы гасителей энергии, характеристик турбулентности в зоне гидравлического прыжка и т. п.

Обычно роль силы трения незначительна и преобладающее значение имеют силы тяжести, а поэтому моделирование ведется по критерию Фруда, при котором соотношения между натурными и модельными параметрами потока подробно рассмотрены в § 10.2.

Ряд исследователей считает, что для соблюдения условий автомодельности предельным является число Рейнольдса $Re_{кр} > 5000 \dots 10\,000$. При этом условия расчетные коэффициенты протекания потока через водосливы, на перепадах, при истечении из-под щита и через другие подобные сооружения не зависят от числа Рейнольдса.

Допустимое уменьшение размеров модели определяется условием

$$a = \left(\frac{q_n}{v_n (5 \dots 10) 10^3} \right)^{2/3}, \quad (10.67)$$

где $q_n = Q/b$ — удельный расход в натуре.

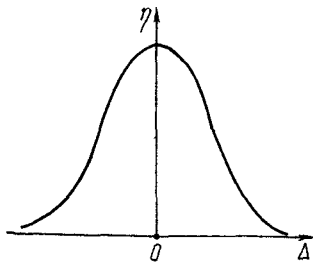


Рис. 10 2

Для наиболее характерных расходов $q_n = 3...40 \text{ м}^2/\text{с}$ масштабы моделирования колеблются в минимально допустимых пределах $a \approx 45...100$.

В отдельных случаях движения воды через гидросооружения необходимо учитывать и силу трения (быстротоки, водосливная поверхность плотины большой высоты, сифоны и др.). Моделирование аэрации потока, кавитация и другие вопросы рассмотрены в специальной литературе.

§ 10.6. Погрешности измеряемых величин

При физическом моделировании течений в напорных и безнапорных водах наиболее часто измеряются следующие параметры: уровень свободной поверхности жидкости в резервуаре или в открытом русле, давление жидкости, объем жидкости, расход жидкости.

Даже при самых тщательных измерениях, их результаты всегда отличаются от действительных значений измеряемых величин, то есть содержат погрешности [20]. Погрешности измерений обуславливаются погрешностями измерительных приборов, наблюдений и измерений, влиянием среды на результаты измерений.

Погрешности измерений подразделяются на систематические и случайные.

Систематическими погрешностями называются такие, которые вызываются причинами, действующими одинаково и

закономерно при измерении одной и той же величины в одних и тех же условиях. К ним относятся погрешности, связанные с данными условий измерений, например неточности градуировки шкал приборов и места их установки, погрешности от влияния температуры на упругие элементы приборов (пружины, мембраны и др.) и на удельные веса рабочих жидкостей в приборах, погрешности от износа механических частей приборов. Влияние систематических погрешностей на результаты измерений в большинстве случаев может быть исключено или значительно уменьшено при учете причин, их обуславливающих.

Случайными погрешностями называются такие, которые появляются в процессе проведения эксперимента закономерно, случайно, а причину и величину этих погрешностей предвидеть заранее невозможно. В этом случае при повторных измерениях одних и тех же величин в одних и тех же условиях, одними и теми же приборами получаемые данные отличаются (иногда резко) друг от друга.

Исключить случайные погрешности из результатов измерений нельзя, но должна быть произведена их оценка для возможности критического анализа результатов эксперимента. Вопросам оценки влияния случайных погрешностей измерений на точность результатов посвящена специальная *теория ошибок*. В соответствии с этой теорией значения случайных погрешностей при большом (неоднократном) измерении одной и той же величины подчиняются статистической закономерности, выражаемой зависимостью между значениями этих погрешностей и вероятной частотой их появления. Эта зависимость называется *законом распределения погрешностей*.

Погрешности характеризуются абсолютной погрешностью Δ — разностью между истинными X и измеренным A

значениями искомой величины

$$\Delta = X - A. \quad (10.68)$$

Кроме того, рассматривается относительная погрешность равная отношению абсолютной погрешности Δ к истинному значению измеряемой величины X :

$$\Delta = \frac{\Delta}{X}, \text{ или } \Delta\% = \frac{\Delta}{X} 100\%. \quad (10.69)$$

Наиболее общим законом распределения случайных ошибок является *нормальный закон распределения Гаусса*, представленный на рис. 10.2, где по оси абсцисс отложены абсолютные величины случайных погрешностей Δ , а по оси ординат — вероятная частота появления этих погрешностей η . В соответствии с этим законом, малые по абсолютной величине погрешности появляются чаще больших (грубых промахов), которые встречаются крайне редко. Если последние исключить из рассмотрения, то случайные погрешности не должны превосходить определенного предела — максимальной погрешности измерения (Δ_{\max}). Анализируя закон распределения Гаусса можно отметить, что появления одинаковых по величине положительных и отрицательных погрешностей равновероятно. В связи с этим наиболее достоверным значением измеряемой величины A является ее среднеарифметическое $A_{\text{ср}}$ из результатов измерений A_1, A_2, \dots, A_n , то есть

$$A_{\text{ср}} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}. \quad (10.70)$$

где n — число измерений.

