

## 2. ТЕОРИЯ ТРАНСПОРТА НАНОСОВ

### 2.1. Гидравлическая крупность наносов

В числе первых задач теории транспорта наносов следует считать установление гидродинамических параметров твердых частиц, определяющих их механическое взаимодействие с движущейся жидкостью, и вместе с тем их поведение в потоках. Основными гидродинамическими параметрами наносов являются следующие: 1) гидравлическая крупность частицы — скорость ее равномерного падения в спокойной воде ( $u$  м/с); 2) начальная скорость влечения (сдвига) частицы, находящейся на дне потока ( $v_{\text{нач}}$  м/с); 3) средняя скорость влечения частицы по дну ( $v_{\text{ср}}$  м/с), причем предполагается возможность ее отрыва от дна, сальтации и кратковременных остановок. Ниже будет детально разобран вопрос о гидравлической крупности наносов, остальные параметры рассматриваются в следующем разделе.

Гидравлическая крупность наносов исследовалась как экспериментально, так и теоретически многими исследователями, начиная с 1850 г. (работы Д. Стокса).

Стокс исследовал падение в неподвижной жидкости мелких частиц, движущихся с весьма малой относительной скоростью. Сопротивление, оказываемое частицам жидкостью, в этом случае определяется физической вязкостью жидкости, выражаемой посредством динамического  $\mu$  или кинематического  $\nu$  коэффициента вязкости. При равномерном падении частицы в жидкости активная сила, действующая на частицу — сила тяжести  $F_{\text{т}}$ , уравновешивается силой сопротивления  $F_{\text{с. лам}}$ , т. е.

$$F_{\text{т}} - F_{\text{с. лам}} = 0. \quad (2.1)$$

Стокс показал, что гидродинамическое сопротивление  $F_{\text{с. лам}}$  при падении в жидкости шарообразной частицы может быть представлено следующим образом:

$$F_{\text{с. лам}} = 3\pi\mu u d, \quad (2.2)$$

где  $\pi = 3,14$ ;  $d$  — диаметр шарообразной частицы;  $u$  — скорость ее равномерного падения в неподвижной жидкости.

Сила тяжести, действующая на шарообразную частицу в жидкости, выражается в виде

$$F_{\text{т}} = \frac{1}{6} \pi d^3 g (\rho_{\text{с}} - \rho), \quad (2.3)$$

где  $\rho_{\text{с}}$  — плотность частицы и  $\rho$  — плотность жидкости.

Приравнивая обе эти силы, получаем

$$3\pi\mu u d = \frac{1}{6} \pi d^3 g (\rho_s - \rho). \quad (2.4)$$

Отсюда

$$u = k_{\text{лам}} \frac{gd^2}{4\nu} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho}; \quad (2.5)$$

здесь  $k_{\text{лам}}$  — числовой безразмерный коэффициент, зависящий от формы частиц; для шарообразных частиц  $k_{\text{лам}} = 0,22$ .

Весьма значительные исследования гидравлической крупности частиц за рубежом были выполнены в 1900—1920 гг. Алленом, Креем и др. Наиболее обстоятельные работы в СССР проведены А. П. Зегждой [44], Б. В. Архангельским [6], Г. Н. Лапшиным и В. Н. Гончаровым [25].

Приведем краткие сведения об объеме и основных результатах упомянутых экспериментов. А. П. Зегжда [44] исследовал осаждение частиц диаметром от 0,55 до 4,5 мм в жидкостях с различными коэффициентами вязкости и рекомендовал расчетные формулы для определения скорости падения частиц в зависимости от их диаметра для различных режимов осаждения. Кроме того, в выводах Зегжды указывалось, что несовпадение результатов определения гидравлической крупности частиц, имеющих одинаковые средние диаметры, объясняется различием формы частиц.

В 1935 г. Б. В. Архангельский [6] опубликовал результаты детальных исследований по точности шкал гидравлической крупности частиц диаметром от 0,005 до 1 мм. Он выяснил влияние температуры воды на скорость осаждения в ней твердых частиц и получил новое значение коэффициента  $k_{\text{лам}} = 0,16$  в теоретической формуле Стокса. Архангельский дал новую, сравнительно хорошо экспериментально обоснованную шкалу гидравлической крупности частиц для указанного выше диапазона их размеров.

В том же году В. А. Груничева в ГГИ провела исследования точности гидравлических методов гранулометрического анализа наносов при использовании шкал различных авторов. Они подтвердили, что для мелких частиц наиболее хорошие результаты дает шкала, основанная на формуле Стокса, а для более крупных частиц размерами  $0,05 < d \leq 1,0$  мм — шкала Архангельского. В соответствии с этими исследованиями Г. И. Шамовым и Е. С. Семеновой была построена новая шкала Гидрометслужбы СССР, опубликованная впервые в инструкции для речных гидрологических станций (1938 г.), а затем в двух изданиях наставления гидрологическим станциям и постам (1944 и 1957 гг.). В настоящее время эта шкала заменяется более совершенной (см. ниже).

В 1938 г. В. Н. Гончаров [25] обобщил имеющийся экспериментальный материал и предложил расчетные формулы,

связывающие скорость осаждения частицы с ее диаметром. Формулы получили широкое распространение как в Советском Союзе, так и за рубежом.

Существенным вкладом Гончарова в теорию осаждения твердых частиц в жидкости явилось то, что он весьма детально рассмотрел вопрос о режимах осаждения. Анализируя зависимости гидравлической крупности наносов от их геометрического размера, он выявил, что характер сопротивления, оказываемого жидкостью частице, зависит от размера и скорости относительного движения частицы  $u$ . По данным Гончарова, для естественных наносов размером  $d \leq 0,15$  мм характерен ламинарный режим осаждения, при котором сопротивление зависит от вязкости жидкости и пропорционально первой степени скорости падения частицы. Иногда ламинарный режим осаждения частиц именуют областью Стокса. Для частиц размером  $0,15 < d < 1,5$  мм характерен переходный режим, когда сопротивление зависит от вязкости уже в меньшей мере, а влияние скорости на сопротивление больше, чем при ламинарном режиме осаждения. Крупным частицам наносов ( $d \geq 1,5$  мм), по Гончарову, свойствен турбулентный режим осаждения, при котором сопротивление, оказываемое жидкостью, не зависит от ее вязкости, а определяется квадратом скорости падения частицы (квадратичная область).

В соответствии с приведенными соображениями о режимах осаждения естественных наносов Гончаров предлагает три следующие формулы гидравлической крупности, выведенные им на основании опытных данных Б. В. Архангельского и Г. Н. Лапшина:

для ламинарного режима

$$u = 40,6 \frac{\rho_s - \rho}{\rho \mu} d^2, \quad (2.6)$$

для переходного

$$u = \left[ 67,7d + 0,52 \left( \frac{T}{26} - 1 \right) \right] \frac{\rho_s - \rho}{\rho}, \quad (2.7)$$

для турбулентного

$$u = 33,1 \sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho} d}. \quad (2.8)$$

В этих формулах использованы те размерности величин, которые были приняты Гончаровым, т. е.  $d$  выражено в сантиметрах,  $u$  — в см/с;  $T$  — температура воды в градусах Цельсия;  $\mu$  — физическая вязкость воды в г/(см·с).

В 1954 г. появилась работа нескольких американских исследователей (И. Ф. Шульц, Р. Х. Вильде, М. Л. Альбертсон [222]), изучавших влияние формы частиц на их гидравлическую крупность. В этой работе предложен ряд численных критериев для выражения формы частиц. Установлено, что степень влияния

формы частиц на их гидравлическую крупность зависит от числа Рейнольдса. В работе получена графическая связь между гидравлической крупностью частиц, их формой и числом Рейнольдса. Исследована в основном область переходного режима осаждения частиц.

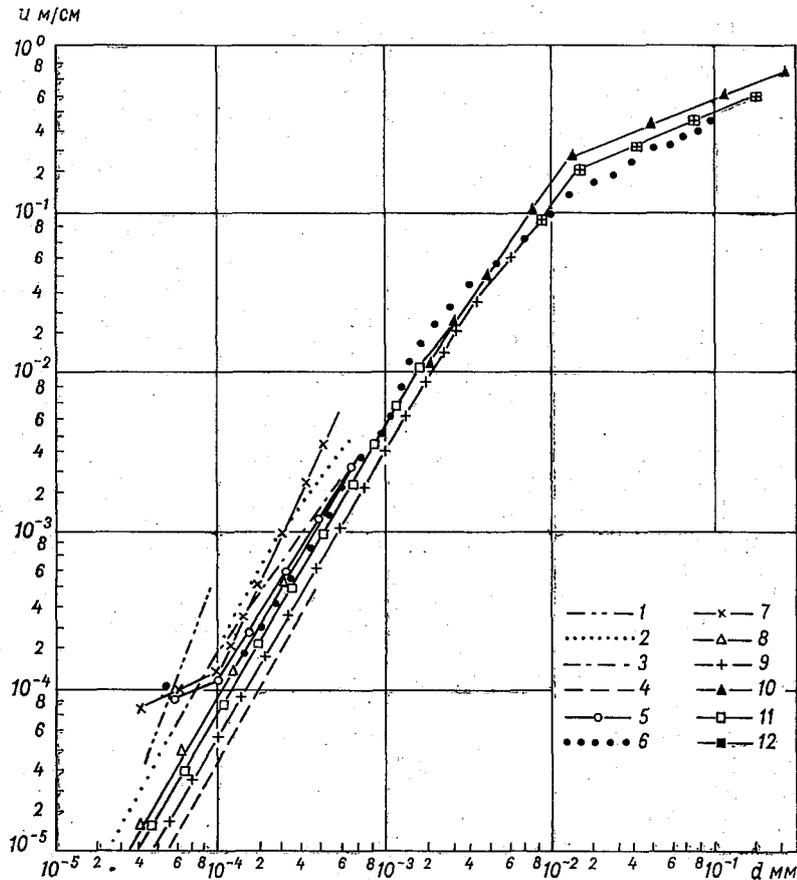


Рис. 3. Зависимость гидравлической крупности частиц от их диаметра.

По шкале: 1 — Вильямса, 2 — Хазена, 3 — Сабанина, 4 — Краузе, 5 — Босуэла, 6 — Ричардса, 7 — Аппиани, 8 — Стокса, 9 — Архангельского, 10 — Гончарова, 11 — ГМС, 12 — Караушева.

На рис. 3 приводятся графики зависимости  $u = f(d)$ , построенные в 1955 г. по данным экспериментальных исследований. Как видно, отдельные кривые дают различия в значениях  $u$ , достигающие 250%. Анализ и систематизация этих данных позволили А. В. Караушеву [56] выявить наиболее надежные шкалы, которыми оказались шкалы Б. В. Архангельского

Проверкой установлено, что для частиц любой формы, кроме плоских ( $\Theta < 0,6$ ), может применяться следующая зависимость:

$$d = \frac{a + b + c}{3}. \quad (2.14)$$

Помимо критерия  $\Theta$ , Романовский вводит весьма важный новый критерий формы частицы  $\Psi_P$ , учитывающий ориентацию частицы при ее движении относительно жидкости. В соответствии с этим критерий  $\Psi_P$  именуется коэффициентом ориентации. Он вычисляется по формуле

$$\Psi_P = \frac{d^2}{lh}, \quad (2.15)$$

где  $l$  и  $h$  — наибольшие взаимно перпендикулярные размеры миделевого сечения частицы. За миделевое сечение частицы принимается ее проекция на плоскость, перпендикулярную направлению течения (если частица неподвижна), или на плоскость, перпендикулярную направлению относительного движения частицы в жидкости. Коэффициент  $\Theta$  можно рассматривать как частный случай коэффициента  $\Psi_P$  для условий совпадения миделевого сечения с наибольшим сечением частицы. Критерий  $\Psi_P$  был использован Романовским при изучении поведения крупных наносов на дне потока.

Романовский исследовал критерии формы частиц  $\Theta$  и  $\Psi_P$  на большом материале и показал их преимущество по сравнению с известными в литературе критериями. Поэтому в настоящей книге величины  $\Theta$  и  $\Psi_P$  используются как основные критерии формы частиц естественных наносов. По-видимому, практически возможно выделение преобладающей формы частиц транспортируемых или донных наносов или же их отдельных фракций. Такая возможность позволит включать параметры  $\Theta$  и  $\Psi_P$  в расчетные формулы транспорта наносов наряду с используемыми в настоящее время величинами  $d$  и  $u$ .

Теперь остановимся на выполненном Романовским исследовании гидравлической крупности частиц при турбулентном режиме осаждения. Теоретическое решение дано им в наиболее общем виде на основе уравнения неравномерного падения твердого тела в жидкости. Рассматривается частица, начинающая свое движение от поверхности жидкости, когда при  $y = 0$  ее скорость  $u_y = 0$ ; на расстоянии  $y$  от поверхности частица достигает скорости  $u_y$ . Падение частицы, имеющей объем  $V$ , происходит под действием силы тяжести  $F_T$

$$F_T = Vg(\rho_s - \rho). \quad (2.16)$$

Соппротивление при турбулентном режиме падения выражается зависимостью

$$F_c = c\omega\rho \frac{u_y^2}{2}, \quad (2.17)$$

где  $\omega$  — площадь проекции частицы на плоскость, перпендикулярную ее движению;  $c$  — коэффициент сопротивления, зависящий от формы частицы. Численные значения коэффициента  $c$  устанавливаются экспериментально для частиц различной формы. Скорость падения частицы  $u_y$  выражает в данном случае скорость обтекания частицы жидкостью.

Уравнение изменения кинетической энергии частицы записывается в виде

$$\frac{1}{2} m_* du_y^2 = (F_T - F_c) dy; \quad (2.18)$$

здесь  $m_*$  — масса твердой частицы и присоединенного к ней объема жидкости.

Вопрос о присоединении жидких масс при относительном движении твердых тел в жидкости рассматривается в гидродинамике. На основе решений гидродинамики можно записать следующее приближенное выражение для суммарной массы частицы и присоединенного объема жидкости:

$$m_* = \rho_S V + \rho k_0 V = \rho_S V k_*, \quad (2.19)$$

где  $k_0$  — отношение присоединенного объема жидкости к объему твердого тела;  $k_*$  — отношение суммарной массы  $m_*$  к массе частицы. В первом приближении для условий свободного падения частицы в жидкости можно принять  $k_0 \approx 0,5$ . В этом случае при  $\rho_S = 2,65 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> множитель  $k_* \approx 1,2$ .

При учете выражений  $F_T$ ,  $F_c$  и  $m_*$  уравнение движения частицы записывается в виде

$$\frac{k_* V \rho_S u_y^2 d}{2} = \left[ Vg(\rho_S - \rho) - c\omega\rho \frac{u_y^2}{2} \right] dy. \quad (2.20)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$u_y = \sqrt{\frac{2gV(\rho_S - \rho)}{c\omega\rho} \left( 1 - e^{-\frac{c\omega\rho y}{k_* \rho_S V}} \right)}. \quad (2.21)$$

При  $y \rightarrow \infty$ , т. е. при достаточно большом разгоне, уравнение (2.21) примет вид

$$u = \sqrt{\frac{2gV(\rho_S - \rho)}{c\omega\rho}}, \quad (2.22)$$

где  $u$  — скорость равномерного падения частицы, или ее гидравлическая крупность при турбулентном режиме осаждения.

Принимая во внимание, что часть членов уравнения (2.22) является функцией формы частицы, т. е.  $V/\omega = df(\Theta)$  и  $c = f(\Theta)$ ,

уравнение гидравлической крупности получим в следующем виде:

$$u = k_{\text{турб}} \sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho} gd}, \quad (2.23)$$

где  $k_{\text{турб}}$  — коэффициент, зависящий от формы частиц.

В таком виде формула известна в литературе о гидравлической крупности, но зависимость содержащегося в ней параметра  $k_{\text{турб}}$  от формы частиц ранее не была установлена.

Теперь общее уравнение турбулентного падения частицы в жидкости может быть записано в виде

$$u_y = u \sqrt{1 - e^{-\frac{2\gamma y}{k_{\text{турб}}^2 \rho_s d}}}. \quad (2.24)$$

По этой формуле можно определить путь разгона частиц и затем вычислить время разгона, необходимое для достижения постоянной скорости  $u$ . Например, для частиц, имеющих размеры 0,002 и 0,00005 м, соответственно получаем время разгона 0,1 и 0,0014 с, путь разгона 0,011 и 0,0000014 м.

Анализ экспериментального материала полностью подтвердил теоретическую формулу гидравлической крупности для турбулентного режима осаждения (2.23). При этом выяснена зависимость коэффициента  $k_{\text{турб}}$  от параметра формы частицы

$$k_{\text{турб}} = 2,4\theta - 0,7. \quad (2.25)$$

Таким образом, формула для турбулентного режима осаждения частиц получает следующий вид:

$$u = (2,4\theta - 0,7) \sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho} gd}. \quad (2.26)$$

При отсутствии данных о форме частиц для естественных наносов предлагается использовать зависимость в виде

$$u = 1,22 \sqrt{\frac{\rho_s - \rho}{\rho} gd}. \quad (2.27)$$

Размерность величин, входящих в зависимость (2.27), — в системе СИ, т. е.  $d$  в метрах, а  $u$  в м/с,  $\rho_s$  в кг/м<sup>3</sup> и т. д.

Шкала гидравлической крупности в турбулентной области осаждения основана на результатах многократного измерения скорости осаждения 95 частиц, отличавшихся размерами и формой.

Задача о гидравлической крупности наносов при переходном режиме решалась Романовским чисто экспериментальным путем.

Верхняя часть шкалы гидравлической крупности в области переходного режима (для частиц с диаметром от 0,78 до 2,0 мм) составлена на основании результатов многократного измерения скорости осаждения и обмера 39 частиц. Другая часть шкалы,

относящаяся к переходному режиму осаждения, составлена на основании определений гидравлической крупности и размеров 12 групп частиц (330 штук).

Для переходного режима осаждения частиц получена эмпирическая зависимость

$$u = (1,6\theta - 0,16) (68d - 0,003) \frac{\rho_s - \rho}{\rho} k_T, \quad (2.28)$$

где  $k_T$  — поправочный температурный коэффициент, значения которого приведены в табл. 5.

Таблица 5

Температурные поправочные коэффициенты  $k_T$  к гидравлической крупности  $u$ , измеренной при температуре  $+15^\circ\text{C}$ , для частиц диаметром  $d$

$d$ мм	$t^\circ\text{C}$				
	0-2	3-7	8-12	13-17	18-22
2,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,50	0,92	0,94	0,97	1,00	1,04
1,00	0,83	0,87	0,93	1,00	1,07
0,50	0,74	0,81	0,90	1,00	1,11
0,20	0,69	0,77	0,88	1,00	1,13
0,10	0,67	0,76	0,87	1,00	1,14
$\leq 0,05$	0,66	0,75	0,87	1,00	1,14

В качестве теоретической гипотезы при экспериментальном изучении гидравлической крупности в ламинарной области было использовано решение Стокса. Романовский измерил скорость падения девяти групп частиц, состоявших в общей сложности из 290 частиц естественных наносов, которые были предварительно изучены и промерены под микроскопом. Размеры этих частиц заключались в пределах 0,004—0,05 мм.

Результаты опытов подтвердили, что гидравлическая крупность частиц при ламинарном режиме осаждения соответствует теоретической зависимости Стокса

$$u = k_{\text{лам}} \frac{gd^2}{4\nu} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho}, \quad (2.29)$$

где  $k_{\text{лам}}$  — постоянный коэффициент. Установлено, что  $k_{\text{лам}}$  не зависит от формы частиц и численное его значение совпадает с величиной, полученной Стоксом для шарообразных тел, т. е.  $k_{\text{лам}} = 0,22$ .

Таким образом, можно считать доказанным, что для ламинарной области величина гидравлической крупности наносов не зависит от формы частиц.

Теперь постараемся выяснить, почему Б. В. Архангельский получил в формуле Стокса для ламинарной области иное значение коэффициента, а именно  $k_{\text{лам}} = 0,16$ .

Ранее считали, что расхождение теоретического (по Стоксу) и экспериментального коэффициентов вызвано отличием формы исследуемых частиц от формы шара. Анализируя методику экспериментов Архангельского, удалось установить причину указанного расхождения. Она заключается в том, что при вычислении среднего диаметра частиц Архангельский использовал результаты обмера частиц только в одной плоскости — плоскости предметного стекла микроскопа — и в результате получил завышенные значения  $d$ , что и привело к преувеличению коэффициента  $k_{\text{лам}}$  в формуле гидравлической крупности.

Произведенная оценка всех основных погрешностей измерений, допущенных при проведении экспериментальных исследований, дала значение средней квадратической ошибки связи  $u = f(d, \Theta)$ , равное примерно 8%.

