

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ (ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР)

7.1. Общее описание гидравлического удара

Термином *гидравлический удар* обычно определяют изменение давления в напорных трубопроводах в результате изменения во времени средней скорости движения жидкости в каком-либо поперечном сечении потока. При этом проявляются как инерционные, так и упругие свойства жидкости и трубопровода. Рассмотрим основные особенности этого явления на примере неустановившегося движения жидкости в горизонтальной цилиндрической трубе диаметром D и длиной L , присоединенной к резервуару (рис. 7.1); на конце трубы установлена задвижка, регулирующая расход жидкости. При стационарных условиях расход жидкости, вытекающей в атмосферу, поддерживается постоянным при фиксированном открытии задвижки. Для упрощения предположим, что в начальный момент времени задвижка частично прикрыта, так что выходная скорость за задвижкой много больше, чем средняя скорость жидкости в трубе v_0 ; при этом скоростной напор $v_0^2/2g$ и потери напора в трубе (имеющие порядок скоростного напора) пренебрежимо малы по сравнению с H — превышением свободной поверхности жидкости в резервуаре над осью трубопровода.

В этих условиях напорная и пьезометрическая линии практически совпадают друг с другом и горизонтальны вдоль всей трубы за исключением пренебрежимо короткой части, непосредственно примыкающей к задвижке. Плоскость сравнения проходит через ось трубопровода. Таким образом перед полным закрытием задвижки в трубопроводе имеют место следующие начальные условия: по всей длине средняя скорость жидкости равна $v = v_0$, а гидродинамическое давление $p_0 = \rho g H$ (давление в поперечных сечениях потока считаем постоянным, пренебрегая его изменением под действием силы тяжести).

Предположим, задвижка мгновенно закрывается, так что расход в плоскости регулирующего элемента задвижки мгновенно уменьшается от конечного значения до нуля. Если бы жидкость была несжимаема, то вся масса жидкости, заполняющей трубопровод, должна мгновенно (следовательно, с бесконечно большим ускорением) остановиться. Таким образом, закрытие задвижки мгновенно отразится на потоке жидкости по всей длине трубопровода. Бесконечно большие ускорения, возникающие при использовании модели несжимаемой жидкости, и обусловленные этим

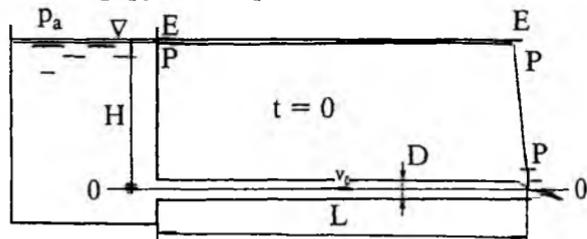


Рис. 7.1. Пьезометрическая и напорная линии в трубопроводе до закрытия задвижки

бесконечно большие силы, которым не смогут сопротивляться стенки трубопровода, показывают, что для описания явления, происходящего в трубопроводе в случае мгновенного закрытия задвижки, необходимо учитывать сжимаемость жидкости и деформируемость стенок трубопровода.

В действительности в момент закрытия задвижки средняя скорость жидкости v только в ближайшем к задвижке поперечном сечении потока (1—1 на рис. 7.2,а) уменьшается от значения v_0 до 0, а расположенные выше по течению массы жидкости, продолжая двигаться, набегают на задвижку. При этом на малой длине Δx трубопровода выше по течению от сечения 1—1:

образуется слой остановившейся жидкости толщиной Δx ;

плотность жидкости в этом слое возрастает;

давление возрастает до значения $p = p_0 + p_{г\gamma}$, где $p_{г\gamma}$ — дополнительное давление, обусловленное силами инерции, которое назовем *давлением гидравлического удара*;

стенки трубопровода под действием дополнительного давления $p_{г\gamma}$ расширяются.

Выше по течению от этого участка трубопровода длиной Δx начальные условия течения (скорость v_0 и давление p_0) пока остаются неизменными, а поток невозмущенным.

На остановившийся слой жидкости толщиной Δx набегают массы ближайшего выше по течению движущегося слоя жидкости, который тоже останавливается, и в этом слое плотность жидкости и давление возрастают, а стенки трубопровода расширяются. Аналогичным образом останавливаются следующие (расположенные выше по течению) массы жидкости. В результате через некоторое время после закрытия задвижки в трубопроводе образуются две области (см. рис. 7.2,а):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость течения жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{г\gamma}$, жидкость сжата и стенки трубопровода расширены;

в части, примыкающей к резервуару, $v = v_0$, а $p = p_0$, т.е. сохраняются начальные условия, поток еще не возмущен в результате закрытия задвижки.

Граница между указанными областями называется *фронтом гидравлического удара* или *фронтом возмущения*. Эта граница перемещается вдоль трубы со скоростью a , которая, как правило, во много раз больше скорости движения жидкости; скорость a зависит от упругих характеристик жидкости и трубопровода.