Наиболее распространенным критерием для оценки точности измерений является *средняя квадратичная погрешность* σ ряда измерений A_1, A_2, \dots, A_n одной и той же искомой величины X , которая равна корню квадратному из среднего арифметического квадратов случайных абсолютных погрешностей этих измерений:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} \quad (10.71)$$

Считается, что для нормального закона распределения погрешностей Гаусса абсолютная средняя квадратичная погрешность σ связана с максимальной погрешностью Δ_{\max} законом 3σ , то есть

$$\Delta_{\max} = 3\sigma. \quad (10.72)$$

При этом считается, что абсолютная ошибка Δ , превышающая три средние квадратичные σ , появляется чрезвычайно редко (0,3 % числа измерений).

В связи с тем, что величины $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ не могут быть вычислены, так как истинное значение измеряемой величины X всегда остается неизвестным, то для оценки точности измерений воспользоваться зависимостью (10.71) для практических расчетов невозможно. Поэтому оценку точности измерений можно произвести по величинам ε отклонений результатов отдельных измерений A_1, A_2, \dots, A_n от среднеарифметического их значения $A_{\text{ср}}$:

$$\varepsilon_i = A_{\text{ср}} - A_i. \quad (10.73)$$

Зная величины ε_i , можно выразить среднюю квадратичную погрешность σ при нормальном законе распределения Гаусса в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n-1}} = \\ &= \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n-1}}. \end{aligned} \quad (10.74)$$

При этом решающее значение имеет отклонение среднеарифметического значения $A_{\text{ср}}$ (см. (6.70)) от истинного значения измеряемой величины X

$$\Delta A_{\text{ср}} = A_{\text{ср}} - X. \quad (10.75)$$

Значение $\Delta A_{\text{ср}}$ называется *погрешностью среднего арифметического, или погрешностью результата*.

Средняя квадратичная погрешность результата

$$\sigma_{A_{\text{ср}}} = \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}. \quad (10.76)$$

С учетом зависимости (10.76) можно записать, что при нормальном законе распределения Гаусса максимальная погрешность результата (10.72)

$$(\Delta_{A_{cp}})_{\max} \approx 3\sigma_{A_{cp}}. \quad (10.77)$$

Из приведенных выше зависимостей следует, что оценка точности результата измерений возможна лишь в том случае, если искомая величина многократно измерена в одних и тех же условиях.

Измерения искомых величин производятся с помощью ряда приборов, а поэтому точность получаемых результатов измерений зависит от степени точности прибора. Точность прибора характеризуется классом точности k , выражающим наибольшую допустимую основную погрешность Δ_{\max} в процентах величины, соответствующей предельному значению шкалы прибора N ,

$$k = \frac{\Delta_{\max}}{N} 100\%. \quad (10.78)$$

Основная погрешность прибора в нормальных условиях эксплуатации складывается из погрешностей различного рода и происхождения: *методических погрешностей* из-за несовершенства принятого способа измерения; *инструментальных погрешностей* из-за неточности изготовления сборки и установки прибора, из-за трения в механизме прибора; *погрешностей наблюдений* (при отсчете по шкале).

При установлении класса точности k учитываются порог чувствительности прибора, дополнительная погрешность и вариация. *Порогом чувствительности* называется наименьшее изменение значения измеряемой величины, способное вызвать малейшее изменение показания прибора, заметное при визуальном наблюдении, оно обусловлено трением в механизме прибора. Величина порога чувствительности не должна превышать 0,2 основной допустимой погрешности.

Дополнительной погрешностью назы-

вается погрешность, вызванная влиянием внешних условий на показания прибора при отклонении этих условий от нормальных (изменение температуры и влажности атмосферного воздуха, отклонения положения прибора от правильного и др.).

