2.2 Система Размерности (M-L-T)

Анализ размерностей является по существу анализом уравнений, описывающих изучаемое явление в самом общем виде. Успех применения теории размерностей к моделированию зависит, прежде всего, от правильности выбора величин, характеризующих явление. Понятие о размерности этих величин лежит в основе теории размерностей.

Величины, численные значения которых зависят от системы единиц, называются ***размерными*** или именованными. Если такой зависимости нет, то величины называются безразмерными или отвлеченными. Физические величины связаны между собой. Поэтому если принять некоторые из них в качестве «***основных***» и установить для них единицы, то единицы всех остальных величин будут определённым образом выражаться через единицы основных величин. Единицы основных величин называют основными, или первичными, а все остальные ***производными или вторичными***. Практически в механических задачах достаточно установить единицы для трех величин, чтобы выразить через них единицы всех остальных.

Выражение производной единицы через основные единицы называются ***размерностью***. Зависимость единицы производной величины от единиц основных величин может быть представлена в виде формулы, называемой формулой размерности. В эту формулу основные единицы размерности входят в виде символов $[X]$. О размерности можно говорить только применительно к определенной системе единиц. При использовании системы СИ – это символы единиц длины $[l]$, времен $[t]$ и массы $[m]$. Формулы размерности физических величин имеют вид степенного одночлена.

Чтобы при измерении единиц в системе СИ формулу размерности любой механической величины X можно представить как:

$$\left[X\right]=\left[l\right]^{m_1}\cdot\left[m\right]^{m_2}\cdot\left[t\right]^{m_3}$$

В системе единиц СИ единицы измерения делятся на единицы измерения ***первичные*** или ***вторичные***.

В первичную систему единиц измерения входят: масса (*кг*), длина (*м*), время (*с*), сила тока (ампер, *а*), температура (Кельвин, K^o) и сила света (свеча, *св*).

Ко вторичным единицам измерения относятся единицы измерения составленные при помощи формул, в которые входят первичные измерения, например формула для определения скорости:

$$\vartheta=\frac{d\ell}{dt}$$

где ℓ – длина, t – время.

Тогда единица измерения скорости, выраженная через основные единицы измерения, имеет вид:

$$\left[\vartheta\right]=\left[L\right]\cdot\left[T\right]^{-1}$$

Где L,T единицы измерения соответственно длины и времени, или

$$\left[\vartheta\right]=\left[\frac{M}{c}\right]$$

Формула для определения силы (второй закон Ньютона):

$$F=m\cdot a$$

Где:
m – масса тела;
a – ускорение.

Тогда $$\left[F\right]=\left[M\right]\cdot\left[L\right]\cdot\left[T\right]^{-2}$$

Формула для определения работы:

$$A=F\cdot S$$

Здесь F – сила, S – пройденное расстояние:

$$\left[A\right]=\left[M\right]\cdot\left[L\right]^2\cdot\left[T\right]^{-2}$$

Из вышесказанного следует, что единицы измерения любого физического параметра состоит из возведения в степень произведения первичных единиц.
Например, параметр, состоящий из трех величин, выглядит следующим образом:

$$[Q]=[M]^{\mu}\cdot[L]^{\lambda}\cdot[T]^{\tau}$$

Т.е. в системе СИ любую физическую величину в области механики можно выразить через основные единицы измерения: длины L, времени T, массы M.

2.3 Переход от одной системы измерения к другой. Связанные и несвязанные единицы измерения

При моделировании какого-либо физического явления участие всех единицы измерения одновременно маловероятно.
Например, при изучении механического движения такие единицы измерения как ампер, кельвин, свеча не участвуют.

Если исследуются задачи, касающиеся электросистем, и не рассматриваются механическое движение, тогда вторичные единицы измерения определяются на основе силы тока, длины и времени.

Связь между единицами измерения можно определить следующим образом:
В качестве примера возьмем основные единицы измерения в механических системах: длина L, время T, масса M.

Теперь рассмотрим условие того, что величины U_1,U_2,U_3 не связаны между собой. Величины не связаны между собой, если соблюдаются следующие условия:

1. ***Первое условие***: единицы измерения величин $[U_1]\cdot[U_2]\cdot[U_3]$ должны быть функцией $[M];[L];[T]$ т.е. $[U_1]\neq[U_2]^{\alpha}\cdot[U_3]^{\beta}$ т.е. α, β– любые числа.

