

## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ (МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ)

### 10.1. Предварительные замечания

Неустановившееся движение в открытых руслах (реках, каналах и т.п.) обычно возникает в результате маневрирования затворами гидротехнических сооружений (ГЭС, шлюзов, водозаборов), включения и выключения насосных станций. Примерами неустановившегося движения в естественных условиях являются распространение приливных волн в устьях рек и эстуариях, паводки различного происхождения в реках и т.п.

Для упрощения исследования неустановившегося движения будем рассматривать одномерную модель плавноизменяющегося движения, т.е. полагать, что движение близко к параллельноструйному и в каждом поперечном сечении потока:

скорость жидкости постоянна и равна средней скорости потока;  
распределение давления подчиняется гидростатическому закону.

При этом неизвестными величинами являются глубина потока  $h$  и средняя скорость воды  $v$  в каждом поперечном сечении, которые являются функциями времени  $t$  и продольной (в направлении движения) геометрической координаты  $x$ :  $h = h(x, t)$ ;  $v = v(x, t)$ . Иногда вместо этих искомым величин вводят площадь поперечного сечения  $\omega(x, t)$  и расход воды  $Q(x, t)$ .

Для теоретического анализа и вычислений будут сделаны дополнительные упрощения. Плотность воды считаем постоянной (исключаем из рассмотрения стратифицированные течения жидкостей с различными плотностями), глубину потока малой по сравнению с горизонтальными размерами потока (его шириной). Уравнения, соответствующие принятым допущениям, называются уравнениями *мелкой воды*. Для максимального упрощения анализа рассматривается течение в широком прямоугольном призматическом канале с горизонтальным дном без учета сил трения. В реальных потоках это соответствует рассмотрению неустановившегося движения на фоне установившегося равномерного движения воды, когда силы трения о дно и стенки канала компенсируются вкладом в баланс сил проекции силы тяжести, обусловленной продольным уклоном канала.

### 10.2. Основные уравнения неустановившегося движения в открытых руслах

Выделим в потоке неизменный во времени контрольный объем  $\forall$  двумя поперечными сечениями, расположенными на бесконечно малом расстоянии  $\Delta x$  друг от друга (рис. 10.1); контрольная поверхность  $A$  состоит из двух поперечных сечений  $\omega_x$  и  $\omega_{x+\Delta x}$ , поверхности дна  $A_d$  и свободной поверхности  $A_0$ . Для выделенного объема запишем законы сохранения массы и изменения количества движения.

# 1. Закон сохранения массы

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_A \rho u_n dA = 0. \quad (10.1)$$

Так как контрольный объем не зависит от времени, а плотность воды в рассматриваемой модели постоянна, первое слагаемое в левой части

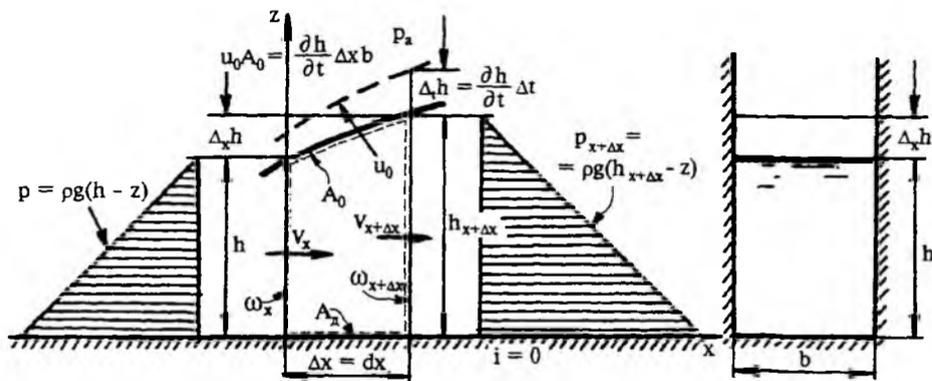


Рис. 10.1. Расчетная схема неустановившегося плавноизменяющегося движения уравнения (10.1) равно нулю. Сократив на  $\rho$  второе слагаемое, представим его в виде суммы

$$\int_{\omega_x} u_n dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} u_n dA + \int_{A_d} u_n dA + \int_{A_0} u_n dA = 0. \quad (10.2)$$

Нормальные составляющие скорости  $u_n$  равны

$$\left. \begin{array}{l} \text{на } A_x : u_n = -v_x; \quad \text{на } A_{x+\Delta x} : u_n = v_{x+\Delta x}; \\ \text{на } A_d : u_n = 0, \quad \text{на } A_0 : u_n = u_0, \end{array} \right\} \quad (10.3)$$