Вариацией называется наибольшая разность между повторными показаниями прибора при одном и том же значении измеряемой величины. Вариация — это следствие трения в механизме прибора, наличия зазоров в кинематических парах, упругого последствия и гистерезиса элементов прибора. Величины вариации определяются проверкой прибора сначала при возрастающем значении измеряемой величины (прямой ход), а затем при убывающем ее значении (обратный ход). При этом вариация не должна превышать значения основной допустимой погрешности.

По точности приборы делятся на две группы: рабочие и образцовые. *Рабочие приборы* могут быть техническими и лабораторными, предназначенными для практических измерений. *Образцовые приборы* предназначены для проверок и градуировок рабочих приборов.

Технические приборы измеряют искомую величину однократно и поправки в результате измерения не вносят. Точность измерения определяется классом прибора и гарантируется заводом-изготовителем. Наибольшая допустимая погрешность Δ_{\max} технического прибора равна половине цены деления его шкалы. Средняя квадратичная погрешность определяется по заданной максимально допустимой:

$$\sigma = \frac{\Delta_{\max}}{N}. \quad (10.79)$$

Лабораторные приборы имеют повышенную точность измерения искомой величины, за счет исключения из них показаний систематических ошибок и внесения соответствующих поправок. Резуль-

таты измерения сопоставляются с показаниями образцового прибора. Обычно производится многократные измерения и для оценки точности определяется средняя квадратичная погрешность результата по зависимости (10.76).

Для образцовых приборов исключение систематических погрешностей производится заводом-изготовителем, который снабжает прибор свидетельством, устанавливающим зависимость между действительными значениями измеряемой величины и показаниями прибора, а также его класс точности.

В том случае, когда непосредственное измерение некоторой искомой величины y неосуществимо или затруднено, то производят ее косвенным измерением путем замера ряда независимых величин x_n , связанных с искомой определенной функциональной зависимостью

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10.80)$$

При известной точности результатов измерений величин можно установить и точность измерения искомой величины y , абсолютная средняя квадратичная погрешность которой

$$\sigma_f = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \sigma_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \sigma_{x_n}\right)^2}, \quad (10.81)$$

где $\sigma_{x_1}, \dots, \sigma_{x_n}$ — абсолютные средние квадратичные погрешности результатов измерений величин.

Если, например, функцию f можно представить в виде суммы (см. § 10.7)

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (10.82)$$

то средняя квадратичная ее погрешность определяется формулой

$$\sigma_f = \pm \sqrt{(a_1 \sigma_{x_1})^2 + \dots + (a_n \sigma_{x_n})^2}. \quad (10.83)$$

Погрешность результатов косвенных

измерений принято оценивать относительной средней квадратичной погрешностью σ_{0f} , которая определяется по формуле

$$\sigma_{0f} = \frac{\sigma_f}{f}, \quad (10.84)$$

или

$$\sigma_{0f} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\sigma_{x_1}}{f}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\sigma_{x_n}}{f}\right)^2}. \quad (10.85)$$

Если функцию $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в виде

$$y = k x_1^a x_2^b \dots x_n^m, \quad (10.86)$$

то

$$\sigma_{0f} = \pm \sqrt{a^2 \sigma_{0x_1}^2 + b^2 \sigma_{0x_2}^2 + \dots + m^2 \sigma_{0x_n}^2}. \quad (10.87)$$

где $\sigma_{0x_1}, \sigma_{0x_2}, \dots, \sigma_{0x_n}$ — относительные средние квадратичные погрешности результатов измерений величин x_1, x_2, \dots, x_n , то есть $\sigma_{0i} = \frac{\sigma}{x_i}$.

Приборы для измерения высоты уровня жидкости (уровнемеры), давления (жидкостные, пружинные, грузопоршневые и др.), местной скорости (гидродинамические трубки и термоэлектрические анемометры); объема жидкости (мерные баки и механические счетчики); расходов (объемные, гидродинамические трубки, сужающие устройства, водосливы, и др.) подробно рассматриваются в специальной литературе.

§ 10.7. Основы математического планирования эксперимента

При гидравлических исследованиях экспериментатор зачастую имеет дело со сложными системами, на состояние

которых оказывает влияние множество разнообразных факторов. При традиционном методе исследования требуемые зависимости устанавливаются при изменении одного из факторов и постоянстве остальных (однофакторный эксперимент). Такой подход требует большого числа опытов. В последнее время все чаще применяются *методы математического планирования эксперимента*, позволяющие одновременно изучать влияние ряда факторов (многофакторный эксперимент). Они основаны на *математической теории эксперимента*, которая определяет условия оптимального проведения исследования, в том числе и при неполной изученности физической природы явления. Для этого можно использовать математический аппарат не только на стадии обработки результатов, измерений, как было раньше, но также при подготовке и проведении опытов.

