

$$\sin \beta = \frac{v_2}{v_1} \quad (15-17)$$

где  $v_1$  — скорость потока перед косой волной. Что касается высоты волны  $\xi$  (малой величины), то эта высота может быть найдена из уравнения количества движения (особым образом использованного), которое приводит нас к следующей расчетной формуле:

$$\xi = \frac{v_1^2}{g} (\Delta\theta) \operatorname{tg} \beta \quad (15-18)$$

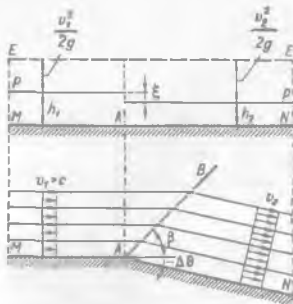


Рис. 15-9. Обтекание бурным потоком наружного тупого угла, образованного боковой стенкой русла

а следовательно, и увеличение удельных расходов  $q$ . Наоборот, при обтекании бурным потоком внутреннего тупого угла (рис. 15-9) происходит расширение в плане элементарных струек, а следовательно, уменьшение удельных расходов  $q$ .

2°. Обтекание бурным вихрем наружного тупого угла, образованного в плане боковой стенкой. При тех же условиях, что и в п. 1°, рассмотрим боковую стенку  $MAN$ , представленную на рис. 15-9. Условимся в данном случае угол  $\Delta\theta$  считать отрицательным.

В отличие от схемы на рис. 15-8.б. на рис. 15-9 вдоль фронта  $AB$ , направление которого определяется формулой (15-17), получим косую установившуюся отрицательную волну (см. продольный разрез потока); высота ее определяется по формуле (15-18).

Можно показать, что при обтекании бурным потоком внутреннего тупого угла (рис. 15-8.б) происходит сужение в плане элементарных струек потока,

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 15-1. Емшев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. — М.: Энергия, 1967.
- 15-2. Сынцов Н. Н. Методы аналогий в аэрогидродинамике. — М.: Физматгиз, 1958.
- 15-3. Сухомел Г. И. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1949.
- 15-4. Чугаев Р. Р. Гидравлика. — Л.: Энергия, 1975.

## ГЛАВА ШЕСТНАДЦАТАЯ

### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

#### § 16-1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

В области, которая может быть названа «моделированием», относящимся к исследованию тех или других физических явлений (в иском случае — к исследованию движению жидкости), необходимо различать два совершенно различных вида моделирования:

1-й вид моделирования — так называемое *физическое моделирование*: в этом случае на модели воспроизводится изучаемое явление (оригинал, натура) с сохранением его физических свойств; например, в натуре мы имеем плотину, под которой фильтрует вода; модель здесь представляет собой плотину (созданную в некотором масштабе), под которой также фильтрует вода (физическое содержание процесса, имеющего место в натуре и на модели — одинаково: в порах грунта движется вода и в натуре, и на модели);

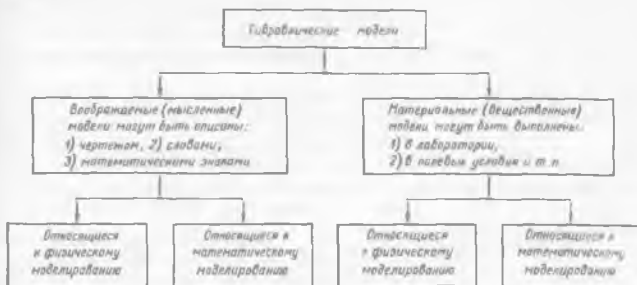


Рис. 16-1. Гидравлические модели

2-й вид моделирования — так называемое *математическое моделирование*: в этом случае исследование натуральных состояний или процессов выполняется путем изучения явлений, имеющих иное физическое содержание, однако описываемое теми же математическими зависимостями (которые описывают натурное явление); примером такого моделирования может являться моделирование отмеченной выше плотины, когда фильтрация воды под ней изучается при помощи метода ЭГДА — электрогидродинамической аналогии (см. § 18-1); здесь, обращаясь к модели, мы рассматриваем не движение воды, а постоянный электрический ток, учитывая при этом, что и ламинарное движение воды (под плотиной в натуре) и электрический ток в соответствующей области подчиняются одному и тому же математическому уравнению — уравнению Лапласа. К математическому моделированию следует отнести и расчеты тех или других процессов, выполняемые по специально составленным программам на ЭВМ. Действительно в этом случае рассматриваемое физическое явление подменяется и здесь некоторым другим процессом (иного физического содержания). Однако этот процесс, согласно используемой программе, построен на базе математических уравнений, относящихся к действительности (или к исполной воображаемой ее модели, см. ниже).

Наряду со сказанным в отношении видов моделирования следует различать еще две разные категории самих моделей:

1-я категория моделей — так называемые *воображаемые (мысленные) модели*, которые создаются человеком мысленно — в его воображении; к числу таких моделей, как мы говорили ранее, относятся, например: а) модель идеальной жидкости (см. § 1-3), которой мы мысленно заменяем реальную жидкость; б) модель Рейнольдса — Буссинеска, о которой мы говорили в § 4-6; в) модель Бернулльского (см. § 15-1); г) модель Форхгеймера, которая