2. ***Второе условие***: $[M];[L];[T]$ можно выразить только через $[U_1]\cdot[U_2]\cdot[U_3]$. Рассмотрим случай, удовлетворяющий этим условиям одновременно. Представим, что единицы измерения (U_1,U_2,U_3) следующие:

$$[U_1]=[M]^{\mu_1}\cdot[L]^{\lambda_1}\cdot[T]^{\tau_1}$$

$$[U_2]=[M]^{\mu_2}\cdot[L]^{\lambda_2}\cdot[T]^{\tau_2}$$

$$[U_3]=[M]^{\mu_3}\cdot[L]^{\lambda_3}\cdot[T]^{\tau_3}.$$

Прологарифмировав выражение, придем к следующей системе уравнений:

$$\lg[U_1]=\mu_1\lg[M]\cdot\lambda_1\lg[L]\ \cdot\tau_1\lg[T];$$
$$\lg[U_2]=\mu_2\lg[M]\cdot\lambda_2\lg[L]\ \cdot\tau_2\lg[T];$$
$$\lg[U_3]=\mu_3\lg[M]\cdot\lambda_3\lg[L]\ \cdot\tau_3\lg[T].$$

Из курса алгебры известно, что эта система уравнений имеет решение, если матрица, составленная из коэффициентов системы, будет отлична от 0, или

$$\Delta=\begin{vmatrix}\mu_1 & \lambda_1 & \tau_1\\ \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2\\ \mu_3 & \lambda_2 & \tau_3\end{vmatrix}\neq 0$$

Значит, чтобы считать $[U_1],[U_2],[U_3]$ основными единицами измерения, необходимо выполнение 1-го условия.

Например, рассмотрим возможность того, что сила, время и длина являются первичными единицами измерения $U_1 = F$, $U_2 = T$, $U_3 = L$ или на основе единиц измерения

$$[U_1] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2}$$

$$[U_2] = [T]; \qquad [U_3] = [L].$$

Тогда на основании этой системы уравнений матрица примет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Значит сила, время, длина являются величинами первичными.

Точно также сила *F,* плотность *ρ,* время *T* также могут быть первичными единицами, так как $\Delta=4$. Однако, для силы, скорости и мощности $\Delta=0$ значит, эти величины не могут быть первичными единицами. Это можно понять из следующей формулы, т.к. $N=F\cdot V$ или можем доказать как выше было доказано

$$[F] = [M]^1 \cdot [L]^1 \cdot [T]^{-2}$$

$$[V] = [M]^0 \cdot [L]^1 \cdot [T]^{-1}$$

$$[N] = [M]^1 \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-3}$$

Определяем оператор матрицы, составленной по показателям степеней полученного выражения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 - 1 = 0$$

$\Delta = 0$, значит это не несвязанные величины, т.е. если известны сила и скорость, можно определить мощность.

При конкретном изучении отдельных классов явлений целесообразно использовать в качестве основных единиц тех величин, которые либо задаются, либо являются наиболее характерными. Основные единицы могут быть разными в разных частных задачах.

Размерности величин могут быть зависимыми и независимыми. Размерность к величинам называют независимыми, если каждая из них не может быть представлена в виде комбинации остальных. Например, размерности энергии $[m] \cdot [\ell]^2 \cdot [t]^{-2}$ длин $[\ell]$ и скорости $[\ell] \cdot [t]^{-1}$ следует считать независимыми, т.к. ни одна из них не может быть получена комбинацией размерностей двух других величин.

Отметим в заключении, что метод анализ размерностей далеко не всегда позволяет установить вид искомой зависимости и не является универсальным средством решения гидравлических задач. Однако он весьма полезен, когда информация о конкретном явлении достаточно скудна, т.к. позволяет провести начальный анализ и более рационально организовать экспериментальные исследования.

Контрольные вопросы

1. Что такое единицы измерения?
2. Основные и вторичные единицы измерения?
3. Связанные и несвязанные единицы измерения?
4. Определите которые из физических единиц связанные, а которые не связанные: «сила»; «время»; «скорость».