Выполненные эксперименты позволили уточнить границы между ламинарным и переходным, а также между переходным и турбулентным режимами осаждения естественных наносов, характеризующихся  $\rho_s = 2,65 \text{ г/см}^3$ . В табл. 6 помещены числа Рейнольдса и значения  $d$  для частиц двух предельных форм (шарообразных и пластинчатых), соответствующие указанным границам. Заметим, что эти данные существенно уточняют выводы Гончарова (1954 г.) о критических числах  $Re$ , определяющих переход от одного режима к другому, и о соответствующих значениях  $d_{\text{ср}}$ , отвечающих тем же границам. Качественно новым результатом является выявление влияния формы частицы на режим ее осаждения.

Таблица 6

Граничные значения чисел Рейнольдса и диаметров частиц естественных наносов, соответствующие различным режимам осаждения при  $t = +15^\circ\text{C}$ ,  $\rho_s = 2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Режим осаждения	Re для частицы	$d$ мм	
		шарообразная форма частиц	пластинчатая форма частиц
Ламинарный	$< 0,1$		$< 0,05$
Переходный	$0,1 - 500$	$0,05 - 1,8$	$0,05 - 3,0$
Турбулентный	$> 500$	$> 1,8$	$> 3,0$

Характер осаждения частиц при разных режимах различен. По наблюдениям Романовского, при ламинарном режиме частица падает в жидкости практически по прямой линии и в процессе падения не меняет своей первоначальной ориентации относительно направления движения. При турбулентном режиме падающая частица всегда ориентируется так, что ее максимальная площадь сечения оказывается перпендикулярной среднему направлению относительного движения частицы в жидкости. Тра-

ектория частицы при этом имеет извилистый, иногда винтообразный характер.

На основании полученных данных, характеризующих все три режима осаждения частиц (турбулентный, переходный и лами-

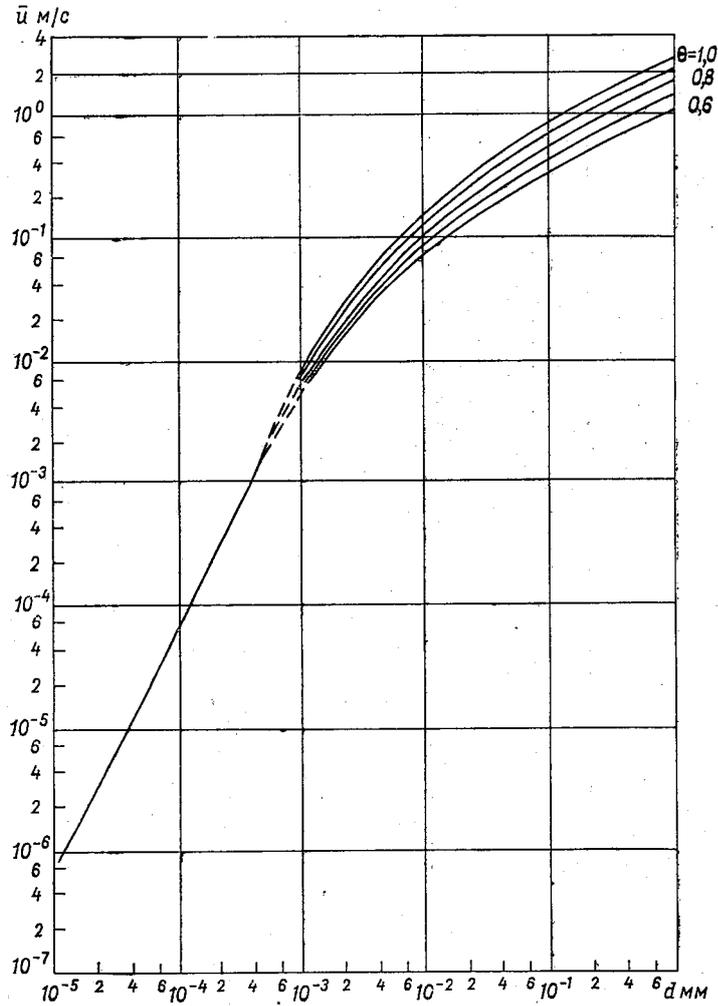


Рис. 4. Зависимость гидравлической крупности частиц  $\bar{u}$  от их формы  $\Theta$  и диаметра  $d$ .

нарный), Романовский построил шкалу гидравлической крупности наносов в воде при температуре  $15^\circ\text{C}$ . Шкала представлена в виде графиков (рис. 4) и в форме таблицы (табл. 7) и дается как функция двух переменных: среднего линейного размера

Таблица 7

Шкала гидравлической крупности частиц  $u=f(d_{cp}\theta)$  в м/с  
 (по В. В. Романовскому).  
 $\rho_s=2,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$

Режим осаднения	$d_{cp}$ мм	$\theta$				
		1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
Турбулентный	100,0	2,16	1,86	1,55	1,24	0,94
	80,0	1,94	1,66	1,39	1,12	0,84
	50,0	1,53	1,32	1,10	0,88	0,67
	30,0	1,18	1,02	0,85	0,68	0,52
	20,0	0,96	0,83	0,69	0,56	0,42
	15,0	0,84	0,72	0,60	0,48	0,37
	10,0	0,68	0,59	0,49	0,39	0,30
	7,00	0,57	0,49	0,41	0,33	0,25
	5,00	0,48	0,42	0,35	0,28	0,21
	4,00	0,43	0,37	0,31	0,25	0,19
	3,00	0,38	0,32	0,27	0,22	
	2,50	0,34	0,29	0,25		
	2,20	0,32	0,28			
	2,00	0,31				
Переходный	3,00					0,16
	2,50				0,20	0,15
	2,20			0,23	0,18	0,14
	2,00		0,26	0,21	0,17	0,13
	1,80	0,27	0,23	0,20	0,16	0,13
	1,50	0,24	0,20	0,17	0,14	0,11
	1,20	0,19	0,17	0,14	0,12	0,10
	1,00	0,16	0,14	0,12	0,10	0,09
	0,80	0,13	0,11	0,10	0,08	0,07
	0,50	0,08	0,07	0,06	0,05	0,05
	0,30	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03
	0,20	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	0,10	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	Ламинарный	0,050			0,001 95	
0,040				0,001 25		
0,030				0,000 70		
0,020				0,000 31		
0,010				0,000 078		
0,005				0,000 020		
0,004				0,000 012		
0,002				0,000 003 1		
0,001				0,000 000 78		

частицы (среднего диаметра)  $d_{\text{ср}}$  и параметра ее формы  $\Theta$ . Плотность зерен естественных наносов принята равной  $2,65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Для перехода к гидравлической крупности частиц в воде, имеющей температуру, отличающуюся от  $15^\circ\text{C}$ , рекомендуется использовать переходные коэффициенты  $k_t$ , помещенные в табл. 5.

## 2.2. Теория взвешивания наносов

Еще в середине прошлого столетия предпринимались попытки объяснить процесс взвешивания тяжелых твердых частиц в потоках. Так, И. Дюпюи полагал, что взвешивание происходит под влиянием так называемой подъемной силы, возникающей на поверхности твердой частицы за счет различия скоростей течения над верхней и под нижней поверхностями взвешиваемой частицы. Это различие скоростей Дюпюи связывал с особенностью распределения скорости по вертикали. Подобное воззрение вскоре было признано несостоятельным, поскольку оно не учитывало основных особенностей структуры взвешиваемого турбулентного потока. В 1895 г. Кеннеди, по-видимому, впервые дал правильное объяснение причины взвешивания наносов, указав на действующие вертикальной составляющей скорости. Связав вертикальную компоненту со средней продольной скоростью, Кеннеди вывел формулу для некоторого параметра руслового потока, названного им неразмывающей скоростью. Эта формула не содержит никаких характеристик крупности наносов, поэтому она не может быть признана удовлетворительной. Тем не менее в течение ряда лет она использовалась в Индии, России и других странах при проектировании ирригационных каналов. Эмпирический коэффициент этой формулы подбирался для соответствующих местных условий и в какой-то мере учитывал крупность частиц.

Весьма обстоятельное натурное исследование взвешивания наносов было выполнено в 1910 г. В. Г. Глушковым [23]. Выяснив зависимость взвешивания тяжелых частиц от вертикальной составляющей пульсационной скорости турбулентного потока, он указал, в частности, на то, что наибольшая крупность взвешиваемых в потоке зерен наносов определяется максимальной вертикальной составляющей пульсационной скорости. На основании этого Глушков предложил способ определения вертикальной составляющей турбулентной пульсации в речном потоке. Сущность способа заключалась в том, что из взятых в реке проб выделялись частицы, имеющие наибольшую гидравлическую крупность, и считалось, что максимальное значение вертикальной компоненты пульсационной скорости равно этой гидравлической крупности. Метод может дать удовлетворительный результат в том случае, если в составе донных наносов имеются частицы

соответствующего размера. Кроме того, необходима достаточная продолжительность отбора пробы из потока, чтобы обеспечить улавливание экстремальных по размеру взвешенных частиц. Способ Глушкова не получил распространения ввиду многих затруднений, возникающих при его практической реализации.

Попытка теоретического решения вопроса о взвешивании наносов в потоках в 1919 г. была предпринята Н. Е. Жуковским, который увязывал процесс взвешивания с восходящими течениями однородных вихревых образований, имеющих горизонтальную ось и заполняющих весь поток в строгом порядке. Модель, предложенная Жуковским, интересна в теоретическом отношении, но она мало напоминает условия реального турбулентного потока, водные массы которого участвуют в формировании вихрей различного размера и разной ориентации. Эти вихри располагаются в потоке беспорядочно; они возникают, развиваются и отмирают, а вместо них формируются новые. Водные массы одновременно могут участвовать в движении вихрей разного порядка. Турбулентная пульсация, в действительности носящая характер случайного явления, по схеме Жуковского, должна была бы подчиняться строго периодическому закону.

Накопление сведений о структуре турбулентных потоков и построение более или менее реалистической модели турбулентности явились импульсом для разработки достаточно обоснованной теории взвешивания наносов.

Широко используемая в настоящее время как у нас, так и за рубежом так называемая диффузионная, или полуэмпирическая, теория взвешивания наносов является составной частью общей полуэмпирической теории турбулентности, которую выше, в разделе о речной гидравлике, мы назвали динамической теорией турбулентности.

Исходные положения диффузионной теории турбулентности были разработаны Дж. Тейлором и В. Шмидтом в 1915—1925 гг. применительно к условиям свободной атмосферы. Теория основана на идее о турбулентном переносе в потоке количеств движения, тепла, взвешенных и растворимых веществ и о тесной взаимной связи параметров, определяющих перенос указанных характеристик. Основным параметр теории, определяющий перенос количеств движения, именуется коэффициентом турбулентного обмена, или коэффициентом виртуальной вязкости; он обозначается через  $A$ . Коэффициент турбулентной теплопроводности записывается в виде  $sA$ , где  $s$  — удельная теплоемкость жидкости. Коэффициент турбулентной диффузии, определяющий турбулентный перенос взвешенных и растворенных веществ в потоке, выражается как частное  $A/\rho$ , где  $\rho$  — плотность жидкости.

По теории Тейлора—Шмидта секундный перенос растворенного в жидкости вещества через единицу выделенной в потоке площадки с нормалью  $y$  выражается зависимостью

$$(q_s)_y = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}, \quad (2.30)$$

где  $s$  — концентрация вещества в жидкости. Положительным направлением переноса считается перенос в сторону положительного направления оси  $y$ .

Перенос количества движения описывается следующим приближенным равенством:

$$(q_r)_{xy} = -A \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (2.31)$$

Величина  $(q_r)_{xy}$  имеет размерность касательного напряжения и связана с ним соотношением

$$\tau_{xy} = - (q_r)_{xy}. \quad (2.32)$$

Напишем выражение турбулентного переноса взвешенных тяжелых частиц, имеющих гидравлическую крупность  $u$ . Рассмотрим секундный перенос взвешенного вещества через единицу выделенной в потоке контрольной площадки. Пусть эта площадка будет горизонтальной. Концентрация  $s$  тяжелых частиц в потоке при установившемся режиме взвешивания возрастает сверху вниз. Поэтому если нормальную к площадке ось  $y$  направить вниз, то производная  $s$  по  $y$  будет положительной. За счет турбулентного перемешивания через площадку снизу вверх, т. е. в направлении, противоположном положительному направлению оси  $y$ , будет осуществляться перенос взвеси, согласно зависимости (2.30). Под влиянием силы тяжести взвешенные в воде частицы будут совершать относительное движение сверху вниз со скоростью  $u$ . Расход взвеси за счет такого добавочного движения через единицу площадки будет  $us$ , где  $s$  — концентрация взвеси (т. е. мутность) на уровне площадки. Результирующий перенос взвешенных частиц через площадку определится равенством

$$(q_s)_y = -\frac{A}{\rho} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + us. \quad (2.33)$$

При использовании статистического метода изучения пульсирующих скоростей и мутности единичные расходы переноса (секундные объемы или массы) выражают через моменты корреляции пульсационных отклонений этих величин. Перенос количеств движения выражается формулами вида:

$$\left. \begin{aligned} (q_r)_{xy} &= -\tau_{xy} = \overline{\rho v_x v_y'} \\ (q_r)_{xz} &= -\tau_{xz} = \overline{\rho v_x v_z'} \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

и т. д.

Перенос взвеси определяется соответственно равенством

$$(q_s)_y = \overline{v's'} + us. \quad (2.35)$$

Идеи Тейлора—Шмидта были использованы В. М. Маккавеевым для разработки общей теории турбулентности русловых потоков. Эту теорию Маккавеев назвал теорией турбулентного перемешивания. Начало ее разработки относится к 1930—1933 гг., но более полное обоснование она получила в последующие годы в трудах Маккавеева и его школы.

В теории турбулентного перемешивания рассматриваются пространственные нестационарные модели переноса количества движения, примесей (растворенных и взвешенных веществ), тепла и даются общие дифференциальные уравнения движения, диффузии и теплопроводности. Значительное внимание в теории уделяется граничным условиям и структуре коэффициентов турбулентного переноса (турбулентной вязкости, турбулентной диффузии и теплопроводности). Особо следует отметить, что в теории детально рассматривается влияние русловой шероховатости на поток и ее параметры учитываются как в формулах коэффициентов переноса, так и в выражениях, определяющих граничные условия. Теория турбулентного перемешивания получила широкое применение при изучении движения водных масс в речных потоках, каналах и водохранилищах, при исследовании транспорта наносов и формирования русла. Эта теория лежит в основе многих практических методов расчета.

Вывод общего уравнения турбулентной диффузии впервые был осуществлен В. М. Маккавеевым в 1930 г. В то же время им были выведены общие динамические уравнения турбулентного потока. Публикация этих разработок осуществлена годом позже в записках ГГИ (1931 г.). Дальнейшее совершенствование основ теории турбулентного перемешивания было выполнено в 1932 г. и изложено в докладе, сделанном автором теории на IV Гидрологической конференции Балтийских стран (1933 г.). Существенное усовершенствование исходных положений теории относится к 1941 г., когда Маккавеевым был дан новый вариант вывода общих дифференциальных уравнений турбулентного движения, диффузии и теплопроводности. В послевоенные годы теоретические исследования Маккавеева [99, 102] были посвящены более строгому обоснованию исходных уравнений и граничных условий.

Общее дифференциальное уравнение турбулентной диффузии имеет вид

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial s}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial s}{\partial z} \right) \right] - u \frac{\partial s}{\partial y}, \quad (2.36)$$

где

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} + v_y \frac{\partial s}{\partial y} + v_z \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (2.37)$$

Координатные оси декартовой системы предполагаются расположенными следующим образом: горизонтальная ось  $x$  направлена в сторону осредненного течения,  $y$  — вертикальная ось — сверху вниз,  $z$  — горизонтальная ось — поперек потока. Относя уравнение к потокам, имеющим малые продольные уклоны, предполагают ось  $x$  на свободной поверхности и пренебрегают проекцией гидравлической крупности частиц  $u$  на эту ось. Компоненту  $u$  по оси  $y$  принимают приближенно равной самой величине  $u$ .

Вывод уравнения турбулентной диффузии довольно просто осуществляется для равномерного установившегося потока, характеризующегося отсутствием поперечных составляющих осредненной скорости, т. е.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = v_y = v_z = 0. \quad (2.38)$$

Рассмотрим этот вывод. Выделим в потоке параллелепипед объемом

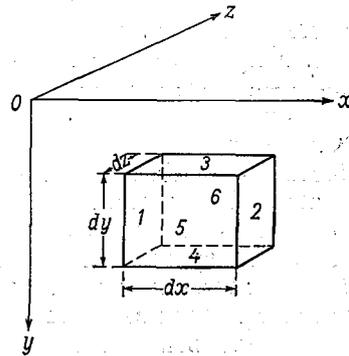


Рис. 5. Схема к выводу уравнения турбулентной диффузии.

$dV = dx dy dz$  (рис. 5). Его стороны параллельны соответствующим координатным осям, расположенным так, как указывалось выше. Пронумеруем грани выделенного параллелепипеда следующим образом: 1 — грань, обращенная против течения; 2 — грань в сторону течения; 3 — грань, обращенная к поверхности потока; 4 — грань, обращенная ко дну; 5 — совпадает с плоскостью координат  $xOy$ ; 6 — параллельна этой плоскости и находится на расстоянии  $dz$  от нее. В порядке дальнейшего упрощения вывода примем, что концентрация взвеси  $s$  в направлении оси  $z$  не меняется. Соответственно перенос взвешенного вещества через боковые грани 5 и 6 будет равен нулю. Индексами 1, 2, 3 и т. д. будем обозначать величины, относящиеся к имеющим те же номера граням.

Составим баланс массы взвешенного вещества для выделенного параллелепипеда. Пусть величины  $q_{s1}$ ,  $q_{s2}$ ,  $q_{s3}$  и т. д. выражают единичные расходы вещества через грани 1, 2, 3 и т. д., т. е. перенос массы вещества в секунду через единицу площади, соответствующей грани параллелепипеда. Перенос вещества через всю площадь грани за время  $\delta t$  соответственно выразится:  $q_{s1} dz dy \delta t$  — для грани 1,  $q_{s2} dz dy \delta t$  — для грани 2 и т. д.

Запишем выражения единичных расходов массы вещества через все грани:

$$\left. \begin{aligned} q_{s1} &= -\frac{A_1}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 + v_x \left[ s - \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 \frac{dx}{2} \right], \\ q_{s2} &= -\frac{A_2}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 + v_x \left[ s - \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 \frac{dx}{2} \right], \\ q_{s3} &= -\frac{A_3}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 + us_3, \\ q_{s4} &= -\frac{A_4}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_4 + us_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Здесь  $s$  — концентрация в центре параллелепипеда. Первые члены правой части первых четырех равенств выражают турбулентный перенос вещества через грани параллелепипеда. Вторые члены правой части первого и второго из этих равенств выражают перенос вещества осредненным течением, имеющим скорость  $v_x$ , соответственно через грани 1 и 2. Вторые члены правой части третьего и четвертого равенств выражают перенос взвешенных частиц под влиянием силы тяжести, осуществляющийся со средней скоростью  $u$ , направленной по нормали вниз (в направлении оси  $y$ ). Компоненты переноса  $q_{s3}$  и  $q_{s4}$  в соответствии с принятым выше предположением равны нулю.

В результате переноса вещества через все грани выделенного объема  $dV$  средняя концентрация вещества  $s$  в нем за время  $\delta t$  изменится на величину  $\frac{\partial s}{\partial t} \delta t$ , а изменение общего содержания вещества в объеме выразится следующим образом:

$$dV \frac{\partial s}{\partial t} \delta t = (q_{s1} - q_{s2}) dz dy \delta t + (q_{s3} - q_{s4}) dx dz \delta t. \quad (2.40)$$

Делим это уравнение на  $\delta t$  и подставляем сюда значения единичных расходов по выражениям (2.39). В результате этих операций после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} dV \frac{\partial s}{\partial t} &= \left[ -\frac{A_1}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 + \frac{A_2}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 \right] dy dz - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 \right] v_x dx dy dz + \\ &\quad + \left[ -\frac{A_3}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 + \frac{A_4}{\rho} \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_4 \right] dx dz + u (s_3 - s_4) dx dz. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Исходя из того, что коэффициент  $A$ , значения  $s$  и производные этой величины в потоке в области расположения контрольного объема  $dV$  изменяются по координатам монотонно, мы

вправе выразить содержащиеся в уравнении разности следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_2 \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 - A_1 \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx, \\ A_4 \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_4 - A_3 \left( \frac{\partial s}{\partial y} \right)_3 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial s}{\partial y} \right) dy, \\ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)_2 \right] &= \frac{\partial s}{\partial x}, \\ s_4 - s_3 &= \frac{\partial s}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Третье из этих равенств выражает среднюю величину как полусумму двух крайних. Подставляем формулы (2.42) в уравнение (2.41). Учитывая, что  $dV = dx dy dz$ , и деля на эту величину все выражение, получаем после преобразований следующую запись уравнения турбулентной диффузии:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial s}{\partial y} \right) \right] - u \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (2.43)$$

Аналогичным образом можно вывести уравнение турбулентной диффузии и в более общем виде (2.36) — (2.37). Разумеется, такой вывод будет более громоздким.