Планирование эксперимента — это выбор числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью [1].

Такой подход к проведению эксперимента имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным: экспериментатор получает количественные зависимости, абстрагируясь от сложных и плохо изученных явлений, происходящих в системе; эксперименты проводятся небольшими сериями по некоторому оптимальному плану, что исключает слепой хаотический поиск; для математического описания исследуемого явления планируется минимальное количество опытов, из которых информация извлекается с максимальной полнотой, что позволяет значительно уменьшить трудоемкость и стоимость опытных работ; решения принимаются на основе четких, логически осмысленных операций и формализованных правил, что позволяет уменьшить ошибку эксперимента.

Основная задача метода планирования

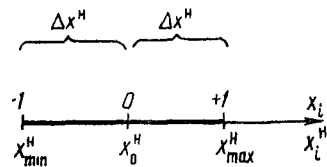


Рис. 10.3

эксперимента — это построение математической модели изучаемого процесса. При ее решении задаются функции отклика в виде $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, где x — факторы. Это уравнение в многомерном пространстве факторов, часто называемом *факторным пространством*, имеет некоторый геометрический образ — поверхность отклика и, следовательно, задача сводится к получению представления о поверхности отклика. Метод планирования эксперимента дает возможность получить полином n -й степени (функцию отклика) для математического описания исследуемого явления в некоторой локальной области многофакторного пространства. Полученную функцию отклика можно использовать также для оптимизации процессов [1], то есть определять значения факторов, при которых явление или процесс будет протекать наиболее эффективно.

При организации гидравлического эксперимента приходится в основном решать два типа задач по планированию эксперимента: для *отыскания математической модели*, описывающей изучаемое явление, и для *нахождения оптимальных условий изучаемого явления* (экстремальный эксперимент).

Отыскание оптимальных условий протекания изучаемого процесса — одна из самых распространенных задач. Такие задачи называются *оптимизационными*. Например, задача подбора размеров гасителя энергии в нижнем бьефе водопропускного сооружения с целью снижения размывающей способности потока.

Одним из основных достоинств мето-

дов экстремального эксперимента является то, что они дают возможность поиска оптимума в условиях неполностью изученного объекта исследования.

Принцип построения математической модели теории планирования эксперимента основан на том, что любую аналитическую функцию можно аппроксимировать отрезком ряда Тейлора в полиномиальной форме:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j}^k b_{ij} x_i x_j + \dots + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (10.88)$$

где b_0 , b_i , b_{ii} , b_{ij} — коэффициенты регрессии; k — число факторов: x_i — кодированная переменная, введенная в целях упрощения арифметических расчетов.

$$x_i = \frac{x_i^H - x_{0i}^H}{\Delta_{x_i}^H}; \quad \Delta_{x_i}^H = \frac{x_i^H \max - x_i^H \min}{2};$$

$$x_{0i}^H = \frac{x_i^H \max + x_i^H \min}{2}, \quad (10.89)$$

здесь x_i^H — натуральное значение фактора; x_{0i}^H — натуральное значение основного уровня фактора; $\Delta_{x_i}^H$ — интервал (шаг) варьирования фактора. Графически переход от натурального значения фактора к кодированному представлен на рис. 10.3.

Таким образом, x_i — относительная величина, максимальному значению $x_i^H \max$ соответствует $x_i = +1$, минимальному $x_i^H \min$ соответствует $x_i = -1$. Натуральные значения факторов $x_i^H \min$ и $x_i^H \max$ определяются поставленной задачей.

При подготовке к эксперименту отбираются все факторы, которые могут оказать влияние на изучаемый процесс. Если их число велико, то необходимо провести отсеивающие опыты, которые позволяют выявить несущественные факторы. Это можно осуществить с помощью

методов ранговой корреляции, методов случайного баланса [13, 26] и т. д.

Как к функции отклика, описываемой полиномом (10.88), так и к факторам x_1, \dots, x_k , задающим эту функцию, предъявляются определенные требования. Исследуемая функция должна быть непрерывной и дифференцируемой во всем объеме факторного пространства, определяемого интервалом варьирования факторов, и иметь не более одного экстремума. Факторы должны быть управляемыми, совместимыми и независимыми [1].