будет описана в § 17-1, и т. д. Обычно воображаемые модели являются *неполными*: они не полностью отражают действительность (в той или иной мере упрощая ее), поэтому такие модели иногда называем «идеальными телами» или соответственно «идеальными процессами» («идеальными» в том смысле, что в природе такого рода тел или процессов не существует). Исследуя теоретически (т. е. безэкспериментально) те или другие «идеальные» тела или процессы, мы, разумеется, можем получать результаты иногда недостаточно приближающиеся к тем результатам, которые должны относиться к действительным реальным телам (или реальным процессам). Поэтому в результате, полученные теоретическим (безэкспериментальным) путем для воображаемой модели, приходится вводить в соответствующих случаях некоторые поправочные коэффициенты (устанавливаемые, например, на основании специально проведенных опытов);

2-я категория моделей — так называемые *материальные (вещественные) модели*, представляющие собой воспроизведенные (в определенном масштабе) при помощи различных материальных средств соответствующие конструкции или те или другие процессы, имеющие место в действительности (в натуре), с целью изучения таких процессов (или состояний).<sup>1</sup>

Имея в виду приведенные пояснения, вопросы моделирования (рассмотренные выше) можно представить схемой на рис. 16-1. Из этой схемы, в частности, видно следующее:

1) «воображаемая (мысленная) модель» может быть описана чертежом или словами или при помощи соответствующих математических знаков и записей;

2) «материальная (вещественная) модель» может быть создана в лаборатории или «в полевых условиях» и т. п.;

3) как воображаемые, так и материальные модели могут относиться как к физическому, так и к математическому моделированию.

В настоящей главе будем рассматривать только «материальное физическое моделирование» (рис. 16-1).

Ранее мы уже видели, что многие гидравлические формулы были получены на основании опытов, проводимых с использованием материальных моделей.

Опыты с такими моделями приходится проводить не только в связи с необходимостью получить те или другие общие экспериментальные расчетные зависимости или с целью проверки тех или других теоретических соображений. Достаточно часто в современных условиях при помощи материального физического моделирования приходится уточнять соответствующие проектные данные, относящиеся к определенному конкретному сооружению.

Существуют сложные гидротехнические сооружения, которые вообще не поддаются с достаточной степенью точности обычному теоретическому расчету (различные гидроузлы, водозаборы и т. п.). При составлении проекта таких сооружений часто обращаются к так называемому «лабораторному проектированию». При этом в лаборатории создают модель (материальную) рассматриваемого сооружения; через построенную модель пропускают воду и измеряют различные величины (давления, скорости и т. п.); полученные таким образом для модели величины переносят на действительное сооружение.

При выполнении такого рода работ возникает целый ряд вопросов: как следует в лаборатории строить модель сооружения (какие размеры ей следует придавать, какую шероховатость стенок должно иметь «модельное русло» и т. п.); какие значения  $v$  и  $Q$  следует задавать на модели, если она в определенное

<sup>1</sup> Дополнительно к сказанному выше отметим, что существует еще широко распространенный термин «математическая модель»; об этом термине см. сноску на стр. 5.

число раз меньше действительного сооружения: каким образом данные, полученные в лаборатории для модели, следует переносить на действительное сооружение и т. п. Всеми этими вопросами занимается теория так называемого физического моделирования (точнее говоря, «материального физического моделирования»).

Основой такого моделирования (относящегося к механике жидкости) является «теория подобия», которая опирается на учение о размерности физических величин. Имея это в виду, рассмотрим прежде всего вопрос о механическом подобии двух механических (гидравлических) систем («модели» и «натуры»), представляющих собой движущиеся сплошные среды.

## § 16-2. ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Представим себе две геометрически подобные фигуры. Условимся сходственными и точками двух этих фигур называть точки, одинаково расположенные по отношению к границам этих фигур.

Рассматривая физическое моделирование, должны считать, что в сходственных точках «натуры» и «модели» на частицы жидкости (сплошной среды) действуют силы одной и той же физической природы (так называемые одноименные силы).

Вообще говоря, физически подобными явлениями называются явления одной и той же физической природы, для которых все характерные величины подобны: в сходственных точках природы и модели и в соответственные моменты времени для подобных явлений все векторные величины должны быть геометрически подобными, все же скалярные величины — соответственно пропорциональны. Поясним это положение подробнее.

При физическом моделировании гидравлических явлений с использованием материальных моделей, удобно различать геометрическое, а также кинематическое и динамическое подобия.

1. Геометрическое подобие. Две гидравлические системы (два гидравлических явления) будут геометрически подобными в том случае, если между сходственными размерами этих систем всюду существует постоянное соотношение:

$$\frac{l_m}{l_n} = a_l = \text{const}, \quad (16-1)$$

где  $l_n$  — некоторый размер действительного сооружения (натуры);  $l_m$  — сходственный размер модели;  $a_l$  — масштаб длин.

Для геометрически подобных систем

$$\frac{\omega_m}{\omega_n} = a_l^2, \quad \frac{V_m}{V_n} = a_l^3, \quad (16-2)$$

где  $\omega_n$ ,  $V_n$  — некоторая площадь и некоторый объем, относящиеся к действительному сооружению;  $\omega_m$ ,  $V_m$  — сходственные площадь и объем модели.<sup>1</sup>

2. Кинематическое подобие. Две гидравлические системы будут кинематически подобными, если:

а) траектории движения сходственных частиц жидкости обеих систем, геометрически подобны и одинаково ориентированы по отношению к границам этих систем;

<sup>1</sup> Как здесь, так и ниже величины, относящиеся к действительному сооружению (к натуре), отмечаются индексом «н», а относящиеся к модели, — индексом «м».