Общее уравнение турбулентной диффузии используется для решения задач о распределении взвешенных в потоке частиц как по вертикали, так и по другим координатным направлениям. При выполнении решений используются граничные условия у дна потока, описывающие процесс взмучивания и взаимообмена наносами придонного слоя потока и русла. Подобные решения используются и при расчете русловых деформаций.

Выполняя решение практических задач, вносят определенные упрощения в общее уравнение (2.36), отбрасывая отдельные его члены как величины, малые по сравнению с другими, или же принимая  $A = \text{const}$  для всей исследуемой области потока. В последнем случае уравнение приводится к виду

$$\frac{ds}{dt} = \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial s}{\partial y}. \quad (2.44)$$

Уравнение турбулентной диффузии широко применяется также и при расчете распространения в потоках растворенных веществ, например загрязнений. В этом случае гидравлическая крупность принимается равной нулю. Если допустимо считать  $A = \text{const}$ , то уравнение записывается в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{A}{\rho} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (2.45)$$

Остановимся кратко на задании граничных условий при расчете распределения мутности в речном потоке (более подробно этот вопрос рассматривается ниже). В. М. Маккавеев [95, 97 и т. д.] и А. В. Караушев [54, 64 и т. д.] разработали модель турбулентного переноса взвешенных частиц в придонном слое потока. Согласно этой модели, в придонном граничном слое потока выделяются два значения мутности. Первое — это средняя донная мутность  $S_H$ , характеризующая среднее насыщение потока у дна как в области восходящих, так и нисходящих вихревых течений на достаточно большой поверхности русла, позволяющей говорить об осреднении. Эта поверхность, однако, не настолько велика, чтобы осреднение сглаживало неоднородность донного слоя потока, обусловленную неравномерностью осредненного течения, изменениями параметров потока по его длине и ширине. Вторым значением мутности является так называемая мутность взмыва  $S_{взм}$ , представляющая собой среднюю мутность восходящих вихревых токов при их отрыве от дна. Предполагается, что осреднение осуществляется в восходящих вихрях, находящихся на той же площади, по которой осреднена донная мутность  $S_H$ . Всегда имеется в виду, что при грядовой форме русла площадь осреднения  $S_H$  и  $S_{взм}$  должна включать основные элементы гряд. В теории устанавливается расчетная формула для  $S_{взм}$  исходя из условий предельно возможной нагрузки восходящих пульсационных токов тяжелыми частицами. Мутность взмыва предполагается пропорциональной квадрату донной скорости потока и обратно пропорциональной его глубине  $H$ , т. е.

$$S_{взм} = k \frac{v_H^2}{H}. \quad (2.46)$$

Далее в теории устанавливается зависимость между величинами  $S_H$  и  $S_{взм}$ . Зависимость носит довольно сложный характер и включает такие характеристики потока и наносов, как пульсационная скорость и статистическая кривая ее распределения, значения гидравлической крупности частиц по фракциям взвешиваемых наносов, процентное содержание каждой из взвешиваемых фракций.

Теория позволяет получить расчетные формулы профиля мутности, транспортирующей способности потока и т. д. Выведенная Маккавеевым в 1933 г. формула профиля мутности при использовании условия  $A = \text{const}$  применяется во многих случаях еще и теперь. Эта формула записывается в виде

$$s = S_H e^{-\frac{2mC}{g} \cdot \frac{u}{v_{ср}} \left(1 - \frac{y}{H}\right)}. \quad (2.47)$$

Здесь  $s$  — концентрация наносов, имеющих гидравлическую крупность  $u$  на глубине  $y$  от поверхности;  $S_H$  — концентрация наносов у дна;  $H$  — глубина вертикали;  $v_{ср}$  — средняя на верти-

кали скорость течения;  $C$  — коэффициент Шези;  $m$  — параметр в формуле Базена ( $m \approx 24$ );  $g$  — ускорение свободного падения. В работах А. В. Караушева показано, что  $m$  является величиной переменной и для нее дана эмпирическая формула, показывающая зависимость  $m$  от коэффициента Шези  $C$ .

В довоенные годы Маккавеевым было впервые получено теоретическим путем уравнение транспортирующей способности потока, которое затем подверглось усовершенствованию в работах других исследователей.

Диффузионная теория взвешивания наносов получила широкое распространение в гидрологии и в динамической метеорологии как у нас, так и за рубежом. В Советском Союзе применительно к гидрологическим объектам указанная теория развивалась, помимо В. М. Маккавеева, М. А. Великановым [20], а в последующие годы И. И. Леви [85], А. В. Караушевым [53, 54, 58, 64]), Г. С. Башкировым [8], И. Ф. Карасевым [52] и др. Из зарубежных работ имеют известность исследования М. О'Брайена [212], В. Ванони [230] и др.

О'Брайен рассмотрел только задачу о стационарном распределении мутности в равномерном потоке. Исходя из одномерного уравнения турбулентной диффузии, он получил следующую символическую запись профиля мутности:

$$s = s_{He} - \rho u \int_a^y \frac{dy}{A(y)} \quad (2.48)$$

Коэффициент турбулентного обмена  $A$  рассматривается как функция координаты  $y$ , которая в данном случае направлена от дна к поверхности потока. Интегрирование выполняется для отрезка вертикали от  $a$ , т. е. от точки, весьма близко расположенной ко дну, до текущей координаты  $y$ . Великанов [19] применил зависимость (2.48) для вывода расчетной формулы профиля мутности. При этом он использовал выражение  $A(y)$ , получаемое из логарифмического профиля скорости и дающее на поверхности  $A = 0$ . Соответственно и для мутности в точке  $y$  поверхности он нашел  $s = 0$ , что представляется физически невозможным и не подтверждается натурными данными, которые не обнаруживают резкого снижения мутности в непосредственной близости от поверхности потока.

В литературе известен ряд вариантов диффузионной теории взвешивания и транспортирования наносов. Однако, по-видимому, наиболее совершенным является вариант, разработанный В. М. Маккавеевым и его школой. Немаловажным обстоятельством при этом является то, что в указанном варианте теории дается уравнение турбулентного переноса взвешенных частиц в весьма общем виде: для трехмерного пространства и нестационарного случая. Кроме того, уравнение диффузии взвешенных

частиц тесно увязано с динамическими уравнениями турбулентного потока. Эти уравнения замыкаются с помощью эмпирически обоснованной формулы коэффициента турбулентного обмена. Попутно заметим, что такой способ замыкания систем уравнений, безусловно, предпочтительнее способов, используемых нередко в так называемых строгих теориях и заключающихся в применении тех или иных постулатов, не всегда достаточно обоснованных и экспериментально не подтвержденных.

Диффузионная теория имеет и ряд недостатков, к которым относится в первую очередь неучет влияния взвешенных частиц на структуру турбулентного потока, а также взаимного влияния частиц, отсутствие учета инерции твердых частиц в пульсирующем потоке и т. д. Эти недостатки особенно существенны при распространении теории на сравнительно крупные наносы. Одним из недостатков является и то обстоятельство, что универсальность формул коэффициента турбулентного обмена не доказана, а подтверждена лишь данными не очень точных, хотя и многочисленных натуральных и лабораторных исследований. Несмотря на эти недостатки, диффузионную теорию следует считать весьма существенным достижением теоретической гидрологии и полезным орудием для решения практических задач. Безусловно, следует признать актуальной и дальнейшую разработку теории взвешивания и движения наносов, направленную на усовершенствование существующих концепций и создание новых направлений.

В послевоенные годы М. А. Великанов [19] предпринял попытку разработать новую теорию движения взвешенных наносов. Главной целью, которую он преследовал, был учет работы, затрачиваемой потоком на взвешивание тяжелых частиц. При этом предполагалось учесть также и воздействие взвешенных наносов на структуру потока и взаимное влияние частиц, находящихся во взвешенном состоянии. Свою теорию Великанов назвал гравитационной, подчеркнув таким названием основную концепцию о работе потока против гравитационной силы, воздействующей на взвешенные в нем частицы.

По поводу теории Великанова в свое время было высказано много критических замечаний (А. Н. Колмогоровым, И. И. Леви, В. М. Маккавеевым, А. Д. Грешаевым и др.), с которыми нельзя не согласиться. Весьма существенным замечанием было, например, высказывание Колмогорова о том, что работа, затрачиваемая потоком на поддержание тяжелых частиц во взвешенном состоянии, черпается из пульсационной энергии, а не непосредственно из энергии осредненного движения, как было принято в гравитационной теории. Замысел Великанова об учете обратного воздействия транспортируемых наносов на поток остался в его теории нереализованным, и для взвесенесущего потока он использовал обычные гидравлические соотношения, полученные для чистой воды.

В настоящее время теория Великанова в динамике русловых потоков не используется, поэтому детально освещать ее не будем. Однако надо отметить полезный вклад Великанова в развитие представлений о кинематике взвешенных в потоке частиц.

При использовании принятых в настоящей книге обозначений и расположения координатных осей основная кинематическая зависимость Великанова записывается в виде

$$(q_s)_y = \overline{v's'} + us(1-s). \quad (2.49)$$

Здесь предполагается, что мутность  $s$  — величина безразмерная и выражена в относительных объемных единицах, т. е.  $s$  обозначает долю того объема, который занимают твердые частицы в общем объеме смеси воды с наносами. Формула (2.49) отличается от зависимости (2.35) содержанием множителя  $(1-s)$  при втором члене правой части. Величину  $(1-s)$  можно рассматривать как поправочный множитель к гидравлической крупности  $u$ , предусматривающий учет влияния насыщенности потока наносами на скорость осаждения в нем твердых частиц. На уменьшение гидравлической крупности частиц в мутной среде исследователи обращали внимание и раньше, справедливо отмечая при этом, что заметное уменьшение  $u$  наблюдается только в очень сильно насыщенных наносами потоках, приближающихся по своей концентрации к селевым потокам или к пульпе, представляющей собой искусственную смесь грунта с водой. Однако до Великанова теоретически этот вопрос, по-видимому, не рассматривался. Решение Великанова все же нельзя считать исчерпывающим, так как оно не учитывает всех факторов, влияющих на гидравлическую крупность в сильно насыщенных потоках.

Скорость равномерного осаждения частиц в воде, сильно насыщенной наносами, именуется скоростью (или гидравлической крупностью) стесненного осаждения; обозначим ее через  $u_{ст}$ . Согласно зависимости Великанова, можно написать

$$u_{ст} = u(1-s), \quad (2.50)$$

имея в виду, что  $s$  выражено в относительных объемных единицах.

Физический смысл взаимодействия частиц в насыщенном потоке Великанов объясняет существованием в нем токов, обтекающих осаждающиеся частицы. Эти токи носят компенсационный характер и полностью определяются условием неразрывности. Объем жидкости, вытесняемой частицей из того места, куда частица опускается, перемещается в обратном направлении, обтекая частицу и замещая освобожденное ею место, как это показано на рис. 6. Такие токи при большой насыщенности потока наносами взаимодействуют, влияют на осаждение соседних частиц и, согласно схеме Великанова, создают общее среднее

перемещение жидкости в направлении, противоположном направлению осаждения наносов. Средняя скорость этого вертикального движения выражается произведением  $su$ . Такой вывод представляется бесспорным. Тем не менее, как отмечалось выше, в насыщенных наносами водных массах действуют и другие факторы, влияющие на  $u$ . К ним относится изменение физической вязкости среды за счет насыщения мелкими частицами и образования коллоидных взвесей, а также возрастание средней плотности среды. Последний фактор учитывается довольно просто, поскольку формулы гидравлической крупности частиц для всех трех режимов осаждения содержат плотность среды как один из основных параметров. Очевидно, что плотность мутной среды (смеси воды с наносами)  $\rho_{см}$  определится равенством

$$\rho_{см} = \rho(1-s) + \rho_S s, \quad (2.51)$$

где  $\rho$  и  $\rho_S$  — соответственно плотность воды и твердых частиц наносов, а  $s$ , как и выше, выражает мутность в относительных объемных единицах.

Если исходить непосредственно из формул гидравлической крупности, то поправочные множители к гидравлической крупности частиц в жидкости, насыщенной наносами, определяются соотношениями плотностей мутной  $\rho_{см}$  и чистой воды  $\rho$ . Для турбулентного режима осаждения будем иметь

$$u_{см} = u \sqrt{\frac{\rho(\rho_S - \rho_{см})}{\rho_{см}(\rho_S - \rho)}}, \quad (2.52)$$

Рис. 6. Схема обтекания твердой частицы, падающей в жидкости с постоянной скоростью  $u$  м/с.

1 — твердые частицы, 2 — присоединенная масса жидкости, 3 — линия тока жидкости.

а для ламинарного и переходного режимов

$$u_{см} = u \frac{\rho(\rho_S - \rho_{см})}{\rho_{см}(\rho_S - \rho)}. \quad (2.53)$$

Здесь  $u_{см}$  — гидравлическая крупность частиц в смеси воды с наносами.

Формулы (2.52) и (2.53) учитывают только плотностной эффект, а изменение вязкости среды за счет присутствия мелких частиц не учитывают, так же как оно не учитывается и в формуле (2.50) для стесненного осаждения. Как видим, формулы (2.52) и (2.53) также не являются достаточно универсальными; они могут использоваться для приближенных вычислений в случае отсутствия в потоке большого количества мельчайших (глинистых) частиц, оказывающих влияние на вязкость жидкости.

Специальные теоретические и весьма тонкие экспериментальные исследования должны выяснить соотношение между вели-

чинами  $u_{ст}$  и  $u_{см}$ , которые, как видим, принципиально отличаются, но обе они учитывают, хотя и в разной мере, эффект изменения плотности среды за счет присутствия в ней более плотных и не слишком мелких взвешенных частиц.

Критика в адрес диффузионной теории взвешивания наносов, как и вообще диффузионной (полуэмпирической) теории турбулентности, в последние годы исходила главным образом от ряда сторонников теории турбулентности и так называемой статистической школы А. Н. Колмогорова. В некоторых новых теоретических моделях взвесенесущего потока широко использована теория Колмогорова, поэтому считаем необходимым кратко остановиться на ней.

Теория локальноизотропной турбулентности разработана А. Н. Колмогоровым в 1941 г. [73]. В ее основе лежит развитое Л. Ричардсоном в 1926—1929 гг. представление о турбулентной структуре потока как о совокупности вихревых образований различных масштабов. По схеме Колмогорова, в турбулентном потоке за счет неустойчивости осредненного движения возникают вихревые образования наиболее крупного размера, для которых также характерна неустойчивость. При их распаде образуются вихри более мелкого масштаба, но и они в свою очередь порождают еще более мелкие турбулентные образования. Таким образом в потоке формируется спектр турбулентных образований — вихрей разного порядка. По всему каскаду этих вихрей передается энергия осредненного движения потока, которая гасится в вихрях самого мелкого масштаба, характеризующихся устойчивым ламинарным движением и внутренним трением, определяемым физической вязкостью жидкости. Здесь кинетическая энергия переходит в тепловую.

Существенное место в теории Колмогорова занимает представление о локальной изотропии турбулентности. Изотропной турбулентностью именуется такое состояние потока, при котором в каждой его точке взаимно равны все компоненты любой из статистических характеристик пульсирующего поля скоростей. Заметим попутно, что однородной турбулентностью называют случай, когда турбулентные характеристики не изменяются при перемещении в потоке точки, для которой эти характеристики получены. Понятия изотропии и однородности являются идеализацией модели турбулентного потока. К этой модели приближается, по-видимому, только атмосферная турбулентность на значительном удалении от земной или водной поверхности.

Согласно теоретической модели Колмогорова для вихревых турбулентных образований характерна тенденция к равномерному распределению энергии по степеням свободы, но этому выравниванию препятствуют анизотропные внешние силы. Величины последних уменьшаются с уменьшением масштаба вихря. Поэтому действием указанных сил на вихри самого малого масштаба можно пренебречь. Это приводит к выводу об изотропии

мелкомасштабных турбулентных движений. Для области локальной изотропии выводится формула, связывающая масштаб турбулентности, коэффициент турбулентной диффузии и скорость диссипации энергии турбулентности. В литературе упомянутую формулу называют «законом 4/3», поскольку масштаб турбулентности в эту формулу входит в степени 4/3. Закон 4/3 широко применяется при изучении атмосферной турбулентности (см., например, работу Н. З. Пинуса [121]); известно его использование в динамике моря. Применение указанной формулы для русловых потоков встречает много затруднений.

Теория Колмогорова была использована Г. И. Баренблаттом [7] при разработке теоретической модели переноса взвешенных наносов в турбулентном потоке. Баренблатт дает вывод достаточно общих уравнений турбулентного движения неоднородной (содержащей взвешенные частицы) жидкости. При этом он рассматривает лишь транспорт мелких частиц, потоки малой мутности и принимает еще ряд ограничений. Все эти ограничения обусловлены исключительной сложностью в гидродинамическом и математическом аспектах задачи о взвесенесущем потоке. Несмотря на принятые упрощающие предположения, Баренблатт получает весьма сложную систему уравнений. Три из этих уравнений определяют компоненты (по координатным осям) движения жидкости, и три — движения твердых частиц. Сложение уравнений по соответствующим координатам дает уравнения количества движения неоднородной жидкости, за основную характеристику которой принята плотность смеси  $\rho_{см}$ , определяемая равенством (2.51). Далее Баренблатт рассматривает баланс массы жидкости и твердых частиц и записывает систему уравнений, состоящую из уравнений количества движения неоднородной жидкости, уравнения неразрывности, уравнения баланса массы. Затем он принимает ряд упрощений и осредняет указанные уравнения. Добавочно рассматривается задача о балансе пульсационной энергии потока неоднородной жидкости; при этом опять принимается ряд упрощающих предположений. В процессе дальнейших преобразований уравнений вновь используются упрощающие предположения и принимаются новые постулаты, в частности о потоке пульсационной энергии, который вообще исследован весьма слабо. Наконец, уравнения приводятся к случаю одномерного стационарного взвесенесущего потока (стационарными принимаются течение и распределение мутности) и записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 \frac{dv_x}{dy} &= v_*^2 - cz, \\ q - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left( \Psi_2 \frac{db}{dy} \right) - \rho \Psi_1 \left( \frac{dv_x}{dy} \right)^2 &= 0, \\ as + \lambda \frac{ds}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Здесь  $v_*$  — константа, имеющая размерность скорости;  $q$  — диссипация пульсационной энергии на единицу объема неоднородной жидкости;  $b$  — пульсационная энергия в единице массы неоднородной жидкости;  $c$  — константа; величина  $a$  определяется равенством

$$\alpha = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}. \quad (2.55)$$

Через  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  и  $\lambda$  обозначены некоторые характеристики потока. Последняя из них вводится Баренблаттом для перехода от момента корреляции  $\overline{v'_z s'}$  к производной осредненной мутности в соответствии с известной схемой диффузионной теории, а именно он полагает

$$\overline{v'_z s'} = -\lambda \frac{ds}{dy}. \quad (2.56)$$

Как видим, отойти полностью от полуэмпирической теории Баренблатту не удается.

Для получения характерных величин  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  и  $\lambda$  Баренблатт использует гипотезу Колмогорова о связи между диссипацией пульсационной энергии  $q$ , ее запасом в единице объема  $b$  и параметрами потока. Используемые при этом соотношения построены на соображениях теории размерности, являются весьма условными по существу и содержат неопределенные коэффициенты. После преобразований Баренблатт получает новую замкнутую, с его точки зрения, систему уравнений для плоского стационарного взвесенесущего потока. В действительности же эту систему нельзя рассматривать как замкнутую, поскольку она включает неопределенные параметры и малоизученные трудноопределяемые величины, такие, как диссипация пульсационной энергии в единице объема смеси и т. д. Как видим, разработки Баренблатта имеют только теоретическое значение, для практических расчетов его уравнения не могут применяться. Интересным результатом является выражение, найденное им для величины  $b$ ; оно показывает, что пульсационная энергия единицы массы в потоке неоднородной жидкости меньше, чем в потоке однородной жидкости.

