

## УСТАНОВИВШЕЕСЯ НЕРАВНОМЕРНОЕ ПЛАВНО ИЗМЕНЯЮЩЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ И НЕПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

### 17.1. Формы свободной поверхности потока в открытых призматических руслах с прямым уклоном дна ( $i > 0$ )

При рассмотрении в гл. 16 равномерного движения жидкости в открытых призматических руслах указывались условия, при соблюдении которых происходит равномерное движение. При нарушении этих условий, например при возведении в русле плотины или перепада, движение станет неравномерным, при этом глубины будут отличаться от нормальных. В зависимости от гидравлических условий, создающихся при возведении сооружений, и состояния потока глубины могут по длине потока увеличиваться или уменьшаться по мере приближения к сооружению, а скорости при этом будут соответственно уменьшаться или увеличиваться.

Проанализируем формы свободной поверхности потока в открытых призматических руслах при уклонах дна  $i > 0$ . Учтем, что след свободной поверхности на продольной вертикальной плоскости будет криволинейным. Эти следы являются кривыми свободной поверхности.

Для анализа используем уравнение (15.8), записав его в виде

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \Pi_k}, \quad (17.1)$$

где  $K_0$  — расходная характеристика при равномерном движении;  $K$  — расходная характеристика при неравномерном движении;  $\Pi_k = \frac{\alpha Q^2 B}{g \omega^3} = \frac{\alpha v^2}{g h_{cp}}$  — параметр кинетичности.

Напомним, что  $\Pi_k = 1$  при критическом состоянии потока,  $\Pi_k < 1$  при спокойном состоянии потока и  $\Pi_k > 1$  при бурном состоянии потока.

Равенство числителя уравнения (17.1) нулю соответствует равномерному движению, когда  $dh/dl = 0$ . Если знаменатель стремится к нулю, т. е.  $\Pi_k \rightarrow 1$ , свободная поверхность скачкообразно повышается (или понижается) и  $dh/dl \rightarrow \infty$ . В первом случае происходит переход потока из бурного состояния в спокойное — так называемый гидравлический прыжок (который будет рассматриваться в гл. 21). Во втором случае образуется о д о п а д (см. рис. 17.3).

Когда числитель и знаменатель не равны нулю, возможны различные сочетания знаков числителя и знаменателя в (17.1). Как указывалось в гл. 15, при  $dh/dl > 0$  глубина вдоль потока непрерывно и плавно увеличивается (к р и в а я п о д п о р а), а при

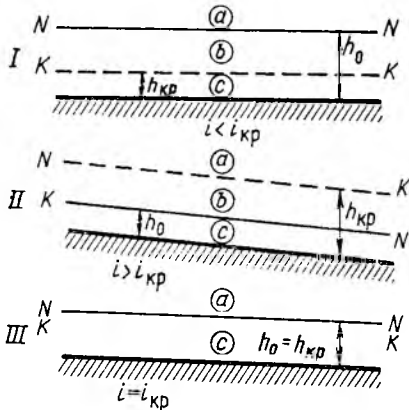


Рис. 17.1

$dh/dl < 0$  непрерывно и плавно уменьшается (к р и в а я с п а д а). Следовательно, имеем две основные формы кривых свободных поверхности в открытых призматических руслах: кривые подпора при  $dh/dl > 0$  и кривые спада при  $dh/dl < 0$ .

В зависимости от конкретных условий кривые подпора и спада могут иметь различные особенности. Как отмечено в гл. 15, в зависимости от уклона дна равномерное движение при данном расходе  $Q$  может происходить:

- а) при спокойном состоянии потока ( $h_0 > h_{кр}$ ), если  $i < i_{кр}$ ;
- б) при бурном состоянии потока ( $h_0 < h_{кр}$ ), если  $i > i_{кр}$ ;
- в) при критическом состоянии потока ( $h_0 = h_{кр}$ ), если  $i = i_{кр}$ .

Для анализа условий образования кривых свободной поверхности зафиксируем при  $i > 0$  зоны в потоке, определяемые  $h_0$  и  $h_{кр}$  (рис. 17.1), проведем также параллельно линии дна линии нормальной  $NN$  и критической  $KK$  глубин. Тогда получаются следующие зоны, в которых может располагаться кривая свободной поверхности: зона  $a$  — выше линий  $NN$  и  $KK$ ; зона  $b$  — между линиями  $NN$  и  $KK$ ; зона  $c$  — ниже линий  $NN$  и  $KK$ .

При  $i = i_{кр}$  линии  $NN$  и  $KK$  совмещены и имеются только зоны  $a$  и  $c$ . При  $i > 0$  возможны восемь случаев образования кривых свободной поверхности.

1. Уклон дна  $i < i_{кр}$ , т. е. при равномерном движении поток находится в спокойном состоянии,  $h_0 > h_{кр}$ .

Зона  $a$ :  $h > h_0 > h_{кр}$  (рис. 17.2). Пусть вследствие возведения плотины имевшееся в бытовых (ненарушенных) условиях равномерное движение с глубиной  $h_0$  на участке некоторой длины перешло в неравномерное движение с глубинами  $h > h_0$ . При этом  $K > K_0$ ,  $K_0/K < 1$ . Учитываем, что при спокойном состоянии потока  $П_k < 1$ , при увеличении  $h$  по сравнению с  $h_0$  параметр  $П_k$

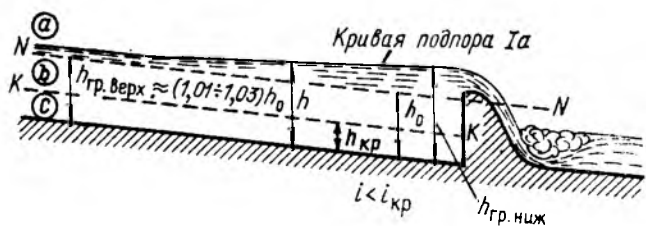


Рис. 17.2

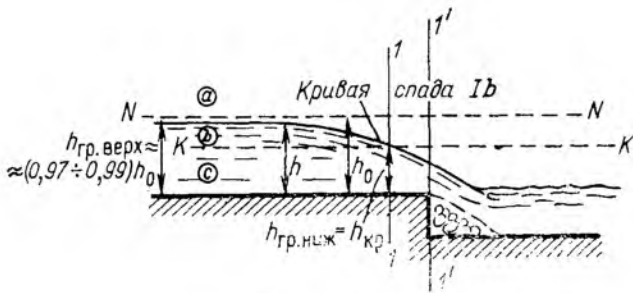


Рис. 17.3

будет еще уменьшаться по сравнению с  $\Pi_k$  при равномерном движении, поэтому  $1 - \Pi_k > 0$ . Формулу (17.1) условно можно представить только знаками числителя и знаменателя, тогда получим

