

7. Запишите дифференциальные уравнения установившегося неравномерного плавно изменяющегося движения грунтовых вод при линейном законе фильтрации.

8. Какие формы кривых свободной поверхности при движении грунтовых вод возможны?

9. По каким формулам определяются длины кривых свободной поверхности для ламинарной фильтрации?

10. Как определяется расход воды, притекающей к совершенной водозаборной скважине?

11. Как определяется дебит совершенной артезианской скважины?

12. Какой вид имеет уравнение свободной поверхности грунтового потока при безнапорном плавно изменяющемся движении грунтовых вод по горизонтальному водонепроницаемому водоупору к горизонтальной водозаборной галерее?

13. Каковы основные особенности фильтрации из каналов?

14. Опишите основные явления притока вод к горизонтальному дренажу.

Глава 28

ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

28.1. Понятие о потенциальном движении жидкости.

Потенциал скорости

В гл. 3 были установлены признаки потенциального движения. Следует отметить, что движение, строго соответствующее условиям безвихревого (потенциального) движения, в природе и технике отсутствует. Но в ряде случаев можно применить понятие *п о т е н ц и а л ь н о е д в и ж е н и е*, условно идеализируя реально происходящее движение вязкой жидкости. Во многих задачах значительная часть области, занятой движущейся жидкостью, находится в условиях практически безвихревого движения. При обтекании твердых тел реальной жидкостью всю область движения делят на две: тонкий пограничный слой, примыкающий непосредственно к телу, и внешнюю область, где пренебрегают силами вязкости и движение считают потенциальным. Как будет показано ниже, движение жидкости через оголовок водослива и из-под затвора при больших скоростях также можно считать потенциальным. Движение вязкой жидкости в пористой среде, если рассматривать индивидуально поровые каналы, является вихревым, с уменьшающимися к стенкам местными скоростями в каждом поровом канале. Но, рассматривая осредненное по пространству, как было указано в гл. 27, движение (при линейном законе фильтрации), справедливо можно считать его потенциальным.

Как было показано в гл. 3, потенциальное движение характеризуется отсутствием вращательного (вихревого) движения частиц. При этом движение частиц складывается только из поступательного и деформационного видов движения. Итак, движение будет

потенциальным, если все компоненты угловой скорости частиц ω равны нулю, следовательно, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega = 0$. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

Рассматривается установившееся движение, не зависящее от времени.

Существование системы (28.1) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы имелась некоторая функция $\Phi(x, y, z)$, связанная с компонентами скорости следующим образом:

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = -d\Phi. \quad (28.2)$$

Поскольку полный дифференциал функции Φ имеет вид

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz, \quad (28.3)$$

из сопоставления (28.2) и (28.3) можно получить

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \\ u_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ u_z &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

Функция Φ , удовлетворяющая условиям (28.4), называется потенциалом скорости (по аналогии с понятием потенциала в других разделах механики и физики). Знак минус в (28.2) и (28.4) показывает, что движение происходит из области с большим значением Φ к точкам с меньшим значением Φ . Применяются и соответствующие выражения без минуса, тогда все описание потенциального движения проводится на этой основе.

Можно рассматривать и потенциал скорости для неустановившегося движения, в этом случае время t — параметр и движение существует для каждого данного момента времени. Потенциал скорости и его две производные являются непрерывными. Так как

значение второй производной не зависит от порядка дифференцирования, то из (28.4) следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (28.5)$$

Таким образом, скорости при безвихревом движении имеют потенциал, поэтому такое движение и называется потенциальным.

Если в пространстве, занятом потенциальным потоком, выделены поверхности, все точки которых имеют одинаковые значения потенциала скорости Φ , они называются поверхностями равного потенциала (или эквипотенциальными).

Для поверхности равного потенциала согласно определению в общем случае

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \text{const} = C; \\ d\Phi &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение поверхности равного потенциала имеет в соответствии с (28.2) вид

$$u_x dx = u_y dy + u_z dz = 0. \quad (28.6)$$

Различные поверхности равного потенциала в данном потенциальном потоке характеризуются разными значениями постоянной C (C_1, C_2, \dots, C_n) (рис. 28.1).

Скорость u через потенциал скорости выражается как

$$u = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}.$$

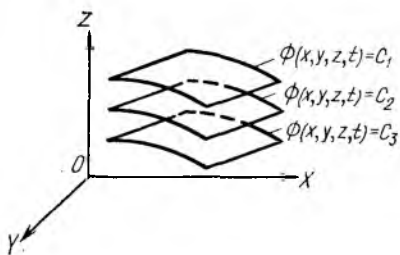


Рис. 28.1

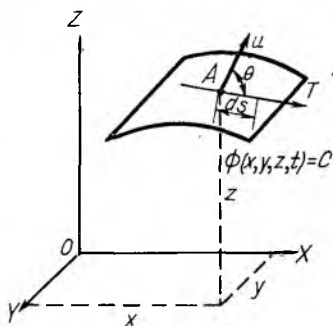


Рис. 28.2

Проекции скорости при потенциальном движении должны удовлетворять не только (28.4), но и уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Подставив (28.5) в уравнение неразрывности, получим выражение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (28.7)$$

которое называется уравнением Лапласа. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Следовательно, потенциал скорости Φ — гармоническая функция.

В гидромеханике доказывается, что в односвязной области, на границах которой значение потенциала скорости известно, может существовать одно-единственное потенциальное движение. В односвязной области в отличие от многосвязной можно любую замкнутую кривую, находящуюся в ней, стянуть непрерывным образом в точку, не выходя из границ этой области. В дальнейшем будем рассматривать потенциальное движение в односвязных областях.