Для работы взвешивания в теории Баренблатта записывается выражение

$$\overline{g \rho_{cm} v_y} = a g \rho u s, \quad (2.57)$$

где, как и выше,  $u$  — гидравлическая крупность частиц;  $g$  — ускорение свободного падения; величина  $a$  определяется формулой (2.55).

Если работа взвешивания мала по сравнению с другими затратами энергии взвесенесущего потока, то, согласно схеме

Баренблатта, к такому потоку применима диффузионная теория. Это условие всегда выполняется для потоков, не очень насыщенных наносами, т. е. практически во всех случаях естественных речных потоков. Как видим, детальный анализ процесса взвешивания наносов, выполненный Баренблаттом, фактически подтверждает обоснованность широкого применения диффузионной теории в речной гидрологии.

Фундаментальными работами в области теории взвесенесущего турбулентного потока следует считать работы Ф. И. Франкля [162]. Он построил систему общих дифференциальных уравнений взвесенесущего потока, которая включает уравнения неразрывности, количества движения и энергии осредненного и пульсационного движения. Система этих уравнений оказалась незамкнутой, так как число неизвестных (39) превышает число уравнений (20 уравнений, из которых 10 — для жидкости и 10 — для твердых частиц). Используя ряд упрощающих предположений, Франкль дал способ замыкания приближенной системы уравнений. Он принял, что скоростное поле жидкости известно и не зависит от присутствия твердых частиц, поэтому можно рассматривать только уравнения для взвешенных частиц. В указанных уравнениях отбрасываются все компоненты турбулентных напряжений. Как видим, принимаются упрощающие предположения, аналогичные тем, которые используются при выводе зависимостей диффузионной теории. Все же решение Франкля представляется более полным, чем решение, даваемое в упомянутой теории. К сожалению, практическое использование даже упрощенных уравнений Франкля весьма затруднительно и требует большого количества исходных данных. Оно осуществимо для наиболее простого случая, но при этом теоретическая модель Франкля дает совпадение с моделью диффузионной теории.

Приближенные динамические уравнения Франкля для взвешенных в потоке твердых частиц имеют вид (при произвольном расположении системы координат в потоке):

$$\left. \begin{aligned} \rho_s \frac{dU_x}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{s} R_x + \rho_s X_s, \\ \rho_s \frac{dU_y}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{s} R_y + \rho_s Y_s, \\ \rho_s \frac{dU_z}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{s} R_z + \rho_s Z_s. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Здесь  $s$  — концентрация взвеси (мутность) в относительном объемном измерении;  $X_s, Y_s, Z_s$  — компоненты ускорения внешней массовой силы (силы тяжести), действующей на частицу;  $p$  — давление;  $R_x, R_y, R_z$  — компоненты силы взаимодействия частиц и жидкости;  $U_x, U_y, U_z$  — компоненты скорости движения твердых частиц в потоке; они складываются из соответствующих

компонентов скорости жидкости и относительного движения в ней частиц. Полные производные  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$  по времени выражаются зависимостями обычного вида, т. е.

$$\frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \quad (2.59)$$

и т. д.

К уравнениям (2.58) добавляется уравнение неразрывности для взвешенных частиц

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (sU_x)}{\partial x} + \frac{\partial (sU_y)}{\partial y} + \frac{\partial (sU_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.60)$$

и три зависимости для величин  $R_x$ ,  $R_y$  и  $R_z$ , которые замыкают систему. Приведем одну из них, а именно для компоненты по оси  $x$  (остальные записываются аналогичным образом)

$$R_x = -\frac{g\mu^2 s}{2r^2} (v_x s - v_x - u_{dx}). \quad (2.61)$$

Здесь  $\mu$  — вязкость жидкости;  $r$  — средний радиус взвешенной частицы;  $v_x$  — компонент скорости жидкости;  $u_{dx}$  — компонент условной скорости диффузии частицы — новый термин, введенный Франклем в теорию. Приближенно эта величина определяется по формуле

$$u_{dx} = -\varepsilon \frac{\partial (\ln s)}{\partial x}, \quad (2.62)$$

где  $\varepsilon$  — коэффициент турбулентной диффузии ( $\text{м}^2/\text{с}$ ). Компоненты  $u_{dy}$  и  $u_{dz}$ , содержащиеся в формулах для  $R_y$  и  $R_z$ , выражаются формулами, аналогичными (2.62).

В теории Франкля рассматривается движение в жидкости частиц малого размера, соответствующих области Стокса. Именно поэтому в формуле взаимодействия (2.61) фигурирует физическая вязкость жидкости.

Франкль указывает, что установленная им система общих уравнений движения взвешенных наносов, отвечающая условиям неравномерного и неустановившегося движения, является обобщением известных уравнений О. Рейнольдса для турбулентного течения. Подобно этим уравнениям, уравнения Франкля, как уже отмечалось выше, являются незамкнутыми. Франкль показывает, в каких условиях его теория согласуется с полуэмпирической (диффузионной) теорией движения наносов. Именно для случая равномерного течения из системы уравнений Франкля можно получить зависимости, совпадающие с зависимостями диффузионной теории.

В последнее время теория Франкля получила дальнейшее развитие в работах А. К. Дюнина [37], Б. А. Фидмана [160] и др.

Теории Баренблатта, Франкля и их модификации неоднократно обсуждались в литературе. Очень глубокий, хотя и краткий, анализ теории Франкля дал В. М. Маккавеев [103].

отметивший большое научное значение этой теории. Он особо указал на достижение Франкля в строгой формулировке операций осреднения применительно к случаю движения двухкомпонентной жидкости. В то же время Маккавеев отметил незамкнутость уравнений и условность исходного положения теории, отождествляющей взвешенные твердые частицы с жидкостью большой плотности, и наметил путь устранения подобной условности. Следует заметить, что указанный Маккавеевым путь, по существу, приводит не к исправлению теории Франкля, а к созданию новой теории. Маккавеев особо подчеркивает, что в условиях равномерного установившегося движения и транспортирования потоком мелких наносов Франкль приходит к подтверждению диффузионной теории.

В монографии Н. А. Михайловой [113] и работе К. И. Россинского [147] рассматриваются теории Баренблатта и Франкля и высказывается мнение о незавершенности теоретических моделей указанных авторов. Как Михайлова, так и Россинский в своих разработках в основном опираются на диффузионную концепцию, показывая ее полную приемлемость для условий естественных речных потоков.

Все вышеизложенное показывает, что в настоящее время диффузионная концепция взвешивания наносов является единственной приемлемой теоретической основой изучения движения взвешенных наносов в реках. Подчеркиваемые многими исследователями неточности этой теории, как показывает опыт ее практического применения, не являются существенными в условиях естественных речных потоков. Эти неточности в большинстве случаев не преодолены и в других, появившихся позже теоретических моделях взвешивания или же преодолеваются путем таких усложнений, которые приводят к невозможности практического использования указанных теорий.

Важно отметить, что диффузионная теория получила значительное экспериментальное обоснование на материалах, относящихся к речным потокам, и послужила хорошей основой для разработки многочисленных практических методов расчета. Все высказанные выше соображения приводят к выводу о целесообразности принятия диффузионной теории в качестве теоретической основы при разработке проблем речных наносов как в рамках речной гидравлики, так и общей гидрологии.

### 2.3. Теория влечения наносов

Во вводной главе (гл. 1) было отмечено, что к категории влекомых наносов относятся частицы, перемещающиеся в придонном слое потока путем перекатывания, скольжения и сальтации. Характер движения частицы обусловлен определенным соотношением между размерами, формой и плотностью частицы, с од-

ной стороны, и скоростью течения, турбулентностью потока, с другой. При изучении транспорта наносов необходимо выяснить степень активности покрывающих русло наносов, т. е. их способность подвергаться воздействию потока, характеризующееся определенными значениями гидравлических элементов. Предельная крупность частиц  $d_{\text{п}}$ , которые могут транспортироваться в потоке при данных гидродинамических условиях, может быть определена по формуле начальной скорости влечения. Все частицы наносов диаметром  $d < d_{\text{п}}$  в данных условиях будут подвижными. При этом фракции наиболее мелких частиц оказываются способными к перемещению во взвешенном состоянии. Ниже речь будет идти только о тех фракциях наносов, которые в основном перемещаются в придонном слое потока и по характеру своего движения могут быть отнесены к категории влекомых наносов.

Экспериментально установлено, что частицы наносов перемещаются скольжением только в тех случаях, когда скорость потока равна или немного превышает начальную скорость влечения, причем частица имеет уплощенную форму. При увеличении скорости потока все частицы практически независимо от их формы перемещаются качением, сопровождаемым сальтацией. Дно потока сложено частицами наносов и не является поэтому гладким, перемещаемые наносы наталкиваются на неподвижные частицы и отскакивают от них, т. е. сальтируют. Сальтация наблюдается в тех случаях, когда вертикальная пульсационная составляющая скорости оказывается меньше гидравлической крупности частицы, удовлетворяющей условию  $d < d_{\text{п}}$ , и она не может быть взвешена. По-видимому, можно считать, что сальтация является основным видом перемещения влекомых наносов.

Хотя и очевидно, что во взвешенном состоянии в потоке переносятся более мелкие частицы, а во влекомом — более крупные, но четкой границы между ними не существует. Это обусловлено тем, что в связи с изменениями продольной и вертикальной составляющих скорости пульсирующего турбулентного потока условия взмучивания и донного влечения непрерывно меняются. Поэтому в составе взвешенных наносов будут встречаться сравнительно крупные частицы, характерные для влекомых наносов, а в составе последних — мелкие частицы, принадлежащие по своим гидравлическим параметрам к взвешенным. С другой стороны, гидравлика потока меняется как вдоль русла, так и по его ширине и соответственно изменяются условия взвешивания и влечения.

Наиболее важными в теоретическом и практическом отношениях параметрами транспорта влекомых наносов являются начальная скорость сдвига частиц (скорость размыва) и расход наносов. Исследования этих параметров велись теоретико-экспериментальными и чисто эмпирическими методами. Попытки теоретических решений приводили к получению формул,

содержащих неопределенные коэффициенты и функции, требующие опытного определения.

Теоретико-экспериментальные решения задачи о расходе наносов выполнялись на основе нескольких подходов: а) динамического, изучающего силы, действующие на частицу, находящуюся на дне потока (Дюбуа [190], А. Шоклич [216], В. Н. Гончаров [25], Г. И. Шамов [170] и др.), б) статистического, изучающего вероятность срыва и перемещения донной частицы (Х. Эйнштейн [191], М. А. Великанов [18] и др.), в) анализа размерностей (И. В. Егизаров [38]).

Последний метод может рассматриваться лишь как вспомогательный или как метод анализа и систематизации экспериментального материала. В своем исследовании Доу Го-жень [34] показал, что динамический и статистический методы при использовании одинаковых исходных положений приводят к одинаковому виду формулы расхода наносов.

Процесс транспортирования наносов в придонном слое потока представляется весьма сложным и до сих пор экспериментально недостаточно изучен. Крайне мало и надежных натурных данных о транспорте влекомых наносов. Следует заметить, что много усилий было потрачено на то, чтобы получить в натуре расходы влекомых наносов с помощью разного рода ловушек — так называемых донных батометров. Эти данные оказались мало надежными и в лучшем случае могли иметь значение для сравнительной характеристики тех или иных водотоков. Для обоснования теоретических разработок они оказались непригодными и использовались в основном лишь для приближенного определения параметров расчетных зависимостей.

В последние годы был разработан сравнительно надежный метод определения расходов наносов, именуемый в литературе суммарным способом [12], основанный на удержании крупных наносов в отстойных сооружениях. Однако материал, полученный с помощью этого метода, пока не настолько точен, чтобы попытаться на его основе создать вполне совершенную теорию движения влекомых наносов и методику их расчета. В настоящее время можно говорить лишь о приближенных соотношениях для расхода влекомых наносов.

Как отмечено выше, одной из весьма важных гидравлических характеристик наносов является начальная скорость влечения (скорость сдвига) частицы, т. е. та средняя скорость потока, при которой находящаяся на его дне частица определенного размера приходит в движение. Наиболее известными работами по изучению начальной скорости влечения являются исследования В. Н. Гончарова [25, 27], В. С. Кнорова [68, 71], И. И. Леви [85], Ц. Е. Мирцхулавы [112], В. Ф. Талмазы [158], Г. И. Шамова [170]. Ввиду многочисленности работ, посвященных начальной скорости влечения, невозможно дать достаточно полный обзор по этому вопросу. В основном все исследования начальной ско-

рости можно разделить на эмпирические и теоретические с экспериментальным обоснованием. Опыт применения зависимостей, основанных на экспериментальных исследованиях, показывает, что они дают удовлетворительный результат лишь в весьма узких пределах, отвечающих условиям эксперимента. Распространение эмпирических формул на более общие случаи приводит, как правило, к неудовлетворительным результатам. В качестве примера эмпирических зависимостей можно привести формулу М. А. Великанова и Н. М. Бочкова [17], формулу Е. А. Замакина [43].

Более надежными следует считать зависимости, полученные экспериментально-теоретическим методом. Некоторые из таких зависимостей основываются на рассмотрении действующих сил в момент предельного равновесия частицы на дне потока. Касательное напряжение у дна принимается равным трению в движущемся верхнем слое наносов и именуется силой влечения.

Другая значительная часть экспериментально-теоретических зависимостей основывается на рассмотрении равновесия отдельной частицы, находящейся на дне потока. Исследователи пошли по двум направлениям: одни составляли уравнение предельного равновесия сил, действующих на частицу, а другие исследовали условия равенства моментов действующих сил. В результате были получены формулы, несколько различающиеся между собой. Различие в основном сводится к получению разных численных значений содержащихся в формулах эмпирических коэффициентов. Эти коэффициенты включают в себя все трудноопределимые параметры, такие, как коэффициент сопротивления частицы, плечи приложения действующих сил и т. д. Ниже приводятся некоторые из формул для определения начальной скорости влечения частиц, получившие широкое распространение. Формула В. Н. Гончарова [27] имеет вид

$$v_{\text{нач}} = 1g \frac{8,8H}{d_{95}} \sqrt{\frac{2(\rho_s - \rho)}{1,75\rho} d_{\text{ср}} H}. \quad (2.63)$$

И. И. Леви [85] предложил следующие формулы:  
при  $(H/d_{\text{ср}}) > 60$

$$v_{\text{нач}} = 1,4 \sqrt{gd_{\text{ср}}} \ln \frac{H}{7d_{\text{ср}}} \left( \frac{d_{\text{макс}}}{d_{\text{ср}}} \right)^{1/7}, \quad (2.64)$$

при  $10 < (H/d_{\text{ср}}) < 60$

$$v_{\text{нач}} = 1,4 \sqrt{gd_{\text{ср}}} \left( 1 + \ln \sqrt{\frac{H}{7d_{\text{ср}}}} \right) \left( \frac{d_{\text{макс}}}{d_{\text{ср}}} \right)^{1/7}. \quad (2.65)$$

Формула Г. И. Шамова [169] записывается в виде

$$v_{\text{нач}} = 4,6 d_{\text{ср}}^{1/3} H^{1/6}. \quad (2.66)$$

В этих формулах  $d_{95}$  — диаметр крупных фракций, доля которых составляет 5% в общей смеси донных отложений, метры;  $d_{ср}$  и  $d_{макс}$  — соответственно средний и наибольший диаметры подвижных фракций донных отложений.

Большое количество исследований посвящено совершенствованию предложенных уже ранее зависимостей и уточнению учета влияния отдельных факторов на величину  $v_{нач}$ . Так, например, исследованиями В. М. Маккавеева [100], И. Ф. Бурлая [15] и Доу Го-жэня [34] выявлено наличие добавочной пригружающей силы, действующей по площадкам соприкосновения частиц со дном или нижерасположенными частицами в мелкозернистых несвязных грунтах. Ц. Е. Мирцхулава [112] исследовал роль сцепления в устойчивости частиц, находящихся под воздействием потока на дне. Эти вопросы позднее были рассмотрены также в работе И. Ф. Карасева [52].

Довольно широкое распространение получили зависимости, основанные на весьма общих соображениях о взаимодействии потока с донными наносами [29] и обобщении предложенных ранее зависимостей [158]. Однако при этом не были получены новые в теоретическом отношении результаты.

О влиянии формы частиц на начальную скорость влечения говорили почти все исследователи, занимавшиеся изучением этой величины, в том числе и такие видные, как А. Шошлич [217], П. Новак [211] и Д. Я. Соколов [154], отмечавшие весьма значительное ее влияние на начальную скорость. Тем не менее опытные численные коэффициенты в выражениях начальной скорости, которые должны бы учитывать форму частиц, они принимали за постоянную величину. Формулы с такими коэффициентами затем широко использовали, распространяя нередко и на другие грунты. Специальным изучением влияния формы наносов на начальную скорость влечения до последнего времени никто не занимался. С целью устранения этого пробела и усовершенствования указанной формулы В. В. Романовским в ГГИ в 1973 г. [142] были проведены специальные исследования, позволившие получить формулы начальной скорости и скорости влечения наносов, в которых учитывается влияние формы частиц наносов. Эти работы будут детально рассмотрены ниже.

При исследовании транспорта наносов в потоках и разработке соответствующих методов расчета появляется необходимость изучения скорости перемещения твердых частиц. В отношении взвешенных наносов обычно принимают, что продольная составляющая скорости твердой частицы равна скорости жидкости в месте нахождения частицы. Движение же влекомых наносов происходит с отставанием от окружающих их масс жидкости. Результаты экспериментов П. А. Войновича и М. А. Деметьева [31] показали, что находящаяся на дне потока частица некоторое время остается неподвижной, а затем в движении очень быстро набирает скорость. Скорость частицы возрастает

скачкообразно от нуля до  $1/4—1/2$  скорости потока. Это различие скоростей сохраняется во время движения частицы, т. е. она передвигается по дну с заметным отставанием от окружающих водных масс. Упомянутые авторы утверждали, что с увеличением скорости потока отставание остается постоянной величиной.

В. Н. Гончаров [27], проанализировав действующие на частицу силы, пришел к выводу, что скорость влечения  $v_{\text{ч}}$  должна выражаться следующим образом:

$$v_{\text{ч}} = v_d - v_{\text{начд}}, \quad (2.67)$$

где  $v_d$  — скорость потока на высоте центра тяжести частицы;  $v_{\text{начд}}$  — начальная донная скорость влечения частицы.

Детальные эксперименты, проведенные с использованием киносъемки Н. А. Михайловой [113] с целью выявления влияния формы, размера и удельного веса частиц на скорость их перемещения в потоке, показали, что для скользящих по дну частиц с одинаковым удельным весом разность скоростей  $v_d - v_{\text{ч}}$  пропорциональна  $\sqrt{d\Theta}$ , где  $\Theta$  — параметр формы частицы. Михайлова дает следующую формулу:

$$v_{\text{ч}} = v_d - k \sqrt{d\Theta}, \quad (2.68)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент. Из этой зависимости видно, что скорость скользящей частицы меньше скорости окружающего ее потока на величину, зависящую от размера частицы и ее формы.

Эксперименты по исследованию движения донных наносов, проведенные Ц. Е. Мирцхулаевой [111], показали, что с увеличением скорости потока скорость частиц возрастает, стремясь к скорости окружающей жидкости.

Как указывалось, перемещение крупных частиц у дна происходит в виде влечения (скольжения частицы), перекатывания и сальтации. Для этих форм движения характерно то, что они возникают под действием гидродинамических сил, проявляющихся в придонном слое потока. Рассмотрим детально решение В. В. Романовского [142], которое формально относится к случаям скольжения и качения частиц. В получаемые зависимости им вводится динамический коэффициент трения, найденный экспериментально для всех трех видов движения частиц (включая и сальтацию). Поэтому решение может рассматриваться как достаточно общее и использоваться для исследования и расчета движения влекомых наносов независимо от вида движения.

Уравнение движения частицы, находящейся на дне, согласно второму закону Ньютона, может быть записано в виде

$$F_{\text{ин}} = F_{\text{лоб}} + F_{\text{прод}} - (F_{\text{сц}} + F_{\text{норм}} + F_{\text{доб}} - F_{\text{под}} - F_w)f, \quad (2.69)$$

где  $F_{\text{ин}}$  — сила инерции частицы;  $F_{\text{лоб}}$  — сила гидродинамического напора (лобового воздействия);  $F_{\text{прод}}$  и  $F_{\text{норм}}$  — продоль-

ная и нормальная к направлению течения составляющие силы тяжести частицы;  $F_{\text{сц}}$  — сила сцепления между частицами;  $F_{\text{доб}}$  — добавочная пригружающая сила, действующая по поверхности контакта с нижележащей частицей;  $F_{\text{под}}$  — подъемная сила, возникающая за счет несимметричности обтекания частицы потоком;  $F_w$  — подъемная сила, обусловленная действием на частицу вертикальных составляющих ( $\omega$ ) пульсационной скорости потока;  $f$  — динамический коэффициент трения.