$$\frac{dh}{dl} = \frac{+}{+} > 0.$$

Таким образом, имеем расположенную в зоне *a* кривую подпора *Ia* вогнутой формы (так как  $d^2h/dl^2 > 0$ ). Проанализируем поведение кривой подпора *Ia* в верхней (по течению) и в нижней (по течению) частях. При  $h \rightarrow h_0$  получим, что  $K \rightarrow K_0$  и  $dh/dl \rightarrow 0$ , т. е. кривая подпора *Ia* в верхней части асимптотически стремится к линии нормальных глубин *MN*, т. е. пересекается с этой линией лишь в бесконечности. Для крупных сооружений на равнинных реках длина кривой подпора может достигать нескольких сотен километров.

При возрастании *h* и *K* числитель и знаменатель (17.1) стремятся к единице, так как  $K_0/K \rightarrow 0$  и  $(1 - \Pi_k) \rightarrow 1$ . Тогда  $dh/dl \rightarrow 1$ , т. е. кривая подпора в нижней части асимптотически стремится к горизонтальной прямой.

Зона *b*:  $h_0 > h > h_{кр}$  (рис. 17.3). В этом случае равномерное движение вследствие создания перепада перешло в неравномерное. Здесь  $K < K_0$ ;  $K_0/K < 1$ , а  $\Pi_k < 1$ . Тогда (17.1) можем представить как

$$\frac{dh}{dl} = \frac{-}{+} < 0.$$

Глубины по длине потока уменьшаются, т. е. в рассматриваемом случае имеем кривую спада *Ib*, располагающуюся в зоне *b*. Эта кривая асимптотически стремится к линии нормальных глубин *MN* в верхней своей части, так как  $h \rightarrow h_0$ ,  $dh/dl \rightarrow 0$ . В нижней части при подходе потока к уступу условия плавной изменяемости, положенные в основу вывода дифференциального уравнения, применяемого здесь в виде (15.8), не выполняются. Кривизна линий тока становится столь большой, что распределение давления по живому сечению значительно отличается от гидростатического.

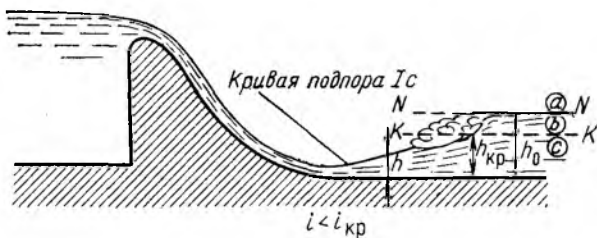


Рис. 17.4

Кривая спада  $Ib$  располагается в зоне  $b$  и обращена выпуклостью вверх. Укажем, что в сечении  $1-1$ , т. е. выше уступа на расстоянии, равном  $(2 \div 2,5) h_{кр}$ , кривая свободной поверхности пересекает линию критических глубин. Строго говоря, (15.8) вблизи входа в перепады, т. е. на участке между  $1-1$  и  $1'-1'$ , неправильно. При расчете достаточно длинных русл иногда условно считают, что глубина над ребром равна  $h_{кр}$ .

Зона  $c$ :  $h_0 > h_{кр} > h$  (рис. 17.4). Поток поступает на участок сопряжения бьефов за водосливной плотиной в бурном состоянии, а в естественных (бытовых) условиях находится в спокойном состоянии. Ниже по течению от створа у подножья водослива движение потока будет неравномерным. При этом глубины будут увеличиваться, скорости уменьшаться и образуется кривая подпора  $Ic$ .

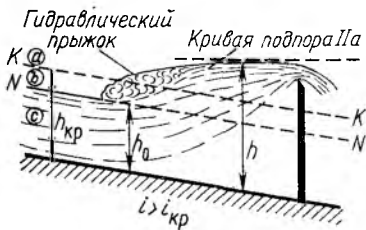


Рис. 17.5

Действительно, на участке кривой подпора  $Ic$  глубины  $h < h_0$ , т. е.  $K_0/K > 1$ , а  $П_к > 1$ . Следовательно,  $dh/dl > 0$ . Кривая подпора располагается в зоне  $c$ , так как перейти через линию критических глубин плавным образом кривая свободной поверхности не может, что видно на графике изменения удельной энергии сечения  $\mathcal{E}$

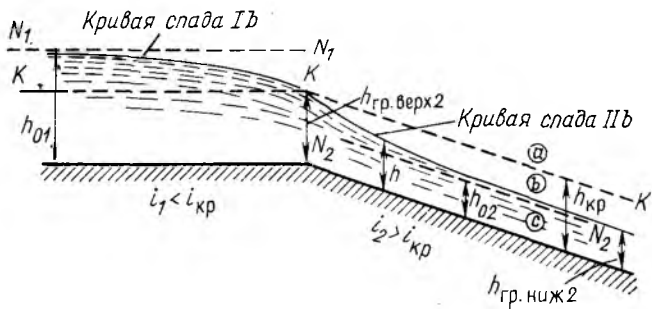


Рис. 17.6

(см. рис. 15.3). В рассматриваемом случае  $h < h_{кр}$  и уменьшение  $\mathcal{E}$  до минимума, а затем последующее увеличение удельной энергии сечения и продолжение движения невозможны.

Кривая свободной поверхности имеет вогнутую форму (выпуклостью обращена вниз) и заканчивается в том сечении, где начинается гидравлический прыжок.

Анализ остальных кривых подпора и спада проведем, помня, что каждая кривая свободной поверхности формируется непрерывно только в границах своей зоны.