Нам известно, что для описания движения жидкости необходимо знать значения u_x , u_y , u_z и давления p во всех точках пространства, где происходит описываемое движение. Для этого необходимо иметь четыре уравнения: три (28.4) и уравнение неразрывности. Уравнение Лапласа (28.7) включает в себя все указанные четыре уравнения. Поэтому, решив уравнение Лапласа для данного движения при заданных условиях на границах данной односвязной области, полностью опишем соответствующее этим условиям потенциальное движение. Поскольку уравнение Лапласа линейное, сумма двух его частных решений будет решением этого уравнения. В связи с этим при потенциальном движении справедливо применение принципа суперпозиции (наложения). Зная потенциалы скорости для некоторых видов потенциального движения и применяя принцип суперпозиции, можно находить решения для более сложных случаев движения.

Установим, как при потенциальном движении расположены линии тока по отношению к поверхностям равного потенциала. Выделим на поверхности равного потенциала точку A . Скорость движения частицы жидкости в этой точке u имеет проекции u_x , u_y , u_z . Проведем через точку A касательную T к поверхности равного потенциала (рис. 28.2). Если ds — отрезок касательной, тогда dx , dy , dz — его проекции на соответствующие оси координат. Необходимо найти угол θ между вектором скорости u в точке A и касательной T .

Вектор скорости u с осями координат составляет углы, направляющие косинусы которых

$$\cos \alpha_1 = u_x/u; \quad \cos \beta_1 = u_y/u; \quad \cos \gamma_1 = u_z/u.$$

Углы касательной с осями координат соответственно равны

$$\cos \alpha_2 = dx/ds; \quad \cos \beta_2 = dy/ds; \quad \cos \gamma_2 = dz/ds.$$

Известно, что

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2,$$

т. е.

$$\cos \theta = \frac{u_x dx + u_y dy + u_z dz}{u ds}. \quad (28.8)$$

Так как отрезок ds находится на поверхности равного потенциала, согласно (28.6)

$$\cos \theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \pi/2. \quad (28.9)$$

Помня, что векторы скорости касательны к линиям тока, видим, что при потенциальном движении линии тока (и векторы скорости) нормальны к поверхностям равного потенциала (рис. 28.2). При потенциальном движении поверхности равного потенциала являются живыми сечениями. Векторы скорости движения частиц нормальны к поверхностям равного потенциала.

Найдем потенциал скорости для движения грунтовых вод при линейном законе фильтрации. По формуле Дарси $u = -k \, dH/dt$. Тогда проекции местной скорости на оси координат равны

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -k \frac{dH}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} (kH); \\ u_y &= -k \frac{dH}{dy} = -\frac{\partial}{\partial y} (kH); \\ u_z &= -k \frac{dH}{dz} = -\frac{\partial}{\partial z} (kH). \end{aligned} \right\} \quad (28.10)$$

Удельная потенциальная энергия (пьезометрический напор) изменяется в пространстве и, как известно, равна

$$H = z + p/\rho g.$$

Сопоставляя (28.10) с (28.4), видим, что рассматриваемое осредненное (по пространству) движение грунтовых вод при линейном законе фильтрации, т. е. ламинарная фильтрация, — потенциальное движение с потенциалом скорости

$$\Phi = kH, \quad (28.11)$$

где k — коэффициент фильтрации.

28.2. Функция тока при плоском движении жидкости

Плоское потенциальное движение характеризуется тем, что скорости всех частиц жидкости параллельны одной и той же выбранной плоскости и все характеристики движения — функции только двух координат (и времени t , если движение неустановившееся).

Рассмотрим движение, происходящее в плоскостях, параллельных вертикальной координатной плоскости XOZ , причем во всех этих плоскостях характеристики движения зависят только от переменных значений x и z (рис. 28.3). Будем рассматривать часть потока с шириной в направлении оси XOZ , равной единице; условимся, что при движении жидкости, пересекающей некоторую кривую в плоскости XOZ , имеем в виду пересечение жидкостью цилиндрической поверхности с высотой, равной единице. Направляющие этой цилиндрической поверхности параллельны оси OY . Все линии на чертеже при этом — следы указанных цилиндрических поверхностей при пересечении ими плоскости XOZ .

Если рассматривается неустановившееся движение, как и прежде, считаем время t параметром и в каждый данный момент времени рассматриваемая характеристика движения — функция только координат.

Рассмотрим установившееся плоское потенциальное движение, линии тока которого, обозначенные $0-0$, $1-1$, $2-2$, $3-3$, показаны на рис. 28.4.

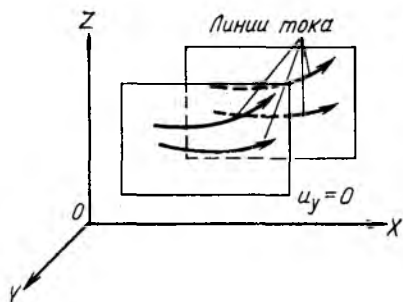
Уравнение Лапласа (28.7) и уравнение неразрывности для плоского движения примут вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad (28.12)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (28.13)$$

Введем при плоском движении такую функцию ψ , при которой проекции скорости u равны

$$u_x = - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (28.14)$$



← Рис. 28.3

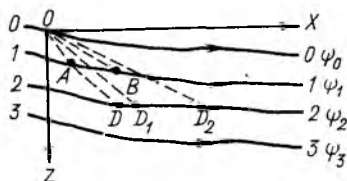


Рис. 28.4

Эта функция называется функцией тока ψ . При пространственном движении функция тока ψ в общем случае не может быть выражена, она известна только для некоторых простых случаев. Эта функция удовлетворяет уравнению неразрывности (28.13). Действительно, подставив u_x и u_z из (28.14) в (28.13), получим

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x \partial z} = 0.$$

Учитывая, что уравнение линии тока (3.7) при плоском движении имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dz}{u_z},$$

находим

$$u_z dx - u_x dz = 0.$$

Подставив сюда значение проекций скорости из (28.14), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0. \quad (28.15)$$

Так как левая часть (28.15) является полным дифференциалом от $d\psi$, т. е. $\psi = 0$, то на данной линии тока функция тока имеет постоянное значение $\psi = \text{const}$. Для различных линий тока это значение будет различным. На рис. 28.4 каждая линия тока имеет разные значения функции тока ψ . При плоском движении согласно (28.4)

$$u_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad u_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (28.16)$$

Сравнивая (28.16) с (28.14), получаем соотношения между частными производными

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (28.17)$$

Подставляя значения u_x и u_z по (28.14) во второе уравнение системы (28.1), характеризующее равенство нулю компонента угловой скорости ω_y , получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (28.18)$$

Таким образом, функция тока, так же как и потенциал скорости, удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической функцией. Функции Φ и ψ называются сопряженными (или взаимно сопряженными). Зная одну из них, можно по (28.17) найти другую.