б) скорости  $u$  и ускорения  $w$  в сходственных точках в соответственные моменты времени всюду связаны постоянными соотношениями:

$$\frac{u_w}{u_n} = a_u = \text{const (по всему объему)}, \quad (16-3)$$

$$\frac{w_w}{w_n} = a_w = \text{const (по всему объему)}, \quad (16-4)$$

т. е. величина  $a_u$  (масштаб скорости), а также величина  $a_w$  (масштаб ускорения) одинаковы для любой пары сходственных точек в определенный момент времени.

Подчеркнем, что кинематически подобные системы всегда будут геометрически подобными системами.

В связи с кинематическим подобием возникает понятие масштаба времени

$$\frac{t_w}{t_n} = a_t, \quad (16-5)$$

где  $t_n$  и  $t_w$  — промежутки времени, в течение которых протекают соответственные явления в натуре и на модели. Если какая-либо частица жидкости в действительных условиях прошла за время  $t_n$  некоторый путь  $l_n$  (описала кривую  $l_n$ ), то сходственная частица модели за время  $t_w$  должна пройти путь  $l_w$  (описать кривую  $l_w$ ), причем кривая  $l_w$  должна быть геометрически подобна кривой  $l_n$  и ориентирована по отношению к границам системы так же, как и кривая  $l_n$ .

Для кинематически подобных систем

$$a_t = \text{const (по всему объему)}. \quad (16-6)$$

3. Динамическое подобие. Две гидравлические системы будут динамически подобными, если:

а) в любой паре сходственных точек действуют одноименные силы;

б) соотношение величин соответствующих сил для любой пары сходственных точек одинаково по всему объему обеих рассматриваемых гидравлических систем, т. е. масштаб сил:

$$a_F = \frac{F_w}{F_n} = \text{const (по всему объему)}. \quad (16-7)$$

где через  $F$  обозначена любая сила, действующая на жидкость;

в) силы, действующие на первую гидравлическую систему, ориентированы относительно друг друга и относительно границ системы так, как и силы, действующие на вторую гидравлическую систему.

Очевидно, при соблюдении указанных условий мы получаем следующее: для двух динамически подобных систем (например, для природы и модели) замкнутые многоугольники сил, построенные для любой пары сходственных точек в натуре и модели, получаются геометрически подобными, причем отношение размеров этих многоугольников сил всюду (по всему объему) оказывается одинаковым.

Можно сказать, что динамически подобными системами будут такие, для которых векторные поля сил, действующих на жидкость, образованы одноименными силами, причем эти поля являются геометрически подобными и одинаково ориентированными относительно границ систем.

Динамическое подобие может иметь место только при наличии кинематического, а следовательно, и геометрического подобия. Как видно, динамическое подобие предопределяет существование кинематического подобия. Поэтому динамически подобные системы являются механически подобными системами. Иногда такого рода системы, относящиеся к жидкости, называют гидродинамически подобными.

В связи с вопросом о динамическом подобии возникает понятие масштаба плотности жидкости:

$$a_p = \frac{\rho_M}{\rho_m} \quad (16-8)$$

Важно подчеркнуть, что для динамически подобных систем часто получаем следующие соотношения:

а) для коэффициентов сопротивления  $\zeta$

$$\zeta_M = \zeta_m; \quad (16-9)$$

б) для коэффициентов гидравлического трения  $\lambda$

$$\lambda_M = \lambda_m; \quad (16-10)$$

в) для коэффициентов Шези  $C$

$$C_M = C_m \quad (16-11)$$

Отсюда видно, что для такого рода динамически подобных систем масштабы коэффициента сопротивления ( $a_z$ ), коэффициента гидравлического трения ( $a_\lambda$ ), коэффициента Шези ( $a_C$ ) равны единице:

$$a_z = a_\lambda = a_C = 1. \quad (16-12)$$

Действительно, рассматривая для примера безнапорное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления, имеем, согласно Шези,

$$v_1 = C_M \sqrt{R_M J_M};$$

$$v_m = C_m \sqrt{R_m J_m}.$$

Так как для геометрически подобных систем (при безнапорном движении)  $J_M = J_m$ , то

$$\frac{v_M}{v_m} = \frac{C_M}{C_m} \sqrt{\frac{R_M}{R_m}} = \frac{C_M}{C_m} \sqrt{a_r}.$$

С другой стороны, как будет показано ниже, для динамически подобных систем, запроектированных для квадратичной области сопротивления, всегда должно иметь место условие

$$\frac{v_M}{v_m} = \sqrt{a_r}.$$

Подставляя это равенство в предыдущее, получаем (16-11). Учитывая теперь соотношения (4-97) и (5-14), видим, что при наличии равенства (16-11) соотношения (16-10) и (16-9) являются также справедливыми.

Имея это в виду, при создании в лаборатории модели сооружения стремятся сделать ее так, чтобы поток, получающийся в лаборатории, был динамически подобен действительному потоку. Величины  $\zeta$ ,  $\lambda$ ,  $C$ , найденные для такой модели, часто можно без всякого изменения переносить на натуру.

Естественно, возникает вопрос, каким образом следует проектировать модель потока, чтобы она получалась динамически подобной действительному

поток. Этот вопрос осложняется тем, что величины сил, скоростей, давлений и других параметров, обычно бывают неизвестны для различных точек интересующей нас области, так как отыскание этих величин и является целью создания модели и проведения на ней соответствующих измерений.

