

6 - Маъруза. Экотизимдаги жараёнларни математик моделлаштириш асослари

Режа:

1. Ҳаракат тенгламалари.
2. Энергиянинг сақланиш қонуни.

Таянч иборалар: Даламбер принципи, тезлик градиенти, босим градиенти, прεκцияси, ҳолат энергияси, босим энергияси, кинетик энергия.

6.1 Ҳаракат тенгламалари. Энергиянинг сақланиш қонуни

Атроф муҳитда содир бўлаётган жараёнлар механиканинг асосий қонунлари асосида ифодаланади. Атроф муҳитни ифлослантйрувчи моддалар суюқлик ёки газ оқими кўринишида ҳаракатланади. Шу сабабдан уларни параметрларини аниқлаш учун механикада кўп қулланадиган ҳаракат тенгламаларидан фойдаланадилар.

Ҳаракат тенгламасини келтириб чиқариш учун назарий механика фанидан маълум бўлган Даламбер принциpidан фойдаланамиз.

Мувозанатдаги суюқликнинг дифференциал тенгламасига инерция кучларини қўшиб қўйидаги ифодага келамиз.

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Бу тенгламалар тизимига идеал оқимлар ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади. У биринчи марта Эйлер (1775й) томонидан таклиф қилинган.

Тенгламада:

$$\frac{du_x}{dt}; \frac{du_y}{dt}; \frac{du_z}{dt} - \text{тезлик градиенти;}$$

$$\frac{dp}{dx}; \frac{dp}{dy}; \frac{dp}{dz} - \text{босим градиенти.}$$

$X; Y; Z$ – масса кучларининг координата ўқларига проекцияси.

Амалий масалаларни ечишда тенгламани оғирлик кучини инобатга олган ҳолда интеграллаймиз.

Бунинг учун (1) тенгламанинг икки томонини мос равишда dx, dy, dz – га купайтириб қўшамиз:

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz \right); \quad (2)$$

Маълумки,

$$u_x = \frac{dx}{dt}; u_y = \frac{dy}{dt}; u_z = \frac{dz}{dt}$$

у ҳолда, ҳосил булган ифоданинг (2) биринчи хадини қўйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy; \frac{du_z}{dt} dz = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$$

бўлганлиги учун (2) тенгламанинг биринчи хадини қўйидагича ёзамиз:

$$\frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2) \quad (3)$$

Агар масса кучларидан фақат оғирлик кучи таъсирини инобатга олсак, (2) тенгламанинг иккинчи хади қўйидаги кўринишда келади:

$$X = 0; Y = 0; Z = -g$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = -gdz \quad (4)$$

(2) тенгламанинг учинчи хади, математик анализ курсидан маълумки, босимнинг тулиқ дифференциалини ифодалайди, яъни

$$\frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy + \frac{dp}{dz} dz = dp \quad (5)$$

(3), (4), (5) ифодаларни (2)-га қўйиб, қўйидагига эга бўламиз:

$$\frac{1}{2} d(u^2) + \frac{1}{\rho} dp + g dz = 0$$

Ҳосил булган ифодани интеграллаб, қўйидагини оламиз:

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{u^2}{g} = \text{Const}$$

яъни энергиянинг сақланиш қонуни. Бу ерда: Z – оқим солиштирма Ҳолат энергияси (потенциал) энергияси дейилади. $\frac{P}{\gamma}$ – солиштирма босим (потенциал) энергияси ; $\frac{u^2}{g}$ – оқим солиштирма кинетик энергияси.

Бу тенглама ёрдамида чегараланган муҳитларда (дарё, канал, қувурлар тизими ва Ҳ.к) ҳаракатланаётган оқим параметрлари аниқланади.

Назорат саволлари

1. Сув ва Ҳаво Ҳаракатини ифодалаш учун тенгламалар. Эйлер тенгламалари.
2. Оқим энергиясини сақланиш қонуни.
3. Эйлер тенгламаларини интеграллаш.