Поскольку, как было показано, линии тока нормальны к поверхностям равного потенциала, линии тока $\psi = (x, z) = \text{const}$ и линии равного потенциала (т. е. следы поверхностей равного по-

тенциала) при плоском движении $\Phi(x, z) = \text{const}$ взаимно ортогональны. Сетка, образованная семейством линий тока и ортогональным семейством равного потенциала, называется **гидродинамической**.

Напомним, что поскольку векторы скорости являются касательными к линиям тока, перетекания жидкости через линии тока быть не может.

Наметим на рис. 28.4 первую линию тока, проходящей через начало координат. Поскольку боковое перетекание жидкости через линии тока, а также разрывы и пустоты в жидкости отсутствуют, расход, проходящий между точкой O и точками D, D_1, D_2 и т. д. на любой выбранной линии тока (в данном случае линии 2—2) через сечения OAD, OBD, OD_1, OD_2 и т. д., будет одним и тем же. Следовательно, при перемещении точки D вдоль линии тока расход, проходящий через любое сечение, соединяющее точку на данной линии тока с точкой O , не изменится и линии тока можно рассматривать как линии равных расходов (при плоском движении — удельных расходов).

Но, как известно, линии тока являются линиями равных значений функции тока.

Расход, проходящий между двумя бесконечно близко расположенными друг к другу линиями тока, равен

$$dq = d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz.$$

Тогда расход, проходящий между двумя линиями тока, равен разности значений функций тока на этих линиях тока. Условно приняв одну из линий тока нулевой, обозначим значение функции тока на ней через ψ_0 . Тогда удельный расход между любой (n -й) линией тока и нулевой линией тока

$$q_{n-0} = \psi_n - \psi_0.$$

Линии тока удобно проводить так, чтобы между двумя соседними линиями проходил один и тот же расход, т. е. чтобы разность между двумя соседними линиями тока была одной и той же. Тогда скорость обратно пропорциональна расстоянию по нормали между двумя соседними линиями тока. Поэтому при одинаковом расходе, проходящем между указанными линиями тока, сближение линий тока свидетельствует об увеличении скорости, а разрежение линий тока — об уменьшении скорости.

28.3. Граничные условия

Интегрирование уравнения Лапласа можно выполнять при определенных граничных условиях, которые зависят от вида решаемой задачи. Если бы движение было неустановившимся, необходимы были бы и начальные условия, определяющие состояние

движения в некоторый момент времени. При потенциальном движении идеальной жидкости в канале или при обтекании неподвижного твердого тела с заданной на бесконечности скоростью u_∞ граничное условие на поверхности тела

$$u_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

т. е. нормальная составляющая скорости на стенке равна нулю. При обтекании тела на бесконечности частные производные от потенциала скорости по координатам равны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_\infty \cos(\widehat{u_\infty, OX}); \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = u_\infty \cos(\widehat{u_\infty, OY});$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = u_\infty \cos(\widehat{u_\infty, OZ}).$$

Граничные условия могут быть выражены и через функции тока. Так как в идеальной жидкости любая твердая поверхность является поверхностью тока (векторы скорости касательны к ней), то условие $\psi = \text{const}$ на поверхности также является граничным. Наконец, граничным условием на свободной поверхности жидкости является постоянство давления на этой границе.

При плоском потенциальном движении грунтовых вод могут быть приняты следующие граничные условия по водонепроницаемым участкам — поверхности слабо проницаемого или непроницаемого грунта (водоупора) на границе области движения, а также по подземному контуру водонепроницаемого гидротехнического сооружения.

Водонепроницаемые участки являются линиями тока, для которых функции тока $\psi = \text{const}$, причем значения постоянной различны для каждой из границ. На линии подземного контура водонепроницаемого гидротехнического сооружения (например, бетонной плотины) функция тока $\psi = 0$, а на поверхности водоупора $\psi = q$ — удельному расходу (рис. 28.5 и 28.6).

Водопроницаемые участки [смоченные откосы земляных плотин, дно в верхнем и нижнем бьефах (при наличии воды), подводные границы дренажных каналов и т. п.] характеризуются тем, что на них давление распределяется по гидростатическому закону, т. е. $H = z + p/\rho g = \text{const}$ и соответственно $\Phi = kH = \text{const}$. Согласно ранее выведенному положению скорость нормальна к поверхностям равного давления.

В верхнем бьефе земляной плотины на рис. 28.5 $H = H_1$ и $\Phi = kH_1$, в нижнем бьефе $H = H_2$ и $\Phi = kH_2$.