Чтобы добиться при таких условиях динамического подобия, поступают следующим образом:

а) создают модель русла, геометрически подобную действительному руслу;  
б) на одной из границ модельного потока в начальный момент времени задают соответствующие геометрические и кинематические параметры, подобные известным параметрам, имеющимся на сходственной границе действительного потока;<sup>1</sup>

в) жидкостью, применяемую в опытах выбирают с такими физическими характеристиками ( $\nu$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ ), чтобы на фиксируемой границе потока имело место динамическое подобие.

Как видно, здесь предполагают, что поскольку физическое явление в натуре и на модели описывается одними и теми же математическими уравнениями, то при наличии подобных граничных и начальных условий мы воспроизводим в геометрически подобном русле модели явление, динамически подобное искомому. Заметим, что подобие граничных условий для модели складывается из подобия следующих величин на границе модельного потока: глубин, скоростей<sup>2</sup> и давлений (для напорных систем).

Надо, однако, подчеркнуть, что, как видно будет из дальнейшего, следуя указанному теоретически обоснованному пути моделирования, на практике и далеко не всегда удается создать модель, динамически подобную натуре. Поэтому часто приходится отклоняться от такого теоретического пути и прибегать к различным «условным» методам моделирования, описанным ниже (применять модели, построенные в искаженном масштабе и т. п.).

Судить о динамическом подобии двух систем (см. выше п. «в») путем измерения и сравнения между собой сил, действующих на эти системы, практически неудобно и даже невозможно. Вместе с тем четко видеть, что соотношение сил, действующих в натуре и на модели, может быть установлено косвенно по имеющимся масштабам длины, скорости и плотности жидкости, т. е. по соотношению величин, легко поддающихся измерению.

Применяя такой косвенный метод оценки динамического подобия, пользуемся так называемыми критериями динамического подобия.

### § 16-3. КРИТЕРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

В общем случае на движущуюся несжимаемую вязкую жидкость действуют следующие силы:

- 1) объемная внешняя сила тяжести  $G$ ;
- 2) поверхностные (внешние и внутренние) силы гидродинамического давления  $P$ ;
- 3) поверхностные (внешние и внутренние) силы трения (вязкости)  $T$ .

Геометрическая сумма указанных сил, согласно началу Даламбера, может быть представлена в виде

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{I} = 0, \quad (16-13)$$

где  $\vec{I}$  — сила инерции,

<sup>1</sup> Предполагается, что граничные условия для действительного потока при решении поставленной задачи должны быть заданы.

<sup>2</sup> Необходимо иметь подобие эйлеров скоростей.

$$I = -M\ddot{w}, \quad (16-14)$$

причем здесь  $M$  — масса выделенного объема жидкости,  $w$  — ускорение.

При заданных граничных условиях можно считать, что в данной точке жидкости сила давления  $P$  целиком определяется силами  $G$ ,  $T$  и  $I$ :

$$\bar{P} = f(\bar{G}, \bar{T}, \bar{I}); \quad (16-15)$$

поэтому (16-13) можно переписать в виде:

$$\bar{G} + f(\bar{G}, \bar{T}, \bar{I}) + \bar{T} + \bar{I} = 0. \quad (16-16)$$

Для различных частных случаев уравнение движения (16-16) может упроститься в связи с тем, что некоторые силы, входящие в него, оказываются или равными нулю, или получают пренебрежимо малую величину сравнительно с другими силами. Например, при параллельно-струйном установившемся движении сила инерции  $I = 0$ ; при напорном движении в трубопроводе эффект действия собственного веса  $G$  рассматриваемого объема жидкости по сравнению с эффектом действия сил давления  $P$  оказывается ничтожным, и потому сила  $G$  из уравнения (16-16) может быть исключена; в этом уравнении останутся только силы  $T$  и  $I$ ; при ламинарном движении силы  $I$  часто могут оказаться пренебрежимо малыми сравнительно с силами  $T$ ; при турбулентном безнапорном движении воды благодаря весьма низкой ее вязкости силы трения  $T$  оказываются настолько малыми по сравнению с другими силами, что в уравнении (16-16) силами  $T$  можно пренебречь, и т. д. Рассмотрим сперва простейшие случаи, когда на исследуемую жидкость действует только одна система определяющих сил (не считая сил инерции); при этом ограничимся рассмотрением только таких условий движения, при которых силы инерции соизмеримы с силами тяжести или силами внутреннего трения.

1°. Случай, когда на жидкость действуют только силы тяжести (рис. 16-2). В этом случае в уравнение (16-16) будут входить только сила  $G$  и сила инерции  $I$ .

Для достижения динамического подобия двух систем («натуры» и «модели»), изображенных на рис. 16-2, надо требовать, чтобы треугольники сил, показанных на схемах  $a$  и  $b$ , были геометрически подобными.

Чтобы обеспечить подобие указанных треугольников сил, необходимо:

а) кинематическое подобие двух рассматриваемых систем, так как именно это условие обеспечит равенство углов, образованных силами  $G$  и  $I$  на рис. 16-2,  $a$  и  $b$ ; напомним, что требуя кинематического подобия, мы тем самым требуем и геометрического подобия;

б) соблюдение равенства

$$\frac{I_m}{G_m} = \frac{I_n}{G_n}, \quad (16-17)$$

или, что то же,

$$\frac{I_n}{I_m} = \frac{G_m}{G_n} = a_F, \quad (16-18)$$

где  $a_F$  — масштаб сил.

Как видно, масштаб сил в данном случае равен отношению сил инерции, вычисленных для модели и для природы.