где  $u_0$  — скорость протекания воды через неподвижную поверхность  $A_0$ , являющуюся частью фиксированной контрольной поверхности  $A$ . Так как  $\Delta x$  величина малая, то в пределах  $A_0$  можно считать  $u_0$  постоянной. Кроме того, вследствие малости  $\Delta x$  имеем

$$v_{x+\Delta x} = v_x + \Delta_x v \approx v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \quad \text{и} \quad h_{x+\Delta x} = h_x + \Delta_x h \approx h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x.$$

Подставим (10.3) в (10.2) и получим

$$-v_x \int_{\omega_x} dA + \left( v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \int_{\omega_{x+\Delta x}} dA + u_0 \int_{A_0} dA = 0. \quad (10.4)$$

Из геометрических соображений найдем (рис. 10.1)

$$\omega_x = b h_x, \quad \omega_{x+\Delta x} = b \left( h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right), \quad u_0 A_0 = \frac{\partial h}{\partial t} b \Delta x, \quad (10.5)$$

где  $b$  — ширина канала. Подставляя (10.5) в (10.4), имеем

$$-v_x h_x b + \left( v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right) \left( h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b + \frac{\partial h}{\partial t} b \cdot \Delta x = 0.$$

Сохраняя слагаемые порядка  $\Delta x$  и сокращая на  $b \cdot \Delta x$ , получим первое из уравнений мелкой воды

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} = 0. \quad (10.6)$$

2. Закон изменения количества движения

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{u} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{f} d\mathcal{V} + \int_A \mathbf{p}_n dA. \quad (10.7)$$

Спроектируем все слагаемые этого уравнения на горизонтальную ось  $x$ , получим

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_x d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho f_x d\mathcal{V} + \int_A p_{nx} dA. \quad (10.8)$$

Рассмотрим последовательно все слагаемые, входящие в это уравнение, оставляя слагаемые порядка  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho u_x d\mathcal{V} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho u_x d\mathcal{V} + \int_A \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho v \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} \right) + \int_{\omega_x} \rho u_x u_n dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} \rho u_x u_n dA + \int_{A_E} \rho u_x u_n dA + \int_{A_0} \rho u_x u_n dA = \\ &= \frac{\partial \rho v}{\partial t} h b \Delta x - \rho v_x^2 \int_{\omega_x} dA + \rho \left( v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \int_{\omega_{x+\Delta x}} dA + \rho v \cdot u_0 \int_{A_0} dA = \\ &= \frac{\partial \rho v}{\partial t} h b \Delta x - \rho v_x^2 b h_x + \rho \left( v_x + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \right)^2 \left( h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right) b + \rho v \frac{\partial h}{\partial t} b \cdot \Delta x = \\ &= \left( \frac{\partial \rho v h}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2 h}{\partial x} \right) b \Delta x. \end{aligned} \quad (10.9)$$

При вычислении объемных интегралов значение скорости, среднее для объема  $\mathcal{V}$ , обозначалось через  $v$ , этой же буквой обозначена скорость под знаком производной;

б)  $\int_{\mathcal{V}} \rho f_x d\mathcal{V} = 0$ ; единственная рассматриваемая в настоящем случае объемная сила — сила тяжести — имеет нулевую проекцию на горизонтальную ось  $x$ ;

$$\text{в) } \int_A p_{nx} dA = \int_{\omega_x} p_{nx} dA + \int_{\omega_{x+\Delta x}} p_{nx} dA + \int_{A_0} p_{nx} dA + \int_{A_D} p_{nx} dA. \quad (10.10)$$

Проекция напряжения  $\mathbf{p}_n$  на горизонтальную ось  $x$  равны:

на  $\omega_x$ :  $P_{nx} = -P_{xx} = P_x$  — гидродинамическое давление в сечении  $\omega_x$ ;  
 $P_x = p_a + \rho g(h_x - z)$ ;

на  $\omega_{x+\Delta x}$ :  $P_{nx} = P_{xx} = -P_{x+\Delta x}$  — гидродинамическое давление в сечении  $\omega_{x+\Delta x}$ ;

$$P_{x+\Delta x} = p_a + \rho g(h_{x+\Delta x} - z);$$

на  $A_0$  действует атмосферное давление  $p_a$ ; вкладом атмосферного давления в баланс сил пренебрегаем, т.е. здесь и далее полагаем  $p_a = 0$ ;

на  $A_d$ :  $p_{nx}$  — касательные вязкие напряжения на поверхности дна, противодействующие движению жидкости; вкладом вязких напряжений пренебрегаем (см. п. 10.1).