Свободная поверхность грунтового потока или поверхность депрессии на рис. 28.5 характерна тем, что форма практически всегда до отыскания решения задачи не известна и ее определяют. На этой поверхности давление постоянно и равно атмосферному. Так как $\Phi = -kH =$

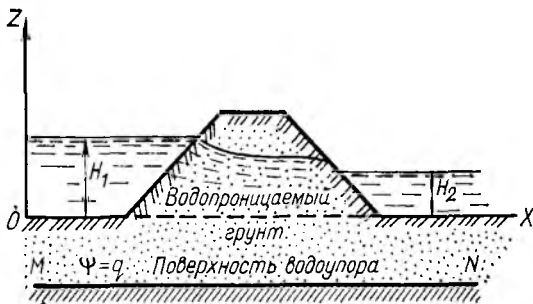


Рис. 28.5

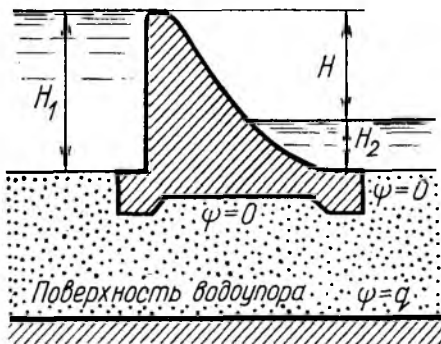


Рис. 28.6

$= -k(z + p/\rho g)$, то при $p = p_{ат} = \text{const}$ $\Phi = kz = \text{const}$, т. е. напор H и потенциал скорости Φ на свободной поверхности линейно изменяются с изменением z .

Участки высачивания могут наблюдаться при выходе кривой депрессии на низовой откос земляной плотины в точке A выше уровня воды в нижнем бьефе, а также при выходе кривой депрессии выше уровня воды в водозаборных скважинах, в дренажных каналах. На таких участках давление равно атмосферному и $H = z$, а $\Phi = kz$, т. е. H и Φ по высоте изменяются линейно на этих участках.

Отметим, что неучет участков высачивания при определении притока грунтовых вод к скважинам и дренажным каналам, так же как и в других случаях, не приводит к погрешностям, так как уравнение Дюпюи дает точные результаты. Очертания кривой депрессии, особенно вблизи скважин и дренажных каналов, с учетом высачивания должны изменяться.

28.4. Примеры потенциального движения воды в гидротехнических сооружениях

Движение может считаться потенциальным, если выполняются условия (28.1). Но можно указать практически приемлемый признак, позволяющий определить, является ли движение потенциальным (безвихревым), при изучении гидравлики гидротехнических сооружений. Если линии тока интенсивно сходятся (рис. 28.7) и распределение скорости зависит от формы ограничивающих поток стенок, а не от их шероховатости, движение можно считать при соответствующем обосновании потенциальным.

При заметно расходящихся линиях тока или в случаях, когда не выполняется указанное условие о распределении скоростей, движение не является потенциальным. Вместе с тем укажем, что в зависимости от рассматриваемой задачи один и тот же поток может считаться вихревым или потенциальным. Так (рис. 28.8), движение при подходе к отверстию в стенке большого резервуара, где скорости очень малы, — потенциальное, и это предположение справедливо при изучении, например, давления на стенку. Но для изучения расхода и коэффициента расхода движение нельзя считать потенциальным, так как в отношении этих параметров завихренность играет существенную роль.

На основе решения задач о потенциальном движении предложены, например, очертания входных частей глубинных водопускных гидротехнических сооружений.

Движение через водослив с острым ребром или практического профиля криволинейного очертания. Для движения через водослив с острым ребром, рассматривая его как плоское потенциальное установившееся движение в условиях действия только силы тяжести и атмосферного давления, можно получить решение, которое определит очертания струи (верхнюю и нижнюю границы) и тем самым координаты для водослива практического профиля (рис. 28.9).

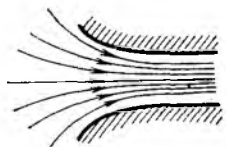


Рис. 28.7

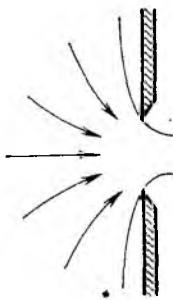


Рис. 28.8

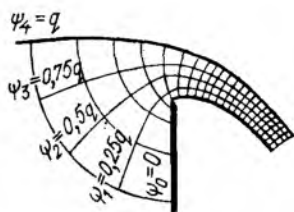


Рис. 28.9

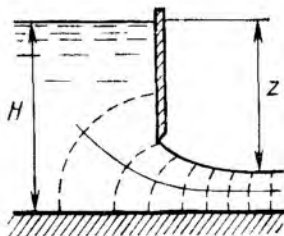


Рис. 28.10

Используем уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

где Φ и ψ — потенциал скорости и функция тока. Решение должно удовлетворять граничным условиям. Скорость частицы жидкости на верхней и нижней границах струи, находящейся под атмосферным давлением, равна

$$u = \sqrt{2gh},$$

где h — разность отметок уровня воды в верхнем бьефе и в данной точке.

Если принять нижнюю границу струи за нулевую линию тока $\psi = 0$, на верхней границе $\psi = q$ (q — удельный расход, переливающийся через водослив). Глубина перед вертикальной стенкой принята бесконечно большой, направление линий тока при подходе к водосливу радиальное. Начало очертания струи принимается в том створе, где уровень воды в верхнем бьефе еще не начал снижаться. Полученное решение позволяет построить гидродинамическую сетку, состоящую из линий тока, характеризующих удельный расход, проходящий между нулевой линией тока $\psi = 0$ и линиями тока $\psi_1 = 0,25q$; $\psi_2 = 0,5q$; $\psi_3 = 0,75q$ и $\psi_4 = q$, и линий равного потенциала (см. рис. 28.9). Координаты рассчитанной струи весьма удовлетворительно совпали с экспериментально найденными.

Отметим, что движение является потенциальным лишь вблизи оголовка водослива. На некотором расстоянии ниже оголовка начинает развиваться турбулентный пограничный слой с высокой завихренностью, который увеличивается по мере удаления вниз по направлению движения. Затем может начаться аэрация.

Истечение жидкости из-под плоского вертикального затвора. При достаточно больших скоростях считают, что движение потенциальное и, следовательно, справедливо уравнение Лапласа. Граничные условия определяются следующим образом. Скорость на

свободной поверхности $u = \sqrt{2g(H-z)}$. Свободная поверхность и граница дна за затвором являются граничными линиями тока. В результате при $z \ll H$ часто принимают скорость на свободной поверхности в нижнем бьефе вблизи затвора постоянной. Гидродинамическая сетка представлена на рис. 28.10.