Согласно (16-14),

$$[I] = [\rho] L^3 \frac{[u]}{t} = [\rho] L^2 \frac{L}{t} [u] = [\rho] L^2 [u^2], \quad (16-19)$$



где  $L$  и  $t$  — символы длины и времени.<sup>1</sup>

Поэтому масштаб сил  $a_F$ , обеспечивающий динамическое подобие, в данном случае будет<sup>2</sup>

$$a_F = \frac{I_M}{I_N} = \frac{\rho_M l_M^2 u_M^2}{\rho_N l_N^2 u_N^2}, \quad (16-20)$$

где  $l_N$  и  $l_M$  — какие-либо сходственные линейные размеры природы и модели.

Размерность силы тяжести можно представить в виде

$$[G] = [\gamma] L^3 = [\rho] [g] L^3; \quad (16-21)$$

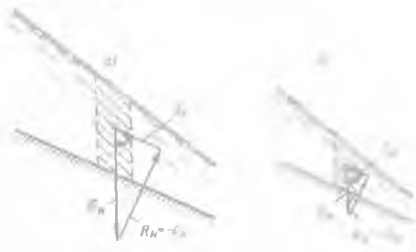


Рис 16-2. Схема сил, действующих на элементарный объем жидкости: а — природа, б — модель

следовательно,

$$\frac{G_M}{G_N} = \frac{\rho_M \theta_M l_M^3}{\rho_N \theta_N l_N^3}. \quad (16-22)$$

Учитывая соотношения (16-20) и (16-22), можем написать, согласно (16-18),

$$\frac{\rho_M l_M^2 u_M^2}{\rho_N l_N^2 u_N^2} = \frac{\rho_M \theta_M l_M^3}{\rho_N \theta_N l_N^3}. \quad (16-23)$$

Как видно, для достижения динамического подобия, когда на жидкость действует только сила  $G$  (а также сила инерции  $I$ ), необходимо требовать, помимо соблюдения кинематического подобия, еще и соблюдения равенства (16-23), которое можно переписать в виде

$$\frac{u_M^2}{u_N^2} = \frac{\theta_M l_M}{\theta_N l_N}. \quad (16-24)$$

Отсюда вместо (16-23) получаем

$$\frac{u_M^2}{\theta_M l_M} = \frac{u_N^2}{\theta_N l_N}. \quad (16-25)$$

<sup>1</sup> Квадратные скобки в соотношении (16-19) и других указывают, что нас интересует здесь не числовое значение, а размерность соответствующих величин.

<sup>2</sup> Для двух динамически подобных систем (природы и модели) справедливость перехода от соотношения (16-19) к соотношению (16-20), где вместо символов, выражающих размерность отдельных величин, поставлены сами величины, может быть строго обоснована (это обоснование здесь не приводим).

где  $u$  — скорость в данной точке;  $l$  — какой-либо линейный размер;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Следует подчеркнуть, что величина

$$\frac{u^2}{gl} = Fr \text{ (обозначение)} \quad (16-26)$$

является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам тяжести. Эту величину принято называть числом Фруда.

Таким образом, когда на жидкость действуют только силы тяжести, динамическое подобие будет иметь место, если существуют геометрическое и кинематическое подобия и если число Фруда, вычисленное для любой точки модели, оказывается равным числу Фруда, вычисленному для сходственной точки натуре,

$$[Fr]_M = [Fr]_n \quad (16-27)$$

Обратим внимание на то, что одно условие (16-27) говорит только (при наличии кинематического подобия) о подобии треугольников сил для любой пары сходственных точек. Для достижения же динамического подобия необходимо иметь еще равенство масштабов сил  $a_F$  для всех пар сходственных точек натуре и модели. Это последнее условие обеспечивается наличием геометрического подобия.

Действительно, соотношение (16-23) выражает величину  $a_F$ . Умножая это соотношение на величину  $\rho_n l_n^2$  и деля на величину  $\rho_M l_M^2$ , получаем

$$a_F \frac{\rho_n l_n^2}{\rho_M l_M^2} = \frac{u_n^2}{u_M^2} = \frac{g_n l_n}{g_M l_M}$$

Рассматривая далее только случаи, когда  $\rho_M = \rho_n$  и  $g_M = g_n$ , полученное соотношение можем переписать в виде

$$a_F \frac{1}{a_l} = \frac{u_n^2}{u_M^2} = a_v$$

откуда видно, что  $a_F = a_l^3$ . Для геометрически подобных систем  $a_l = \text{const}$  (по всему объему); следовательно, и величины  $a_F$  также должны быть одинаковыми для всех сходственных точек модели и натуре.

2°. Случай, когда на жидкость действуют только силы трения (вязкости). Здесь для наблюдения динамического подобия выражение, определяющее масштаб сил, должно остаться прежним [см. равенство (16-20)].

Считая, что силы трения подчиняются зависимости Ньютона (4-22), можем написать

$$[T] = [\eta] L^2 \frac{[u]}{L} = [\nu] [\rho] L [u], \quad (16-28)$$

откуда получаем

$$\frac{T_M}{T_n} = \frac{\nu_M \rho_M l_M \mu_M}{\nu_n \rho_n l_n \mu_n}, \quad (16-29)$$

где  $l_n$  и  $l_M$  — какие-либо сходственные линейные размеры натуре и модели.