В момент времени $t_r = L/a$ фронт гидравлического удара подойдет к входному сечению трубопровода. При этом во всем трубопроводе скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{г\gamma}$, жидкость сжата, а стенки трубопровода расширены. Под действием превышения давления в трубопроводе над давлением в резервуаре вблизи входа в трубопровод на величину $p_{г\gamma}$ жидкость будет выталкиваться из трубопровода и вытекать в резервуар со скоростью v_0 ; это будет происходить послойно (как ранее остановка жидкости при закрытии задвижки). Слой за слоем начнут двигаться в сторону резервуара со скоростью $v = -v_0$, а давление в каждом слое упадет до значения, которое определяется уровнем воды в резервуаре. В результате при $L/a < t < 2L/a$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2,б):

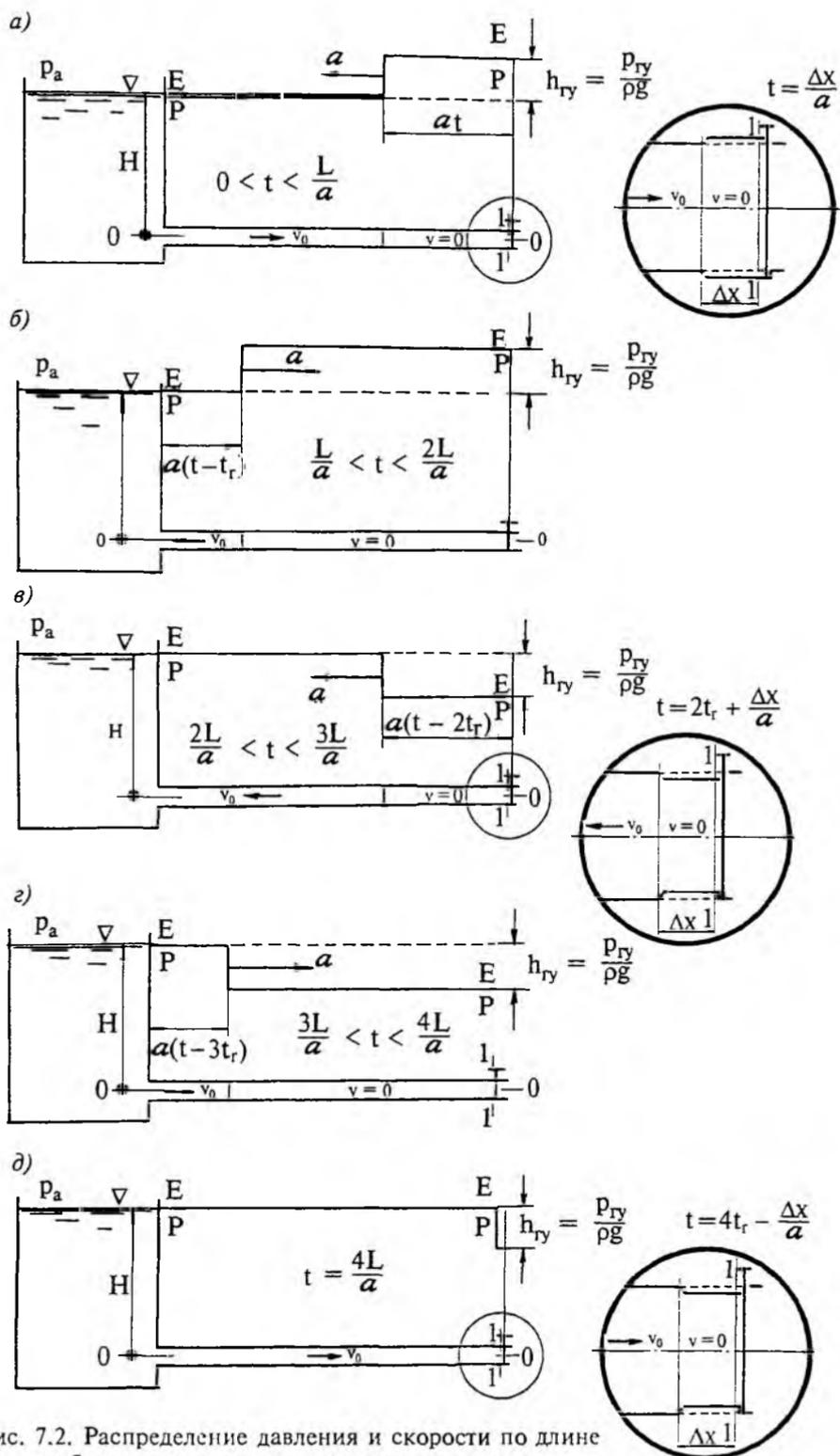


Рис. 7.2. Распределение давления и скорости по длине трубопровода в различные моменты времени

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 + p_{гг}$, жидкость сжата, стенки трубопровода расширены; в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$, т.е. жидкость не сжата, а стенки трубопровода вернулись в исходное недеформированное состояние.

Граница между этими областями со скоростью a движется в сторону задвижки. В момент $t = 2t_r$, когда граница подойдет к задвижке, вся масса жидкости в трубопроводе будет двигаться со скоростью $v = -v_0$ в сторону резервуара, а давление по всей длине трубопровода равно p_0 . Таким образом, в этот момент картина течения похожа на картину, имевшую место перед мгновенным закрытием задвижки, с той лишь разницей, что теперь жидкость не набегает на закрытую задвижку, а пытается оторваться от нее. Полагаем, что задвижка (как и в случае набегания на нее) обеспечивает нулевые скорости движения жидкости в сечении 1—1 при попытке жидкости оторваться от нее. При этом давление в сечении 1—1 (вблизи задвижки) уменьшится до значения $p = p_0 - p_{гг}$, плотность жидкости уменьшится, а стенки трубопровода будут обжаты атмосферным давлением в результате понижения давления внутри трубопровода. Предполагается, что внутри трубопровода абсолютное давление достаточно велико и фазовые переходы исключены (см. гл. 1). При $2t_r < t < 3t_r$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2, в):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, давление $p = p_0 - p_{гг}$, стенки трубопровода обжаты;

в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$.