II. Уклон дна  $i > i_{кр}$ , т. е. при равномерном движении поток находится в бурном состоянии,  $h_0 < h_{кр}$ .

Зона *a*:  $h > h_{кр} > h_0$  (рис. 17.5). В этом случае  $K > K_0$ ;  $K_0/K < 1$ . Так как  $h > h_{кр}$ , то в пределах рассматриваемой кривой  $\Pi_k < 1$ . Тогда  $dh/dl > 0$  и кривая подпора *IIa* расположена в зоне *a*. Кривая имеет выпуклую форму, в нижней части асимптотически приближается к горизонтальной линии (снизу от этой линии), так как при  $h \rightarrow \infty$  отношение  $dh/dl \rightarrow i$ . Кривая подпора *IIa* образуется ниже гидравлического прыжка по течению, через который происходит переход потока из бурного состояния в спокойное.

Зона *b*:  $h_{кр} > h > h_0$  (рис. 17.6). В этом случае  $K > K_0$ ;  $K_0/K < 1$ . При  $h < h_{кр}$  параметр  $\Pi_k > 1$ . Тогда имеем кривую спада *IIb*. При  $h \rightarrow h_0$  кривая асимптотически стремится к линии нормальных глубин *NN*. Можно считать, что глубина, с которой начинается плавная кривая спада в этой зоне, равна  $h_{кр}$ . Ширина канала *b* на первом и на втором участках канала одинакова. Следовательно,  $h_{кр}$  будет одной и той же на обоих участках. Но вблизи перелома дна в верхней части кривой движение только условно считается плавно изменяющимся. Кривая спада *IIb* имеет вогнутую форму.

Зона *c*:  $h_{кр} > h_0 > h$  (рис. 17.7). Здесь  $K < K_0$ , а  $\Pi_k > 1$ . Тогда  $dh/dl > 0$  и имеем кривую *IIc*. В данном случае начальная

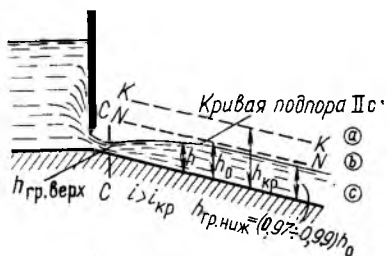


Рис. 17.7

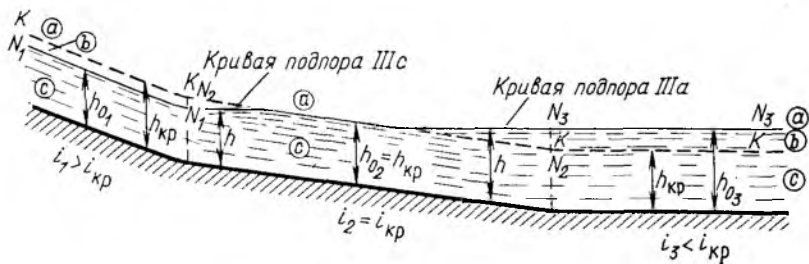


Рис. 17.8

глубина  $h_{гр. \text{ верх}}$  определяется расчетом истечения из-под вертикального плоского затвора (см. § 23.1). В нижней части кривая  $IIIc$  асимптотически стремится к линии нормальной глубины, так как при  $h \rightarrow h_0$  отношение  $dh/dl \rightarrow 0$ . Кривая  $IIIc$  имеет выпуклую форму.

III. Уклон дна  $i = i_{кр}$ , т. е. при равномерном движении поток находится в критическом состоянии,  $h_0 = h_{кр}$ . В этом случае имеются лишь две зоны:  $a$  и  $c$ .

Зона  $a$ :  $h > h_0 = h_{кр}$  (рис. 17.8). В этом случае  $K > K_0$ ;  $\Pi_k < 1$ . Тогда  $dh/dl > 0$ , т. е. имеем кривую подпора. Такая кривая образуется при сопряжении потока, находящегося в критическом состоянии, с потоком, находящимся в русле с  $i < i_{кр}$  (рис. 17.8). В широких руслах кривая подпора в зоне  $a$  близка к горизонтальной прямой.

Зона  $c$ :  $h < h_0 = h_{кр}$  (рис. 17.8). В этом случае  $K < K_0$ ;  $\Pi_k > 1$ . Из уравнения (17.1) имеем  $dh/dl > 0$ , и кривая свободной поверхности — кривая подпора  $IIIc$ . Такая кривая создается при сопряжении двух потоков, если уклон подводящего русла  $i > i_{кр}$ , т. е.  $h_0 < h_{кр}$ , а уклон отводящего русла  $i = i_{кр}$  (рис. 17.8). В широких руслах кривая подпора в зоне  $c$  также близка к горизонтальной прямой.

## 17.2. Формы свободной поверхности потока в открытых призматических руслах с нулевым ( $i=0$ ) и обратным ( $i<0$ ) уклоном дна

При прямом уклоне дна ( $i > 0$ ) равномерное движение происходит при равенстве работы силы тяжести в направлении движения и сил сопротивления движению жидкости.

На участке с  $i \leq 0$  проекция силы тяжести на направление движения равна нулю (при  $i = 0$ ) или отрицательна (при  $i < 0$ ). Поскольку на таких участках равномерное движение вообще невозможно, не имеет смысла и понятие нормальной глубины для случаев движения в руслах с  $i \leq 0$ . В связи с этим при  $i \leq 0$  имеем только две зоны:  $b$  и  $c$ .

Движение происходит, как и в других случаях, за счет уменьшения удельной (на единицу веса) энергии потока  $E$ , имеющейся в потоке при вступлении на рассматриваемый участок русла.

Удельная энергия потока  $E$  затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений. Удельная энергия сечения  $\mathcal{E}$  также будет уменьшаться вниз по течению, как было показано в § 15.3.

Поток может вступать на участок с нулевым или обратным уклоном в спокойном или бурном состоянии, так как вступление потока на участок с  $i \leq 0$  в критическом состоянии энергетически невозможно. Это объясняется тем, что удельная энергия сечения в критическом состоянии минимальна и нет источника энергии для преодоления гидравлических сопротивлений ниже по течению.

З о н а *b*. Поток вступает на участок с  $i \leq 0$  в спокойном состоянии  $h > h_{кр}$ . Удельная энергия сечения  $\mathcal{E} = h + \alpha v^2 / (2g)$  при этом определяется верхней ветвью кривой  $\mathcal{E} = f(h)$  (см. рис. 15.3). Уменьшению удельной энергии сечения соответствует уменьшение глубины. Тогда становится ясно, что поток, вступивший на участок с  $i = 0$  или  $i < 0$ , может иметь свободную поверхность только в форме кривых спада  $b_0$  (при  $i = 0$ ) или  $b'$  (при  $i < 0$ ).