Представив элементарную площадку  $dA$  как произведение  $b \cdot dz$  и используя полученные в пунктах а), б) и в) результаты, продолжим равенство (10.10):

$$\begin{aligned} \int_A p_{nx} dA &= \int_0^{h_x} \rho g (h_x - z) b dz - \int_0^{h_{x+\Delta x}} \rho g (h_{x+\Delta x} - z) b dz = \\ &= \rho g h_x^2 b - \rho g \frac{h_x^2}{2} b - \rho g h_{x+\Delta x}^2 b + \rho g \frac{h_{x+\Delta x}^2}{2} b = \\ &= \frac{1}{2} \rho g h_x^2 b - \frac{1}{2} \rho g \left( h_x + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x \right)^2 b = \rho g h_x \frac{\partial h}{\partial x} b \cdot \Delta x. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Подставляя (10.9), (10.10) в (10.8), сократим на  $\rho b \cdot \Delta x$  и получим второе уравнение

$$\frac{\partial v h}{\partial t} + \frac{\partial v^2 h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (10.12)$$

или

$$\frac{\partial v h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( v^2 h + \frac{g h^2}{2} \right) = 0. \quad (10.13)$$

Система двух дифференциальных уравнений неустановившегося движения в открытых руслах (их называют также уравнениями мелкой воды или уравнениями Сен-Венана) в виде (10.6) и (10.13) является дивергентной или консервативной формой этих уравнений. Такая форма эффективна при численном решении этих уравнений, так как при использовании конечно-разностного представления производных обеспечивается выполнение законов сохранения массы и импульса, которые эти дифференциальные уравнения выражают.

Для теоретического анализа предпочтительнее конвергентная (неконсервативная или Эйлера) форма этих уравнений. Для ее получения перепишем (10.13) в виде

$$v \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial t} + v h \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

или

$$v \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} \right) + h \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0.$$

Выражение в первых скобках равно нулю согласно (10.6). В результате система уравнений (10.6) и (10.13) может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Эта система уравнений обычно называется неконсервативной или Эйлеровой формой уравнений мелкой воды.

В более общем случае прямолинейного, но нецилиндрического канала произвольного поперечного сечения с продольным уклоном дна канала  $i \neq 0$  система уравнений неустановившегося движения имеет вид (без вывода)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial v \omega}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \rho v \omega}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2 \omega}{\partial x} &= \rho g \omega_i - \omega \frac{\partial p_a}{\partial x} - \tau_d \cdot \chi + \tau_0 B + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (p_{xx}^b + p_{xx}^t) \omega \right] - \rho g \omega \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

где  $\omega = \omega(x, t)$  — поперечное сечение потока воды;  $\tau_d(x, t)$  — продольные (в направлении течения) донные касательные напряжения, осредненные по смоченному периметру  $\chi$ ;  $\tau_0 = \tau_0(x, t)$  — продольная составляющая касательных напряжений на свободной поверхности, обусловленных ветром;  $B = B(x, t)$  — ширина потока на уровне свободной поверхности;  $p_{xx}^b$  и  $p_{xx}^t$  — нормальные вязкие и турбулентные напряжения, осредненные по поперечному сечению потока. Все величины (кроме искомых  $\omega$  и  $v$ ) должны быть заданы для всех поперечных сечений, включая зависимости  $\omega = \omega(h)$  и  $B = B(h)$ .

Решение системы (10.15) имеет те же характерные особенности, что и решение системы (10.14), анализ которого приведен ниже.

### 10.3. Упрощения и анализ уравнений мелкой воды

Для упрощения анализа системы уравнений мелкой воды (10.14), во-первых, исключим из них так называемые конвективные слагаемые

$v \frac{\partial v}{\partial x}$  и  $v \frac{\partial h}{\partial x}$ , которые обычно пренебрежимо малы по сравнению с оставшимися слагаемыми. Во-вторых, линейризуем эти уравнения, предполагая, что при неустановившемся движении отклонение свободной поверхности от некоторой не зависящей от времени горизонтальной поверхности, отвечающей глубине  $h_0$ , значительно меньше, чем глубина  $h_0$  или  $h$  (рис. 10.2). Другими словами, если глубину  $h(x, t)$  представить в виде