В момент $t = 3t_r$, когда граница между этими областями подойдет ко входному сечению трубопровода, во всем трубопроводе скорость жидкости $v = 0$, а давление $p = p_0 - p_{гг}$ меньше, чем давление в резервуаре вблизи входа в трубопровод. Под действием разности давлений жидкость из резервуара начнет поступать в трубопровод со скоростью v_0 , при этом давление в трубопроводе возрастет до p_0 , а его стенки вернуться в недеформированное состояние. При $3t_r < t < 4t_r$ в трубопроводе будет иметь место следующее (рис. 7.2, г):

в части, примыкающей к задвижке, средняя скорость жидкости $v = 0$, а давление $p = p_0 - p_{гг}$, стенки трубопровода обжаты;

в части, примыкающей к резервуару, $v = -v_0$, $p = p_0$, стенки трубопровода недеформированы.

Когда граница между этими частями достигнет задвижки (в момент $4t_r$), в трубопроводе сформируются условия, совпадающие с начальными (рис. 7.2, д), и описанный процесс изменения скорости и давлений повторится.

Гидравлический удар впервые был изучен при обследовании аварии на московском водопроводе проф. Н.Е. Жуковским, который хорошо известен как "отец русский авиации"; им же были предложены основные зависимости, описывающие это явление.

7.2. Основные уравнения гидравлического удара

Рассмотрим напорное движение жидкости в цилиндрической трубе диаметром D с толщиной стенок δ и модулем упругости материала стенок $E_{тр}$. Выделим двумя поперечными сечениями потока, расположен-

ными на бесконечно близком расстоянии Δx , контрольный объем \mathcal{V} (рис. 7.3); контрольная поверхность A , ограничивающая этот объем, состоит из двух контрольных поперечных сечений ω_x и $\omega_{x+\Delta x}$ и недеформированной внутренней поверхности $A_{тр}$. В соответствии с одномерным подходом полагаем, что скорость жидкости в поперечном сечении постоянна и равна средней (объемной) скорости v и гидродинамическое давление p в поперечном сечении постоянно (влияние силы тяжести на распределение давления для простоты исключаем). Отметим, что левое контрольное сечение имеет координату x , а правое — $(x + \Delta x)$, поэтому все геометрические и гидродинамические величины в этих поперечных сечениях будут обозначаться соответствующими индексами, например v_x и $p_{x+\Delta x}$ и т.п.

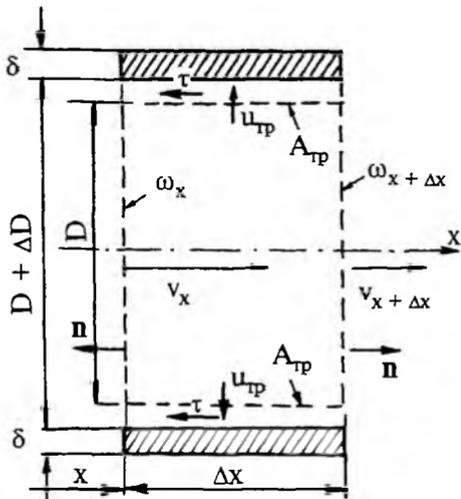


Рис. 7.3. Контрольный объем для вывода уравнений гидравлического удара

Пусть в результате какого-либо возмущения потока (обусловленного, например, закрытием задвижки) жидкость в контрольном объеме сжимается, ее плотность ρ возрастает, возрастает и гидродинамическое давление p , под действием которого стенки трубопровода расширяются и диаметр его становится равным $D + \Delta D$. Применим к контрольному объему \mathcal{V} законы сохранения массы и изменения количества движения (гл. 4).

1. Закон сохранения массы:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (7.1)$$

Так как контрольная поверхность A , ограничивающая объем \mathcal{V} , неизменна во времени, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V}. \quad (7.2)$$

По определению модуль объемной упругости жидкости $E_{ж}$ равен

$$E_{ж} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right). \quad (7.3)$$

Преобразуем (7.2), используя (7.3) и пренебрегая величинами второго порядка малости,

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{E_{ж}} \frac{\partial p}{\partial t} d\mathcal{V} \equiv \frac{\rho_x}{E_{ж}} \frac{\partial p_x}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} = \frac{\rho_x}{E_{ж}} \frac{\partial p_x}{\partial t} \mathcal{V}. \quad (7.4)$$

Поверхностный интеграл в (7.1) представим в виде суммы

$$\int_A \rho u_n dA = \int_{\omega_x} \rho u_n dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} \rho u_n dA + \int_{A_{тр}} \rho u_n dA, \quad (7.5)$$

где нормальные составляющие скорости жидкости в сечениях ω_x и $\omega_{x+\Delta x}$ равны $(-v)_x$ и $v_{x+\Delta x}$ соответственно, а на поверхности $A_{\text{тр}}$ скорость $u_n = u_{\text{тр}}$ — равна скорости увеличения радиуса трубопровода при его расширении:

$$u_{\text{тр}} = \frac{\Delta D}{2\Delta t}. \quad (7.6)$$

Согласно котельной формуле (2.56) дополнительное нормальное напряжение $\Delta\sigma$ в стенках круглоцилиндрической трубы, связанное с увеличением давления внутри трубы на величину Δp , равно

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D}{2\delta}. \quad (7.7)$$

В соответствии с законом Гука

$$\Delta\sigma = E_{\text{тр}} \frac{\pi\Delta D}{\pi D},$$

и, следовательно,

$$\Delta D = \frac{\Delta\sigma D}{E_{\text{тр}}} = \frac{\Delta p D^2}{2\delta E_{\text{тр}}}. \quad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (7.6), получаем

$$u_{\text{тр}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \frac{D^2}{4\delta \cdot E_{\text{тр}}}. \quad (7.9)$$

Используя полученный результат и пренебрегая малыми величинами второго порядка, преобразуем поверхностный интеграл (7.5):

$$\begin{aligned} \int_A \rho u_n dA &= -\rho_x v_x \frac{\pi D^2}{4} + \rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x} \frac{\pi D^2}{4} + \rho u_{\text{тр}} \pi D \Delta x = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \frac{\pi D^2}{4} \right) \Delta x + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \frac{D^2}{4\delta E_{\text{тр}}} \pi D \Delta x. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Подставив (7.4) и (7.10) в (7.1) и разделив все слагаемые на массу жидкости, заключенной в контрольном объеме, получим первое уравнение гидравлического удара:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (7.11)$$

где

$$a^2 = \frac{\frac{E_{\text{ж}}}{\rho}}{1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{\text{ж}}}{E_{\text{тр}}}}. \quad (7.12)$$

Механический смысл величины a разъяснен ниже.