З о н а *c*. Поток вступает на участок с  $i \leq 0$  в бурном состоянии,  $h < h_{кр}$ . Здесь уменьшение удельной энергии сечения  $\mathcal{E}$  возможно лишь при росте глубин [нижняя ветвь кривой  $\mathcal{E} = f(h)$ ]. Поэтому при вступлении на участок с  $i \leq 0$  потока в бурном состоянии возможные формы кривой свободной поверхности — только кривые подпора  $c_0$  (при  $i = 0$ ) или  $c'$  (при  $i < 0$ ). Итак, в открытых призматических руслах возможны 12 видов кривых свободной поверхности.

### 17.3. Интегрирование дифференциальных уравнений установившегося неравномерного движения в открытых призматических руслах

Для расчета кривых свободной поверхности необходимо проинтегрировать уравнение (15.8)

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \Pi_k},$$

которое может быть записано в общем виде:

$$dl = \frac{1 - \Pi_k}{i - Q^2/K^2} dh = F(h) dh, \quad (17.2)$$

где

$$F(h) = 1 - \frac{\Pi_k}{i(1 - Q^2/K^2)}.$$

Проинтегрировав (17.2), получим формулы для расчета кривых подпора и спада. Для упрощения решения примем некоторые допущения.

Запишем (17.2), зная, что уклон  $i$  может быть больше нуля, равен нулю и меньше нуля. Тогда при  $i > 0$  имеем

$$i dl = \frac{1 - \Pi_k}{1 - Q^2/(iK^2)} dh = \frac{1 - \Pi_k}{1 - (Q/Q')^2} dh, \quad (17.3)$$

где знак минус в знаменателе соответствует прямому уклону дна водотока  $i > 0$ ;  $Q$  — расход при равномерном движении;  $Q' = \omega C \sqrt{Ri} = K \sqrt{i}$  — расход, который пропускало бы данное живое сечение при  $h$ ,  $\omega$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $K$ , соответствующих неравномерному движению, но в условиях равномерного движения, т. е. при гидрав-

лическом уклоне  $J = i$  и при  $K = \omega C \sqrt{R}$ . Расход  $Q'$  изменяется вдоль потока, будучи различным по значению в различных сечениях.

При  $i < 0$

$$|i| dl = -\frac{1 - \Pi_k}{1 + (Q/Q')^2} dh,$$

где  $|i|$  — абсолютное значение отрицательного уклона  $i$ ;  $Q' = \omega C \sqrt{R|i|}$  — фиктивный расход, который проходил бы через данное живое сечение при равномерном движении и прямом уклоне, равном  $|i|$ .

При  $i = 0$  из (17.2) имеем

$$dl = \frac{1 - \Pi_k}{-(Q^2/K^2)} dh$$

или

$$i' dl = \frac{1 - \Pi_k}{-(Q^2/i'K^2)} dh = \frac{\Pi_k - 1}{(Q/Q')^2} dh, \quad (17.4)$$

где  $i'$  — произвольное положительное значение уклона, его часто принимают  $i = i_{кр}$ ;  $Q'$  — также фиктивный расход, который пропускало бы данное живое сечение при глубине и других параметрах, соответствующих неравномерному движению, но в условиях равномерного движения при уклоне дна  $i'$ , т. е.  $Q' = \omega C \sqrt{Ri'}$ . Расход  $Q'$  изменяется по длине потока.

Отношение  $(Q/Q')^2$  равно отношению соответствующих средних скоростей  $(v/v')^2$  и параметров кинетичности, т. е.

$$(Q/Q')^2 = (v/v')^2 = \Pi_k/\Pi'_k, \quad (17.5)$$

При этом  $v'$  и  $\Pi'_k$  — средняя скорость и параметр кинетичности, которые были бы в данном живом сечении (размеры его соответствуют неравномерному движению), но в условиях равномерного движения. Таким образом, среднюю скорость  $v'$  можно определить по формуле Шези  $v' = C \sqrt{Ri}$ . Тогда

$$\Pi'_k = \frac{\alpha (Q')^2 B}{g\omega^3} = \frac{\alpha (v')^2}{gh_{cp}} = \frac{\alpha C^2 Ri}{gh_{cp}}. \quad (17.6)$$

Для широких русл  $R \approx h_{cp}$ ;  $\Pi'_k = \alpha C^2 i/g$ .

Параметр  $\Pi'_k$  также выражают в виде

$$\Pi'_k = \frac{\alpha i C^2 B}{g\omega}, \quad (17.7)$$

или с учетом введенных в гл. 16 соотношений между элементами живого сечения при равномерном движении, принимая коэффициент  $C$  по формуле Павловского,

$$\Pi'_k = \frac{\alpha i}{gn^2} \frac{B}{\psi R^{1-2y}}, \quad (17.8)$$

где  $\psi = \omega/R^2$ .



Для последующего интегрирования введем новую переменную

$$z^x = (Q'/Q)^2 = \Pi'_k/\Pi_k, \quad (17.9)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} z &= \sqrt[x]{(Q'/Q)^2}; \\ x &= 2 \lg \frac{Q'}{Q} / \lg z; \\ \Pi_k &= \Pi'_k/z^x. \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Как видно из (17.9) и (17.10), конкретные условия движения отражены отношением  $(Q'/Q)^2 = \Pi'_k/\Pi_k$ . При этом хотя  $z$  и  $x$  — произвольные, но связаны они между собой по (17.10): приняв  $x$  по (17.10), получим значение  $z$  и наоборот.

Далее принимается допущение

$$dh = a dz, \quad (17.11)$$

откуда

$$a = dh/dz \approx \Delta h/\Delta z.$$

Тогда уравнения (17.3) можно преобразовать с учетом (17.10) и (17.11).