Исследования, выполненные в этой области, позволяют считать, что данная силовая схема исчерпывает по крайней мере основные силы. Детально анализируя силы, действующие на сравнительно крупную частицу при турбулентном режиме ее обтекания, Романовский выяснил возможность исключения из рассмотрения некоторых сил, которые в данном случае оказываются весьма малыми. Соответственно упрощается уравнение (2.69), приобретающее следующий вид:

$$F_{\text{ин}} = F_{\text{лоб}} - (F_{\text{норм}} - F_w) f. \quad (2.70)$$

Запишем выражения всех членов этого уравнения. Не трудно видеть, что

$$F_{\text{норм}} = W \sin \alpha, \quad (2.71)$$

где  $W$  — вес частицы под водой;  $\alpha$  — угол наклона дна к горизонту;

$$F_{\text{ин}} = m \frac{dv_{\text{ч}}}{dt}, \quad (2.72)$$

где  $v_{\text{ч}}$  — скорость перемещения частицы по дну;  $m$  — масса частицы и присоединенного объема жидкости, равная

$$m = V \rho_s + k_0 V \rho, \quad (2.73)$$

где  $V$  — объем частицы.

Можно предположить, что в зоне влияния дна присоединенные массы жидкости будут меньше, чем при свободном падении частицы. Как известно, при падении частицы в жидкости  $k_0 = 0,5$ . Учет присоединенных масс может быть произведен путем фиктивного увеличения плотности частицы, имеющей  $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ , до  $\rho_{\text{сф}} = 3,15 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . В придонном слое увеличение плотности частицы будет меньшим и им можно пренебречь.

$$F_{\text{лоб}} = c_y \omega_y \rho \frac{(v_d - v_{\text{ф}})^2}{2}, \quad (2.74)$$

где  $c_y$  — коэффициент сопротивления частицы при ее обтекании горизонтальным потоком;  $\omega_y$  — площадь максимального сечения частицы при обтекании ее горизонтальным потоком, т. е. макси-

мальная площадь сечения частицы в плоскости, перпендикулярной направлению движения потока;

$$F_w = c_x \omega_x \rho \frac{\omega^2}{2}. \quad (2.75)$$

Здесь  $\omega_x$ ,  $c_x$  — соответственно площадь максимального сечения частицы и коэффициент сопротивления частицы при ее обтекании вертикальными составляющими скорости потока,  $\omega$  — среднее значение абсолютной величины вертикальной составляющей пульсационной скорости потока.

Подставляя значения  $F_{ин}$ ,  $F_{лоб}$ ,  $F_{норм}$  и  $F_w$  в формулу (2.70) и проводя некоторые преобразования, получаем

$$b^2 \frac{dv_{ч}}{dt} = (v_d - v_{ч})^2 - a^2, \quad (2.76)$$

где

$$a^2 = \frac{c_x}{c_y} \cdot \frac{\omega_x}{\omega_y} (u^2 - \omega^2) f. \quad (2.77)$$

Выражения для  $b$  получаются различными для катящихся и скользящих частиц. Применив для первого случая уравнение моментов, находим

$$b^2 = b_1^2 = \frac{4nV\rho_S}{c_y \omega_y \rho}. \quad (2.78)$$

Для случая же скольжения частицы, применяя уравнение действующих сил, получаем

$$b^2 = b_2^2 = \frac{2V\rho_S}{c_y \omega_y \rho}. \quad (2.79)$$

Здесь  $v_d$  — скорость потока на высоте  $d/2$  от дна;  $v_{ч}$  — скорость перемещения частицы по дну потока;  $u$  — гидравлическая крупность частицы;  $n$  — коэффициент, зависящий от формы частицы. Подчеркнем, что записанное в общем виде уравнение движения частицы (2.69) относится как к случаю скольжения, так и к случаю качения частицы. Параметр  $b$  в уравнении (2.76) является множителем перед ускорением частицы. Очевидно, что интенсивность ускорения или соответственно замедления в случае качения будет отличаться от интенсивности ускорения (замедления) в случае скольжения частицы по дну.

Разделяя переменные уравнения (2.76), интегрируя его и преобразуя, получаем следующие два уравнения скорости частицы: при ее разгоне

$$v_{ч} = \frac{(v_d - a) \left( 1 - e^{-\frac{2at}{b^2}} \right)}{1 - \frac{v_d - a}{v_d + a} \cdot e^{-\frac{2at}{b^2}}}, \quad (2.80)$$

соответственно при ее замедлении

$$v_{\text{ч}} = \frac{(a - v_d) \left( e^{-\frac{2at}{b^2}} - 1 \right)}{\frac{a - v_d}{a + v_d} \cdot e^{-\frac{2at}{b^2}} + 1} \quad (2.81)$$

Условие  $t \rightarrow \infty$  отвечает установившемуся во времени режиму, для которого находим следующее уравнение скорости транспортирования частицы по дну потока:

$$v_{\text{ч}} = v_d - \sqrt{\frac{c_x \omega_x}{c_y \omega_y} (u^2 - w^2) f} \quad (2.82)$$

На основании полученного уравнения Романовский разработал расчетную зависимость (2.89), удобную для практического применения. В эту зависимость вводится величина начальной скорости сдвига  $v_{\text{нач}}$ , поэтому предварительно рассмотрим вывод формулы для  $v_{\text{нач}}$ , а затем вернемся к преобразованию выражения (2.82).

Для получения формулы  $v_{\text{нач}}$  рассмотрим состояние предельного равновесия частицы наносов на дне потока. Такому состоянию частицы отвечает условие  $v_{\text{ч}} = 0$ . Предельное соотношение может быть непосредственно получено из выражения (2.82), если принять в нем  $v_{\text{ч}} = 0$  и заменить динамический коэффициент трения  $f$  статическим коэффициентом  $f_0$ . В соответствии со сказанным записываем

$$v_{\text{нач}d} = \sqrt{\frac{c_x \omega_x}{c_y \omega_y} (u^2 - w^2) f_0} \quad (2.83)$$

где  $v_{\text{нач}d}$  — начальная донная скорость сдвига частиц.

Переходя от донной скорости потока к средней скорости на вертикали и выражая абсолютную величину осредненной вертикальной пульсационной скорости  $w$  через среднюю скорость на вертикали, получим уравнение начальной скорости влечения частиц в виде

$$v_{\text{нач}} = u \sqrt{\frac{\frac{c_x \omega_x}{c_y \omega_y} \cdot f_0 N}{\alpha^2 N + \frac{c_x \omega_x}{c_y \omega_y} f_0}} \quad (2.84)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент перехода от донной скорости потока на расстоянии от дна, равном  $d/2$ , к средней на вертикали скорости, т. е.  $\alpha = v_d/v_{\text{ср}}$ ; для перехода от  $v_d$  к  $v_{\text{ср}}$  используется эллиптическое уравнение профиля скорости. Переход от  $w$  к  $v_{\text{ср}}$  осуществляется по теоретической формуле А. В. Караушева, содержащей безразмерный параметр  $N = \frac{(0,7C + 6)C}{g}$ , где  $C$  —

коэффициент Шези. Чтобы можно было использовать зависимость (2.84) для расчетов, необходимо знать величины  $f_0$ ,  $c_x/c_y$  и  $\omega_x/\omega_y$ .

Определение коэффициента статического трения ( $f_0$ ) для частиц размером от 5 до 50 мм, имевших различную форму, выполнялось экспериментально на поверхностях разной шероховатости. На подстилающую поверхность были наклеены зерна размером от  $\Delta = 0,2$  мм до  $\Delta = 20$  мм. Во время определения  $f_0$  частица и подстилающая поверхность находились под водой. В результате экспериментов была установлена зависимость  $f_0$  от величины  $d/\Delta$  и формы частиц  $\Theta$ . График зависимости представлен на рис. 7.

Как показали натурные наблюдения ряда авторов, в речном аллювии имеет место определенная закономерность ориентировки галек. В стрежневой зоне потока, т. е. именно там, где происходит основное движение влекомых наносов, около 80% частиц располагается своей длинной осью поперек оси потока, а максимальной плоскостью — почти параллельно плоскости дна. Эта упорядоченность укладки частиц на дне дает возможность принимать отношения  $\omega_x/\omega_y$  и  $c_x/c_y$  достаточно постоянными и определять их в зависимости лишь от формы частиц  $\Theta$ . В результате обмера площадей частиц в различных плоскостях были получены отношения  $\omega_x/\omega_y$ . Для определения отношения  $c_x/c_y$  были использованы экспериментальные данные, полученные при изучении сопротивления частиц при разной их ориентации в потоке [140].

Так как параметры  $\omega_x/\omega_y$  и  $c_x/c_y$  являются функцией только формы частиц  $\Theta$ , то они были объединены в один параметр  $j$ , зависящий от формы частиц. При  $\Theta \geq 0,8$ , т. е. для частиц, которые в основном перемещаются качением, параметр  $j \approx 1,35$ . Для остальных форм частиц он выражается зависимостью

$$j = \frac{1}{10\Theta^2 - 9,2\Theta + 2,16} + 0,6. \quad (2.85)$$

После подстановки параметра  $j$  в выражение начальной скорости влечения (2.84) получаем следующую расчетную формулу:

$$v_{\text{нач}} = u \sqrt{\frac{j f_0 N}{a^2 N + j f_0}}. \quad (2.86)$$

Содержащаяся здесь величина  $f_0$  находится по графикам (рис. 8) или по таблице как функция двух переменных  $d/\Delta$  и  $\Theta$ . Если распределение скорости на вертикали принять по эллиптическому закону, то

$$\alpha = \frac{1,11C \sqrt{1 - Py^2}}{C - 1}, \quad (2.87)$$

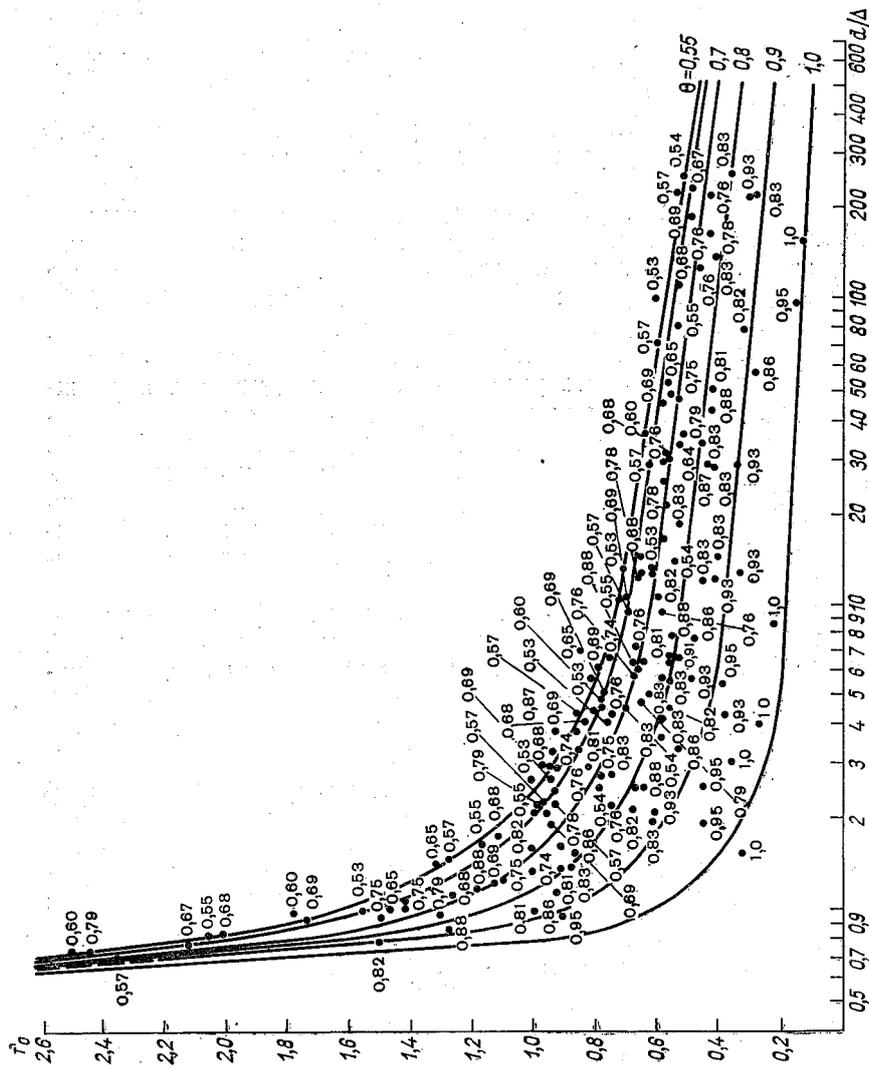


Рис. 7. Зависимость  $f_0$  от относительной крупности частиц  $d/\Delta$  и их формы  $\theta$ .

где  $C$  — коэффициент Шези;  $\tilde{y} = \frac{2H-d}{2H}$ ;  $H$  — глубина на вертикали;  $d$  — диаметр частиц, для которых ведется расчет;  $P = 0,57 + \frac{3,3}{C}$  при  $10 \leq C \leq 60$  и  $P = 0,0222C - 0,000197C^2$  при  $C > 60$ . Параметр  $j$  находится по формуле (2.85) или по таблице в зависимости от основного параметра формы  $\Theta$  (табл. 8).

Таблица 8

Зависимость параметра  $j$  от формы частиц  $\Theta$

$\Theta$	$j$	$\Theta$	$j$	$\Theta$	$j$
0,50	17,0	0,70	2,04	0,90	1,27
0,55	8,55	0,75	1,58	0,95	1,34
0,60	5,24	0,80	1,39	1,00	1,40
0,65	3,28	0,85	1,22		

Выражение (2.86) показывает, что начальная скорость влечения сильно зависит от формы частиц: из пяти входящих в это выражение величин три являются функцией формы. К ним относятся гидравлическая крупность  $u$ , коэффициент статического трения  $f_0$  и параметр  $j$ .

По формуле (2.86) произведен расчет  $v_{нач}$  для частиц различного диаметра с учетом их формы. Результаты расчета показаны на рис. 8, где также нанесены значения начальной скорости, вычисленные по различным формулам. Можно предположить, что расхождения результатов могли быть вызваны различиями преобладающей формы частиц, использованных в экспериментах. Так, в работе В. Н. Гончарова [25] изучались зерна наносов с преобладающим значением параметра формы  $\Theta \approx 0,70$ . Кривая  $v_{нач} = f(d)$ , полученная по формуле Гончарова, весьма близка к кривой, вычисленной по зависимости (2.86) для  $\Theta = 0,7$ .

Теперь вернемся к вопросу о скорости перемещения частиц влекомых наносов по дну потока  $v_ч$ . В целях детального изучения процесса перемещения крупных частиц наносов по дну потока и экспериментального обоснования зависимости  $v_ч$  от определяющих факторов В. В. Романовским были выполнены детальные лабораторные исследования. Анализ экспериментального материала показал, что скорость перемещения частиц по дну непосредственно не зависит от размера выступов шероховатости дна, а является функцией донной скорости потока и формы частиц. По экспериментальным данным о скоростях влечения частиц по дну были вычислены значения коэффициента

динамического трения  $f$  в зависимости от донной скорости потока и нанесены на график (рис. 9).

Общий вид уравнения  $v_{\text{ч}}$  был приведен выше [см. формулу (2.82)]. Расчетная зависимость для  $v_{\text{ч}}$  находится следующим образом. Записываем формулы (2.82) и (2.83) как систему двух уравнений. Делим первое из них на  $\sqrt{f}$ , а второе на  $\sqrt{f_0}$ . Теперь

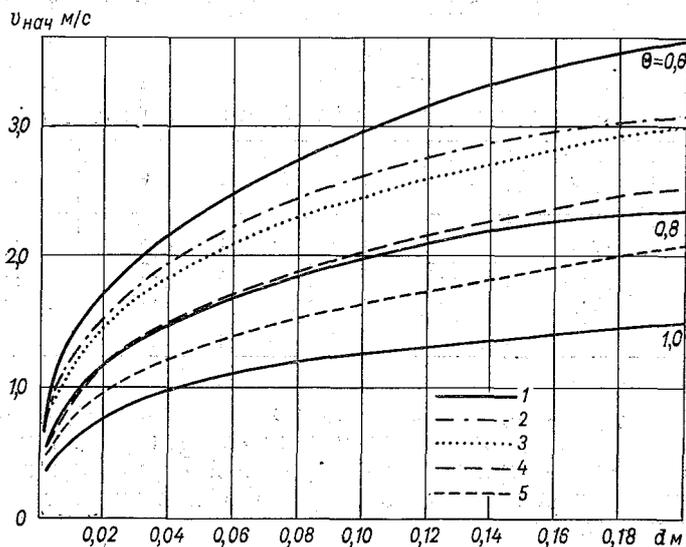


Рис. 8. Зависимость  $v_{\text{нач}}$  от размера частиц  $d$  и их формы  $\Theta$ .  
По формуле: 1 — А. В. Караушева, 2 — В. Н. Гончарова, 3 — И. И. Леви,  
4 — Г. И. Шамова, 5 — В. Ф. Толмазы.

в правой части обоих уравнений будет находиться одинаковая величина  $\sqrt{\frac{c_x \omega_x}{c_y \omega_y} (u^2 - w^2)}$ . Исключая эту величину и преобразуя полученное выражение, записываем

$$v_{\text{ч}} = v_d - v_{\text{нач}d} \sqrt{\frac{f}{f_0}}. \quad (2.88)$$

Здесь  $v_d$  и  $v_{\text{нач}d}$  — соответственно донная скорость потока и начальная донная скорость сдвига. Переходя к средней по вертикали скорости потока  $v_{\text{ср}}$  с помощью множителя  $\alpha$ , Романовский получил в окончательном виде следующую формулу скорости транспортирования частиц:

$$v_{\text{ч}} = \alpha \left( v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}} \sqrt{\frac{f}{f_0}} \right). \quad (2.89)$$

Об определении содержащихся в этой формуле величин  $\alpha$  и  $f_0$  указывалось выше при рассмотрении формулы (2.86). Коэффи-



коэффициент динамического трения  $f$  находится по графикам (рис. 9) как функция  $v_d/v_{нач}$  и  $\Theta$ . Полученные результаты показывают, что с увеличением средней скорости потока уменьшается отставание частицы от окружающего его потока; это объясняется уменьшением  $f$ . Уменьшение величины  $f$  происходит за счет

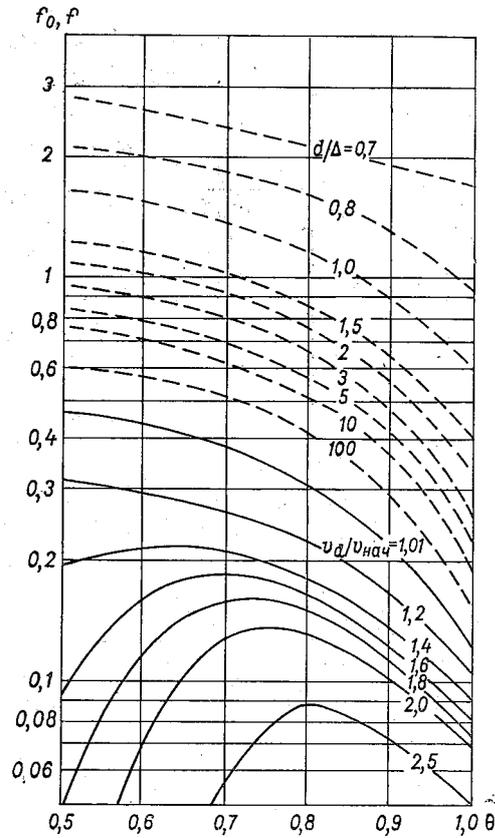


Рис. 10. Совмещенный график зависимости коэффициентов статического  $f_0$  и динамического  $f$  трения от относительной крупности частиц  $d/\Delta$ , относительной донной скорости  $v_d/v_{нач}$  и формы частиц  $\Theta$ .