2. Закон изменения количества движения:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (7.13)$$

С целью упрощения нижеследующих преобразований примем, что ось трубопровода горизонтальна, и потому в проекции уравнения (7.13) на горизонтальную ось x , совпадающую с осью трубопровода, не содержится вклада массовой силы, так как таковой в рассматриваемом случае является только сила тяжести. В результате

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV = \int_A p_{nx} dA. \quad (7.14)$$

Левую часть уравнения (7.14) преобразуем с учетом (7.4) и (7.10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_V \rho u_x dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_x dV + \int_A \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x - \rho_x v_x^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho_{x+\Delta x} v_{x+\Delta x}^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho u_{тр} \pi D \Delta x v = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \rho \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\pi D^3 v}{4 \delta E_{тр}} \Delta x = \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \left(v \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho}{E_{ж}} + \frac{\rho \pi D^3 v}{4 \delta E_{тр}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \Delta x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x = \\ &= \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\pi D^2}{4} \Delta x + \rho v \frac{\pi D^2}{4 E_{ж}} \left(1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{ж}}{E_{тр}} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \frac{\pi D^2}{4} \Delta x = \\ &= \left[\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) \right] \frac{\pi D^2}{4} \Delta x. \end{aligned} \quad (7.15)$$

При преобразовании правой части (7.14) примем, что движение в трубопроводе параллельноструйное, так что в поперечном сечении потока ω_x нормальные напряжения $p_{nx} = -p_{xx} = p_x$, где p_x — гидродинамическое давление в этом сечении, а в сечении $\omega_{x+\Delta x}$ нормальное напряжение $p_{nx} = p_{xx} = -p_{x+\Delta x}$; на поверхности $A_{тр}$ напряжение $p_{nx} = -\tau$ — касательное напряжение на стенке:

$$\begin{aligned} \int_A p_{nx} dA &= \int_{\omega_x} p_{nx} dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} p_{nx} dA + \int_{A_{тр}} p_{nx} dA = \\ &= p_x \frac{\pi D^2}{4} - p_{x+\Delta x} \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D \Delta x = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\pi D^2}{4} - \tau \pi D \right] \Delta x. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Подставив (7.15) и (7.16) в (7.14), после сокращений получим второе уравнение гидравлического удара:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v^2) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\tau}{D}. \quad (7.17)$$

Используя выражение $\frac{\partial p}{\partial t}$ из уравнения (7.11), приведем (7.17) к более простому виду:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\tau}{D}. \quad (7.18)$$

Для упрощения анализа полученных уравнений будем считать, что слагаемые, выражающие конвективную часть ускорения жидкости $\left(\rho v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ и вклад касательных напряжений на стенке $\left(\frac{4\tau}{D}\right)$, пренебрежимо малы. Окончательно получаем наиболее простую форму уравнений гидравлического удара:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Система (7.19) относится к гиперболическому типу дифференциальных уравнений с частными производными; уравнения такого типа называются также *волновыми* уравнениями. Если дифференциальное уравнение первого порядка с частными производными содержит только одну искомую функцию, оно называется *скалярным* волновым уравнением (см. разд. 7.3), если же такое уравнение содержит две неизвестные функции [например, v и p в системе (7.19)], то оно называется *векторным* волновым уравнением.

7.3. Скалярное волновое уравнение

Для дальнейшего изучения свойств и решения векторных волновых уравнений гидравлического удара (7.19) рассмотрим основные особенности *скалярного волнового* уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (7.20)$$

где $f(x, t)$ — неизвестная функция; c — постоянная величина, имеющая размерность скорости. Очевидно, что если установить между dx и dt соотношения

$$dx = c dt, \quad (7.21)$$

то левая часть уравнения (7.20) может быть представлена в виде полного дифференциала функции f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx \equiv df = 0. \quad (7.22)$$

Следовательно, в физической плоскости (x, t) вдоль линий $x = ct + x_0$, согласно уравнению (7.22) функция $f(x, t)$ сохраняет постоянное значение.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (7.20) и положим, что при $t = 0$ начальное условие (рис. 7.4)

$$f(x, 0) = f_0(x). \quad (7.23)$$

Решение уравнения (7.20), т.е. значение функции f в произвольной точке (x, t) физической плоскости, равно

$$f(x, t) = f(x_0, 0) = f_0(x_0). \quad (7.24)$$

Прямая $x = ct + x_0$ называется характеристической линией или *характеристикой* уравнения (7.20). Если $c < 0$, то угол α тупой.

Решение уравнения (7.20) становится более сложным, если решается задача Коши с граничными условиями при $x = 0$ и $x = L$ (рис. 7.5).