28.5. Простейшие случаи плоских потенциальных потоков

Рассмотрим несколько случаев плоского потенциального движения, которые можно использовать при последующем изложении с целью получения решения для более сложных потоков.

Прямолинейное движение с параллельными линиями тока. Если линии тока параллельны оси OX , то

$$\left. \begin{aligned} u &= u_x = \text{const}; & u_z &= 0; \\ d\psi_x &= -u_x dz = 0; \\ \psi_x &= -u_x z = C. \end{aligned} \right\} \quad (28.19)$$

Если линии тока параллельны оси OZ , тогда

$$u_x = 0; \quad u = u_z; \quad d\psi_z = u_z x = C. \quad (28.20)$$

При параллельных линиях тока, наклоненных к осям координат,

$$d\psi = -u_x dz + u_z dx = 0; \quad \psi = -u_x z + u_z x = C, \quad (28.21)$$

или

$$\psi = \psi_x + \psi_y.$$

Поток с наклонными линиями тока можно считать результатом наложения двух потоков с линиями тока, параллельными осям координат. При этом функции тока складываются алгебраически. Учитывая (28.17), по найденным ψ можно определить потенциалы скорости.

Для движения, когда линии тока параллельны оси OX ,

$$d\Phi_x = -\frac{\partial\Phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi_x}{\partial y} dy = -u_x dx.$$

Для случая, когда линии тока параллельны оси OZ ,

$$d\Phi_z = \frac{\partial\Phi_z}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi_z}{\partial y} dy = -u_z dz.$$

Для наклонных линий тока

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dx} dx + \frac{d\Phi}{dz} dz = -u_x dx - u_z dz.$$

Векторы скорости складываются геометрически. После интегрирования получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= -u_x x; \\ \Phi_z &= -u_z z; \\ \Phi &= -(u_x x + u_z z). \end{aligned} \right\} \quad (28.22)$$

Линии тока и линии равных потенциалов ортогональны. Каждая из указанных линий характеризуется постоянным на ней значением ψ или Φ .

На рис. 28.11 дана гидродинамическая сетка для движения, когда линии тока параллельны оси OX .

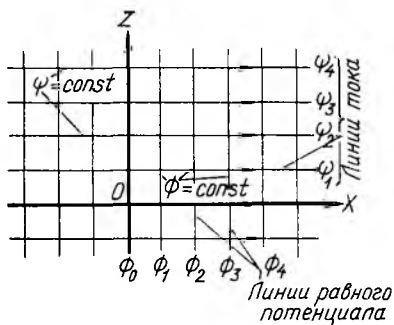


Рис. 28.11

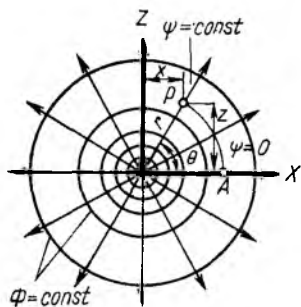


Рис. 28.12

Источники и стоки. Источники — точка, из которой симметрично по радиальным направлениям вытекает жидкость, сток — точка, поглощающая жидкость, симметрично притекающую к стоку по радиусу со всех сторон. В этом случае линии тока — полупрямые с постоянными для каждой линии тока значениями ψ . При постоянном расходе жидкости, вытекающей из источника, равном Q , скорость на расстоянии r от источника равна

$$u = \frac{Q}{2\pi r} = \frac{q}{r},$$

где $q = Q/2\pi$.

Приняв на положительном луче оси Ox значение $\psi = 0$, найдем расход, проходящий через сечение AP (рис. 28.12):

$$-\frac{Q}{2\pi r} r\theta = -q\theta.$$

Тогда для источника

$$\psi_{\text{ист}} = -\frac{Q}{2\pi} \theta = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{z}{x}, \quad (28.23)$$

где $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Потенциал скорости вследствие симметричности поля скоростей зависит только от r . По (28.4)

$$u_r = -\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{d\Phi}{dz}.$$

Расход

$$Q = 2\pi r u_r = -2\pi r \frac{d\Phi}{dr}.$$

Тогда

$$\Phi_{\text{ист}} = -\frac{Q}{2\pi} \ln r = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (28.24)$$

Для стока знаки в формулах для ψ и Φ изменяются на обратные:

$$\psi_{\text{ст}} = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{z}{x}; \quad (28.25)$$

$$\Phi_{\text{ст}} = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + z^2}. \quad (28.26)$$

Линии равных потенциалов для источника и для стока — окружности

$$x^2 + z^2 = r^2,$$

где $r = \exp(C2\pi/Q)$, а C — соответствующее на каждой указанной линии значение Φ .

28.6. Неплavno изменяющееся напорное движение грунтовых вод

Такое движение наблюдается, когда фильтрация происходит под водонепроницаемым бетонным сооружением. Снизу область фильтрационного движения ограничена водоупором (рис. 28.6). Область движения — многоугольник, движение — напорное, линии тока заметно искривлены, что свидетельствует о неплавной изменемости движения. Живые сечения — криволинейной поверхности, местные скорости различны даже в пределах одного живого сечения и являются функциями координат (для плоского движения — только двух координат).

Решение уравнений Лапласа затруднено вследствие сложности очертаний подземного контура гидротехнических сооружений. Уравнения Лапласа для потенциального плоского движения решаются с помощью следующих основных способов: аналитического, способа аналогий и графического.