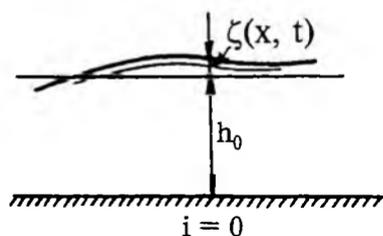


Рис. 10.2. Возмущение свободной поверхности

$$h(x, t) = h_0 + \zeta(x, t), \quad (10.16)$$

то возмущение свободной поверхности  $\zeta(x, t)$  значительно меньше, чем глубина равномерного невозмущенного движения  $h_0$ . Таким образом, имеем

$$\zeta \ll h_0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (10.17)$$

В результате представим систему уравнений (10.14) в линеаризованном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

Полученная система (10.18) аналогична системе уравнений гидравлического удара (7.19). Поэтому для анализа этой системы воспользуемся приемом, описанным в разд. 7.4. Преобразуем систему векторных волновых уравнений в систему скалярных уравнений, введя новые искоемые функции:

$$Y(x, t) = v(x, t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(x, t); \quad Z(x, t) = v(x, t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(x, t). \quad (10.19)$$

Подставим (10.19) в (10.18) и после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial Z}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

Чтобы продемонстрировать основные свойства решения системы уравнений (10.18) и (10.20), рассмотрим неустановившееся движение в горизонтальном прямоугольном канале шириной  $b$  и длиной  $L$  (рис. 10.3); с правой стороны при  $x = L$  канал ограничен непроницаемой стенкой. В начальный момент времени  $t = 0$  вода в канале покоит-

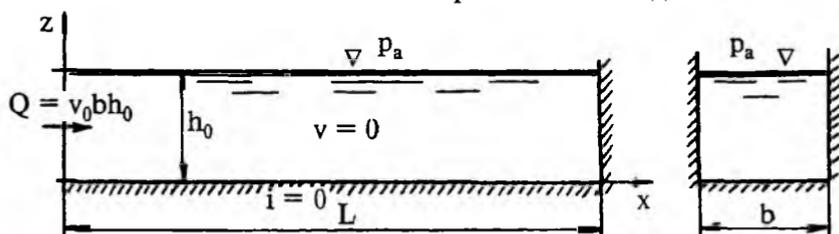


Рис. 10.3. Начальные условия движения воды в каналах

ся, свободная поверхность горизонтальна, а глубина воды постоянна вдоль канала и равна  $h_0$ . Неустановившееся движение возникает вследствие того, что через крайнее левое поперечное сечение канала (при  $x = 0$ ) начинает поступать неизменный во времени расход  $Q$ . Сформулируем начальные и граничные условия для системы (10.18).

Начальные условия:

$$v(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \zeta(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (10.21)$$

Граничные условия:

$$v(x, t)|_{x=L} = 0; \quad v(x, t)|_{x=0} = \frac{Q}{bh_0} = v_0. \quad (10.22)$$

Разделим длину канала  $L$  на две равные части  $\Delta x = L/2$ . Уравнения характеристических линий системы (10.18) имеют вид

$$x = \sqrt{gh_0} t + x_0, \quad (10.23)$$

$$x = -\sqrt{gh_0} t + x_0. \quad (10.24)$$

Шаг по времени примем равным  $\Delta t = \Delta x / \sqrt{gh_0}$ . Согласно уравнениям (10.20) функции  $Y$  и  $Z$  постоянны вдоль характеристических линий (10.23) и (10.24) соответственно. Покажем, как, основываясь на этом, можно вычислить физические величины — скорость воды  $v$  и изменение глубины  $\zeta$  — в любой точке плоскости  $(x, t)$  на рис. 10.4.

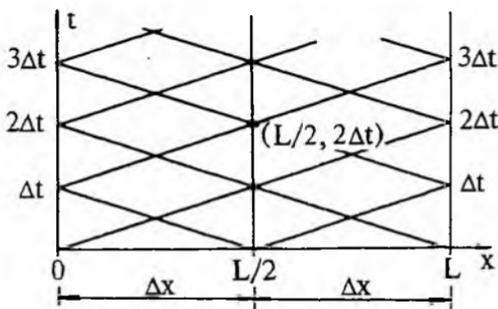


Рис. 10.4. Сетка характеристик уравнений (10.20)

1. В точке  $(0, \Delta t)$  значение  $Z$  равно значению этой же функции в точке  $(L/2, 0)$ , так как

$$Z(0, \Delta t) = Z(L/2, 0). \quad (10.25)$$

Подставим в (10.25) выражение  $Z$  через физические величины согласно (10.19):

$$v(0, \Delta t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = v(L/2, 0) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L/2, 0);$$