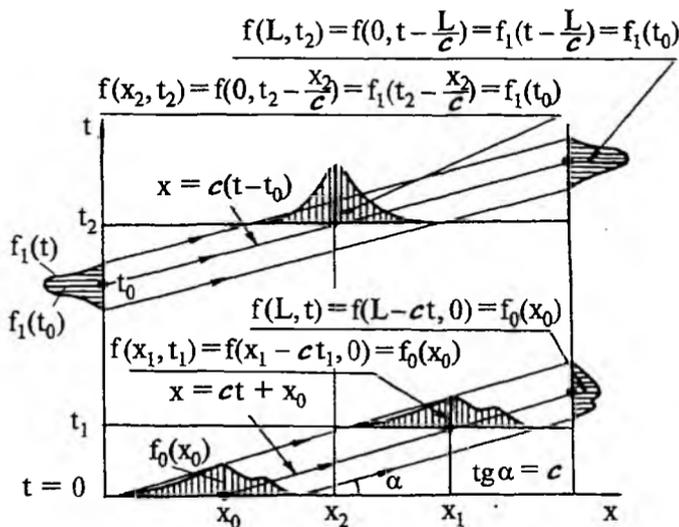


Рис. 7.4. Решения скалярного волнового уравнения

При $c > 0$ вдоль линии $x = 0$ должно быть задано граничное значение функции f :

$$f(x, t)|_{x=0} = f(0, t) = f_1(t). \quad (7.25)$$

В этом случае, если требуется найти значение $f(x, t)$ в точке, которая лежит на характеристической линии, проходящей через точку $(0, t_0)$, то

$$f(x, t) = f\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (7.26)$$

Вместе с тем на линии $x = L$ (при $c > 0$) граничное условие не может быть задано, так как на этой линии (см. рис. 7.5)

$$f(L, t_1) = f_0(L - ct_1)$$

или

$$f(L, t_1) = f_1\left(t_1 - \frac{L}{c}\right).$$

Если $c < 0$, то граничные условия должны быть заданы на линии $x = L$, а значения искомой функции на линии $x = 0$ определяются решением уравнения (7.20).

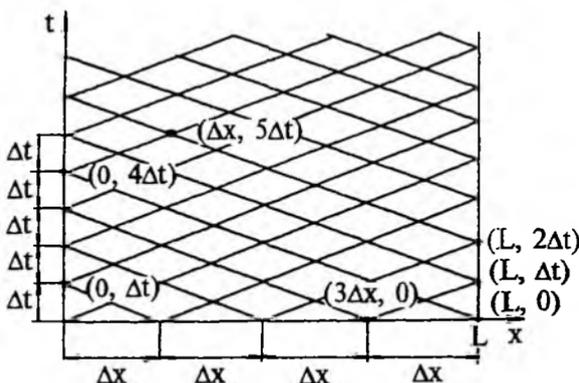


Рис. 7.5. Сетка характеристик для решения уравнений гидравлического удара

7.4. Векторные волновые уравнения

Эффективным методом анализа и решения двух *векторных волновых* уравнений [например, (7.19)] является их преобразование в систему двух *скалярных волновых* уравнений. Для этого введем новые искомые функции $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ согласно следующим формулам:

$$Y(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\rho a} p(x, t); \quad Z(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\rho a} p(x, t). \quad (7.27)$$

Подставив (7.27) в (7.19), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} + a \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} - a \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Покажем, как можно рассчитать скорость жидкости v и гидродинамическое давление p в любом поперечном сечении трубопровода в любой момент времени на примере задачи о *полном гидравлическом ударе*, который возникает при *мгновенном* закрытии задвижки, обсуждавшейся в разд. 7.1. Для этого запишем начальные и граничные условия:

$$v(x, t)|_{t=0} = v_0; \quad p(x, t)|_{t=0} = \rho g H = p_0; \quad (7.29)$$

$$v(x, t)|_{x=L} = 0; \quad p(x, t)|_{x=0} = \rho g H = p_0. \quad (7.30)$$

Уравнения (7.19) или эквивалентная система (7.28) с условиями (7.29) и (7.30) образуют краевую задачу.

Разделим длину трубопровода L на четыре равные части длиной $\Delta x = L/4$. Уравнения характеристических линий для первого и второго уравнений системы (7.28) представим в виде

$$x = at + x_0; \quad x = -at + x_0. \quad (7.31)$$

Как было показано в разд. 7.3, функции $Y(x, t)$ и $Z(x, t)$ сохраняют постоянные значения на соответствующих характеристических линиях. Значения физических характеристик потока жидкости v и p можно рассчитать в любой точке плоскости (x, t) , используя решение системы уравнений (7.28), как будет показано ниже (см. рис. 7.5). Принимая во внимание уравнения характеристик (7.31), зададим шаг по времени $\Delta t = \Delta x/a$.

1. Точка $(L, \Delta t)$. В этой точке значение Y равно значению этой функции в точке $(3\Delta x, 0)$, так как эти две точки лежат на одной характеристической линии, соответствующей первому дифференциальному уравнению системы (7.28):

$$Y(L, \Delta t) = Y(3\Delta x, 0). \quad (7.32)$$

Подставив в (7.30) выражения для Y через физические переменные v и p согласно (7.27) и используя начальные (7.29) и граничные (7.30) условия, получим

$$v(L, \Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t) = v(3\Delta x, 0) + \frac{1}{\rho a} p(3\Delta x, 0);$$

$$0 + \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t) = v_0 + \frac{1}{\rho a} p_0.$$

Отсюда найдем

$$p(L, \Delta t) = p_0 + \rho a v_0 = p_0 + p_{гг}. \quad (7.33)$$

Таким образом, найдено, что значение давления гидравлического удара при полном мгновенном закрытии задвижки, когда скорость жидкости в конце трубопровода мгновенно уменьшается от значения v_0 до 0, равно

$$p_{гг} = \rho a v_0, \quad (7.34)$$

а высота столба жидкости, отвечающая этому давлению,

$$h_{гг} = \frac{p_{гг}}{\rho g} = \frac{a v_0}{g}. \quad (7.35)$$

Последние две зависимости называют формулами Жуковского—Алиеви для величины гидравлического удара.