Перед экспериментом четко формулируется *цель исследования* и выбирается подходящая количественная характеристика этой цели. Затем, при известных факторах, выбирается *математическая модель*. После этого планируется и проводится эксперимент для оценки численных значений коэффициентов регрессии уравнения (10.88).

Когда об исследуемом объекте нет достаточной информации, наиболее оправдан принцип максимальной простоты математической модели. В соответствии с этим принципом, вначале предполагают, что функция отклика описывается линейным полиномом. Затем проводят эксперимент и выясняют пригодность математической модели, то есть правомерность описания изучаемого процесса тем или иным уравнением. Проверка гипотезы о пригодности модели называется *проверкой адекватности*, а пригодная модель называется *адекватной*. Адекватность модели определяется статистическими методами проверки гипотез. Если линейная модель неадекватна, то проводят дополнительные эксперименты для получения более сложных моделей. Для практических целей обычно вполне достаточно рассмотрения моделей первого или второго порядка.

Для удобства проведения эксперимента составляют *матрицу планирования*,

Таблица 10.2. Матрица плана эксперимента по изучению процесса местного размыва

Факторы	$Q, 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$	$\frac{h_{н.б}}{D}$	$d, 10^{-5} \text{ м}$	Функция отклика $h_{р, м}$
Основной уровень x_{0i}^H	9,33	0,8	35	
Интервал варьирования Δx_i^H	4,9	0,8	10	
Верхний уровень $x_{i\text{max}}^H, \leftarrow +$	14,23	1,6	45	
Нижний уровень $x_{i\text{min}}^H, \leftarrow -$	4,43	0	25	
Код	x_1	x_2	x_3	y_i

№ опыта	Порядок реализации опыта	Матрица плана			Функция отклика
1	6	-1	-1	-1	y_1
2	5	+1	-1	-1	y_2
3	7	-1	+1	-1	y_3
4	1	+1	+1	-1	y_4
5	8	-1	-1	+1	y_5
6	2	+1	-1	+1	y_6
7	4	-1	+1	+1	y_7
8	3	+1	+1	+1	y_8

Примечание: Q — расход воды, подаваемой на модель; $h_{н.б}$ — глубина воды в нижнем бьефе, D — диаметр водопропускной трубы, d — диаметр частиц грунта отводящего русла, h_p — глубина воронки размыва

в которой в стандартной форме записаны условия проведения опытов. В табл. 10.2 приведен пример кодирования факторов и матрицы планирования полного факторного эксперимента при изучении процесса местного размыва за водопропускной трубой и варьировании факторов на двух уровнях.

В графе «Порядок реализации опыта» указан номер его выполнения при случайном порядке проведения. Процедура, обеспечивающая случайный порядок проведения опытов, называется *рандомизацией*. Она усредняет влияние неконтролируемых факторов, что снижает общую ошибку эксперимента. Рандомизацию можно осуществлять с помощью таблиц случайных чисел [1].

После проведения опытов, заданных матрицей планирования (табл. 10.2), вычисляют коэффициенты регрессии линейного полинома:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j; \quad b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} y_j;$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij} x_{ju} y_j, \quad (10.90)$$

где N — число опытов полного факторного эксперимента; j — номер опыта; i, l, u — номера факторов.

Формулы (10.90) применимы только для вычисления коэффициентов линейного полинома. В общем случае для численной оценки коэффициентов полиномиальной модели (10.88) используется широко известный метод наименьших квадратов.

Некоторые из коэффициентов регрессии могут оказаться статистически незначимыми, то есть пренебрежимо малыми. Незначимыми окажутся и соответствующие им факторы, что значительно облегчит построение более сложных моделей и явится одним из способов экспериментального отсеивания факторов. Коэффициент регрессии значим и им пренебрегать нельзя, если

$$|b| \geq D_b S_d, \quad (10.91)$$

где S_d — критерий Стьюдента [1]; D_b — дисперсия, с которой определялся коэффициент регрессии, $D_b = \frac{D_y}{\sqrt{N}}$; D_y — дисперсия среднего значения фактора.

Число опытов полного факторного эксперимента $N = p^k$, где p — число уровней варьирования факторов; k — количество факторов.

Если экспериментатор может ограничиться линейной моделью или пожертвовать оценкой некоторых эффектов взаимодействия, можно существенно уменьшить количество необходимых опытов. Для этого используют *дробные факторные планы*, которые представляют собой часть матрицы полного факторного экс-

перимента (метод дробных реплик). Дробные реплики особенно целесообразны при большом числе факторов, когда необходимое число опытов может быть уменьшено в десятки и сотни раз по сравнению с полным факторным экспериментом [1].