Обратим теперь внимание на графики  $f_0$  и  $f$  (рис. 10). Величина  $f_0$  оказывается всегда больше, чем  $f$ , вследствие чего частица выходит из состояния покоя не плавно, а скачком, затем может перемещаться по дну потока при скоростях, меньших начальной скорости влечения. Этим объясняется также и существование двух предельных скоростей: начальной  $v_{нач}$  и непередви-

того, что с увеличением скорости частицы она начинает отрываться от дна (подпрыгивать). При дальнейшем возрастании скорости потока высота и время прыжков частицы увеличиваются. Поскольку величина  $f$  принимается средней по пути (времени) движения частицы, естественно, что прыжки вызывают уменьшение коэффициента динамического трения  $f$ . Интенсивность выравнивания скоростей частицы и потока зависит от формы частицы. Ранее предполагали, как уже указывалось выше, что отставание есть величина постоянная. Теоретические и экспериментальные исследования Романовского показывают неточность этого предположения. Материалы его экспериментов подтверждают рекомендуемую им формулу скорости перемещения влеко- мых наносов (2.89). Ниже мы увидим, что указанная формула весьма удобна для использования при расчете транспорта влекомых наносов.

гающей скорости  $v_{\text{ннд}}$ ; при первой частица наносов определенного размера и формы приходит в движение, при второй она останавливается.

Выражение  $v_{\text{ннд}}$  получается непосредственно из формулы (2.86) путем замены в ней статического коэффициента трения  $f_0$  динамическим  $f$ , т. е.

$$v_{\text{ннд}} = u \sqrt{\frac{jfN}{a^2N + jf}}. \quad (2.90)$$

Специальных экспериментов для обоснования формулы (2.90) не выполнялось, однако многочисленные данные по определению  $v_{\text{ннд}}$  косвенно подтверждают эту формулу.

Остановимся на вопросе о выражении расхода влекомых наносов. Первоначально эта задача решалась на основе так называемой теории влечения, предложенной Дюбуа в 1879 г. и развитой в работах А. Шоклича [216], А. Шильдса [221] и др. В последующих исследованиях транспорта влекомых наносов широко использовались формулы начальной скорости влечения и скорости транспортирования. Указанные разработки носят характер динамических решений, дополняемых данными лабораторного эксперимента.

Дюбуа ввел понятие влекущей силы потока, которая исчисляется на единицу поверхности дна и, по существу, могла бы именоваться касательным напряжением влечения ( $\tau_{\text{вл}}$ ). Напряжение  $\tau_{\text{вл}}$  приравнивается касательному напряжению  $\tau_H$  на дне потока, определяющему гидродинамическое сопротивление последнего, т. е.  $\tau_{\text{вл}} = \tau_H$ . Поэтому, согласно известному гидравлическому соотношению, можно написать

$$\tau_{\text{вл}} = \rho g H I, \quad (2.91)$$

где  $H$  и  $I$  — соответственно глубина и поверхностный уклон потока, принимаемого за равномерный и установившийся. В теории вводится понятие критического напряжения влечения ( $\tau_{\text{кр}}$ ), отвечающего предельному условию сдвига частиц заданного размера в потоке. По схеме Дюбуа, элементарный расход влекомых наносов  $p_{\text{вл}}$  кг/(с · м) пропорционален произведению влекущего напряжения на разность  $\tau - \tau_{\text{кр}}$ . Соответственно имеем

$$p_{\text{вл}} = k \tau_{\text{вл}} (\tau_{\text{вл}} - \tau_{\text{кр}}). \quad (2.92)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  находится в этой формуле на основании экспериментальных данных. В своих рассуждениях Дюбуа принимал, что движение влекомых наносов происходит в виде слоя, имеющего наибольшую скорость на границе с потоком и нулевую на некоторой глубине, превышающей размер зерен наносов.

А. Шоклич основывался на той же гипотезе, что и Дюбуа, но, в отличие от него, он отказался от идеи слоистого движения, поскольку она не нашла экспериментального подтверждения. Тем

не менее А. Шоклич нашел вид формулы (2.92) достаточно удовлетворительным и внес в нее лишь незначительную поправку, приняв

$$k = \frac{k_1}{g(\rho_s - \rho)}, \quad (2.93)$$

где  $\rho$  и  $\rho_s$  — соответственно плотность воды и частиц наносов. Шоклич получил следующее значение эмпирического коэффициента  $k_1 = 0,54$ .

В дальнейших исследованиях, выполненных А. Шильдсом [221], Я. Чангом в 1939 г. и многими другими, модель Дюбуа—Шоклича подверглась лишь незначительным изменениям, а конечная формула приобретала лишь различные транскрипции; менялись также и численные коэффициенты. В настоящее время зависимости такого вида практически не используются.

Более плодотворным направлением развития динамической модели транспорта влекомых наносов оказались разработки, основанные на использовании соотношений скорости транспортирования частиц ( $v_{ч}$ ). Это направление развивалось в основном советскими учеными М. А. Великановым, В. Н. Гончаровым, Г. И. Шамовым, И. И. Леви и др., которыми были получены наиболее практически важные результаты. При выводе расчетных зависимостей расхода влекомых наносов указанными учеными использовались экспериментальные материалы, в основном лабораторных исследований транспорта влекомых наносов. До настоящего времени продолжают пользоваться формулами расхода влекомых наносов, полученными Гончаровым, Шамовым и Леви. Приведем эти формулы в их последней редакции.

Формула В. Н. Гончарова имеет вид

$$p_{вл} = 1,2(1 + \varphi) v_{нач} d \left( \frac{v_{ср}}{v_{нач}} \right)^{4,33}; \quad (2.94)$$

формула Г. И. Шамова

$$p_{вл} = k \left( \frac{v_{ср}}{v_{нач}} \right)^3 (v_{ср} - v_{нач}) \left( \frac{d}{H} \right)^{0,25}; \quad (2.95)$$

формула И. И. Леви

$$p_{вл} = 0,002 \left( \frac{v_{ср}}{\sqrt{gd}} \right)^3 (v_{ср} - v_{нач}) \left( \frac{d}{H} \right)^{0,25}. \quad (2.96)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\varphi$  — опытный параметр;  $v_{нач}$  — начальная скорость влечения частиц, м/с;  $v_{ср}$  — средняя скорость потока, м/с;  $d$  — размер частиц, метры;  $H$  — глубина потока, метры;  $k$  — коэффициент, зависящий от состава влекомых наносов. Получаемый расход наносов выражается в кг/(с · м).

Заслуживает внимания также и зависимость К. В. Гришанина (1969 г.), полученная на основании натуральных измерений на Волге,

$$p_{вл} = 0,015 \left( \frac{v_{ср}}{v_{нач}} \right)^3 d (v_{ср} - v_{нач}), \quad (2.97)$$

где  $v_{ср}$  — средняя скорость потока;  $v_{нач}$  — начальная скорость влечения частиц размером  $d$ .

В теории донного влечения и, в частности, при выводе приведенных выше формул используется понятие сплошности движения частиц, характеризующее степень подвижности поверхностного слоя наносов, находящегося под непосредственным воздействием донных струй потока. Если условно принять, что все влекомые наносы перемещаются по поверхности дна, то можно сосчитать число подвижных и число неподвижных частиц на единице поверхности. Интенсивность донного влечения будет характеризоваться суммарным объемом движущихся частиц ( $\sum V_{дв}$ ) на единице поверхности русла. Суммарный объем неподвижных частиц на той же поверхности обозначим через  $\sum V_{нпд}$ . Общий объем частиц поверхностного слоя наносов определяется суммой  $\sum V_{дв} + \sum V_{нпд}$ . Коэффициент сплошности движения влекомых наносов  $\eta$  определяется отношением

$$\eta = \frac{\sum V_{дв}}{\sum V_{дв} + \sum V_{нпд}}. \quad (2.98)$$

Такое выражение коэффициента сплошности является более правильным, чем используемое некоторыми исследователями отношение числа подвижных частиц к суммарному числу подвижных и неподвижных частиц (К. В. Гришанин [30]). В случае неоднородности наносов по крупности определяемые такими способами коэффициенты сплошности должны отличаться друг от друга, так как подвижные наносы в среднем всегда будут мельче неподвижных.

Исходные предпосылки, которые положены в основу вывода приведенных выше формул элементарного расхода влекомых наносов, весьма просты. Следует считать, что внесение существенных усложнений в теоретическую модель донного влечения и соответствующие расчетные формулы в настоящее время представляется мало оправданным, поскольку исходный натуральный материал, необходимый для определения параметров формул, отличается неполнотой и малой точностью.

Остановимся теперь на очень простом выводе формулы расхода влекомых наносов, рассмотренном А. В. Караушевым и В. В. Романовским.

Посмотрим, как может быть определен общий объем движущихся частиц на единице поверхности дна  $\sum V_{дв}$  м<sup>3</sup>/м<sup>2</sup> (или их общая масса  $M_{дв} = \sum m_{дв}$ ) в зависимости от коэффициента сплошности  $\eta$  (через  $m_{дв}$  обозначена масса одной движущейся

частицы). Общий объем движущихся и неподвижных частиц на единице поверхности дна определится равенством

$$\sum V_{дв} + \sum V_{нпд} \approx k(1 \cdot 1 \cdot d - V_{\Delta}). \quad (2.99)$$

Здесь  $k$  — коэффициент, меньший единицы, учитывающий, что в верхнем слое отложений толщиной  $d$  пустот больше, чем в нижерасположенных частях отложений;  $V_{\Delta}$  — общий объем пор, подсчитанный по плотности донных отложений (грунта);  $d$  — средний диаметр частиц донных наносов в объеме слоя толщиной  $d$  и площадью  $1 \text{ м}^2$ .

Пористость грунта  $\Delta$  выражается соотношением

$$\Delta = 1 - \frac{\rho_{гр}}{\rho_s}, \quad (2.100)$$

где  $\rho_{гр}$  — плотность донных отложений в естественном залегании, но без воды, а  $\rho_s$  — плотность частиц наносов.

Очевидно, что

$$V_{\Delta} \approx 1 \cdot 1 \cdot d \Delta. \quad (2.101)$$

Для общего объема частиц на дне получаем

$$\sum V_{дв} + \sum V_{нпд} = kd \frac{\rho_{гр}}{\rho_s}. \quad (2.102)$$

Символ приближенности равенства опускаем, помня, что это равенство, как и последующие, является весьма приближенным. Масса всех движущихся частиц выразится равенством

$$M_{дв} = \sum m_{дв} = \eta \rho_s (\sum V_{дв} + \sum V_{нпд}), \quad (2.103)$$

или

$$M_{дв} = k \eta d \rho_{гр}. \quad (2.104)$$

Умножая  $M_{дв}$  на скорость транспортирования частиц  $v_{ч}$ , получаем элементарный расход влекаемых наносов

$$p_{вл} = k \eta d \rho_{гр} v_{ч}. \quad (2.105)$$

Согласно данным И. И. Леви и В. Н. Гончарова, можно принять

$$\eta \approx k_1 \left( \frac{d}{H} \right)^n \left( \frac{v_{ср}}{v_{нач}} \right)^3, \quad (2.106)$$

где  $k_1$  — опытный коэффициент. Показатель степени  $n$  Леви принимает равным 0,25, а по Гончарову  $n = 0,1$ . Некоторые исследователи полагают, что с достаточным приближением можно считать

$$\eta \approx k_2 \left( \frac{v_{ср}}{v_{нач}} \right)^3 \quad (2.107)$$

(см., например, у К. В. Гришанина [30]).

Выше отмечалось, что почти все ученые до настоящего времени принимали

$$v_{\text{ч}} = v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}. \quad (2.108)$$

Соответственно они строили расчетные формулы для расходов влекомых наносов. Романовский дал достаточно обоснованный вывод зависимости  $v_{\text{ч}}$ , используя для этой цели весьма надежный экспериментальный материал.

Подстановка зависимостей (2.106) и (2.108) в формулу (2.105) позволяет получить следующий вид уравнения элементарного расхода наносов:

$$p_{\text{вл}} = k_0 \rho_{\text{гр}} d \left( \frac{d}{H} \right)^n \left( \frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{нач}}} \right)^3 (v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}}), \quad (2.109)$$

где  $k_0$  — обобщенный эмпирический коэффициент. Нетрудно видеть, что это уравнение совпадает с видом формул Шамова (2.95) и Леви (2.96); оно очень близко по структуре к формуле В. Н. Гончарова (2.94). Если в уравнении (2.109) принять  $n = 0$ , то приходим к формуле Гришанина (2.97).

Определяя  $v_{\text{нач}}$  и  $v_{\text{ч}}$  по Романовскому и полагая, что  $n = 0$ , получаем следующую новую запись уравнения элементарного расхода влекомых наносов (в кг/см):

$$p_{\text{вл}} = k_p \rho_{\text{гр}} d \left( \frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{нач}}} \right)^3 \alpha \left( v_{\text{ср}} - v_{\text{нач}} \sqrt{\frac{f}{f_0}} \right). \quad (2.110)$$

Смысл входящих сюда величин  $\alpha$ ,  $f$  и  $f_0$  и способ их определения пояснены выше. Эта зависимость позволяет учитывать влияние формы частиц на транспорт наносов. При прочих равных условиях изменение коэффициента формы частиц  $\Theta$  от 0,6 до 1,0 приводит к очень большому изменению  $p_{\text{вл}}$ . Коэффициент в формуле (2.110) определен по данным натурных измерений; получилось  $k_p = 0,01$ .

Полученная зависимость может быть рекомендована наряду с другими для расчета движения влекомых наносов. Эта зависимость имеет принципиальное преимущество перед приведенными выше формулами Гончарова, Леви и Шамова, но содержащийся в ней коэффициент  $k_p$  требует уточнения.

Прежде чем перейти к рассмотрению других путей вывода уравнений транспорта влекомых наносов, приведем еще две формулы, выведенные на основании приближенного динамического решения с использованием экспериментальных данных и получившие распространение за рубежом. Имеются в виду формулы Джилльберта

$$p_{\text{вл}} = \frac{a l^{1,6}}{d^{0,6}} q - b \quad (2.111)$$

и Мейер-Петера

$$p_{\text{вл}} = \alpha I^{3/2} \left( q^{2/3} - \frac{bd}{I} \right), \quad (2.112)$$

где  $\alpha$  и  $b$  — численные параметры;  $I$  — уклон водной поверхности;  $q$  — элементарный расход воды.

Большой известностью в области теории влечения наносов пользуются работы И. В. Егизарова, который для построения расчетной формулы использовал метод размерностей. Он предлагает следующую формулу расхода влекомых наносов:

$$p_{\text{вл}} = 24q \sqrt{I} \left[ \frac{RI}{1,6f_0d} - 1 \right], \quad (2.113)$$

где  $R$  — гидравлический радиус;  $f_0$  — коэффициент сопротивления подвижного русла;  $d$  — расчетный диаметр наносов, находящихся в движении при заданном расходе воды. Формула (2.113) рекомендуется им для широких безгрядовых русел.

Для решения задачи о транспорте потоком влекомых наносов Х. Эйнштейн [191] использовал метод теории вероятностей. Он рассмотрел вероятность отрыва частицы наносов от дна в течение времени  $\Delta t$  и перелета ее на расстояние  $\Delta l$ . Эйнштейном получена формула следующего вида:

$$p_{\text{вл}} = \Phi_* \rho_s g^{3/2} d^{3/2} \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (2.114)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения;  $d$  — средний диаметр данной фракции;  $\Phi_*$  — интенсивность транспорта частиц данной фракции — сложная безразмерная функция, связанная с вероятностью отрыва частицы от дна; определяется графически.

М. А. Великанов [18] в своих разработках также использовал теорию вероятности. При выводе формулы он рассмотрел две вероятности: вероятность того, что частица, лежащая на дне, в течение времени  $\Delta t$  будет поднята и унесена потоком, и вероятность того, что поднятая частица не упадет на дно в течение времени  $\Delta t$ . В результате для переноса однородных наносов он получил следующую зависимость, несколько лучше отвечающую экспериментальным данным, чем зависимость Эйнштейна:

$$p_{\text{вл}} = k d v_H F(\mu, \nu), \quad (2.115)$$

где  $k$  — опытный коэффициент, зависящий от формы частиц;  $v_H$  — скорость течения у дна;

$$\mu = \frac{k_1 \sqrt{gd} - v_{\text{ср}}}{\sigma_v}; \quad (2.116)$$

$$\nu = \frac{u}{\sigma_v} \quad (2.117)$$

( $\sigma_v$  — среднее квадратичное значение продольной скорости потока; предполагается, что мгновенные значения этой скорости удовлетворяют закону нормального распределения Гаусса). Функция  $F(\mu, \nu)$  вычисляется по формуле

$$F(\mu, \nu) = \frac{[1 - 2\Phi(\mu)] [1 - 2\Phi(\nu)]}{1 + \Phi(\nu)} \quad (2.118)$$

при использовании таблиц интегралов вероятности  $\Phi(x)$ . На основе статистического анализа движения твердых частиц у дна потока построена также и формула Доу Го-женя [34], который учел ряд добавочных обстоятельств, не принятых во внимание Эйнштейном и Великановым. Формула Доу Го-женя имеет вид

$$p_{вл} = 0,048 d (v_{ср} - v_{нач}) \frac{\omega}{v_{нач}} \cdot \frac{v^2}{v_{нач}}, \quad (2.119)$$

где  $\omega$  — среднее абсолютное значение пульсационной скорости потока.

Вероятностный подход к исследованию отрыва частиц от дна использовал И. Ф. Карасев [52]. Он показал, что характеризовать отрыв частиц средними скоростями потока неправомерно; необходимо учитывать весь спектр пульсационных составляющих, которые приближенно подчиняются нормальному закону распределения.

К. И. Россинский также применил теорию вероятности для установления формулы расхода влекомых наносов. Он учитывал только те частицы, которые перемещаются по дну качением и сальтацией.

Общий элементарный расход влекомых наносов, по Россинскому, равен

$$p_{вл} = \beta \rho_s d (\eta_k v_k + \eta_c v_c), \quad (2.120)$$

где  $\beta$ ,  $\eta_k$  и  $\eta_c$  — коэффициенты, определяющие сплошность движения;  $d$  — диаметр наносов;  $v_k$  — скорость движения катящихся частиц;  $v_c$  — скорость движения сальтирующих частиц;  $\rho_s$  — плотность частицы.

Величина  $\beta$  для всех рек и лабораторных лотков получилась постоянной и равной 0,20. Коэффициенты  $\eta_k$  и  $\eta_c$  являются функциями вероятности превышения пульсирующей скоростью в придонной области потока скоростей, обезвешивающих или сдвигающих частицы. Значения этих коэффициентов определяются по таблицам интеграла Гаусса или по специальным графикам (см. раздел 4.2).

Анализируя вышеперечисленные формулы расходов влекомых наносов, полученные различными способами, можно видеть, что большинство из них приводится к одному расчетному виду. Так, например, формулы, использующие теорию влечения, легко могут быть преобразованы в зависимости, подобные формулам

Шамова и Леви, так как сила влечения пропорциональна квадрату скорости, т. е.

$$\tau_{вл} = \rho g H l = \frac{\rho g v^2}{C}, \quad (2.121)$$

где  $C$  — коэффициент Шези.

В то же время формула, полученная Доу Го-женем на основе вероятностного подхода, по своей структуре также близка к формулам Шамова и Леви. Такое согласование расчетных зависимостей свидетельствует о правильности предпосылок, положенных в основу вывода формул. По-видимому, следует считать, что дальнейшее совершенствование указанных формул должно быть направлено в первую очередь на уточнение их параметров на основе надежных экспериментов и натуральных измерений расходов наносов. Частично эта работа выполнена В. В. Романовским, получившим хорошо обоснованные формулы  $v_{нач}$  и  $v_{ч}$ . Ближайшей задачей надо считать накопление полноценных данных о расходах влекомых наносов рек различного типа.

#### 2.4. Формирование донных гряд

Поверхность русел речных потоков и ручьев, сложенных несвязным, более или менее мелкозернистым материалом, под воздействием течения и перемещения наносов обычно приобретает волнообразный вид. На дне формируются гряды, которые могут иметь различные размеры: от крупных образований, так называемых баров или длинных гряд, до весьма мелких — рифелей. Эти русловые аккумулятивные образования непосредственно связаны со структурой турбулентного потока и с взаимообменом потока и русла наносами.

Относительно мелкие и однородные наносы активного слоя русла при небольших скоростях течения в прямолинейных потоках образуют мелкие рифели или довольно ровные гряды, гребни которых располагаются перпендикулярно или почти под прямым углом к направлению течения. При значительном увеличении скорости течения тот же материал дает более крупные гряды трехмерного характера. Донные гряды, образующиеся в реках, могут иметь весьма значительные размеры (рис. 11).

На различных, зачастую рядом расположенных участках русла одного и того же потока могут образовываться гряды различной формы и размера в зависимости от крупности наносов, глубины и скорости течения. Как пример, на рис. 12 приводится фотоснимок донного рельефа участка р. Полометь, сделанный сквозь воду.