используем начальные и граничные условия:

$$v_0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = 0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0$$

и получим

$$\zeta(0, \Delta t) = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (10.26)$$

2. В точке  $(0, 2\Delta t)$ , так же как в предыдущей точке, имеем

$$\zeta(0, 2\Delta t) = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}. \quad (10.27)$$

3. В точке  $(L, \Delta t)$  можно использовать постоянство функции  $Y$  вдоль характеристической линии  $x = \sqrt{gh_0} t + L/2$ :

$$Y(L, \Delta t) = Y(L/2, 0) \text{ или}$$

$$v(L, \Delta t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = v(L/2, 0) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L/2, 0).$$

Используем начальные и граничные условия:

$$0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = 0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0,$$

получим

$$\zeta(L, \Delta t) = 0. \quad (10.28)$$

4. В точке  $(L/2, 2\Delta t)$  имеем два уравнения

$$Y(L/2, 2\Delta t) = Y(0, \Delta t) = v(0, \Delta t) + \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(0, \Delta t) = v_0 + \sqrt{\frac{g}{h_0}} v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} = 2v_0;$$

$$Z(L/2, 2\Delta t) = Z(L, \Delta t) = v(L, \Delta t) - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \zeta(L, \Delta t) = 0 - \sqrt{\frac{g}{h_0}} \cdot 0 = 0.$$

Согласно (10.19) найдем

$$v(L/2, 2\Delta t) = \frac{Y(L/2, 2\Delta t) + Z(L/2, 2\Delta t)}{2} = \frac{2v_0 + 0}{2} = v_0;$$

$$\zeta(L/2, 2\Delta t) = \sqrt{\frac{h_0}{g}} \frac{Y(L/2, 2\Delta t) - Z(L/2, 2\Delta t)}{2} = \sqrt{\frac{h_0}{g}} \frac{2v_0 - 0}{2} = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Выполнив подобные вычисления в подходящих точках плоскости  $(x, t)$ , можно построить зависимости  $\zeta = \zeta(0, t)$ ,  $v = v(L/2, t)$ ,  $\zeta(L, t)$  для последующего анализа. Очевидно, что можно использовать и более мелкие шаги по времени и пространству (сохраняя соотношение между ними  $\Delta x = \Delta t \sqrt{gh_0}$ ), причем, чем меньше  $\Delta x$  и  $\Delta t$ , тем более точную и полную информацию о потоке можно получить. Поэтому на рис. 10.5 указанные выше зависимости, полученные из точного реше-

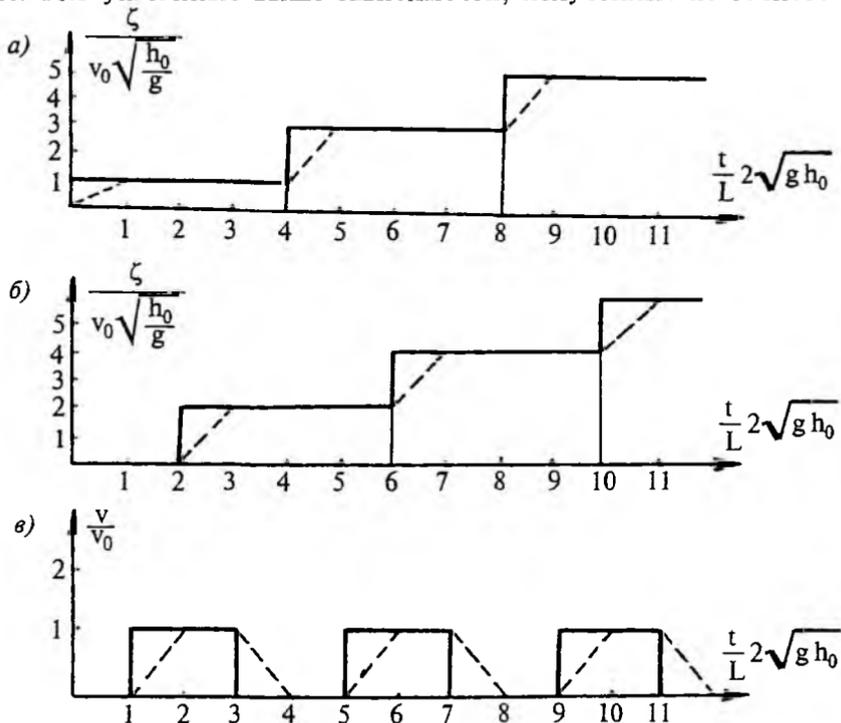


Рис. 10.5. Результаты решения уравнений (10.18): а — уровень свободной поверхности в сечении  $x = 0$ ; б — то же в сечении  $x = L$ ; в — скорости потока в сечении  $x = L/2$