Следует отметить, что если длину трубопровода L разделить на сколько угодно большое число малых отрезков Δx (а не на четыре, как сделано в настоящем примере расчета), то расчеты, аналогичные приведенным выше, покажут, что в конце трубопровода гидродинамическое давление возрастает на величину давления гидравлического удара $p_{гг} = \rho a v_0$ через бесконечно малый интервал времени $\Delta t = \Delta x/a$ после мгновенного закрытия задвижки. Таким образом, будем считать, что при $x = L$ гидродинамическое давление становится равным $p = p_0 + p_{гг} = p_0 + \rho a v_0$ сразу же после закрытия задвижки, т.е.

$$v(L, 0) = 0; \quad p(L, 0) = p_0 + p_{гг}. \quad (7.36)$$

2. Точка $(0, \Delta t)$. В этой точке значение функции Z равно ее значению в точке $(\Delta x, 0)$, обе эти точки лежат на одной характеристике ($x = -at + \Delta x$), соответствующей второму уравнению системы (7.28); таким образом имеем

$$Z(0, \Delta t) = Z(\Delta x, 0). \quad (7.37)$$

Подставив в (7.37) выражение Z через физические переменные (7.27) и используя начальные и граничные условия, получим

$$v(0, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(0, \Delta t) = v(\Delta x, 0) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 0);$$

$$v(0, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p_0 = v_0 - \frac{1}{\rho a} p_0.$$

Отсюда находим

$$v(0, \Delta t) = v_0.$$

Это показывает, что скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара в момент времени $t = \Delta t = \Delta x/a$ еще не изменилась.

Аналогичные вычисления показывают, что гидродинамическое давление в трубопроводе вблизи задвижки (при $x = L$) остается равным $p = p_0 + p_{гг}$ в моменты времени $t = 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$, а скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара (при $x = 0$) остается равной v_0 в течение временного интервала $(0, 3\Delta t)$.

3. В точке $(0, 4\Delta t)$ имеем

$$Z(0, 4\Delta t) = Z(L, 0).$$

Подставляя физические переменные, получим

$$v(0, 4\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(0, 4\Delta t) = v(L, 0) - \frac{1}{\rho a} p(L, 0);$$

$$v(0, 4\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p_0 = 0 - \frac{1}{\rho a} (p_0 + p_{ry}).$$

Отсюда найдем, что

$$v(0, 4\Delta t) = -\frac{1}{\rho a} p_{ry} = -\frac{1}{\rho a} \rho a v_0 = -v_0. \quad (7.38)$$

Этот результат показывает, в чем заключается “отражение” от резервуара возмущения потока в трубе, вызванного мгновенным закрытием задвижки, которое было описано в разд. 7.1 (см. рис. 7.2, а).

Следующие вычисления демонстрируют, как найти значения физических переменных v и p во внутренних точках физической плоскости (x, t) .

4. Точка $(\Delta x, 5\Delta t)$. Согласно уравнениям (7.28) значения функций Y и Z в этой точке можно приравнять известным значениям этих же функций в точках, лежащих на характеристических линиях, проходящих через рассматриваемую точку:

$$\left. \begin{aligned} Y(\Delta x, 5\Delta t) &= Y(0, 4\Delta t); \\ Z(\Delta x, 5\Delta t) &= Z(L, \Delta t); \\ v(\Delta x, 5\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= v(0, 4\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(0, 4\Delta t); \\ v(\Delta x, 5\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= v(L, \Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(L, \Delta t). \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Система уравнений (7.39) содержит два неизвестных значения скорости $v(\Delta x, 5\Delta t)$ и давления $p(\Delta x, 5\Delta t)$:

$$\begin{aligned} v(\Delta x, 5\Delta t) + \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= -v_0 + \frac{1}{\rho a} p_0; \\ v(\Delta x, 5\Delta t) - \frac{1}{\rho a} p(\Delta x, 5\Delta t) &= 0 - \frac{1}{\rho a} (p_0 + p_{ry}). \end{aligned}$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем:

$$\left. \begin{aligned} v(\Delta x, 5\Delta t) &= -v_0; \\ p(\Delta x, 5\Delta t) &= p_0. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

Подобные вычисления позволяют найти значения скорости жидкости и гидродинамического давления в любом сечении трубопровода в произвольный момент времени.

7.5. Волновая скорость

Приведенный выше анализ решения системы уравнений гидравлического удара (7.19) показывает, что все возмущения потока в трубопроводе распространяются вдоль него со скоростью a . Так, например, скорость жидкости в трубопроводе вблизи резервуара, удаленного от за-

движки на расстояние L , изменит свое значение в результате мгновенного закрытия задвижки через время $4\Delta t$; т. е. известие о закрытии задвижки распространяется со скоростью

$$\frac{L}{4\Delta t} = \frac{L}{4 \frac{\Delta x}{a}} = \frac{L}{4\Delta x} a = a.$$

При выводе системы уравнений гидравлического удара было получено выражение (7.12) для волновой скорости a :

$$a = \frac{\sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D E_{ж}}{\delta E_{тр}}}}.$$

Из этого выражения следует, что значение a зависит от упругих характеристик жидкости и трубопровода. Если стенки трубопровода абсолютно жесткие ($E_{тр} = \infty$), волновая скорость a становится равной

$$a_{ж} = \sqrt{\frac{E_{ж}}{\rho}}. \quad (7.41)$$

Таким образом, скорость распространения возмущений в трубопроводе с абсолютно жесткими стенками определяется только упругими свойствами жидкости и равна скорости звука в жидкой среде (см. гл. 15).