Аналитический способ требует использования довольно сложных методов теории функций комплексного переменного, конформных отображений, фрагментов и т. п. Аналитические решения развиты академиками Н. Н. Павловским, П. Я. Полубариновой-Кочиной и многими другими советскими учеными. Н. Н. Павловским была доказана единственность решения рассматриваемой задачи о напорной фильтрации под гидротехническими сооружениями. Поскольку аналитические решения не всегда могут быть применены, особенно при сложных очертаниях подземного контура сооружения, широко применяются приближенные методы, в которых с помощью аналогии или графически строятся гидродинамические сетки движения, по которым определяются необходимые параметры, характеризующие движение.

Способ аналогий основан на том, что некоторые физические явления подчиняются уравнению Лапласа, причем в отличие от фильтрации в этих явлениях гораздо проще измерять значения определяемой функции. Например, экспериментальное изучение изменений потенциалов однородного электрического поля выполняется легче, чем определение потенциала в различных точках фильтрационного потока.

Метод ЭГДА (метод электродинамических аналогий) разработан Н. Н. Павловским в 1918 г. Он наиболее широко применяется при изучении фильтрационных задач. Аналогия между движением электрического тока в однородном поле и потенциальным движением несжимаемой жидкости характеризуется данными, приведены в табл. 28.1.

Если рассматривается плоское движение на модели, обычно применяется электропроводная бумага или фольга с различной удельной электрической проводимостью (с различным удельным сопротивлением). Если область фильтрации характеризуется постоянным значением коэффициента фильтрации, удельная электрическая проводимость материала модели должна быть постоянной.

Если рассматривается область фильтрации, состоящая из нескольких слоев с различными коэффициентами фильтрации, это должно быть отражено на модели: электропроводящая область должна быть составлена из слоев такой же конфигурации с различной удельной электрической проводимостью, причем соотношение удельной электрической проводимости в слоях на модели не должно быть таким же, как и соотношение коэффициентов фильтрации слоев. Такое «слоистое» строение области движения электрического

Таблица 28.1

Обозначение	Движение жидкости	Движение электрического тока
H	Напор	Электрический потенциал
Φ	Потенциал скорости	Приведенный электрический потенциал
$\Phi = \text{const}$	Поверхность живого сечения потока, поверхность равного потенциала	Поверхность равного электрического потенциала
$u = \text{grad } \Phi;$	Вектор скорости	Вектор плотности электрического тока
$u_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x};$		
$u_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$		
$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z};$	Функция тока	Функция электрического тока
$u_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}$		
$\psi = \text{const};$	Линия тока или непроницаемая граница	Линия тока или изолирующая граница
$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \text{const}$		
k	Коэффициент фильтрации	Удельная электрическая проводимость

тока обеспечивается склеиванием электропроводной бумаги с необходимыми значениями удельного сопротивления.

Граничные условия на модели ЭГДА соответствуют граничным условиям в области фильтрации. Условие $\Phi = \text{const}$ обеспечивается постоянством электрического потенциала на соответствующей границе на модели, условие

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ и $\psi = \text{const}$ на непроницаемых границах и на свободной поверхности соответствует изоляции на участке контура модели, где это необходимо; изменению потенциала в соответствии с уравнением $\Phi = kz$ отвечает линейное распределение электрического потенциала.

Если для потока жидкости и электрического тока обеспечить одинаковые граничные условия, сетки движения в обоих рассматриваемых случаях будут одинаковыми. При этом расположение линий равного потенциала и линий тока не зависит от коэффициента фильтрации (удельной электрической проводимости), напора (разности электрических потенциалов), а зависит (в однородном грунте) только от конфигурации области фильтрации (области, где происходит движение электрического тока).

При исследовании фильтрации, например, под бетонным гидротехническим сооружением с двумя рядами шпунтов (рис. 28.13, а) создается геометрически подобная модель (рис. 28.13, б), на которой плоский проводник соответствует водонепроницаемым грунтам, а изолирующие границы — водонепроницаемым контурам C_0 и C_3 , на контурах C_1 и C_2 поддерживаются

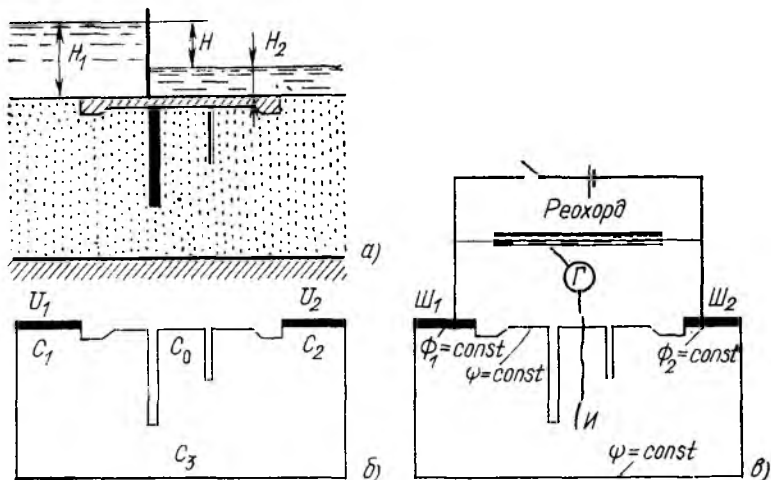


Рис. 28.13

электрические потенциалы u_1 и u_2 , разность которых соответствует на основе разбираемой аналогии разности напоров H .

При выполнении этих условий падение электрического потенциала на линии C_0 (подземный контур сооружения) на модели будет точно соответствовать падению напора по этому же контуру в натуре. При этом движение электрического тока от контура C_1 к контуру C_2 будет точно соответствовать движению грунтовых вод под гидротехническим сооружением. С помощью модели, основанной на электрогидродинамической аналогии, определяются точки равного потенциала, а затем строятся линии равных потенциалов (равных напоров). Измерения потенциалов производятся с помощью мостовой схемы, одна из ветвей которой — плоский проводник (модель области изучаемого движения), а вторая — проградунированный реохорд (или образцовый делитель — агометр).