ния системы уравнений (10.18) при бесконечно малых  $\Delta x$  и  $\Delta t$ , показаны сплошной линией, а результаты, полученные при принятых нами  $\Delta x = L/2$  и  $\Delta t = L / (2\sqrt{gh_0})$ , показаны штриховой линией. Для последующего анализа следует отметить, что при неустановившемся движении в открытых руслах величина  $\sqrt{gh_0}$  играет ту же самую роль волновой скорости (скорости распространения возмущений вдоль потока), какую при описании гидравлического удара (неустановившегося движения в напорных трубопроводах) играет величина  $a$  (см. гл. 7). Это следует как из сравнения систем уравнений (10.19) и (7.19), так и из уравнений характеристических линий для (10.23), (10.24) и (7.31), и означает, что скорость  $c$  перемещения вдоль потока в открытом русле любых малых возмущений свободной поверхности равна

$$c = \sqrt{gh_0}. \quad (10.29)$$

Это известная формула Лагранжа для скорости перемещения гравитационных волн малой амплитуды в мелководных водоемах (в открытых руслах с конечной глубиной  $h_0$  и с нулевой скоростью жидкости). Для определения волновой скорости относительно неподвижной (связанной с дном канала) системы координат в точке с ненулевой скоростью движения воды  $v \neq 0$  следует наложить скорость  $c$  на скорость  $v$ . Отметим дополнительно, что в отличие от скорости  $a$  распространения возмущений в трубопроводе, которая много больше скорости потока  $v$ , значение  $\sqrt{gh_0}$  обычно имеет такой же порядок, что и скорость воды в открытом канале.

Результаты расчета, приведенные выше и представленные на рис. 10.5, позволяют описать явления, происходящие в канале при  $t > 0$ . В тот момент, когда расход  $Q$  начинает поступать в канал через входное сечение  $x = 0$  и скорость воды в этом сечении становится равной  $v_0 = Q/bh_0$ , отметка свободной поверхности в этом же сечении мгновенно возрастает на величину  $\zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ . Это возмущение  $\left( v = v_0, \zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)$  распространяется в направлении оси  $x$  со скоростью  $c = \sqrt{gh_0}$ , причем во входном сечении скорость воды и отметка свободной поверхности остаются неизменными и равными  $v_0$  и  $\zeta = v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$  соответственно. В момент  $0 < t < L/\sqrt{gh_0}$  картина течения представлена на рис. 10.6,а.

В момент  $t = L/\sqrt{gh_0}$  фронт возмущения достигает непроницаемой стенки в конце канала ( $x = L$ ) и, так как на этой стенке скорость  $v(L, t) = 0$  при всех  $t$ , частицы воды,двигающиеся со скоростью  $v_0$ , набегают на эту стенку, в результате отметка свободной поверхности у стенки возрастает и достигает значения  $h_0 + 2v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}}$ , в то время как скорость воды уменьшается до нуля. Возникшее у стенки сочетание  $\left( v = 0, \zeta = 2v_0 \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)$  перемещается в направлении, противоположном оси  $x$ , и в момент  $L/\sqrt{gh_0} < t < 2L/\sqrt{gh_0}$  имеет место картина течения, представленная на рис. 10.6,б.

В момент  $t = 2L/\sqrt{gh_0}$  фронт возмущения, возникшего у непроницаемой стенки, достигает входного сечения канала ( $x = 0$ ) и здесь накладывается на расход  $Q$ , который продолжает поступать в канал все время