Приравнявая (16-29) соотношению (16-20), получаем

$$a_F = \frac{\rho_M l_M^2 \mu_M^2}{\rho_n l_n^2 \mu_n^2} = \frac{\nu_M \rho_M l_M \mu_M}{\nu_n \rho_n l_n \mu_n}. \quad (16-30)$$

Как видно, для достижения динамического подобия в случае, когда на жидкость действуют сила  $T$  и сила инерции  $I$ , необходимо требовать, помимо

кинематического подобия, соблюдения равенства (16-30). Это последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{l_M u_M}{l_N u_N} = \frac{v_M}{v_N}, \quad (16-31)$$

или в виде

$$\frac{u_M l_M}{v_M} = \frac{u_N l_N}{v_N}, \quad (16-32)$$

где  $u$  — скорость в данной точке;  $l$  — какой-либо линейный размер, например диаметр трубы  $D$  или гидравлический радиус  $R$  и т. п.;  $v$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости [см. зависимость (3-128)].

Следует подчеркнуть, что величина

$$\frac{ul}{\nu} = \text{Re} \text{ (обозначение)} \quad (16-33)$$

является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам трения. С этой величиной мы сталкивались ранее и называли ее числом Рейнольдса (§ 3-23).

Таким образом, когда на жидкость действуют только силы трения, динамическое подобие будет иметь место, если существует геометрическое и кинематическое подобие и если число Рейнольдса, вычисленное для любой точки модели, оказывается равным числу Рейнольдса, вычисленному для соответственной точки натуре:

$$(\text{Re})_M = (\text{Re})_N. \quad (16-34)$$

3°. Критерии подобия. Предположим, что жидкость сжимаема, в связи с чем на нее действуют силы упругости; будем считать, что каких-либо других сил, действующих на жидкость, нет.

Рассуждая, как и выше, можно показать, что динамическое подобие для модели и натуре получится в том случае, если при наличии кинематического подобия так называемые числа Коши в сходственных точках модели и натуре будут одинаковыми.

Как видно, для достижения динамического подобия между моделью и натурой каждая система сил, действующих на жидкость, требует равенства в сходственных точках модели и натуре некоторого своего числа (числа Фруда, числа Рейнольдса и т. д.).

Эти безразмерные числа (Фруда Рейнольдса, Коши и т. д.), равенство которых в сходственных точках модели и натуре указывает на наличие динамического подобия между моделью и натурой, называются критериями подобия.

4°. Критерии подобия, выраженные через среднюю скорость  $v$ . Будем рассматривать плавно изменяющееся движение, когда живые сечения можно считать плоскими. Будем далее полагать, что для сходственных живых сечений модели и натуре характер распределения скоростей и одинаков.

При этом для любой пары сходственных точек, отмеченных на сходственных живых сечениях модели и натуре, можем написать

$$\frac{u_M}{v_M} = \frac{u_N}{v_N} = \beta \text{ (обозначение)}, \quad (16-35)$$

где  $u_M$  и  $u_N$  — местные скорости для упомянутых сходственных точек;  $v_M$  и  $v_N$  — средние скорости для упомянутых живых сечений.

Из уравнения (16-35) получаем

$$u_M = \beta v_M; \quad u_p = \beta v_p \quad (16-36)$$

Подставляя эти соотношения в (16-25) и (16-32) и сокращая величину  $\beta^2$  и  $\beta$  получаем вместо (16-26) и (16-33) следующие выражения для чисел Фруда и Рейнольдса:

$$\boxed{Fr = \frac{v^2}{gl}} \quad (16-37)$$

$$\boxed{Re = \frac{vl}{\nu}} \quad (16-38)$$

Как видно, пользуясь для оценки подобия вместо выражений (16-26) и (16-33) выражениями (16-37) и (16-38), необходимо требовать соблюдения дополнительного условия: одинакового характера распределения скоростей и для модели и натуре в сходственных живых сечениях (в данный момент времени)<sup>1</sup>.

Необходимо подчеркнуть, что в литературе встречается, что число Фруда представляют выражениями, отличающимися от формулы (16-37). Иногда числом Фруда называют обратную величину по отношению (16-37), т. е.

$$Fr' = \frac{1}{Fr} = \frac{gl}{v^2}, \quad (16-37')$$

а также

$$Fr_0 = \sqrt{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \quad (16-37'')$$

в частности,

$$Fr_0 = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{c}{c} \quad (16-37''')$$

где  $h$  — глубина рассматриваемого безнапорного потока и  $c = \sqrt{gh}$  — скорость движения лба волны перемещения, возникающей на поверхности безнапорного потока (см. § 9-15).

В некоторых случаях, рассматривая безнапорное движение, вместо числа Фруда пользуются так называемым параметром кинетичности потока  $PK$ , который представляет собой отношение удвоенной кинетической энергии к средней (в данном живом сечении) глубине  $h$  безнапорного потока:

$$PK = 2 \frac{\alpha v^2 / (2g)}{h} \approx \frac{v^2}{gh} = Fr_h,$$

где  $Fr_h$  — число Фруда (16-37), выраженное через характерный размер  $l = h$ .

Необходимо учитывать, что параметр кинетичности  $PK$  может быть представлен также в виде:

$$PK = \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{\omega^3}{B^3},$$

где  $\omega$  — площадь живого сечения и  $B$  — ширина живого сечения поверху. Из последнего соотношения видно, что для критической глубины потока  $PK = 1.0$  [см. формулу (7-54)].

<sup>1</sup> Заметим полутно, что масштаб для средней скорости  $v$  равен, разумеется, масштабу для местных скоростей  $u$ , т. е.  $a_u = a_v$ .

5°. Общий случай, когда на жидкость одновременно действует несколько разных систем сил. В этом случае для получения динамического подобия между моделью и натурой надо требовать одновременного соблюдения равенства соответствующих критериев подобия в сходственных живых сечениях.