1. Прямой уклон дна,  $i > 0$ :

$$\frac{i dl}{a} = \frac{1 - \Pi'_k/z^x}{1 - 1/z^x} dz = \frac{\Pi'_k - z^x}{1 - z^x} dz = \left( 1 - 1 + \frac{\Pi'_k - z^x}{1 - z^x} \right) dz,$$

или после преобразований

$$dl = \frac{a}{i} \left[ dz - (1 - \Pi'_k) \frac{dz}{1 - z^x} \right]. \quad (17.12)$$

2. Обратный уклон дна,  $i < 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{|i|}{a} dl &= - \frac{1 - \Pi'_k/z^x}{1 + 1/z^x} dz = - \frac{z^x - \Pi'_k}{1 + z^x} dz = \\ &= - \left( 1 - 1 + \frac{z^x - \Pi'_k}{1 + z^x} \right) dz, \end{aligned}$$

или

$$dl = \frac{a}{|i|} \left[ - dz + (1 + \Pi'_k) \frac{dz}{1 + z^x} \right]. \quad (17.13)$$

3. Нулевой уклон дна,  $i = 0$ ; по (17.4):

$$\frac{i'}{a} dl = \frac{\Pi'_k/z^x - 1}{1/z^x} dz = (\Pi'_k - z^x) dz,$$

или

$$dl = \frac{a}{i'} (\Pi'_k - z^x) dz. \quad (17.14)$$

При расчетах обычно кривая свободной поверхности по длине разбивается на ряд участков. Обозначим живые сечения в общем виде номерами 1 и 2 и учтем, что по длине параметр  $P'_k$  изменяется очень мало. Для интегрирования введем допущение, позволяющее считать  $P'_k$  на данном участке постоянным параметром, равным  $P'_{k, \text{cp}} = (P'_{k1} + P'_{k2})/2$ .

1. Прямой уклон дна,  $i > 0$ :

$$l_{1-2} = \frac{a}{i} \{z_2 - z_1 - (1 - P'_{k, \text{cp}}) [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]\}, \quad (17.15)$$

где

$$\Phi(z) = \int \frac{dz}{1 - z^x} + \text{const.} \quad (17.16)$$

2. Обратный уклон дна,  $i < 0$ :

$$l_{1-2} = \frac{a}{|i|} \{- (z_2 - z_1) + (1 + P'_{k, \text{cp}}) [F(z_2) - F(z_1)]\}, \quad (17.17)$$

где

$$F(z) = \int \frac{dx}{1 + z^x} + \text{const.} \quad (17.18)$$

3. Нулевой уклон дна,  $i = 0$ :

$$l_{1-2} = \frac{a}{i'} \{P'_{k, \text{cp}} (z_2 - z_1) - [f(z_2) - f(z_1)]\}, \quad (17.19)$$

где

$$f(z) = \int z^x dz + \text{const.} \quad (17.20)$$

В табл. П.17.1—П.17.3 для  $\Phi(z)$ ,  $F(z)$ ,  $f(z)$  сведены значения указанных функций при  $x = 5.5$ .

#### 17.4. Расчет кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах

Существует много способов расчета кривых свободной поверхности. Их можно разделить на две группы в зависимости от подхода к принятию  $z$  и соответствующих им значений  $x$ . Согласно первому подходу задаются постоянным значением  $x$  и вычисляются по (17.10)  $z$ , согласно второму задаются значениями  $z$ , а  $x$  вычисляются по (17.10), причем могут получиться и не целые числа.

**Способ И. И. Агроскина.** Значение  $x$  задано,  $x = 5,5$ ;

$$a = ah/dz = \Delta h/\Delta z.$$

Тогда по (17.10)

$$z = \sqrt[5.5]{(Q'/Q)^2}.$$

Учитывая, что

$$Q = K_0 \sqrt{i} = \frac{\sqrt{i}}{n} \omega_0 R_0^{0,5+y};$$

$$Q' = K' \sqrt{i} = \frac{\sqrt{i}}{n} \omega R^{0,5+y},$$

получаем

$$z = \sqrt[5,5]{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1+2y}} \quad (17.21)$$

Далее по (17.8)

$$\Pi'_k = \frac{\alpha i}{gn^2} \frac{B}{\psi R^{1-2y}}.$$

Индекс нуль, как и ранее, соответствует равномерному движению. Для различных форм живого сечения выражения для  $z$  и  $\Pi_k$  имеют различный вид.

**Трапецидальное поперечное сечение.** Как известно из (16.24),  $\omega = \frac{m_0}{\sigma} h^2$ ;  $R = \frac{h}{1+\sigma}$ . Тогда

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{h^4}{\sigma^2} \frac{\sigma_0^2}{h_0^4};$$

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{1+2y} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{1+2y} \left(\frac{1+\sigma_0}{1+\sigma}\right)^{1+2y},$$

где  $\sigma_0$  — характеристика живого сечения при равномерном движении, т. е. при  $h = h_0$  и  $b_{ср} = b_{ср0} = b + mh_0$ .

Подставив полученные выражения для  $(\omega/\omega_0)^2$  и  $(R/R_0)^{1+2y}$  в (17.21), найдем

$$z = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{5+2y/5,5} \frac{\sqrt[5,5]{\sigma_0^2 (1+\sigma_0)^{1+2y}}}{\sqrt[5,5]{\sigma^2 (1+\sigma)^{1+2y}}}.$$

Если учесть, что  $y$  может быть принят приблизительно равным 0,2, тогда  $\frac{5+2y}{5,5} \approx 1$  и становится ясным, почему принят  $x =$

$$= 5,5 \approx 5 + 2y.$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} F(\sigma) &= \left[ \sqrt[5,5]{\sigma^2 (1+\sigma)^{1+2y}} \right]^{-1}; \\ F(\sigma_0) &= \left[ \sqrt[5,5]{\sigma_0^2 (1+\sigma_0)^{1+2y}} \right]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

тогда

$$z = \frac{hF(\sigma)}{h_0F(\sigma_0)}. \quad (17.23)$$

В каждой задаче выражения  $h_0 F(\sigma_0)$  имеют постоянные значения. Найденные по (17.22) значения  $F(\sigma)$  приведены в табл. П.17.4.

Параметр  $\Pi_k$  по (17.8) с учетом  $\omega$ ,  $B$  и  $R$ , выраженных через ширину трапеции по дну  $b$  (см. § 16.7),

$$\Pi'_k = \frac{\alpha i}{gn^2} b^{0.4} \Theta(\sigma), \quad (17.24)$$

где  $n$  — коэффициент шероховатости.