Натурные и лабораторные исследования показывают, что размеры гряд даже одного и того же типа варьируют в весьма широких пределах; это видно, в частности, и на приведенных выше

рис. 1 и 2. Вариации параметров гряд и статистические кривые их распределения исследовались весьма мало и каких-либо общих закономерностей в этом отношении не выявлено. Можно отметить лишь отдельные работы, содержащие некоторые материалы по изучению кривых распределения параметров гряд. В первую очередь следует упомянуть работы В. С. Кнороза [69], Н. А. Михайловой [113], Нордина и Алдгерта [210] и др. Результаты, полученные Михайловой, представляют большой

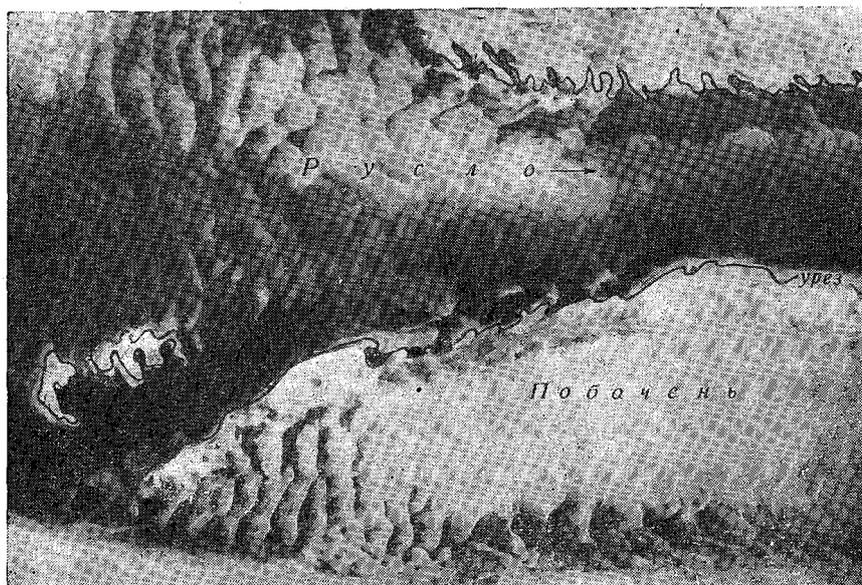


Рис. 11. Песчаные гряды в русле и на побочных большой реки.

интерес, потому что показывают постепенное изменение структуры статистических рядов длин  $l_r$  и высот  $h_r$  гряд в процессе их развития от стадии возникновения до стабилизации. В начальный момент возникновения гряд дифференциальные кривые распределения  $l_r$  и  $h_r$  характеризуют весьма узкий диапазон этих величин. По мере развития гряд их параметры увеличиваются, а кривые распределения значительно растягиваются, приближаясь при этом к симметричной кривой, хотя и не достигают такой формы, сохраняя некоторый сдвиг моды в сторону малых значений параметра.

При выполнении теоретических исследований параметров гряд (их высоты, длины, скорости движения), а также при анализе и обобщении экспериментальных данных обычно оперируют со средними значениями указанных величин.

В настоящее время все исследователи указывают на связь формирования донных гряд с гидравлическим режимом и структурой потока. Прямым подтверждением такой связи является нередко наблюдаемый на горных реках ячеистый характер поверхности русел, сложенных однородными скальными породами.



Рис. 12. Песчаные гряды на р. Полометь.

Внизу на рисунке довольно крупные гряды на более глубоком месте,верху — отмель с мелкими рифелями.

Неровности и углубления на поверхности русла при этом часто имеют форму, весьма похожую на песчаные гряды.

В качестве иллюстрации на рис. 13 приводится фотоснимок обнаженного в межень участка русла горной реки, сложенного известняком. Снимок сделан после дождя, ячейки наполовину заполнены водой.

Натурному, лабораторному и теоретическому изучению донных гряд посвящено очень много работ (см. библиографию в книгах Н. А. Михайловой [113], Н. С. Знаменской [47], Б. А. Шуляка [174] и др.). Наиболее полное натурное исследо-

вание гряд в речных потоках, по-видимому, проводилось Г. И. Шамовым [167], А. К. Проскураковым и Б. В. Проскураковым [125], К. И. Россинским и И. А. Кузьминым [143], Б. Колби и К. Хемпфри [187], Х. Эйнштейном [193], Ю. М. Карчохой [77], Н. М. Капитоновым [50] и др. Начало целенаправленных лабораторных исследований формирования песчаных гряд было положено П. Дюбуа в 1879 г. и затем Дж. Диконом. Интересные работы выполнены Дж. Джильбертом [197], В. Н. Гончаровым и Г. В. Лапшиным [25], В. Ф. Пушкаревым [129], Т. Тсубаки [229], Д. Богарди [184], В. С. Кнорозом [69], М. Альбертсоном и К. Гарде [196], Н. А. Михайловой [113], Д. Алленом [180], Н. С. Знаменской [46] и др. На многих указанных работах и других исследованиях мы остановимся ниже,



Рис. 13. Ячеистый рельеф русла р. Ольховки, сложенного известняком (у г. Кисловодска).

при рассмотрении предлагаемых различными авторами эмпирических зависимостей для параметров донных гряд. Теперь же остановимся на теоретических исследованиях процессов формирования донно-грядового рельефа.

Первой попыткой теоретического анализа процесса формирования гряд, или, как иногда говорят, песчаных волн на дне потока, было исследование Ф. Экснера [195], рассмотревшего простейший случай плоского установившегося потока. Изменения характеристик потока за счет деформаций русла, которые предполагаются малыми, в решении Экснера не учитываются. Деля элементарный расход наносов  $p_S$  кг/(м·с) на плотность донных отложений  $\rho_{отл}$  кг/м<sup>3</sup>, он получает объемное выражение расхода наносов  $p$  м<sup>3</sup>/(м·с). Эта величина в его схеме характеризует перенос грунта, имеющего указанную плотность, из зон размыва в зону намыва. Экснер составляет баланс объемов твердого материала для выделенного в потоке контрольного объема длиной  $\Delta x$ , шириной 1 м и высотой, равной полной глубине потока. В контрольный объем за время  $\Delta t$  на единицу ширины поступает следующее количество твердого материала:

$$\frac{p_S}{\rho_{отл}} \Delta t,$$

а из объема выходит

$$\frac{1}{\rho_{отл}} \left( p_s - \frac{dp_s}{dx} \Delta x \right) \Delta t. \quad (2.122)$$

При  $(dp_s/dx) < 0$  дно на участке  $\Delta x$  намывается, а при  $(dp_s/dx) > 0$  размывается. Поднятие или опускание дна выражается величиной

$$\frac{dz}{dt} \Delta x \Delta t,$$

где  $z$  — высотная отметка средней линии дна на участке  $\Delta x$ . Составляя уравнение баланса, получаем

$$\frac{1}{\rho_{отл}} \cdot \frac{dp_s}{dx} + \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.123)$$

Экснер принимает далее, что расход наносов пропорционален скорости потока в первой степени, т. е.

$$p_s = kv_{cp}. \quad (2.124)$$

Такое предположение не отвечает результатам ни теоретических, ни экспериментальных исследований и ведет к неправильности конечной формулы рассматриваемого решения. Подставляя равенство (2.124) в уравнение баланса, Экснер находит

$$\frac{k}{\rho_{отл}} \cdot \frac{dv_{cp}}{dx} + \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.125)$$

В процессе формирования и перемещения гряд меняется глубина потока  $H$ , которую можно выразить разностью

$$H = L - z, \quad (2.126)$$

где  $L$  — расстояние между свободной поверхностью потока и параллельной ей плоскостью сравнения, расположенной ниже дна;  $z$  — расстояние от поверхности сравнения до дна. Условие постоянства элементарного расхода воды  $q$  определится зависимостью

$$q = v_{cp}(L - z) = \text{const}. \quad (2.127)$$

Учитывая это равенство, получим

$$\frac{dz}{dt} + \frac{kq}{\rho_{отл}(L - z)^2} \frac{dz}{dx} = 0. \quad (2.128)$$

Экснер принимает, что в начальный момент (при  $t = 0$ ) продольный профиль дна имел форму, определяемую уравнением

$$z = a \cos \frac{2\pi x}{l_r}, \quad (2.129)$$

где  $l_r$  — длина гряды;  $a$  — ее амплитуда, равная половине высоты гряды  $h_r$ .

Решая дифференциальное уравнение при граничном условии (2.129), Экснер получает следующую зависимость, определяющую деформацию гряды:

$$z = \frac{h_r}{2} \cos \frac{2\pi}{l_r} \left( x - \frac{kq}{\rho_{отл} (L-z)^2} t \right). \quad (2.130)$$

И. И. Леви [85] пересмотрел решение Экснера, приняв для элементарного расхода наносов зависимость вида

$$p_s = k_1 v_{ср}^4 q. \quad (2.131)$$

Решение Леви удобно несколько видоизменить, взяв за исходное уравнение деформации (2.123) и начальное условие (2.129). При этом получаем следующее уравнение смещения гряды, принципиально совпадающее с уравнением, полученным Леви:

$$z = \frac{h_r}{2} \cos \frac{2\pi}{l_r} \left( x - \frac{k_0 q}{\rho_{отл} (Z-z)^5} t \right). \quad (2.132)$$

М. А. Великанов [44, 49] связал происхождение гряд с наличием макромасштабной турбулентности. По этой теории плоское дно под воздействием низкочастотных пульсаций скорости должно принять грядовую форму. В 1948 г. В. М. Маккавеев на основе изучения колебательных процессов в турбулентном потоке рассмотрел задачу об образовании донного рельефа с периодически повторяющимися формами. В 1953 г. теоретическая модель формирования гряд предложена Ф. И. Франклем, а в 1963 и 1969 гг. — Кеннеди. Ими сделана попытка установить причину возникновения периодических структурных форм на дне и объяснить процесс их образования. Указанные авторы видят эту причину в особенностях внутренней структуры потока, но по-разному подходят к решению поставленной задачи.

Остановимся кратко на разработках М. А. Великанова. Предлагаемая им теоретическая модель образования песчаных волн претерпела некоторые изменения, но основная ее идея сохранилась во всех его работах, посвященных этому вопросу, вплоть до последней монографии 1958 г. Работы Великанова не завершились созданием способа расчета параметров донных гряд, поэтому не будем касаться деталей его теоретической модели, а рассмотрим лишь основную идею теории.

Великанов считает, что причину формирования донно-грядового рельефа на первоначально ровной поверхности дна следует искать в особенностях турбулентной структуры потока, поэтому при построении теоретической модели формирования донных гряд необходимо исходить из анализа спектра турбулентной пульсации скоростей, в особенности его низкочастотной части. Низкочастотные пульсации связаны с крупными структурными турбулентными образованиями, имеющими размеры того же порядка, что и глубина потока. Низкочастотные пульсации

способны вызвать наиболее интенсивное перемещение частиц наносов. Статистическое распределение скоростей (или их пульсаций) он принимает по закону нормального распределения Гаусса, что, как указывалось в начале настоящей книги, довольно близко к действительности.

Великанов исследует распределение коэффициента корреляции  $r$  между мгновенными значениями скоростей в двух точках потока, расположенных на его продольной оси  $x$ . Корреляционная функция  $r(x)$  обнаруживает определенную периодичность. Именно этим в конечном счете Великанов объясняет возникновение периодических форм на поверхности деформируемого дна.

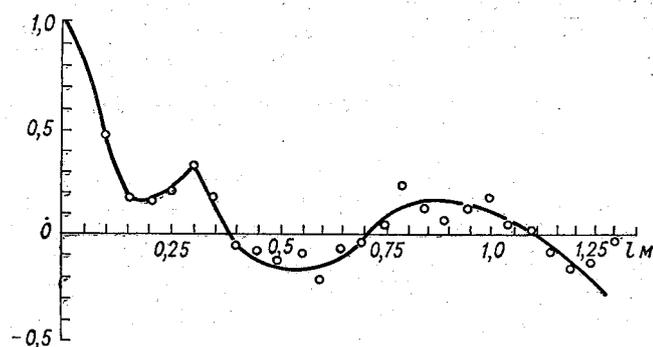


Рис. 14. Корреляция отметок дна вдоль потока (по Н. А. Михайловой).

На рис. 14 изображена корреляционная функция, полученная Н. А. Михайловой [113] экспериментально в лабораторном лотке с плоским дном. Как видим, функция достаточно определенно обнаруживает некоторую периодичность. Для конкретного объяснения процесса формирования гряды Великанов назначает начальный створ при  $x = 0$  и, начиная от него, исследует корреляционную функцию  $r(x)$ , полагая, что она относится к скоростям в придонном слое потока. Основываясь на предположении Б. А. Фидмана, Великанов записывает корреляционную функцию в следующем виде:

$$r(x) = \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad (2.133)$$

где  $\omega$  — условная характеристика частоты пульсации, определяемая числом турбулентных образований на единице длины продольной координаты  $x$ . Очевидно, что  $\omega$  связана с линейными размерами  $\lambda$  вихревых турбулентных образований следующей простой зависимостью:

$$\omega = \lambda^{-1}. \quad (2.134)$$

Великанов принимает, что положение начального створа  $x = 0$  строго зафиксировано в потоке и от него строит функцию  $r(x)$ . При  $x = 0$  эта функция дает  $r = 1$ , далее кривая  $r(x)$  снижается и при  $x = x_0 = \frac{\pi\lambda}{2}$  проходит через нуль в область отрицательных значений, затем она вновь поднимается и пересекает нулевое значение при  $x = \pi\lambda$ . Он делает вывод, что в начальном створе в рассматриваемый момент времени можно ожидать размыв дна, а на расстоянии  $x > \frac{\pi\lambda}{2}$  вероятен намыв. Таким образом формируется волнообразная поверхность дна.

Великанов указывает, что начальный створ для анализа донно-грядового процесса должен выбираться в натуре во вполне определенном месте, где происходит резкое изменение скоростного режима потока, например на перегибе кривизны русла. С подобной трактовкой начальных условий рассматриваемой задачи согласиться нельзя. Дело обстоит гораздо проще, так как сами гряды и любые неровности на поверхности русла служат источниками возмущений. Каждый из них может рассматриваться как начальный для нижерасположенных волн. Скорости перемещения гряд во много раз меньше скорости течения, поэтому такой источник возмущения может трактоваться как неподвижный по отношению к потоку и приниматься за начало отсчета.

Великанов рассматривает также и задачу о скорости изменения высотных отметок  $z$  поверхности русла, происходящих за счет перемещения гряд. При этом принимается условие однородности состава донных наносов, характеризующихся размером  $d$ . В качестве исходного выражения в решении применяется формула элементарного расхода влекомого наносов, записываемая в виде

$$p_{вд} = kd \int_0^{\infty} \eta(v) v dv, \quad (2.135)$$

где  $k$  — множитель, учитывающий способ выражения (объемное, весовое) и размерность расхода наносов;  $v$  — скорость потока у дна;  $\eta(v)$  — коэффициент сплошности движения частиц, рассматриваемый как функция скорости и учитывающий лишь ту часть частиц на дне потока, которая движется со скоростями, заключенными в интервале от  $v$  до  $v + dv$ . В такой трактовке коэффициент  $\eta$  имеет смысл функции вероятности.

Учитывая далее, что распределение мгновенных скоростей можно принять по Гауссу, Великанов приходит к следующему виду выражения для  $p_{вд}$ :

$$p_{вд} = K \int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}} (a\mu - \beta) d\mu, \quad (2.136)$$

где  $K$  — обобщающий постоянный множитель;  $\alpha$  — величина, зависящая от коэффициента корреляции  $r$  между пульсирующими скоростями в двух точках потока и от среднего квадратического отклонения пульсационной скорости  $\sigma_v$ ; переменная  $\mu$  зависит от тех же величин, а также от мгновенных скоростей в точках  $x=0$  и  $x=x$ ; параметр  $\mu_0$  зависит от всех, входящих в  $\mu$  величин и, кроме того, от осредненной скорости течения;  $\beta$  определяется разностью начальной скорости движения частиц  $v_{нач}$  и средней скорости потока с учетом мгновенной пульсационной скорости, умноженной на коэффициент корреляции  $r$ .

Подставляя в уравнение баланса производную  $\partial p_{вп} / \partial x$ , Великанов получает

$$\frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{\partial p_{вп}}{\partial x} = - K d \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mu_0}^{\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}} (\alpha\mu - \beta) d\mu. \quad (2.137)$$

Великанов указывает, что им был выполнен численный анализ этого уравнения и получены качественно правдоподобные результаты.

В 1948 г. В. М. Маккавеев получил уравнение волновой поверхности дна на основе изучения колебательных движений турбулентного потока при использовании общего дифференциального уравнения вида

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = gI(x) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.138)$$

при граничном условии

$$I(x) = I_0 + I_* \cos nx, \quad (2.139)$$

где  $I(x)$  — уклон свободной поверхности, представленный в форме периодической функции от расстояния  $x$ . Координатная ось  $y$  направлена от свободной поверхности вниз.

Решение Маккавеева трудно использовать для непосредственных расчетов; впрочем, оно должно рассматриваться как имеющее чисто методический характер.

Большой интерес могла бы представлять теоретическая модель формирования донных гряд, разработанная в 1953 г. Ф. И. Франклем. Однако в его решении повторена ошибка Экнера, принявшего расход наносов пропорциональным первой степени скорости течения. Кроме того, Франкль придал пульсационным скоростям турбулентного потока смысл периодических отклонений, подчиняющихся закономерностям вида:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= A_0 e^{-a} \cos \xi, \\ v'_y &= - A_0 e^{-a} \sin \xi. \end{aligned} \right\} \quad (2.140)$$

Рассматривая поток как потенциальный и используя метод комплексных переменных, Франкль пришел к следующему выра-

жению скорости перемещения песчаных волн в потоках очень большой глубины:

$$c_{г\infty} = v_{ср} \left( 1 - \frac{1}{1 + 2\pi \frac{k}{l}} \right), \quad (2.141)$$

где  $l$  — длина волны;  $k$  — коэффициент в формуле расхода наносов, представленной Франклем в виде

$$p_{вл} = \bar{p}_{вл} + kv'_x. \quad (2.142)$$

Здесь  $\bar{p}_{вл}$  — элементарный расход влекомых наносов, рассматриваемый как величина постоянная, характерная для данного потока и определяемая его осредненными характеристиками.

Для потоков конечной глубины Франкль дает весьма сложное выражение скорости движения гряд, содержащее величину  $c_{г\infty}$  в виде параметра.

В числе других новых крупных теоретических исследований процесса формирования волнообразной поверхности дна потоков следует отметить работы Дж. Кеннеди [205], И. Танака [181], Т. Хаяши [199] и А. Мерцера [207], которые, подобно В. М. Макавееву, используют для решения поставленной задачи представление о наличии периодических колебательных процессов в русловом потоке. Из этих работ остановимся только на исследованиях Дж. Кеннеди [205], который, как и Франкль, использует модель потенциального течения двумерного руслового потока. Он принимает, что свободная поверхность потока характеризуется наличием гармонических волн малой амплитуды. Кеннеди принимает далее, что длина донных гряд  $l_T$  и скорость их перемещения  $c_T$  соответственно равны длине и скорости поверхностных волн. Линия тока на границе потока и дна принимается синусоидальной, при этом используется добавочное изображение об отрыве течений за гребнями гряд. Чтобы получить необходимую скорость перемещения волн на поверхности потока, имеющих амплитуду  $A_0$ , Кеннеди вводит некоторую условную глубину  $H_0$ , отличающуюся от истинной средней глубины потока  $H$ .

Для продольных профилей свободной поверхности и дна записываются выражения в виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi(x, t), \\ y &= -H + \Psi(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.143)$$

где  $t$  — время;  $x$  — продольная ось;  $y$  — вертикальная ось, направленная вверх и имеющая начало на линии невозмущенной поверхности потока. Для дна принимается, как указано выше, синусоида, представляемая в виде

$$\Psi(x, t) = a(t) \sin k(x - c_T t). \quad (2.144)$$

Здесь  $a$  — амплитуда донной волны (гряды);  $c_T$  — скорость ее перемещения;  $k = 2\pi/l_T$ , где  $l_T$  — длина гряды.

В решении Кеннеди, основанном на теории волн малой амплитуды, используется следующее, отвечающее постоянной амплитуде поверхностных волн  $A_0$  выражение:

$$\xi = A_0 \sin k(x - c_T t). \quad (2.145)$$

Для рассматриваемого случая потенциального движения уравнение неразрывности течения записывается в форме уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.146)$$

Для свободной поверхности принимаются следующие граничные условия:

$$v_{cp} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (2.147)$$

$$g\xi + v_{cp} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (2.148)$$

Для дна принимается кинематическое соотношение в виде

$$v_{cp} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.149)$$

и уравнение неразрывности для твердого материала

$$\frac{1}{\rho_{отл}} \frac{\partial p_s}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0. \quad (2.150)$$

В этих уравнениях  $v_{cp}$  — средняя скорость течения потока;  $p_s$  — элементарный расход наносов.