Если, например, при постановке гидравлических опытов необходимо учитывать как силы тяжести, так и силы трения, то для достижения динамического подобия между моделью и натурой [см условие (16-7)] следует, помимо кинематического и геометрического подобий, одновременно выдержать еще два условия:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & (Fr)_m = (Fr)_n; \\ \text{(II)} \quad & (Re)_m = (Re)_n \end{aligned} \quad (16-39)$$

причем эти условия должны относиться ко всем сходственным живым сечениям модели и природы. По течению жидкости величины  $Fr$  и  $Re$  для динамически подобных систем, разумеется, могут изменяться

#### § 16-4. ОСНОВНЫЕ УКАЗАНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Положим, что мы приняли некоторый определенный масштаб длин:

$$a_l = l_m : l_n \quad (16-40)$$

Будем считать, что на жидкость действуют две системы сил, входящих в уравнение (16-16): силы тяжести и силы трения.

Как было отмечено, для достижения динамического подобия необходимо, помимо кинематического подобия, одновременно выдержать два требования (16-39). Каждое из этих требований приводит нас к следующему:

1-е требование. Здесь необходимо соблюсти равенство (16-27) или, что то же, равенство

$$\frac{v_m^2}{gl_m} = \frac{v_n^2}{gl_n} \quad (16-41)$$

Заметим, что ускорение силы тяжести  $g$  в случае модели и природы одинаково:  $g_m = g_n = g$ .

Ниже пользуемся критериями подобия, выраженными через среднюю скорость  $v$ , которые получаем из (16-41):

$$\frac{v_m}{v_n} = \sqrt{\frac{l_m}{l_n}} = (a_l)^{1/2} \quad (16-42)$$

Такому условию для сходственных живых сечений должны удовлетворять скорости в натуре и на модели, если соблюдено равенство чисел Фруда [см. соотношения (I), (16-39)].

Расходы  $Q_m$  и  $Q_n$  должны здесь удовлетворять условию

$$\frac{Q_m}{Q_n} = \frac{v_m \omega_m}{v_n \omega_n} = \sqrt{a_l a_f^3} = (a_l)^{5/2} \quad (16-43)$$

Масштаб времени получаем следующим образом:

$$t_m = \frac{l_m}{v_m}, \quad t_n = \frac{l_n}{v_n} \quad (16-44)$$

для  $v_m$  и  $v_n$ , имеем

$$\frac{v_M}{v_N} = \frac{l_M}{l_N} \frac{t_N}{t_M} \quad (16-45)$$

откуда

$$a_i = \frac{t_M}{t_N} = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \cdot a_1 = \sqrt{a_1} \quad (16-46)$$

2-е требование. Здесь необходимо соблюсти равенство (16-34) или, что то же, равенство

$$\frac{v_M l_M}{v_N} = \frac{v_N l_N}{v_M} \quad (16-47)$$

Считая

$$v_M = v_N = v, \quad (16-48)$$

т. е. предполагая, что в лаборатории используется та же жидкость, что и в натуре (вода), из (16-47) получаем

$$\frac{v_M}{v_N} = \frac{l_N}{l_M} = \frac{1}{a_1} \quad (16-49)$$

Такому условию должны удовлетворять скорости  $v_M$  и  $v_N$ , если соблюдено равенство чисел Рейнольдса.

Расходы  $Q_M$  и  $Q_N$  должны удовлетворять в этом случае следующему условию:

$$\frac{Q_N}{Q_M} = \frac{v_M}{v_N} \frac{\omega_M}{\omega_N} = \frac{1}{a_1} a_1^2 = a_1. \quad (16-50)$$

Именно при условиях (16-49) и (16-50) будем иметь равенство (16-39, II). В результате приведенных рассуждений можно составить табл. 16-1 (в предположении, что  $v_M = v_N$ ).

Из рассмотрения приведенной табл. 16-1 видно, что условия (16-39, I) и (16-39, II) несовместимы. Поэтому, если гидравлическое явление протекает под действием двух или нескольких систем сил, и в лаборатории принимается та же жидкость, что и в натуре ( $v_M = v_N$ ), то динамического подобия достигнуть невозможно, так как один критерий подобия требует при переходе от природы к модели изменения, например, скорости в  $a_1^{0.5}$  раз, другой же критерий подобия — в  $a_1^{-1}$  раз и т. п.

В данном случае динамического подобия можно было бы достигнуть, применяя для модели иную жидкость (с другим коэффициентом  $\nu$ ). Однако практически такой путь затруднителен в связи с тем, что для существующих в природе жидкостей, которые можно было бы использовать в лаборатории, отношение  $v_M : v_N$  относительно мало отличается от единицы.

Учитывая сказанное, моделирование приходится осуществлять в общем случае только с некоторым приближением.

Как было отмечено выше, часто силы одного рода [из числа входящих в соотношение (16-13)] в определенных условиях преобладают над силами другого рода. В связи с этим в ряде случаев оказывается возможным исходить только из одного критерия подобия, отвечающего главным действующим силам. При этом другими критериями, отвечающими второстепенным силам, пренебрегают.