Как известно, скорость звука в воде имеет значение $a_{ж} = 1400$ м/с, что значительно превосходит значения скорости движения жидкости в трубопроводах, встречающиеся на практике. В стальных трубопроводах большого диаметра (турбинные водоводы ГЭС) $a = 900$ — 1100 м/с, в железобетонных $a = 600$ — 800 м/с.

Подставляя эти значения a в формулу (7.35) и полагая, что типичное значение средней скорости жидкости v в трубопроводе имеет порядок 1 м/с, получим, что давление у задвижки при *полном* гидравлическом ударе имеет порядок $p_{гв} \sim 10^6$ Па; оно в десятки раз превосходит атмосферное давление. Для предотвращения разрушения трубопровода под действием столь высокого давления следует закрывать задвижку постепенно, обеспечивая *неполный* гидравлический удар.

7.6. Постепенное закрытие задвижки

Пусть задвижка закрывается постепенно, так что у задвижки скорость жидкости линейно уменьшается за время t_z от значения v_0 до нуля. Так как уравнения гидравлического удара (7.19) линейны, рассматриваемое явление (распространения изменения скорости жидкости v и гидродинамического давления p вдоль трубопровода) можно представить как суперпозицию (наложение) последовательных (с интервалом Δt) малых, но мгновенных уменьшений скорости жидкости на значение Δv_0 . Каждое уменьшение при закрытии задвижки скорости жидкости на Δv_0 приводит к увеличению гидродинамического давления вблизи задвижки на $\Delta p_{гв} = \rho a \Delta v_0$. Другими словами, вместо действительного не-

прерывного изменения скорости жидкости при закрытии задвижки прием для расчета ступенчатое изменение скорости (рис. 7.6). Такое сочетание уменьшения скорости и увеличения давления распространяется от задвижки к резервуару, отражается от резервуара и далее перемещается в сторону задвижки и так далее, как было описано в разд. 7.1

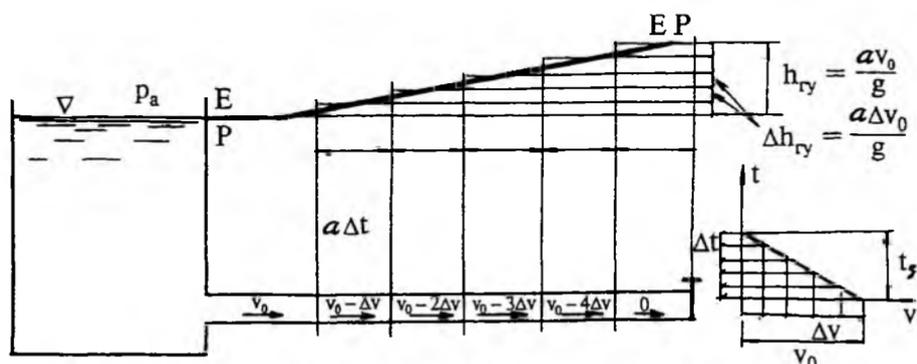


Рис. 7.6. Полный гидравлический удар при постепенном закрытии задвижки

для случая полного мгновенного закрытия задвижки. Через промежуток времени Δt , в течение которого действительная скорость жидкости у задвижки уменьшалась на Δv_0 , произойдет последующее расчетное мгновенное уменьшение скорости жидкости у задвижки на Δv_0 и последующее сочетание уменьшения скорости на Δv_0 и увеличения давления на $\Delta p_{гв} = \rho a \Delta v_0$ начинает распространяться от задвижки к резервуару, накладываясь на предыдущее возмущение и отставая от него на расстояние $a \Delta t$. В результате в момент времени $t < t_r = \frac{L}{a}$ в трубопроводе будет иметь место линейное распределение вдоль трубопровода скорости жидкости и гидродинамического давления (см. рис. 7.6).

Если задвижка закрывается достаточно быстро, так что $t_z < t_{2r} = 2L/a$, максимальное значение давления гидравлического удара у задвижки будет такое же, как и при полном гидравлическом ударе, который возникает в случае мгновенного закрытия. Действительно, элементарные увеличения давления $\Delta p_{гв} = \rho a \Delta v_0$, так же как уменьшения скорости жидкости Δv_0 у задвижки, суммируются, причем предшествующие возмущения (сочетания скорости и давления), которые ушли от задвижки, еще не успели (возможно, отразившись от резервуара) вернуться к задвижке и повлиять на происходящий там процесс. Следовательно, при $t_z < 2L/a$ имеем

$$p_{гв} = \sum \Delta p_{гв} = \sum \rho a \Delta v_0 = \rho a \sum \Delta v_0 = \rho a v_0. \quad (7.42)$$

Если задвижка закрывается так медленно, что $t_z > 2L/a$, сочетание уменьшения скорости жидкости Δv_0 и увеличения гидродинамического давления $\Delta p_{гв}$, отразившись от резервуара (изменение скорости жидкости Δv_0 при этом изменяет свой знак), начинает достигать задвижки и компенсировать дальнейшее уменьшение скорости. Скорость жидкости у задвижки начинает уменьшаться как бы не вследствие закрытия задвижки, а благодаря отражению от резервуара предшествующего элемен-

тарного возмущения, которое приносит отрицательную (после отражения) элементарную скорость жидкости ($-\Delta v_0$). При линейном во времени изменении скорости в результате закрытия задвижки эта отрицательная скорость вдвое превосходит уменьшение скорости, обусловленное закрытием задвижки. Таким образом получается, что скорость жидкости у задвижки уменьшается не только вследствие того, что она продолжает закрываться, а также вследствие прихода к задвижке отраженного значения скорости ($-\Delta v_0$). В результате гидродинамическое давление у задвижки начинает уменьшаться, так что давление у задвижки возрастает только в течение интервала $0 < t < 2L/a$ (рис. 7.7).