При составлении матриц плана эксперимента удобно пользоваться готовыми справочными таблицами [26], которые охватывают подавляющее большинство практических ситуаций. Для пользования этими таблицами достаточно общего представления о методе планирования эксперимента и грамотно поставленной задаче.

Одну и ту же задачу, как правило, можно решать с помощью различных планов эксперимента. Это значит, что при разных планах параметры модели и предсказанные значения отклика будут оцениваться с разной точностью. Для количественной характеристики свойств планов при их сравнении и выборе удобно пользоваться *критериями оптимальности* [1, 31]. К числу важнейших критериев относятся:

критерий D-оптимальности; D-оптимальный план минимизирует обобщенную дисперсию оценок коэффициентов регрессии, то есть обеспечивает теоретически максимально возможную точность предсказания отклика y ;

критерий A-оптимальности; для A-оптимальных планов характерна минимальная средняя дисперсия оценок коэффициентов полинома.

В настоящее время используется свыше 20 различных критериев оптимальности планов. Лишь некоторые планы одновременно удовлетворяют многим критериям оптимальности. Обычно критерии оказываются противоречивыми и перед экспериментатором возникает не легкая задача поиска компромиссных планов. При этом можно поступить следующим образом: выбрать план, оптимальный в отношении какого-нибудь

одного критерия и квазиоптимальный в отношении других. Полезными могут оказаться специально составленные каталоги планов [26].

Обработку экспериментальных данных можно производить при помощи ЭВМ по готовым стандартным программам, имеющимся в Государственном фонде алгоритмов.

Последовательность формальных процедур оптимального планирования эксперимента следующая:

1. Выбирается цель исследования и ее количественная характеристика (функция отклика). Проверяется ее соответствие требованиям, предъявляемым к изучаемой функции (см. выше).

2. Выбираются из n действующих в системе факторов наиболее важные x_1, x_2, \dots, x_k и проверяется их соответствие требованиям, предъявляемым к факторам.

3. Устанавливаются пределы изменений выбранных факторов $x_{i \min}^n$ и $x_{i \max}^n$, вычисляются основной уровень x_{0i}^n и интервал (шаг) варьирования Δx_i^n , заменяются переменные x_i^n на кодированные x_i .

4. Разрабатывается методика измерения выбранных факторов, определяются погрешность и число повторений в каждой из выбранных комбинаций факторов.

5. Выбирается математическая модель изучаемого процесса. В случае недостатка информации вначале принимается линейная модель.

6. Составляется или выбирается по справочным таблицам план эксперимента и проводится рандомизация опытов.

7. Проводится эксперимент с одновременной корректировкой его при учете данных, полученных в ходе эксперимента.

8. Вычисляются коэффициенты регрессии изучаемой зависимости и проверяется адекватность полученной модели. Ес-

ли линейная модель не согласуется с экспериментом, то проводятся дополнительные опыты для построения более сложных зависимостей.

9. Определяется уравнение регрессии, проверяется его адекватность, проводится его анализ и делаются соответствующие выводы.

В заключение необходимо подчеркнуть, что методы теории математического планирования эксперимента ни в коей мере не отвергают традиционные методы исследований. Они должны разумно сочетаться, способствуя при этом повышению производительности труда экспериментаторов и качества экспериментальных работ.

Вопросы для самопроверки

1. Математическое моделирование гидравлических явлений.
2. Геометрическое, кинематическое и динамическое подобие потоков.
3. Масштабные множители.
4. Закон подобия Ньютона в масштабных множителях.
5. Критерии гидродинамического подобия.
6. Основные правила моделирования.
7. Метод анализа размерностей (Пи-теорема).
8. Моделирование течений в напорных водоводах (автомодельная область).
9. Моделирование течений в открытых руслах и гидротехнических сооружениях.
10. Систематические и случайные погрешности измеряемых величин.
11. Нормальный закон распределения случайных ошибок Гаусса.
12. Среднеарифметическая и среднеквадратичная погрешности измерений
13. Погрешности измерений в приборах, порог чувствительности, вариация и дополнительные погрешности.
14. Классификация измерительных приборов по точности.
15. Основная задача метода математического планирования эксперимента.
16. Математическая модель (уравнение регрессии) планирования эксперимента и ее адекватность.
17. Критерии оптимальности матриц плана эксперимента.