В случае моделирования безапорных турбулентных потоков, отвечающих квадратичной области сопротивления (мы далее ограничимся рассмотрением только этого случая движения), исходят из числа

Фруда, считая, что такого рода движение обуславливается только силами тяжести. Эта область параметров потока, когда движение жидкости не зависит от числа Рейнольдса, называется автомодельной в отношении чисел Рейнольдса (см. на рис. 4-24 область, расположенную правее кривой АВ). При моделировании гидравлических явлений, отвечающих указанной автомодельной области, поступают следующим образом: а) создают русло модели, геометрически подобное действительному (натурному) руслу (включая геометрическое подобие выступов шероховатости); б) задают в граничном

Таблица 16-1

Требуемое для достижения динамического подобия отношение характеристики модели (м) к характеристике природы (н)

Характеристики потока	Масштабы характеристик при условии	
	$(Fr)_м = (Fr)_н$	$(Re)_м = (Re)_н$
Скорость	$a_l^{0,5}$	$a_l^{-1}$
Расход	$a_l^{2,5}$	$a_l$
Время	$a_l^{0,5}$	$a_l^2$
Сила		
Работа		

сечении модельного русла движение жидкости, кинематически подобное (для начального момента времени) движению ее в натуре; в) дополнительно в граничном сечении модельного русла создают условия, при которых получается равенство для модели и для природы чисел Фруда. В результате указанных операций в пределах модельного русла автоматически образуется поток, динамически подобный натурному потоку, что и требуется для проведения соответствующих исследований.

Выполняя такого рода эксперименты, необходимо еще учитывать следующие обстоятельства:

1 Можно показать, что бурное безнапорное движение получается, если число Фруда  $Fr_h = \frac{v^2}{gh}$  (где  $h$  — средняя глубина потока) больше единицы:

$$Fr_h > 1.0; \quad (16-51)$$

при  $Fr_h < 1.0$  получаем спокойное движение. Имея для модели числа Фруда те же, что и для природы, мы, естественно, для модели автоматически будем получать движение такое же, как и для природы (бурное или спокойное). Ранее было показано, что, например, при спокойном движении условия движения в нижележащих (по течению) частях потока, в связи с этим, моделируя спокойное движение, в качестве «исходного» граничного сечения следует принимать сечение, намеченное в конце моделируемого участка русла. В случае бурного движения имеем обратную картину: «исходным» граничным поперечным сечением русла следует считать сечение, намеченное в начале моделируемого участка.

2. Если в натуре имеем турбулентное движение жидкости, то, естественно, в условиях модели должны иметь такое же движение; поэтому при моделировании турбулентного движения возникает следующее дополнительное условие моделирования:

$$(Re)_м > (Re)_{крит}, \quad (16-52)$$

где  $(Re)_{крит}$  — критическое число для модели. Если в натуре имеем турбулентное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления (т. е. области, которую мы здесь и рассматриваем), то вместе (16-52) необходимо требовать условия:

$$(Re)_м \geq (Re''_{пред})_м, \quad (16-53)$$

где о числе  $Re_{\text{прел}}^n$  — см. § 4-11. Если условие (16-53) при моделировании потока по Фруду не соблюдается, то приходится отказываться от геометрического подобия и выполнять модель русла в искаженном масштабе (величину  $a_1$  для плановых размеров модели принимать отличной от величины  $a_1$  для вертикальных ее размеров). Выполняя такое (так называемое аффинное) преобразование действительного русла, вертикальные размеры модели увеличивают сравнительно с горизонтальными, что позволяет увеличить скорости движения жидкости и в результате получить на модели турбулентное движение, отвечающее квадратичной области сопротивления. При этом вопросы моделирования потока в значительной мере усложняются.

3. Вопросы моделирования потока также значительно усложняются, когда приходится учитывать: размыв русла и движение наносов, аэрацию потока, образование вакуума в потоке.

В заключение отметим, что моделирование напорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления (когда имеем большие числа Рейнольдса), а также моделирование инапорного и безнапорного движений при малых числах Рейнольдса (когда имеем ламинарный режим; см. на рис. 4-24 зону, соответствующую прямой 1—2, которая также называется автоматомодельной зоной) осуществляют, руководствуясь особыми правилами, которых касаться не будем; они в значительной мере аналогичны правилам, поясненным выше (применительно к случаю безнапорного движения, отвечающего квадратичной области сопротивления). Особенно большие трудности возникают при моделировании потоков в зонах, лежащих между двумя упомянутыми выше автоматомодельными областями (см. на рис. 4-24 область, лежащую между прямой 1—2 и кривой АВ).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 16-1. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. — М.: Высшая школа, 1963.
- 16-2 Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. — М.: Высшая школа, 1967.
- 16-3. Зегжда А. П. Теория подобия и методика расчета гидротехнических моделей. — Л. — М.: Госстройиздат, 1938.
- 16-4. Избян С. В. Основы гидравлики. — М.: Госстройиздат, 1952
- 16-5 Кирпичев М. В. Теория подобия. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.
- 16-6. Леви И. И. Моделирование гидравлических явлений. — Л.: Энергия, 1967.
- 16-7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа — М.: Наука, 1970
- 16-8. Пятряшев А. Н. Гидромеханика — М.: Военно-морское изд-во, 1953.

#### ГЛАВА СЕМНАДЦАТАЯ

### ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ УСТАНОВИВШЕЕСЯ БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВОЙ ВОДЫ

#### § 17-1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ

Водопроницаемый грунт состоит из отдельных частиц (песчинок), между которыми имеются поры. Суммарный объем пор составляет часто 35—40% от объема всего грунта. Явление движения воды в этих порах называется фильтрацией. Вода в поры может попасть различным образом. Например, выпадая на поверхность земли в виде дождя, она затем просачивается в грунт. На некоторой глубине такая вода может быть задержана слоем