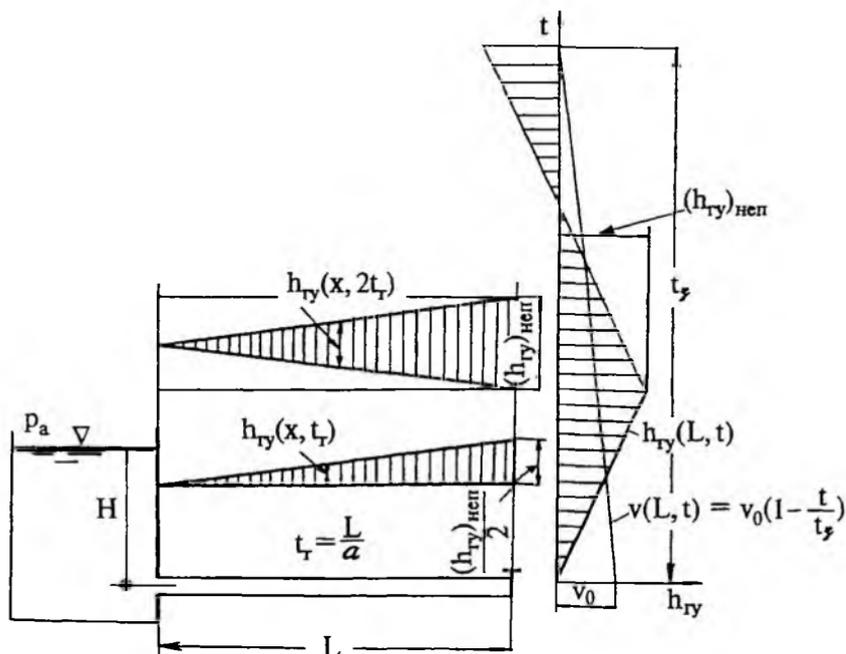


Рис. 7.7. Распределение давления по длине трубопровода при неполном гидравлическом ударе

В этом случае полная величина давления гидравлического удара ($p_{ry} = \rho a v_0$) не достигается и удар называется *неполным*.

Скорость жидкости у задвижки за время $t_{2r} = 2L/a$ уменьшится на величину

$$\frac{v_0}{t_f} t_{2r} = \frac{v_0 \cdot 2L}{a t_f},$$

а соответствующее увеличение гидродинамического давления, максимальное в рассматриваемом случае, равно

$$(p_{ry})_{\text{неп}} = \rho a \frac{v_0 \cdot 2L}{a t_f} = \frac{2\rho v_0 L}{t_f}. \quad (7.43)$$

Как следует из полученного результата, величина давления неполного гидравлического удара не зависит от a (в отличие от полного гидравлического удара), и для его уменьшения следует увеличивать время закрытия задвижки.

Приведенные выше результаты, естественно, могут быть получены на основе решения уравнения гидравлического удара (7.19) при соответствующих граничных условиях на линии $x = L$. При нелинейном изменении скорости в трубопроводе у задвижки при ее закрытии (или открытии) также целесообразно использовать решение системы дифференциальных уравнений гидравлического удара.

В случае, когда $t_T \ll t_p$, а скорость v_0 уменьшается со временем нелинейно, максимальное повышение гидродинамического давления у задвижки существенно зависит от dv_0/dt и может возникнуть не обязательно в начале процесса закрытия задвижки.

ГЛАВА 8

ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

8.1. Основные понятия

Рассмотрим установившееся истечение жидкости через круглое отверстие диаметром D в стенке резервуара (рис. 8.1). В плоскости отверстия движение резкоизменяющееся, но на небольшом расстоянии от этой плоскости, равном приблизительно $0,5D$, движение становится плавноизменяющимся. Ближайшее к плоскости отверстия поперечное сечение потока, в котором движение плавноизменяющееся, называется *сжатым сечением* и обозначается с—с. Сжатие называется совершенным, если струя формируется только под влиянием плоской стенки резервуара, в которой имеется отверстие. Для этого другие стенки резервуара должны быть удалены от кромок отверстия на расстояние $a \geq 3D$.

Отверстие называется *малым*, если: а) неравномерностью распределения скорости в сжатом сечении можно пренебречь (т.е., например, считать $u_A = u_B$ с точностью до 5%) и б) скорость движения жидкости в резервуаре пренебрежимо мала, так что скоростным напором, рассчитанным по средней скорости движения жидкости в резервуаре, можно пренебречь по сравнению со скоростным напором в сжатом сечении. Для выполнения первого условия достаточно, чтобы $D \sin \alpha < H/10$, а для выполнения второго — $\Omega > 4\omega$, где Ω — площадь сечения резервуара, ω — площадь отверстия.

Если к круглому отверстию присоединить трубу (рис. 8.2), то при достаточной длине трубы в ней будет иметь место напорное движение жидкости, так что выходное сечение трубы совпадет с поперечным сечением потока. Напорная труба, присоединенная к малому отверстию, в которой потерями напора по длине можно пренебречь по сравнению с местными потерями, называется *насадком*. Здесь обычно следует учитывать только местную потерю напора на вход в трубопровод. Насадки могут быть как цилиндрическими, так и коническими (сходящимися и расходящимися). Характерной особенностью насадков является наличие зоны пониженного давления (вакуума) в области сжатого сечения транзитной