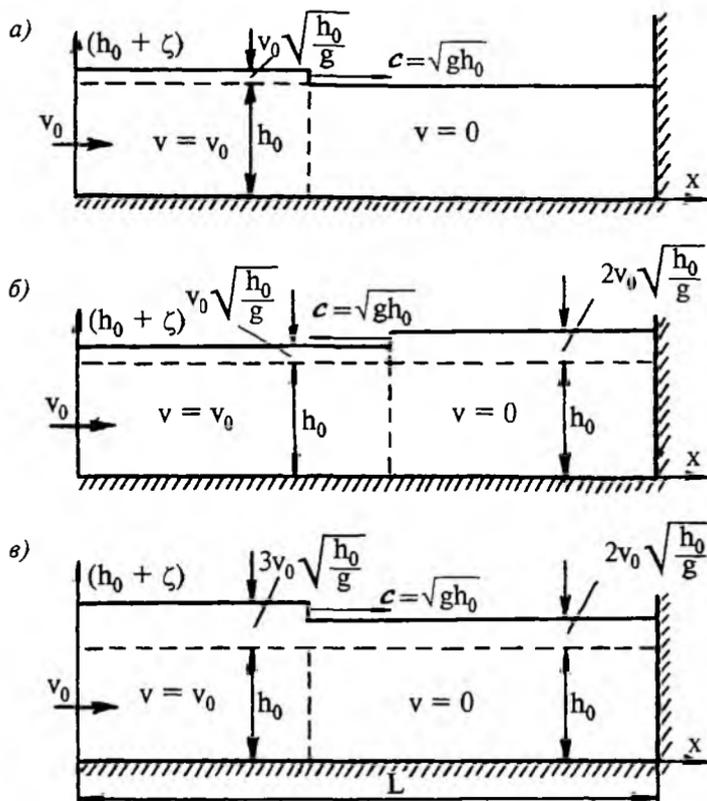


Рис. 10.6. Расчетные положения свободной поверхности и скорость воды в канале в различные моменты времени:

$$a - 0 < t < L/\sqrt{gh_0}; \quad б - L/\sqrt{gh_0} < t < 2L/\sqrt{gh_0};$$

$$в - 2L/\sqrt{gh_0} < t < 3L/\sqrt{gh_0}$$

$t > 0$ . К этому моменту скорость воды во всем канале равна нулю, а глубина воды постоянна вдоль канала и равна  $\left(h_0 + 2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)$ . Так как было принято, что все возмущения свободной поверхности малы по сравнению с  $h_0$ , то условия в канале при  $t = 2L/\sqrt{gh_0}$  можно считать приблизительно такими же, как и при  $t = 0$ . Следовательно, так как расход  $Q$  продолжает поступать в канал, отметка воды в начальном сечении возрастает до значения  $h_0 + 3v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}$  и новое сочетание  $\left(v = v_0, \zeta = 3v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)$  начинает распространяться в направлении оси  $x$ , причем скорость распространения может быть принята  $\sqrt{gh_0}$ , так как  $h_0 + 2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}} \approx h_0$ .

В момент  $2L/\sqrt{gh_0} < t < 3L/\sqrt{gh_0}$  картина течения имеет вид, представленный на рис. 10.6,в. Далее процесс развивается аналогично предыдущему.

Легко проверить баланс объемов воды в рассматриваемом процессе. Например, к моменту  $t = 2L/\sqrt{gh_0}$  объем воды в канале возрастает на величину  $Lb2v_0\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ ; к этому же моменту в канал через входное сечение поступит объем  $Q2L/\sqrt{gh_0} = v_0bh_02L/\sqrt{gh_0} = 2v_0Lb\sqrt{\frac{h_0}{g}}$ .

#### 10.4. Классификация длинных волн в каналах

Возмущения свободной поверхности, которые описываются с помощью теории мелкой воды (т.е. уравнений Сен-Венана), называются *длинными* волнами. При наложении длинных волн на равномерное течение в канале со скоростью  $v$  и нормальной глубиной  $h_0$  весьма важным представляется соотношение скорости течения  $v$  и скорости перемещения фронта длинной волны  $c = \sqrt{gh_0}$ . Если  $c > v$  или

$$\frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gh_0}} < 1, \quad (10.30)$$

то длинная волна может распространяться и вверх и вниз по течению от места своего образования. Согласно (10.30) в этом случае  $\frac{v^2}{gh_0} = Fg < 1$ , т.е. поток *спокойный* (см. п. 9.1). В *бурных* потоках (если глубина потока меньше

критической или  $Fg = \frac{v^2}{gh_0} > 1$ ), скорость потока  $v > c$  и фронт длинной волны сносится вниз по течению потоком воды в канале. Поэтому в дальнейшем рассмотрим распространение длинных волн в спокойных равномерных потоках. Если в результате распространения длинной волны глубина потока увеличивается (как в п. 10.3), то такая волна называется *положительной*, в противном случае — *отрицательной*. Если фронт волны распространяется вниз по течению, то скорость его  $\sqrt{gh_0}$  суммируется со скоростью потока  $v$ , такая волна называется *нисходящей*. Если фронт волны распространяется вверх по течению, то его скорость равна  $(\sqrt{gh_0} - v)$ , а волна называется *восходящей*.