Здесь обозначено

$$\Theta(\sigma) = \left[ \frac{\sigma}{m_0 \left(1 - \frac{m}{m_0} \sigma\right) \left(1 + \frac{m}{m_0} \sigma\right)} \right]^{2y} \times \left( \frac{1 + \frac{m}{m_0} \sigma}{1 + \sigma} \right)^{1+2y}. \quad (17.25)$$

Значения  $\Theta(\sigma)$ , вычисленные по (17.25) при  $y = 0,2$ , приведены в табл. П.17.5.

Выражение  $\frac{\alpha i}{gn^2} b^{0.4}$  в каждой задаче имеет постоянное значение.

**Параболическое поперечное сечение.**  
В этом случае  $\omega = 1,89 p^2 \tau \sqrt{\tau}$  и  $R = 1,89 \frac{\tau \sqrt{\tau}}{f(\tau)}$ . Тогда из (17.21) при этом же  $x = 5,5$  (что даст возможность использовать те же значения  $z$  при  $x = 5,5$ , что и для трапеций), если обозначить

$$F(\tau) = \tau^{0,82+0,55y} [f(\tau)]^{-(0,18+0,36y)}, \quad (17.26)$$

получим

$$z = \frac{F(\tau)}{F(\tau_0)}.$$

Значения  $F(\tau)$ , найденные по (17.26), приводятся в табл. П.17.6.

Параметр  $\Pi'_k$  для параболического русла найдется вновь по (17.8) с учетом соотношений между элементами такого русла (см. гл. 16.7):

$$\Pi'_k = \frac{\alpha i}{gn^2} p^{2y} \frac{3,65\tau^{0,5+3y}}{[f(\tau)]^{1+2y}} = \frac{\alpha i}{gn^2} p^{2y} \Theta(\tau). \quad (17.27)$$

Значения функции  $\Theta(\tau)$  при  $y = 0,2$  также приведены в табл. П.17.6. Соответственно  $p^{2y} = p^{0.4}$ . В каждой задаче  $F(\tau_0)$  и  $\alpha i / gn^2 p^{2y}$  имеют постоянные значения.

**Сегментное поперечное сечение.** Для сегмента  $\omega = \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi) r^2$ ;  $R = \frac{\varphi - \sin \varphi}{2\varphi} r$ ;  $B = 2r \sin \varphi / 2$ .

Для сегмента при  $x = 5,5$  имеем из (17.21)

$$z = \frac{\varphi^{0,36} \left( \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi} \right)^{0,55+0,36y}}{\varphi_0^{0,36} \left( \frac{\varphi_0 - \sin \varphi_0}{\varphi_0} \right)^{0,55+0,36y}}$$

или

$$z = \frac{F(\varphi)}{F(\varphi_0)}$$

Значения функции  $F(\varphi)$  приведены в табл. П.17.7.  
Подставляя  $\omega$ ,  $R$  и  $B$  в (17.8), получаем

$$P'_k = \frac{\alpha i}{gn^2} r^{2y} \Theta(\varphi),$$

где

$$\Theta(\varphi) = 2^{1-2y} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \left( \frac{\varphi - \sin \varphi}{\varphi} \right)^{2y}.$$

Значения функции  $\Theta(\varphi)$  приведены в табл. П.17.7.

Обращает на себя внимание однотипность выражений для  $z$  и  $P'_k$  при расчетах по Агроскину в руслах с различной формой поперечного сечения. Значение  $z$  равно частному от деления функции  $F(\sigma)$ ,  $F(\tau)$  на постоянное в каждой задаче значение той же функции, но при равномерном движении, т. е.  $F(\sigma_0)$ ,  $F(\tau_0)$ . Параметр кинетичности  $P'_k$  равен произведению  $\alpha i / gn^2$  на линейный или угловой параметр в степени  $2y$ , т. е.  $b^{2y}$ ,  $p^{2y}$ ,  $\varphi^{2y}$  и на функцию  $\Theta$  характеристики живого сечения, т. е.  $\Theta(\sigma)$ ,  $\Theta(\tau)$ ,  $\Theta(\varphi)$ . Наличие таблиц облегчает выполнение расчетов. Изменение  $y$  в пределах  $y = 0,15 \div 0,30$  незначительно сказывается на длине рассчитываемых кривых свободной поверхности.

В заключение укажем, что, принимая другие целые значения  $x$ , не равные единице, например 2; 3; 4, получим при  $x = 2$   $z = Q'/Q$ ; при  $x = 3$   $z = \sqrt[3]{(Q'/Q)^2} = h'_{кр}/h_{кр}$ ; при  $x = 4$   $z = \sqrt{Q'/Q}$  и т. д. И тогда можно непосредственно выполнить интегрирование, т. е., не применяя таблиц, найти необходимые значения функций  $\Phi(z)$ , или  $F(z)$ , или  $f(z)$ .

Способ Н. Н. Павловского. При  $x = 2$  имеем  $z = Q'/Q$  и

$$\Phi(z) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| = 1,1513 \lg \left| \frac{1+z}{1-z} \right|;$$

$$F(z) = \arctg z; \quad f(z) = z^{3/3}.$$

Способ М. Д. Чертоусова. При  $x = 4$  имеем  $z = \sqrt{Q'/Q}$  и

$$\Phi(z) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z = 0,5756 \lg \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z;$$

$$F(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}; \quad f(z) = z^5/5.$$

Можно также выполнять расчеты при  $x = 3$ . В этом случае имеем

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2} \text{ и}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{6} \ln \frac{1+z+z^2}{(1-z)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}};$$

$$F(z) = \frac{1}{6} \ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z-1}{\sqrt{3}};$$

$$f(z) = z^4/4.$$

При вычислении функции  $\operatorname{arctg}$  в указанных формулах значение  $z$  должно быть в радианах.

Определив  $P'$  в каждом случае, найдем длину кривой свободной поверхности.

Длина кривой свободной поверхности независимо от выбранного значения  $x$  получится практически одной и той же. Связано это с тем, что при разных  $x$  значения  $z$ , как было показано, будут различными. Различными будут и значения  $a$ , и значения функций  $\Phi(z)$  при  $i > 0$ ,  $F(z)$  при  $i < 0$  и  $f(z)$  при  $i = 0$ , которые определяются в зависимости от принятого значения  $x$ .