Принципиальная схема установки ЭГДА показана на рис. 28.13, в. Электрический ток подведен через металлические шины $Ш_1$ и $Ш_2$, плотно прижимаемые к плоскому проводнику. Разность электрических потенциалов на шинах соответствует напору H (для сооружения, показанного на рис. 28.13, а, $H = H_1 - H_2$). В диагональ моста включается один из индикаторов нуля — при постоянном токе это обычно гальванометр Γ . При использовании установок с переменным током вместо гальванометров применяют осциллографы. Подвижный контакт реохорда через гальванометр соединен с иглой $И$, которую можно соединить с любой точкой плоского проводника. Если подвижный контакт установить на определенном делении реохорда и тем самым зафиксировать отношение сопротивлений в реохорде и отношение падений электрического потенциала в первой части моста при данном положении подвижного контакта и если на второй части моста (в плоском проводнике) при касании иглы в какой-то точке гальванометр даст нулевое показание, это будет означать, что отношение потенциалов в этой точке и в точке, где расположен на реохорде подвижный контакт, одинаково. Перемещая иглу при данном положении передвижного контакта, найдем ряд точек с одинаковым относительным потенциалом. Соединив эти линии, получим линию равного потенциала.

Установив новое положение подвижного контакта и перемещая иглу, можно построить следующую линию равного потенциала.

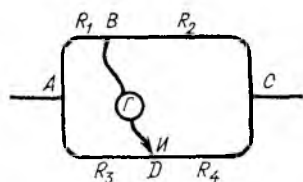


Рис. 28.14

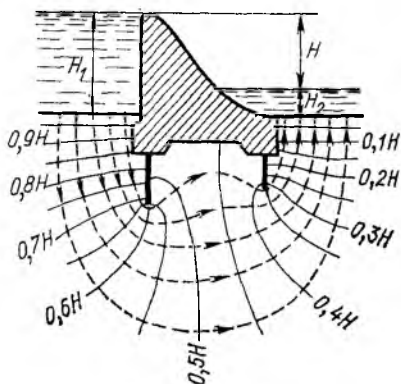


Рис. 28.15

Поясним это на простой схеме моста (рис. 28.14). Если гальванометр показывает отсутствие тока, то

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{u_A - u_B}{u_B - u_C} = \frac{u_A - u_D}{u_D - u_C} = \frac{R_3}{R_4},$$

т. е. если установить на одной ветви моста (на реохорде) какое-то отношение сопротивлений, на другой ветви (в плоском проводнике) получим такое же отношение потенциалов.

Линии тока строят графически, используя свойства гидродинамической сетки, их можно получить и непосредственно на установке ЭГДА. Для этого необходимо сделать непроницаемые границы проницаемыми и поменять места шин. На тех границах, где было $\Phi = \text{const}$, необходимо обеспечить

условие $\psi = \text{const}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{const}$; там, где было граничное условие $\psi = \text{const}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{const}$, необходимо обеспечить $\Phi = \text{const}$.

С помощью ЭГДА можно строить также и кривые свободной поверхности грунтового потока, применяя способ последовательного приближения.

Применяются установки ЭГДА, где электрическое поле, моделирующее область изучаемого потенциального движения, создается в ваннах, заполненных жидким электролитом с малой концентрацией раствора медного купороса или соляной кислоты, или поваренной соли и т. п.

В настоящее время метод ЭГДА широко применяется не только при исследованиях фильтрации, но и для различных электро- и гидрорегуляторов для решения задач потенциального движения жидкости и в том числе фильтрационных задач.

Метод МАГДА или МАГА (метод магнитогидродинамической аналогии), основан на том, что скалярный потенциал магнитного поля Φ_M (аналог потенциала скорости Φ) в среде с постоянной магнитной проницаемостью также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial z^2} = 0.$$

Напряженность магнитного поля H_M (аналог скорости движения) представлена ее компонентами

$$H_{Mx} = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial x}; \quad H_{Mz} = -\frac{\partial \Phi_M}{\partial z},$$

которые могут быть измерены с помощью специальных измерительных катушек.

Метод МАГА разработан А. Н. Патрашевым. Он особенно эффективен при изучении обтекания тел и потенциального движения сжимаемой жидкости. Модель изготавливается из листовой мягкой стали, на границах устанавливаются электромагниты.

Графический способ. Гидродинамическая сетка движения характеризуется, как известно, ортогональностью линий тока и линий равного потенциала и, кроме того, постоянством отношения отрезков, проведенных через середины сторон ячеек сетки. Обычно это отношение принимается равным единице. В этом случае гидродинамическая сетка называется квадратичной. Эти свойства используются при графическом построении гидродинамической сетки движения. Принимаются обычные граничные условия, нулевая линия тока — подземный контур сооружения, последняя линия тока — линия водоупора. Первая линия равного потенциала — дно верхнего бьефа, последняя линия равного потенциала — дно нижнего бьефа. При этом учитываем, что линии равного потенциала (напора) нормальны к первой и последней (водоупор) линиям тока, а линии тока нормальны к поверхности дна в верхнем и нижнем бьефах.

Построение гидродинамической сетки начинается с проведения приблизительного очертания линий тока. Можно провести вначале одну линию тока, ближайшую к подземному контуру, а можно и несколько. На линии подземного контура $\psi_0 = q_0 = 0$; на линии водоупора $\psi = q$, причем само значение удельного расхода еще не известно. Далее разбивают первую ленту расхода (между соседними линиями тока) на криволинейные квадраты. Уточняя очертание этих квадратов, так чтобы средние линии их были равными, а углы — прямыми, получаем очертание сетки движения в первой ленте. Переходя далее ко второй и последующим лентам расхода и уточняя очертания всех криволинейных квадратов, можно построить сетку движения. При этом последняя линия тока, полученная в результате построения, должна совпасть с линией водоупора. Если это не достигнуто, надо корректно построить.

Сетка может уточняться и на основе правила, согласно которому при удовлетворительном построении сетки движения диагонали ячеек этой сетки должны сами образовывать ортогональную сетку.