В разд. 10.3 было рассмотрено перемещение фронта длинной волны в предположении, что ее высота пренебрежимо мала по сравнению с глубиной воды в канале  $h_0$ . При этом очертание фронта волны не имело существенного значения и было обозначено вертикальным отрезком. В реальных условиях высота длинной волны  $h_b$  конечна и соизмерима с глубиной  $h_0$ , и поэтому очертание фронта волны может представлять практический интерес.

Движение воды вблизи фронта резкоизменяющееся, и уравнения мелкой воды (10.14) непригодны для описания формы свободной поверхности в этой области. Поэтому приведем качественное обоснование формы фронта волны.

Пусть в момент времени  $t$  фронт *положительной* волны имеет вид отрезка прямой  $A_1B_1$  (рис. 10.7,а). Представим волну конечной высоты  $h_b$  как наложение (суперпозицию) элементарных волн малой высоты  $\Delta h$ . Скорость перемещения нижней элементарной волны  $c_A$  согласно

формуле Лагранжа (10.29) определяется глубиной  $h_0$ , а скорость верхней элементарной волны  $c_B$  — глубиной  $(h_0 + h_B)$ ; при этом

$$c_B = \sqrt{g(h_0 + h_B)} > \sqrt{gh_0} = c_A. \quad (10.31)$$

В результате фронт положительной волны при ее перемещении становится более крутым, и в момент  $t_2$  он будет представлен отрезком  $A_2B_2$ .

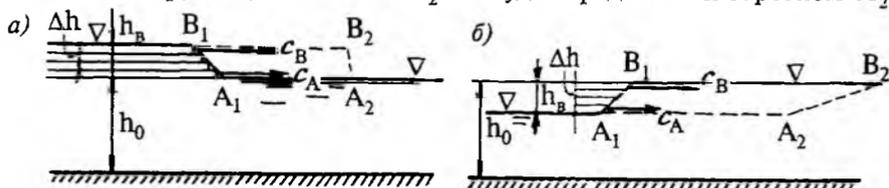


Рис. 10.7. Формирование фронта положительной и отрицательной волн

В случае *отрицательной волны* (рис. 10.7,б), проведя аналогичные рассуждения, имеем

$$c_B = \sqrt{gh_0} > \sqrt{g(h_0 - h_B)} = c_A. \quad (10.32)$$

В результате фронт отрицательной волны при ее перемещении становится более пологим.

Если уполаживание фронта отрицательной волны не приводит к качественным изменениям картины течения, то увеличение крутизны фронта положительной волны приводит к обрушению фронта и образованию вальца, который называют *бором*; при этом фронт волны похож на перемещающийся гидравлический прыжок (см. гл. 11).

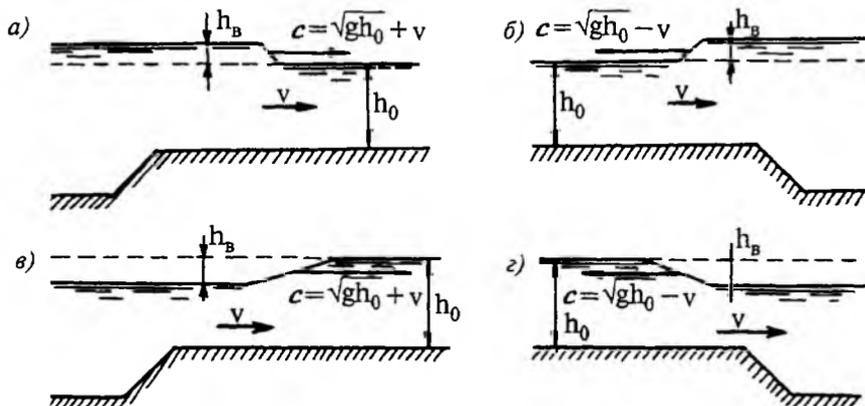


Рис. 10.8. Классификация длинных волн: а — волна наполнения; б — волна подпора; в — волна отлива, г — волна излива

В заключение приведем наименования длинных волн на примере канала, соединяющего два водохранилища (рис. 10.8), сведенные в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Наименования длинных волн

№ п/п	Характеристика волн	Наименование волн	Позиции рис. 10.8
1	Положительная нисходящая	Наполнения	а
2	Положительная восходящая	Подпора	б
3	Отрицательная нисходящая	Отлива	в
4	Отрицательная восходящая	Излива	г