**Способ Б. А. Бахметева.** Б. А. Бахметевым было установлено, что для многих форм поперечного сечения русл (для которых расходная характеристика  $K$  является монотонно возрастающей функцией глубины  $h$ ) существует показательная зависимость

$$(K_1/K_2)^2 = (h_1/h_2)^x, \quad (17.28)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  — две произвольно взятые глубины в данном поперечном сечении русла;  $K_1$  и  $K_2$  — соответствующие им расходные характеристики.

Эта зависимость приближенная и строгого теоретического обоснования не получила, но она находит довольно широкое применение и дает вполне удовлетворительные результаты. Здесь  $x$  называется гидравлическим показателем русла. Приближенно считается, что гидравлический показатель русла постоянен для данного поперечного сечения русла и не зависит от глубины. Однако это справедливо лишь для некоторых русл. К ним относятся узкие прямоугольные русла ( $x = 2$ ), широкие ( $b \gg h$ ), прямоугольные ( $x = 3,4$ ) и некоторые другие.

Для прямоугольных, трапециевидных и параболических русл (кроме широких и узких) при  $i > 0$  показатель  $x$  определяется по вытекающему из (17.28) выражению

$$x = 2 \frac{\lg K_{\text{ср}} - \lg K_0}{\lg h_{\text{ср}} - \lg h_0}, \quad (17.29)$$

где  $h_{\text{ср}}$  — средняя глубина на рассчитываемом участке;  $K_{\text{ср}}$  — расходная характеристика при этой глубине.

Так как для указанных русл показатель  $x$  зависит от глубины, то выбор именно таких параметров ( $h_{\text{ср}}$  и  $h_0$ ,  $K_{\text{ср}}$  и  $K_0$ ) дает необходимую точность при расчетах.

Для русл с замкнутым и составным поперечным сечением зависимость (17.28) вообще неприменима.

При расчетах по способу Б. А. Бахметева длина кривых свободной поверхности определяется по (17.15), (17.17) и (17.19) при уклонах дна  $i > 0$ ,  $i < 0$  и  $i = 0$  соответственно.

По Б. А. Бахметеву при  $i > 0$ , приняв в (17.28) глубины  $h_1 = h$  и  $h_2 = h_0$ , имеем  $(K/K_0)^2 = (h/h_0)^2$ ,  $z = \eta = h/h_0$  или  $h = h_0 z$ . Далее

$$a = \frac{dh}{dz} = \frac{h_0 dz}{dz} = h_0.$$

Длина кривой свободной поверхности определяется по (17.15), функция  $\Phi(z)$  — по (17.16);  $P'_k = \alpha (Q')^2 B / (g\omega^3)$ ;  $Q' = \omega C \sqrt{Ri}$ .

Значения указанной функции при различных значениях гидравлического показателя приведены в табл. П.17.8 (для случая  $i > 0$ ).

При  $i < 0$   $z = \xi = h_0/h'_0$  и длина кривой свободной поверхности определяется по (17.17), а функция  $F(z)$  — по (17.18),  $h'_0$  — фиктивная нормальная глубина при равномерном движении с расходом  $Q$  в русле с уклоном  $i' = |i|$ ;  $Q' = \omega C \sqrt{R'i}$ ;  $P'_k = \alpha (Q')^2 \times B / (g\omega^3)$ . Значения  $F(z)$  приведены в табл. П.17.9.

При  $i = 0$  длина  $l_{1-2}$  определяется по (17.19),  $f(z)$  — по (17.20), в качестве произвольного положительного уклона  $i'$  здесь принят  $i_{\text{кр}}$ , а  $z = \xi = h/h_{\text{кр}}$ ;  $P'_{k, \text{кр}} = \alpha (Q')^2 B / (g\omega^3)$ ;  $Q' = \omega C \sqrt{R'i_{\text{кр}}}$ .

Гидравлический показатель русла  $x$  определяется при  $i > 0$  по (17.29); при  $i < 0$

$$x = 2 \frac{\lg K_{\text{ср}} - \lg K'_0}{\lg h_{\text{ср}} - \lg h'_0},$$

где  $K'_0 = \omega'_0 C'_0 \sqrt{R'_0}$ ; при  $i = 0$

$$x = 2 \frac{\lg K_{\text{ср}} - \lg K_{\text{кр}}}{\lg h_{\text{ср}} - \lg h_{\text{кр}}},$$

где  $K_{\text{кр}} = \omega_{\text{кр}} C_{\text{кр}} \sqrt{R_{\text{кр}}}$ .

**Последовательность расчета кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах.** При расчете кривых свободной поверхности чаще всего необходимо найти значения глубин в различных створах, разбивающих рассчитываемую кривую на участки, и, суммируя длины отдельных участков, найти длину кривой свободной поверхности, т. е. построить кривую.

При расчете сначала определяются нормальная глубина  $h_0$  и критическая глубина (если необходимо, то и критический уклон  $i_{кр}$ ). Затем в результате анализа устанавливаются тип кривой свободной поверхности, асимптоты этой кривой, определяются граничные глубины. При этом могут быть известны обе граничные глубины из гидравлического расчета сооружения (например, верхняя и нижняя глубины для кривой подпора  $Ic$ ). В других случаях из гидравлического расчета сооружения известна лишь одна глубина, а вторая назначается так, чтобы она, например, отличалась от нормальной глубины на 1—3 % (см. рис. 17.2, 17.3, 17.7).

После определения граничных глубин весь участок кривой свободной поверхности разбивается на ряд расчетных участков. Последовательно переходя от одного участка к другому, вычисляя глубину на одной границе участка при известной глубине на другой границе участка и длину участка кривой свободной поверхности, можно выполнить расчет всей кривой подпора или спада.

### **17.5. Установившееся неравномерное плавно изменяющееся движение жидкости в открытых непризматических руслах**

В гидротехнической практике встречаются случаи, когда приходится рассчитывать установившееся неравномерное плавно изменяющееся движение жидкости в открытых непризматических руслах. К таким случаям может быть отнесено движение в пределах расширяющихся или сужающихся входных или выходных участков гидротехнических сооружений, в сравнительно коротких каналах с увеличивающейся или уменьшающейся по направлению течения шириной и т. п.