Скорость перемещения поверхностных волн относительно неподвижной системы координат равна разности ( $v_{cp} - c_T$ ) и направлена в сторону, противоположную течению, т. е. противоположную положительной координате  $x$ . Ввиду малости  $c_T$  по сравнению с  $v_{cp}$  автор считает, что с достаточным приближением скорость поверхностной волны можно принять равной минус  $v_{cp}$ .

Далее выполняется решение уравнения Лапласа с помощью метода комплексных переменных при использовании граничных условий (2.147) — (2.149). Учитывается также зависимость скорости распространения поверхностных волн, численно равной  $v_{cp}$ , от условной глубины  $H_0$ .

$$v_{cp}^2 = \frac{g}{k} \operatorname{th} kH_0. \quad (2.151)$$

Это выражение доказывается в теории волн малой амплитуды. Решение уравнения Лапласа позволяет получить соотноше-

ние между амплитудой  $a(t)$  волн на дне и на поверхности  $A(t)$  потока. Обращая внимание на то, что фигурирующая в получаемом уравнении величина  $kv_{\text{ср}}^2/g$  может быть выражена через критериальное число Фруда  $Fr$ , т. е.

$$\frac{kv_{\text{ср}}^2}{g} = kH Fr, \quad (2.152)$$

где

$$Fr = \frac{v_{\text{ср}}^2}{gH}, \quad (2.153)$$

Кеннеди записывает следующую зависимость:

$$a(t) = A(t) \left( 1 - \frac{\text{th } kH}{kH Fr} \right) \text{ch } kH. \quad (2.154)$$

Чтобы получить выражение амплитуды донных гряд и скорости их перемещения, необходимо использовать граничное условие (2.150), учитывающее перераспределение наносов между потоком и руслом. Кеннеди записывает весьма сложное выражение расхода наносов, ставя его в зависимость от периодических колебаний скорости и глубины потока. В общем виде эта зависимость может быть представлена как функция многих переменных

$$p_s(x, t) = f(m, v_{\text{ср}}, k, a(t), \delta, c_r, t, x). \quad (2.155)$$

Здесь  $\delta$  — постоянная, характеризующая фазовый сдвиг расхода наносов относительно скорости течения;  $m$  — постоянная, связывающая средний расход наносов  $p_s$  со средней скоростью потока

$$p_s = mv_{\text{ср}}^2. \quad (2.156)$$

В результате решения Кеннеди получает следующие зависимости для вычисления амплитуды донных гряд и скорости их перемещения:

$$a(t) = A(0) \frac{\text{sh } k(H_0 - H)}{\text{sh } kH_0} \exp \left( t \frac{np_s k^2}{\rho_{\text{отл}}} \text{cth } k(H_0 - H) \right) \sin k\delta, \quad (2.157)$$

$$c_r = - \left( \Psi p_s \frac{k}{\rho_{\text{отл}}} \right) \text{cth } k(H_0 - H) \cos k\delta, \quad (2.158)$$

где  $A(0)$  — амплитуда колебаний, распространяющихся на свободной поверхности потока для некоторого начального момента времени.

Практическое использование формул Кеннеди затруднительно не только ввиду их громоздкости, но и вследствие недостаточной определенности входящих в них величин. Так, например, сдвиг  $\delta$  Кеннеди пытается представить на основании самых

общих соображений как величину, пропорциональную  $H$ ; однако, записывая соотношение

$$\delta = jH, \quad (2.159)$$

он отмечает, что  $j$  зависит от свойств жидкости, глубины потока и скорости его течения.

Весьма условной является также и величина  $H_0$ , поскольку характер распространения волн на поверхности потенциального и турбулентного потоков существенно различается. Кроме того, в решении не учитывается влияние уклона свободной поверхности на распространение волн.

Путем дальнейших преобразований и упрощений Кеннеди находит расчетные формулы для длины гряды  $l_r$  и ее высоты  $h_r = 2a$ . Первая из них представлена в виде следующей неявной функции:

$$\eta = \frac{\text{Fr} \left( \text{sh}^2 \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta} \right)}{\text{ch}^2 \frac{1}{\eta}}, \quad (2.160)$$

где

$$\eta = \frac{l_r}{2\pi H}, \quad (2.161)$$

а вторая — в виде функции  $h_r = \varphi(l_r, H, \text{Fr}, A)$ , где  $A$  — амплитуда волны на поверхности жидкости. Последняя величина неизвестна, поэтому формула  $h_r$  практически неприменима.

Формула для параметра  $l_r$  может быть выражена графически. В этом случае ее применение не встречает затруднений, однако для речных потоков эта формула не дает какого-либо соответствия натурным данным и поэтому не может считаться расчетной.

Отдавая должное определенной логической последовательности решения Кеннеди, мы должны вместе с тем отметить и его существенные недостатки. Некоторые из недостатков указаны выше. Одним из грубых упущений в теории Кеннеди следует считать использование слишком элементарного вида зависимости расхода наносов (2.156), в которой не учитывается даже крупность транспортируемого материала и сопротивление русла.

Неполнота и несовершенство существующих теоретических моделей процесса формирования донных гряд приводит к необходимости достаточно внимательного отношения к эмпирическим исследованиям донно-грядовых процессов и предлагаемым эмпирическим формулам. В связи с этим необходимо особо отметить детальные экспериментальные исследования, результаты которых положены в основу эмпирических формул параметров гряд. К такого рода работам относятся исследования Джильберта [197], В. Н. Гончарова [25], В. Ф. Пушкарева [129], В. С. Кнороза [69], Н. А. Михайловой [113], Н. С. Знаменской

[47], Альбертсона и К. Гарде [196], Д. Аллена [180], В. К. Дебольского [42], Ф. Сентюрка [220], Д. Саймонса [223] и др.

Большую роль в познании процессов формирования донных гряд, как отмечалось в начале настоящего раздела, сыграли натурные исследования, выполненные на реках. Непосредственно для разработок расчетных зависимостей параметров гряд использовались материалы наблюдений Б. Колби и К. Хемпфри [187] на р. Ниобрара, Х. Эйнштейна и Н. Чина [193] на р. Миссури, Ю. М. Корчохи [77] на р. Полометь, Б. Ф. Смищенко [152] на ряде крупных рек ЕТС и др.

Из числа наиболее известных эмпирических формул параметров донных гряд: высота  $h_r$ , длина  $l_r$  и скорость перемещения  $c_r$  — приведем следующие.

Формулы В. Ф. Пушкарева:

$$h_r = 0,00445 \frac{v_{cp}^2}{gd} H + 0,049H, \quad (2.162)$$

$$c_r = 0,0188 \frac{v_{cp}^3}{gH} - 0,0292 \frac{gd}{v_{cp}}. \quad (2.163)$$

Здесь  $H$  — глубина потока;  $v_{cp}$  — его средняя скорость;  $d_{cp}$  — средний диаметр частиц наносов. Все линейные величины в этих, как и в последующих, формулах выражены в метрах, скорость — в м/с.

Формулы В. С. Кнороза:

$$h_r = 3,5 \frac{R}{\lg \frac{R}{d} + 6} \left( \frac{v_{cp} - v_{нач}}{v_{cp}} \right)^{2/3}, \quad (2.164)$$

$$l_r = 0,83h_r \left( \lg \frac{R}{d} + 6 \right) \left( \frac{v_{cp}}{v_{cp} - v_{нач}} \right)^{5/3}, \quad (2.165)$$

$$c_r = 0,4 \sqrt{gd} \left( \frac{v_{cp} - v_{нач}}{\sqrt{gR}} \right)^{5/2}. \quad (2.166)$$

В этих формулах  $R$  — гидравлический радиус потока;  $v_{нач}$  — начальная скорость движения частицы.

Формулы Ю. М. Корчохи:

$$h_r = 1,88H \left( \frac{v_{cp}}{u} \right)^{0,165} - 2,30H, \quad (2.167)$$

используемая при  $(v_{cp}/u) \leq 12$ ,

$$h_r = 50H \left( \frac{v_{cp}}{u} \right)^{-1,65} e^{-0,022 \frac{v_{cp}}{u}}, \quad (2.168)$$

рекомендуемая автором для условий  $(v_{\text{ср}}/u) > 12$ , где  $u$  — гидравлическая крупность наносов среднего размера, формирующих гряды;

$$c_r = 0,0114 v_{\text{ср}} \sqrt{\frac{d_{\text{ср}}}{h_r}} - 0,00018. \quad (2.169)$$

Заметим, что, в отличие от первоначальной редакции формулы Корчохи, где  $c_r$  давались в м/мин, здесь эта величина, как и в других формулах, выражена в м/с.

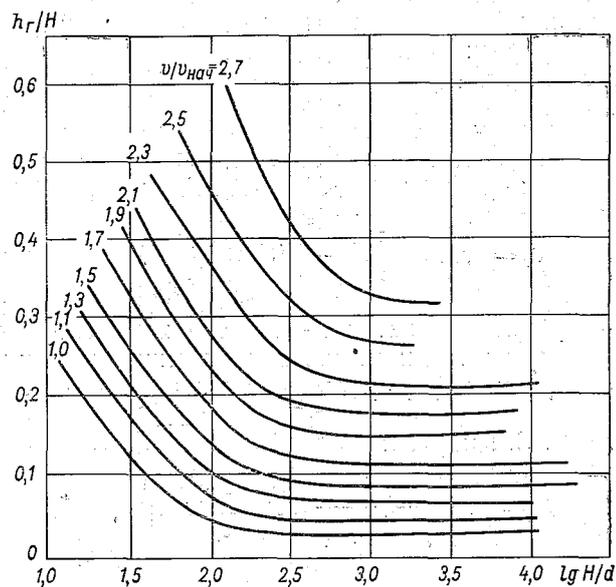


Рис. 15. Зависимость относительной высоты гряды  $h_r/H$  от безразмерных величин  $v/v_{\text{нач}}$  и  $H/d$  [46].

Эмпирическая формула Д. Аллена [180] имеет вид

$$l_r = 6,4 b_r \left( \frac{h_d}{H} Fr \right)^{0,27}, \quad (2.170)$$

где  $b_r$  — ширина гряды (рифеля);  $Fr$  — число Фруда, вычисляемое для потока в целом. В отношении определения  $b_r$  полной ясности не имеется.

В 1963 г. Н. С. Знаменская выполнила обобщение многочисленных данных лабораторного изучения донных гряд, включая данные собственных исследований. Обобщение позволило ей построить расчетные графики параметров донных гряд (рис. 15, 16). Один из них (рис. 16) является классификационным графиком, включающим такие формы донного рельефа, как плоские гряды, рифеля, гладкую фазу, антидюны и т. д.

Первый из графиков Знаменской позволяет по величине отношения  $H/d$  при разных относительных скоростях  $v/v_{нач}$  получать относительную высоту гряды. Начальная скорость  $v_{нач}$  движения частиц, по рекомендации Знаменской, вычисляется по формуле Г. И. Шамова, приведенной выше.

По графикам, помещенным на рис. 15, можно получить параметр крутизны гряды  $h_r/l_r$  и, зная  $h_r$ , вычислить ее длину. Для

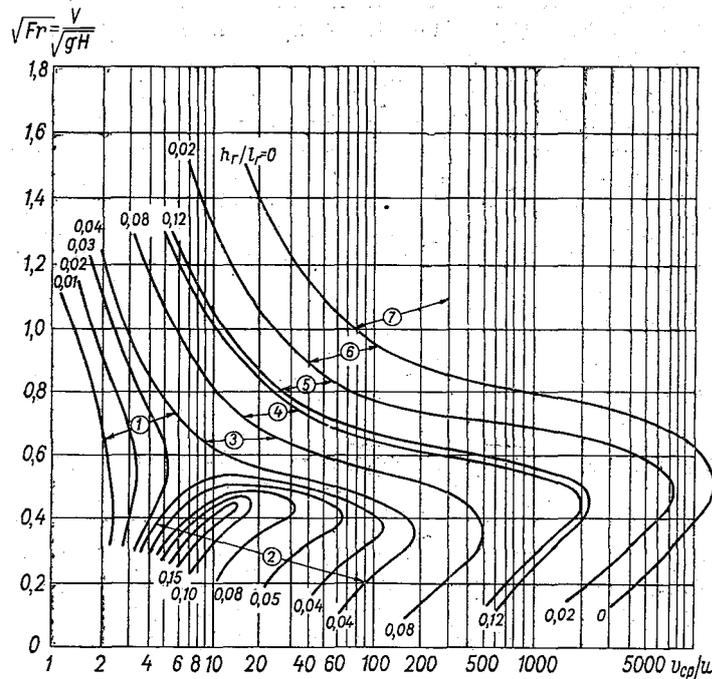


Рис. 16. Зависимость параметра крутизны гряд  $h_r/l_r$  от корня квадратного из числа Фруда и безразмерной величины  $v_{cp}/u$  [46].

Классы донных форм: 1 — плоские гряды, 2 — рифели, 3 — перекошенные гряды, 4 — крутые гряды, 5 — область смыва гряд, 6 — гладкая фаза, 7 — антидюны.

скорости перемещения гряд Знаменская предлагает следующую приближенную формулу:

$$c_r = 0,025 \frac{h_r}{l_r}, \quad (2.171)$$

где  $c_r$  — в м/с.

В одной из последних работ Знаменская [47] рассматривает вопрос о масштабах русловых форм и соотношении русловых образований в натуральных условиях и в лабораторных лотках. Разделение русловых форм на классы по масштабам позволяет

Знаменской внести усовершенствование в свою методику расчета параметров гряд. Она отмечает, что в натуральных условиях можно достаточно четко выделить сравнительно крупные русловые образования (так называемые мезоформы): бары, побочни, осередки и т. п.—и мелкие образования (микроформы) — рифели. Существует, кроме того, промежуточный класс форм — собственно гряды, которые, как она принимает, наиболее тесно связаны с транспортом влекомых наносов и особенно существенно влияют на гидравлическое сопротивление русла. Знаменская находит аналоги и в лотковых донных образованиях, выделяя длинные гряды, занимающие всю ширину потока (мезоформы), и рифели, которые она относит к классу микроформ. Последние, вероятно, точнее было бы отнести к классу промежуточных русловых форм, а именно гряд. По существу, Знаменская так и поступает, когда переходит к усовершенствованию расчетной методики. Она указывает, что длины  $l_r$  и скорости  $c_r$  гряд, полученные по ее графикам и формулам, нуждаются в уточнении, заключающемся во введении масштабного коэффициента вида

$$\varphi = k \frac{\tilde{B}_л}{\tilde{B}_н}, \quad (2.172)$$

где относительные ширины русла  $\tilde{B} = \frac{B}{H}$  соответственно для лотка (л) и природы (н). Для условий лотка Знаменская считает допустимым принять  $\tilde{B}_л = 10$ . Коэффициент  $k$  она получает в пределах 1,0—1,3 и в расчетной формуле берет  $k = 1$ .

При использовании графиков Знаменской для получения  $l_r$  масштабный коэффициент вводится как делитель, т. е.

$$l_{r, \text{испр}} = \frac{l_r}{\varphi}. \quad (2.173)$$

Скорость гряды, вычисленная по формуле Знаменской, умножается на  $\varphi$ , т. е.

$$c_{r, \text{испр}} = \varphi c_r. \quad (2.174)$$

Рассмотрим один из путей полуэмпирического решения задачи о длине гряд, предложенный А. В. Караушевым [50].

Турбулентный поток можно представить себе состоящим из многочисленных вихревых образований различного порядка (вихревых индивидуумов, пульсационных объемов), представляющих собой структурные элементы турбулентности. С точки зрения процессов формирования русловых структур наибольший интерес представляют самые мощные вихревые образования.

Вихревые образования в потоке проходят две стадии развития: стадию формирования, характеризующуюся увеличением

интенсивности вихря, и стадию отмирания, когда вихрь постепенно утрачивает свою индивидуальность, а входящие в его состав водные массы, присоединяясь к формирующимся соседним вихрям, оказываются источником их питания. Главной зоной формирования крупных структурных элементов турбулентности является придонная область потока.

Рассмотрим перемещение крупных структурных элементов потока в вертикальной плоскости, параллельной его продольной оси. Отрываясь от дна, эти элементы начинают свой цикл развития, перемещаясь при этом к свободной поверхности. В области выхода вихрей к поверхности образуются местные ее поднятия, вспучивания, сообщающие поднявшимся сюда водным массам импульс движения в обратном направлении, т. е. в сторону дна. На всем пути от дна к поверхности и от поверхности ко дну скорость вертикального перемещения вихря постепенно снижается, его объем сперва увеличивается, а затем в процессе отмирания уменьшается.

Если дно потока сложено подвижным материалом, то элементы турбулентной структуры потока оставляют на дне свой отпечаток в виде начальных структурных форм. Наличие последних в свою очередь приводит к тому, что области отрыва вихрей от дна и области их контакта при опускании оказываются приуроченными к определенным зонам дна, что способствует полному развитию русловых форм и пространственному «закреплению» восходящих и нисходящих вихрей. Подобное закрепление надо трактовать как вероятностное.

Наиболее мощные вихревые индивидуумы поднимаются от поверхности дна, обладая вертикальной пульсационной скоростью весьма редкой повторяемости  $w_{\text{макс}}$ . Как отмечено выше, в процессе перемещения индивидуумов вверх и затем вниз эта скорость снижается. В среднем абсолютное значение скорости вертикального перемещения рассматриваемых структур равно  $k_1 w_{\text{макс}}$ , где  $k_1 < 1$ .

Время перемещения объема от дна к поверхности и обратно выразится зависимостью

$$t_{\text{в}} = \frac{k_2 2H}{k_1 w_{\text{макс}}}, \quad (2.175)$$

где  $k_2$  — коэффициент, меньший единицы, учитывающий, что путь центра тяжести перемещающегося объема фактически несколько меньше  $2H$ ;  $H$  — глубина потока, измеренная от поверхности до средней отметки дна.

Полагая, что горизонтальное перемещение вихревого объема можно характеризовать средней скоростью потока  $v_{\text{ср}}$ , получаем следующую зависимость для длины гряды:

$$l_{\text{г}} = v_{\text{ср}} t_{\text{в}}. \quad (2.176)$$

Учитывая выражение (2.175), записываем

$$l_r = \frac{2Hv_{\text{ср}}}{k_0 \omega_{\text{макс}}}, \quad (2.177)$$

где  $k_0 = \frac{k_1}{k_2}$ .

Для установления приближенной зависимости между  $\omega_{\text{макс}}$  и средним абсолютным значением вертикальной составляющей пульсационной скорости  $\omega$  воспользуемся кривой равной вероятности. Принимая при этом  $\omega_{\text{макс}}$ , отвечающим  $\omega$  малой обеспеченности, записываем

$$\omega_{\text{макс}} = n\omega. \quad (2.178)$$

При изучении наносов целесообразно считать  $n = 3 \div 4$ . Возьмем среднее значение, т. е.  $n = 3,5$ , и применим следующую формулу для  $\omega$ :

$$\omega = \frac{v_{\text{ср}}}{\sqrt{N}}; \quad (2.179)$$

здесь  $N$  — безразмерный параметр, зависящий от коэффициента Шези  $C$ .

Подставляя равенства (2.178) и (2.179) в формулу (2.177), находим

$$l_r = \frac{2H\sqrt{N}}{3,5k_0}. \quad (2.180)$$

В таком виде формула была подвергнута проверке на большом натурном и экспериментальном материале, относящемся к различным условиям существования гряд. Одновременно было установлено численное значение коэффициента  $k_0$ . Использованы данные по грядам, полученные Н. М. Капитоновым на р. Дон в нижнем бьефе Цимлянской ГЭС, а также данные Ю. М. Корчохи по р. Полометь, Н. М. Кулеминой по р. Днепр и Б. Ф. Снищенко по крупным рекам. Кроме того, были использованы данные лабораторных экспериментов З. Д. Копалиани [76].

Коэффициент корреляции между измеренными и вычисленными значениями  $l_r$  оказался равным 0,88. Существенные отклонения от средней линии связи измеренных и вычисленных величин обнаруживают только отдельные точки.

Коэффициент  $k_0$  в формуле (2.178) получен равным 1,3, поэтому формула может быть записана в виде

$$l_r = 0,44H\sqrt{N}. \quad (2.181)$$

Ниже будет показано, что эта формула позволяет получить достаточно надежный результат для условий речных потоков.