Если рассматривается напорная фильтрация под гидротехническим сооружением в грунте бесконечной глубины, обычная область фильтрации ограничивается полуокружностью с радиусом, равным примерно трем длинам подземной части сооружения. Соответственно ограничивается и область построения гидродинамической сетки движения.

Пример построенной гидродинамической сетки приведен на рис. 28.15 (грунт бесконечной глубины). Линии равных напоров проведены через 0,05 H . Рассмотрим выполнение фильтрационных расчетов с помощью построенной гидродинамической сетки.

Удельный (на 1 м ширины потока) расход, проходящий через одну ленту,

$$\Delta q = k \Delta s \Delta H / \Delta s = k \Delta H, \quad (28.27)$$

где k — коэффициент фильтрации; Δs — длина стороны ячейки сетки (квадрата); ΔH — падение напора в ячейке сетки (между двумя соседними линиями равного напора); $\Delta H / \Delta s$ — осредненный гидравлический уклон в пределах ячейки.

Если число ячеек (квадратов) в ленте расхода n , а напор на сооружении H (разность отметок уровней воды в верхнем и нижнем бьефах), тогда

$$\Delta H = H/n. \quad (28.28)$$

Если число лент расхода m , фильтрующий расход, проходящий под сооружением,

$$q = \Delta q m = k \frac{m}{n} H. \quad (28.29)$$

В зоне выхода фильтрационного потока в нижний бьеф особенно важно определить скорости на выходе, так как в этой зоне возможен вынос частиц грунта фильтрационным потоком в нижний бьеф.

Средняя скорость в ячейке на выходе

$$v_{\text{вых}} = \Delta q / \Delta s_{\text{вых}}$$

Так как $\Delta q = kH/n$, то

$$v_{\text{вых}} = \frac{kH}{n \Delta s_{\text{вых}}}, \quad (28.30)$$

где Δs — длина нормальной к направлению выходной скорости стороны ячейки.

Гидравлический уклон (градиент напора) в зоне выхода фильтрационного потока в нижний бьеф можно найти как

$$J_{\text{вых}} = \frac{\Delta H}{\Delta s_{\text{вых}}} = \frac{H}{h \Delta s_{\text{вых}}}, \quad (28.31)$$

при этом должно быть

$$J_{\text{вых}} \leq J_{\text{вых. кр}}$$

где $J_{\text{вых. кр}}$ — критический градиент напора для этих зон, определяемый по табл. 28.2.

Т а б л и ц а 28.2

Грунт основания	$J_{\text{вых. кр}}$	Грунт основания	$J_{\text{вых. кр}}$
Глина	1,2	Песок среднезернистый	0,38
Суглинок	0,65	Песок мелкозернистый	0,29
Песок крупнозернистый	0,45		

28.7. Контрольные вопросы

1. Какое движение называется потенциальным?
2. Назовите случаи, когда движение можно считать потенциальным.
3. Как связаны между собой частные производные от проекций местных скоростей по координатам (при установленном потенциальном движении)?
4. Опишите основные характеристики потенциала скорости.
5. Как расположены в пространстве при потенциальном движении линии тока и поверхности равного потенциала?
6. Чему равны проекции местных скоростей при движении грунтовых вод (ламинарная фильтрация)? Чему равен в этом случае потенциал скорости?
7. Какая функция называется функцией тока?
8. Как определяется расход при потенциальном движении грунтовых вод (плоское движение)?
9. Опишите основные свойства гидродинамической сетки.
10. Как изменяются граничные условия в различных случаях плоского потенциального движения грунтовых вод?
11. Запишите уравнение Лапласа для потенциала скорости и функции тока.
12. Разберите примеры потенциального движения воды в пределах гидротехнических сооружений.
13. В чем заключается метод ЭГДА?
14. Укажите, между какими величинами при потенциальном движении жидкости и электрического тока проводятся аналогии?

15. Опишите принципиальную схему установки ЭГДА. Как строится гидродинамическая сетка с помощью метода ЭГДА и графическим способом?

16. Как определяется фильтрационный расход? Как определяются средняя скорость и гидравлический уклон в области выхода фильтрационного потока в нижний бьеф?

Глава 29

ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

29.1. Моделирование гидравлических явлений. Законы подобия

Наряду с аналитическими расчетами гидравлических задач широко применяются экспериментальные исследования гидравлических явлений, происходящих при движении жидкости. Сочетание теоретических расчетов и экспериментальных данных позволяет получать надежные и точные результаты для последующего их использования. В ответственных случаях гидравлические исследования сооружений являются обязательными, как это требуется нормативами на проектирование гидротехнических сооружений.

Обычно гидравлические исследования явлений, происходящих в натуральных условиях (в н а т у р е), проводятся в лабораториях на моделях. При этом явление воспроизводится в том или ином масштабе, в соответствии с правилами моделирования, излагаемыми ниже.

В результате исследований на моделях получают поправочные коэффициенты к теоретическим формулам или эмпирические формулы, отражающие зависимости между отдельными параметрами, которые характеризуют изучаемое явление. Различают физическое, аналоговое и численное моделирование.

При физическом моделировании на модели исследуется явление, имеющее такую же физическую природу, что и происходящее в натуре (например, истечение воды через водослив в натуре и на модели).

В последние годы развивается автоматизация лабораторных исследований с помощью ЭВМ и измерительно-управляющих комплексов. Если явления в натуре и на модели имеют различную физическую природу, но описываются аналогичными системами математических уравнений, моделирование называется а н а л о г о в ы м, например изучение напорного движения грунтовых вод с помощью метода ЭГДА (см. гл. 28).

Аналоговое моделирование успешно выполняется и с помощью аналоговых вычислительных машин (АВМ), каждая из которых предназначена (в данном конкретном комплекте устройств) для решения определенного типа задач.

Физическое моделирование можно рассматривать как частный случай аналогового моделирования, когда явления однородные.