В этих случаях изменение глубин по длине потока описывается общим уравнением установившегося неравномерного плавно изменяющегося движения (15.7). Поскольку точное интегрирование уравнений (15.7) и (15.8) пока не осуществлено, пользуются приближенными решениями.

Одно из таких решений — применение уравнения Бернулли, т. е. замена дифференциального уравнения движения уравнением в конечных разностях. Этот способ впервые был предложен В. И. Чарномским (1914 г.). Аналогичное решение было предложено Хестедом в 1924 г. Рассматриваемый способ иногда называют способом Хестеда.

Следуя В. И. Чарномскому, запишем для двух сечений рассматриваемого потока применительно к рис. 15.1, находящихся на ко-



нечном, но достаточно малом расстоянии  $\Delta l$  друг от друга (плоскость сравнения проходит через наинизшую точку второго сечения),

$$h_1 + i\Delta l + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h_{\text{тр}}, \quad (17.30)$$

где  $i$  — уклон дна;  $\Delta l$  — малое конечное расстояние между сечениями;  $\Delta h_{\text{тр}}$  — потери напора на преодоление гидравлических сопротивлений на длине участка  $\Delta l$ .

Как и раньше, будем считать, что потери по длине при плавно изменяющемся движении можно определять по формуле, непосредственно вытекающей из формулы Шези,

$$h_{\text{тр}} = \frac{v^2 l}{C^2 R}.$$

Полагая, что потери на трение на участке  $\Delta l$  можно определить через средние на данном участке параметры  $v_{\text{ср}}$ ,  $C_{\text{ср}}$ ,  $R_{\text{ср}}$ , имеем

$$\Delta h_{\text{тр}} = \frac{v_{\text{ср}}^2 \Delta l}{C_{\text{ср}}^2 R_{\text{ср}}}. \quad (17.31)$$

Заменив в (17.30)  $v = Q/\omega$ ,  $h_2 - h_1 = \Delta h$  и приняв  $\alpha = 1,1$ , т. е.  $\alpha/2g = 0,056 \text{ с}^2/\text{м}$ , получим

$$\Delta h - i\Delta l = 0,056Q^2 \left[ \frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{18\Delta l}{(\omega^2 C^2 R)_{\text{ср}}} \right]. \quad (17.32)$$

Уравнение (17.32) и принимается за основное расчетное уравнение для рассматриваемого движения в непризматических руслах.

Задача решается следующим образом. В непризматическом русле с известным уклоном дна и известной шероховатостью, оцениваемой, например, коэффициентом шероховатости  $n$ , проходит расход  $Q$ . Поперечные сечения водотока, а также глубина воды в первом сечении  $h_1$  известны. При известной  $h_1$  можно определить  $\omega_1$ ,  $C_1$ ,  $R_1$ . Необходимо найти глубину во втором сечении, отстоящем от первого на расстоянии  $\Delta l$ . Задача решается подбором, путем последовательных приближений.

Задаемся значением глубины  $h_2$ . Далее вычисляем значения  $\omega_2$ ;  $\omega_{\text{ср}} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ;  $R_2$ ;  $R_{\text{ср}} = (R_1 + R_2)/2$ ;  $C_2$ ;  $C_{\text{ср}}$ ;  $\omega_{\text{ср}}^2 C_{\text{ср}}^2 R_{\text{ср}}$ . Подставляя полученные значения в (17.32) при заданной  $\Delta l$ , проверяем, насколько верно была назначена  $h_2$ .

Если получается равенство, то данное значение глубины удовлетворяет уравнению (17.32). При неравенстве необходимо задаться новым значением глубины  $h_2$  и так вплоть до отыскания значения  $h_2$ , удовлетворяющего уравнению (17.32). Найдя такое значение для участка 1—2, переходим к участку 2—3, а затем к последующим.

## 17.6. Контрольные вопросы

1. Какие возможны зоны в потоке с точки зрения существования различных кривых свободной поверхности при уклоне, большем нуля?
2. Какие имеются виды кривых свободной поверхности?
3. Какая особенность дифференциального уравнения плавно изменяющегося неравномерного движения жидкости в открытых руслах свидетельствует о том, что свободная поверхность может изменяться не только плавно в пространстве, но и скачкообразно?
4. Подробно проанализируйте кривые свободной поверхности в русле с прямым уклоном дна, меньшим критического.
5. Проанализируйте кривые свободной поверхности в русле с прямым уклоном дна, большим критического.
6. Проанализируйте кривые свободной поверхности в русле с прямым уклоном дна, равным критическому.
7. Проанализируйте формы кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах с нулевым и обратным уклоном. Дайте энергетическую трактовку.
8. Опишите основные этапы интегрирования дифференциального уравнения установившегося неравномерного движения в открытых призматических руслах, предшествующие приведению уравнений к виду, удобному для интегрирования.
9. Выполните преобразования и напишите расчетные формулы для длины кривых свободной поверхности при прямом, обратном и нулевом уклоне.
10. Какие типы способов расчета кривых свободной поверхности при рассматриваемом движении вы можете указать? В чем принципиальное различие типов этого расчета?
11. В чем заключается способ расчета кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах, предложенный И. И. Агроскиным?
12. Как в указанном способе расчета отражены особенности трапециевидного, параболического и сегментного поперечного сечений?
13. Как рассчитываются кривые свободной поверхности в руслах (призматических), если значение  $x$  задано и равно целому числу (например, 2, 3, 4)? Напишите расчетные формулы.
14. Как выполняется расчет кривых свободной поверхности по способу Бахметева?
15. Что такое гидравлический показатель русла? Как он определяется?
16. Зависит ли выражение для гидравлического показателя русла от того, будет ли уклон нулевым, прямым или обратным?
17. Опишите последовательность и способы выполнения расчета кривых свободной поверхности в открытых призматических руслах.
18. Каковы особенности установившегося неравномерного плавно изменяющегося движения жидкости в открытых непризматических руслах? Как рассчитываются кривые свободной поверхности в этих руслах?

## Глава 18

### КРИВЫЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ В ЕСТЕСТВЕННЫХ РУСЛАХ

#### 18.1. Общая характеристика движения в реках

Условия движения воды в естественных руслах рек существенно отличаются от условий движения воды в искусственно созданных водотоках — каналах.